UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

TREILLIS ENVELOPPANT DES FONCTIONS PARTIELLES INJECTIVES

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR

MARC FORTIN

JUIN 2007

REMERCIEMENTS

Je remercie mon directeur Christophe Reutenauer pour m'avoir suggéré un domaine de recherche intéressant et pour m'avoir donné des idées de base prometteuses.

Je dédie mon travail à mon père et à mon fils.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

RÉSUMÉ

Les fonctions partielles injectives de $[n]$ vers $[n]$ forment un ensemble partiellement ordonné (epo). Cet epo est isomorphe avec un ensemble de matrices sur lequel on retrouve l'ordre usuel. Dans ce travail, on construit le plus petit treillis qui contient cet epo. Ce treillis est en bijection avec l'ensemble des matrices alternantes. Les éléments basiques et les éléments clivants de ce treillis sont les mêmes et sont les fonctions croissantes dont le domaine et l'image sont des intervalles. Plusieurs autres epo et treillis isomorphes à ceux-ci sont également étudiés.

Mots clés : Treillis, base, clivant, rectrice, clé, matrice.

INTRODUCTION

Ce travail porte sur les fonctions partielles injectives. Un ordre sur ces fonctions est défini (Renner, 2005), ordre qui généralise l'ordre de Bruhat qu'on retrouve sur les fonctions bijectives. On obtient ainsi l'ensemble partiellement ordonné (epo) P_n des fonctions partielles injectives. Ce n'est pas un treillis. L'objet principal de ce travail est de construire le plus petit treillis qui contient P_n comme sous-epo.

Le premier chapitre donne les fondements théoriques qui permettent de construire pour un epo P donné, le plus petit treillis, qu'on appellera le treillis enveloppant de P, qui contient P comme sous-epo. L'intérêt de ce chapitre se trouve non dans la nouveauté du sujet, mais dans le fait que les notions de treillis enveloppant, de base, de clivage, de rectrice, ... sont rassemblées ; elles sont présentées, définies et les résultats qu'on peut en déduire sont tous démontrés.

Les fonctions partielles injectives peuvent être codées par des matrices ou par ce qu'on appellera des Clés. Le deuxième chapitre présente ces matrices qu'on appelle des matrices de rang. On aura alors l'epo des matrices de rang et on trouvera le treillis enveloppant des matrices de rang. On verra qu'un sous-epo du treillis enveloppant est en bijection avec les matrices à signe alternant.

Le troisième chapitre présente P_n, l'epo des fonctions partielles injectives. On montre dans ce chapitre, que cet epo est isomorphe à l'epo des matrices de rang. On a alors la base de P_n, puisque la base des matrices de rang a été trouvée au chapitre deux. De même on trouve facilement les rectrices d'une fonction en trouvant les rectrices de la matrice de rang qui lui est associée.

Dans le quatrième chapitre, on présente l'epo des Clés. Une Clé, pour présenter rapidement la notion, est une clé, notion déjà connue, dans laquelle il peut y avoir des zéros sous les nombres positifs. On montrera que l'epo des Clés est isomorphe à l'epo des fonctions partielles injectives. On a ainsi que le treillis enveloppant des matrices de rang est isomorphe au treillis enveloppant des Clés. On pourra passer d'une matrice à la Clé qui lui est associée en passant des rectrices (ou des corectrices) de la matrice aux rectrices (ou corectrices) de la Clé.

Dans le dernier chapitre, on montre comment trouver la base et la cobase des fonctions partielles injectives non pas cette fois en utilisant le fait que l'epo des matrices de rang est isomorphe à P_n, mais en étudiant la matrice de rang associée à une fonction. De plus, on termine ce chapitre en montrant d'une autre façon que le treillis enveloppant des matrices de rang est isomorphe au treillis enveloppant des Clés : on utilise le fait que ces deux treillis sont en bijection avec les matrices alternantes. La notion de matrice alternante généralise celle de matrice à signe alternant.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS FINIS

Dans ce chapitre, on traite d'ensembles partiellement ordonnés *finis* P pour lesquels il existe un élément noté 0 tel que : $\forall x \in P,\ x \geq 0$; et un élément noté 1 tel que : $\forall x \in P,\ x \leq 1$.

1.1 Construction d'un treillis

Le but de cette section est de construire pour un ensemble partiellement ordonné (epo) fini P deux treillis $L_-(P)$ et $L_+(P)$, qui sont en fait isomorphes, et pour lesquels P est un sous-epo. La construction de $L_-(P)$ se retrouve dans (Birkhoff, 1995).

Un *majorant* de $X \subseteq P$ est un élément $z \in P$ tel que $z \geq x\ \forall x \in X$. Le *supremum* de X (le *sup* de X) est un majorant z de X tel que pour tout majorant w de X, on a $w \geq z$. Si le supremun de X existe, il est alors unique et on le note $\vee X$; si $X = \{x, y\}$, on note $\vee X = x \vee y$. D'une manière duale, on définit l'*infimum* de X (l'*inf* de X) et on le note, lorsqu'il existe, $\wedge X$; si $X = \{x, y\}$, on note $\wedge X = x \wedge y$. On rappelle qu'un *treillis* T est un epo tel que $\forall x, y \in T,\ x \vee y$ et $x \wedge y$ existent.

On a : $\vee\emptyset = 0 = \wedge P$ et $\wedge\emptyset = 1 = \vee P$.

Puisque P est fini, on a : $\forall x, y \in P,\ x \vee y$ existe $\Leftrightarrow \forall X \subseteq P,\ \vee X$ existe ; et dualement : $\forall x, y \in P,\ x \wedge y$ existe $\Leftrightarrow \forall X \subseteq P,\ \wedge X$ existe.

Soit f une fonction d'un epo P vers un epo Q ; f *préserve l'ordre* si $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$; f est un *morphisme d'epo* si $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$. Notons qu'un morphisme d'epo est injectif.

Soit f une fonction d'un treillis R vers un treillis S ; f est un *morphisme de treillis* si $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ et si $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$. Notons qu'un morphisme de treillis est un morphisme d'epo.

Lemme 1.1.1 *Soit f un morphisme surjectif d'epo d'un treillis R vers un treillis S ; alors f est un isomorphisme de treillis.*

Preuve : Puisque f est un morphisme d'epo, f est injective, et donc bijective. $\forall r, x, y \in R$, on a : $f(r) \geq f(x) \vee f(y) \Leftrightarrow f(r) \geq f(x)$ et $f(r) \geq f(y) \Leftrightarrow r \geq x$ et $r \geq y \Leftrightarrow r \geq x \vee y \Leftrightarrow f(r) \geq f(x \vee y)$. Comme f est surjective, on en déduit $f(x) \vee f(y) = f(x \vee y)$. On montre d'une manière semblable : $f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y)$. Donc f est un isomorphisme de treillis. $\square$

Q est un *sous-epo* de P si 1) Q est un sous-ensemble de P et 2) $x \leq_Q y \Leftrightarrow x \leq_P y$.

Soit $X \subseteq P$; on définit : $X^- = \{y \in P \mid \forall x \in X,\ y \geq x\}$ et $X^+ = \{y \in P \mid \forall x \in X,\ y \leq x\}$; autrement dit, X^- est l'ensemble des majorants de X et X^+ est l'ensemble des minorants de X dans P. $X^{-+} = \{z \in P \mid \forall y \in X^-,\ z \leq y\}$ est l'ensemble des minorants de l'ensemble des majorants de X ; $X^{+-} = \{z \in P \mid \forall y \in X^+,\ z \geq y\}$ est l'ensemble des majorants de l'ensemble des minorants de X.

Voici quelques résultats simples sur ces ensembles :

(1) $X \subseteq Y \Rightarrow X^- \supseteq Y^-$. En effet : $z \in Y^- \Rightarrow \forall y \in Y, z \geq y \Rightarrow \forall x \in X,\ z \geq x \Rightarrow z \in X^-$.

(1') $X \subseteq Y \Rightarrow X^+ \supseteq Y^+$.

(2) $X \subseteq Y \Rightarrow X^{-+} \subseteq Y^{-+}$.

(2') $X \subseteq Y \Rightarrow X^{+-} \subseteq Y^{+-}$.

(3) $X \subseteq X^{-+}$. En effet : $x \in X \Rightarrow \forall y \in X^-,\ y \geq x \Rightarrow x \in X^{-+}$.

(3') $X \subseteq X^{+-}$.

(4) $X^{-+-} = X^-$. En effet : par (3), $X \subseteq X^{-+} \Rightarrow$ par (1) $X^- \supseteq X^{-+-}$; et par (3'), $X^- \subseteq X^{-+-}$.

(4') $X^{+-+} = X^+$.

(5) $x^{-+} = x^+$, où $x^- = \{x\}^-$ et $x^+ = \{x\}^+$. En effet : $x^- = \{y \in P \mid y \geq x\} \Rightarrow x^{-+} = \{z \in P \mid \forall y \in x^-, z \leq y\} = \{z \in P \mid z \leq x\} = x^+$.

(5') $x^{+-} = x^-$.

On définit $L_-(P) = \{X \subseteq P \mid X^{-+} = X\}$ avec la relation : $X \leq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$. Et on définit $L_+(P) = \{X \subseteq P \mid X^{+-} = X\}$ avec la relation : $X \leq Y \Leftrightarrow X \supseteq Y$.

Lemme 1.1.2 *$L_-(P)$ est fermé sous l'intersection ; en fait on a même $X, Y \in L_-(P) \Rightarrow (X \cap Y)^{-+} = X \cap Y$.*

Preuve : $X \cap Y \subseteq X$ et $X \cap Y \subseteq Y \Rightarrow$ par (2) $(X \cap Y)^{-+} \subseteq X^{-+} = X$ et $(X \cap Y)^{-+} \subseteq Y^{-+} = Y \Rightarrow (X \cap Y)^{-+} \subseteq X \cap Y$; et par (3) $X \cap Y \subseteq (X \cap Y)^{-+}$. □

Théorème 1.1.3 *$L_-(P)$ est un treillis avec : $X \wedge Y = X \cap Y$ et $X \vee Y = (X \cup Y)^{-+}$.*

Preuve : $X \wedge Y =$ (par le lemme 1.1.2) $X \cap Y$. De plus $X \vee Y = (X \cup Y)^{-+}$ puisque : par (4) $(X \cup Y)^- = (X \cup Y)^{-+-} \Rightarrow (X \cup Y)^{-+} = (X \cup Y)^{-+-+} \Rightarrow (X \cup Y)^{-+} \in L_-(P)$; $X, Y \subseteq X \cup Y \Rightarrow$ par (3) $X, Y \subseteq (X \cup Y)^{-+}$; $X, Y \subseteq T \in L_-(P) \Rightarrow X \cup Y \subseteq T \Rightarrow$ par (2) $(X \cup Y)^{-+} \subseteq T^{-+} = T$. □

Lemme 1.1.4 *$L_+(P)$ est fermé sous l'intersection ; en fait on a même $X, Y \in L_+(P) \Rightarrow (X \cap Y)^{+-} = X \cap Y$.*

Théorème 1.1.5 *$L_+(P)$ est un treillis avec : $X \vee Y = X \cap Y$ et $X \wedge Y = (X \cup Y)^{+-}$.*

On définit : $\phi_- : P \to L_-(P),\ x \mapsto x^+$ et $\phi_+ : P \to L_+(P),\ x \mapsto x^-$. Ces fonctions sont bien définies, puisque par (4'), $x^{+-+} = x^+ \in L_-(P)$ et par (4), $x^{-+-} = x^- \in L_+(P)$.

Théorème 1.1.6 *ϕ_- est un morphisme d'epo qui préserve, s'ils existent dans P, les inf et les sup.*

Preuve : ϕ_- est un morphisme d'epo parce que $x \leq_P y \Leftrightarrow x^+ \subseteq y^+ \Leftrightarrow x^+ \leq_{L_-(P)} y^+$.

Montrons que si $x \wedge y$ existe dans P, alors $x^+ \cap y^+ = (x \wedge y)^+$. Ceci nous permettra de conclure : $\phi_-(x) \wedge \phi_-(y) = \phi_-(x \wedge y)$, i.e. ϕ_- préserve les inf.

D'une part : $(x \wedge y) \leq x$ et $(x \wedge y) \leq y \Rightarrow (x \wedge y)^+ \subseteq x^+$ et $(x \wedge y)^+ \subseteq y^+ \Rightarrow (x \wedge y)^+ \subseteq (x^+ \cap y^+)$; et d'autre part : $z \in (x^+ \cap y^+) \Rightarrow z \in x^+$ et $z \in y^+ \Rightarrow z \leq x$ et $z \leq y \Rightarrow z \leq (x \wedge y) \Rightarrow z \in (x \wedge y)^+ \Rightarrow (x^+ \cap y^+) \subseteq (x \wedge y)^+$.

Montrons enfin que si $x \vee y$ existe dans P, alors $(x^+ \cup y^+)^{-+} = (x \vee y)^+$. Ceci nous permettra de conclure : $\phi_-(x) \vee \phi_-(y) = \phi_-(x \vee y)$, i.e. ϕ_- préserve les sup.

D'une part : $(x \vee y) \geq x$ et $(x \vee y) \geq y \Rightarrow (x \vee y)^- \subseteq x^-$ et $(x \vee y)^- \subseteq y^- \Rightarrow$ par (1') et par (5) $x^+ = x^{-+} \subseteq (x \vee y)^{-+}$ et $y^+ = y^{-+} \subseteq (x \vee y)^{-+} \Rightarrow (x^+ \cup y^+) \subseteq (x \vee y)^{-+} = (x \vee y)^+ \Rightarrow (x^+ \cup y^+)^{-+} \subseteq (x \vee y)^{+-+} = (x \vee y)^+$.

Et d'autre part : $z \in (x^+ \cup y^+)^- \Rightarrow z \geq z',\ \forall z' \in (x^+ \cup y^+) \Rightarrow z \geq x$ et $z \geq y \Rightarrow z \geq (x \vee y) \Rightarrow z \in (x \vee y)^- \Rightarrow (x^+ \cup y^+)^- \subseteq (x \vee y)^- \Rightarrow$ par (1') et par (5) $(x \vee y)^+ = (x \vee y)^{-+} \subseteq (x^+ \cup y^+)^{-+}$. $\square$

Théorème 1.1.7 *$\Phi_- : L_-(P) \to L_+(P),\ X \mapsto X^-$ définit un isomorphisme de treillis entre $L_-(P)$ et $L_+(P)$.*

Preuve : $\forall X \in L_-(P),\ X^- \in L_+(P)$ puisque par (4) $X^{-+-} = X^-$.

$\forall X, Y \in L_-(P),\ X^- = Y^- \Rightarrow X^{-+} = Y^{-+} \Rightarrow X = Y$, ce qui montre que Φ_- est injective. Et $Y \in L_+(P) \Rightarrow Y = Y^{+-} = \Phi_-(Y^+)$ ce qui montre Φ_- est surjective puisque $Y^+ = Y^{+-+} \in L_-(P)$.

$X \leq Y \Rightarrow \Phi_-(X) \leq \Phi_-(Y)$ puisque $X \leq Y \Rightarrow X \subseteq Y \Rightarrow$ par (1) $X^- \supseteq Y^- \Rightarrow \Phi_-(X) = X^- \leq Y^- = \Phi_-(Y)$.

$\Phi_-(X) \leq \Phi_-(Y) \Rightarrow X \leq Y$ puisque $\Phi_-(X) \leq \Phi_-(Y) \Rightarrow \Phi_-(X) \supseteq \Phi_-(Y) \Rightarrow$ par (1') $\Phi_-(X)^+ \subseteq \Phi_-(Y)^+ \Rightarrow X = X^{-+} = \Phi_-(X)^+ \leq \Phi_-(Y)^+ = Y^{-+} = Y$.

Donc Φ_- est un morphisme surjectif d'epo, ce qui permet de conclure en utilisant le lemme 1.1.1. □

Corollaire 1.1.8 *$\phi_+ : P \to L_+(P)$, $x \mapsto x^-$ est un morphisme d'epo qui préserve, s'ils existent dans P, les inf et les sup.*

Preuve : On a : $\phi_+ = \Phi_- \circ \phi_-$, puisque $\phi_+(x) = x^- = x^{+-} = \Phi_-(x^+) = \Phi_-(\phi_-(x)) = (\Phi_- \circ \phi_-)(x)$.

On obtient ainsi la conclusion du corollaire parce que ϕ_+ est la composition de morphismes d'epo qui préservent, s'ils existent dans P, les sup et les inf, puisque ϕ_- les préserve et puisque Φ_- est un isomorphisme de treillis. □

1.2 Construction du treillis enveloppant

On utilise dans (Lascoux et Schützenberger, 1996) et dans (Reading, 2002) une autre construction pour un epo P d'un treillis $L(P)$ pour lequel P est un sous-epo. Nous verrons que $L(P)$ est isomorphe à $L_+(P)$ et que $L(P)$ est le plus petit treillis pour lequel P est un sous-epo.

$L(P)$ est l'ensemble dont les éléments sont les intersections finies de $x^- = x^{+-}$, $x \in P$; avec la relation : $X \leq Y$ si $X \supseteq Y$. Notons que $P \in L(P)$, puisque $P = 0^-$; notons aussi : $X \vee Y = X \cap Y$. On montrera que $L(P)$ est un treillis.

Lemme 1.2.1 *Soit Q un epo fini et $x, y \in Q$; alors $x \wedge y$ existe $\Leftrightarrow \vee\{q \in Q \mid q \leq x$ et $q \leq y\}$ existe, et alors $x \wedge y = \vee\{q \in Q \mid q \leq x$ et $q \leq y\}$.*

Preuve : Posons $X = \{q \in Q \mid q \leq x \text{ et } q \leq y\}$.

Supposons $x \wedge y$ existe; montrons que $\vee X = x \wedge y$. On a $q \in X \Rightarrow q \leq x$ et $q \leq y \Rightarrow q \leq x \wedge y$, ce qui montre que $x \wedge y$ est un majorant de X. Soit z un majorant de X ; puisque $x \wedge y \leq x$ et $x \wedge y \leq y$, $x \wedge y \in X$ et $z \geq x \wedge y$. Donc $\vee X = x \wedge y$.

Inversement supposons que $\vee X$ existe; montrons $x \wedge y = \vee X$. On a $x \geq q$ et $y \geq q$, $\forall q \in X \Rightarrow x \geq \vee X$ et $y \geq \vee X$, ce qui montre que $\vee X$ est un minorant de $\{x, y\}$. Soit z un minorant de $\{x, y\}$; alors $z \in X$, ce qui implique $z \leq \vee X$. Donc $x \wedge y = \vee X$.

□

Corollaire 1.2.2 *Soit Q un epo fini tel que $\forall X \subseteq Q$, $\vee X$ existe ; alors Q est un treillis.*

Preuve : Puisque Q est fini, il suffit de montrer que $\forall x, y \in Q$, $x \wedge y$ existe. Ceci est une conséquence du lemme qui précède, puisque $\vee\{q \in Q \mid q \leq x \text{ et } q \leq y\}$ existe. □

Corollaire 1.2.3 *$L(P)$ est un treillis avec pour $X, Y \in L(P)$, $X \vee Y = X \cap Y$ et $X \wedge Y = \vee\{Z \in L(P) \mid Z \leq X \text{ et } Z \leq Y\} = \cap\{Z \in L(P) \mid Z \supseteq X \text{ et } Z \supseteq Y\}$.*

Le théorème suivant dit que le treillis enveloppant d'un treillis T est T à isomorphisme de treillis près.

Théorème 1.2.4 *Si T un treillis, alors $\varphi : T \to L(T)$, $x \mapsto x^-$ est un isomorphisme de treillis.*

Preuve : φ est injective parce que $\forall x, y \in T$, $x \neq y \Rightarrow x^- \neq y^-$.

On a $(x \vee y)^- = x^- \cap y^-$ puisque : $z \in (x \vee y)^- \Leftrightarrow z \geq (x \vee y) \Leftrightarrow z \geq x$ et $z \geq y \Leftrightarrow z \in x^-$ et $z \in y^- \Leftrightarrow z \in x^- \cap y^-$.

Ceci implique que φ est surjective parce que $\forall X \in L(T)$, $\exists x_1, \ldots, x_n \in T$, tels que $X = x_1^- \cap \ldots \cap x_n^- = (x_1 \vee \ldots \vee x_n)^- = \varphi(x_1 \vee \ldots \vee x_n)$; et implique aussi que $\varphi(x \vee y) = (x \vee y)^- = x^- \cap y^- = \varphi(x) \cap \varphi(y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$.

Il reste à montrer : $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$, i.e. $(x \wedge y)^- = x^- \wedge y^-$.

Montrons : $(x \wedge y)^- = \cap\{Z \in L(T) \mid Z \supseteq x^- \text{ et } Z \supseteq y^-\}$. Par le corollaire 1.2.3, on aura alors : $(x \wedge y)^- = x^- \wedge y^-$.

On remarque d'abord : $x \geq (x \wedge y)$ et $y \geq (x \wedge y) \Rightarrow (x \wedge y)^- \supseteq x^-$ et $(x \wedge y)^- \supseteq y^-$. Ceci implique : $(x \wedge y)^- \in \{Z \in L(T) \mid Z \supseteq x^- \text{ et } Z \supseteq y^-\}$.

Soit $Z \in L(T)$ tel que $Z \supseteq x^-$ et $Z \supseteq y^-$; $Z = z_1^- \cap \ldots \cap z_n^-$ pour certains $z_1, \ldots, z_n \in T$; $x^- \subseteq Z$ et $y^- \subseteq Z \Rightarrow x \in Z$ et $y \in Z \Rightarrow x \in z_1^-$ et $y \in z_1^-, \ldots, x \in z_n^-$ et $y \in z_n^- \Rightarrow x \geq z_1$ et $y \geq z_1, \ldots, x \geq z_n$ et $y \geq z_n \Rightarrow (x \wedge y) \geq z_1, \ldots, (x \wedge y) \geq z_n \Rightarrow (x \wedge y)^- \subseteq z_1^-, \ldots, (x \wedge y)^- \subseteq z_n^- \Rightarrow (x \wedge y)^- \subseteq Z$. Ceci achève de montrer : $(x \wedge y)^- = \cap\{Z \in L(T) \mid Z \supseteq x^- \text{ et } Z \supseteq y^-\}$. □

Théorème 1.2.5 *Soit* $X \in L_+(P)$ *; alors* $X = \vee\{x^- \mid x^- \leq X\} = \cap_{x \in X^+} x^-$.

Preuve : On a : $x^- \leq X \Leftrightarrow x^- \supseteq X \Leftrightarrow \forall y \in X,\ y \in x^- \Leftrightarrow \forall y \in X,\ y \geq x \Leftrightarrow x \in X^+$. Donc $\vee\{x^- \mid x^- \leq X\} = \cap_{x^- \leq X} x^- = \cap_{x \in X^+} x^-$.

Montrons : $X = \cap_{x \in X^+} x^-$. D'une part : $x \in X^+ \Rightarrow x^+ \subseteq X^+ \Rightarrow$ par (2') $X = X^{+-} \subseteq x^{+-} =$ (par (5')) $x^- \Rightarrow X \subseteq x^- \Rightarrow X \subseteq \cap_{x \in X^+} x^-$. Et d'autre part : $y \in \cap_{x \in X^+} x^- \Rightarrow$ par (5') $y \geq x\ \forall x \in X^+ \Rightarrow y \in X^{+-} = X$. □

Et on a dualement :

Théorème 1.2.6 *Soit* $X \in L_-(P)$ *; alors* $X = \wedge\{x^+ \mid x^+ \geq X\} = \cap_{x \in X^-} x^+$.

Théorème 1.2.7 $L(P) = L_+(P)$ *et* $X \leq_{L(P)} Y \Leftrightarrow X \leq_{L_+(P)} Y$.

Preuve : $X \in L(P) \Rightarrow X$ est une intersection finie de x^-. $\forall x \in P,\ x^- \in L_+(P)$ puisque par (4') $x^{-+-} = x^-$. Par le lemme 1.1.4, on obtient $L(P) \subseteq L_+(P)$. Par le théorème 1.2.5, $L_+(P) \subseteq L(P)$, puisque $X \in L_+(P) \Rightarrow X = \vee\{x^- \mid x^- \leq X\} = \cap_{x^- \leq X} x^-$. De plus $\forall\ X, Y,\ X \leq_{L(P)} Y \Leftrightarrow X \supseteq Y \Leftrightarrow X \leq_{L_+(P)} Y$. □

On a que $\phi_+(x) = x^-$ est une fonction injective de P vers $L(P) = L_+(P)$ et que

$\Phi_- : L_-(P) \to L_+(P),\ X \mapsto X^-$ est un un isomorphisme de treillis entre $L_-(P)$ et $L_+(P)$ (voir le théorème 1.1.7).

En identifiant P à $\phi_+(P) \subseteq L(P)$, i.e. en identifiant $x \in P$ à $\phi_+(x)$, on écrira pour $X \in L(P)$: $X = \vee\{x \in P \mid x \leq X\}$ puisque, par le théorème 1.2.5, $X = \vee\{x^- = \phi_+(x) \mid x^- = \phi_+(x) \leq X\}$. On peut dire que tout élément X de $L(P) = L_+(P)$ est le sup des éléments de P qui sont $\leq X$.

En identifiant P à $\phi_+(P) \subseteq L(P)$, on écrira pour $X \in L(P)$: $X = \wedge\{x \in P \mid x \geq X\}$ puisque $X = X^{+-} = \Phi_-(X^+) =$ (par le théorème 1.2.6) $\Phi_-(\wedge\{x^+ \mid x^+ \geq_{L_-(P)} X^+\}) = \wedge\{x^{+-} \mid x^+ \geq_{L_-(P)} X^+\} = \wedge\{x^- \mid x^- \geq_{L_+(P)} X\}$. En effet, $x^+ \geq_{L_-(P)} X^+ \Leftrightarrow x^+ \subseteq X^+ \Leftrightarrow x^- = x^{+-} \supseteq X^{+-} = X \Leftrightarrow x^- \geq_{L_+(P)} X$. On peut dire que tout élément X de $L(P) \cong L_-(P)$ est l'inf des éléments de P qui sont $\geq X$.

Théorème 1.2.8 *Soit T un treillis et $f : P \to T$ un morphisme d'epo qui préserve, s'ils existent dans P, les sup ; soit S un treillis et $\varphi : P \to S$ un morphisme d'epo tel que $\forall X \in S$, on a : $X = \vee\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\} = \wedge\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \geq X\}$; soit la fonction $h : S \to T, X \mapsto \vee_T\{f(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\}$; alors*

(i) $h \circ \varphi = f$;

(ii) h est un morphisme d'epo.

Preuve : Soit $x \in P$. Puisque f et φ sont des morphismes d'epo, on a : $\{y \in P \mid y \leq x\} = \{y \in P \mid \varphi(y) \leq \varphi(x)\} = \{y \in P \mid f(y) \leq f(x)\}$. D'où, puisque les sup existent dans T, $\vee\{f(y) \mid y \in P$ *et* $\varphi(y) \leq \varphi(x)\} = \vee\{f(y) \mid y \in P$ *et* $f(y) \leq f(x)\}$. D'une part, on a : $(h \circ \varphi)(x) = \vee\{f(y) \mid y \in P$ *et* $\varphi(y) \leq \varphi(x)\}$; et d'autre part, puisque f préserve, s'ils existent dans P, les sup, on a : $\vee\{f(y) \mid y \in P$ *et* $f(y) \leq f(x)\} = f(x)$. Donc $h \circ \varphi = f$, ce qui prouve (i).

Soit $X, Y \in S$. On veut montrer : $X \leq Y \Leftrightarrow h(X) \leq h(Y)$.

Montrons : $X \leq Y \Rightarrow h(X) \leq h(Y)$. Supposons : $X \leq Y$. Alors $\{x \in P \mid \varphi(x) \leq X\} \subseteq \{y \in P \mid \varphi(y) \leq Y\}$. D'où $\{f(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\} \subseteq \{f(y) \mid y \in P$ et

$\varphi(y) \leq Y\}$. Comme $\vee_T\{f(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\}$ et $\vee_T\{f(y) \mid y \in P$ et $\varphi(y) \leq Y\}$ existent, on a $h(X) \leq h(Y)$.

Puisque $\forall X \in S$, $X = \vee\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\}$, on a : $(\forall y \in P,\ \varphi(y) \leq Y \Rightarrow \varphi(y) \leq X) \ \Rightarrow\ Y \leq X$; d'où la contraposée : $Y \not\leq X \ \Rightarrow\ (\exists y \in P$ tel que $\varphi(y) \leq Y$ et $\varphi(y) \not\leq X)$.

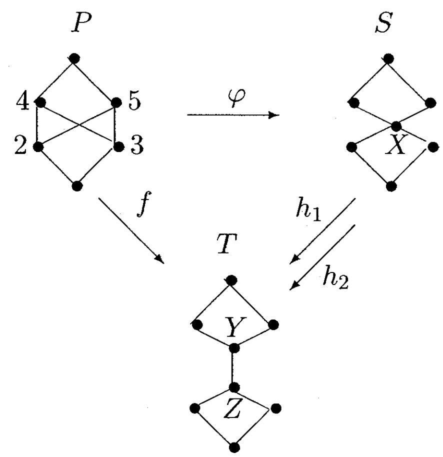
Supposons $Y \not\leq X$ et soit y tel que $\varphi(y) \leq Y$ et $\varphi(y) \not\leq X$. Montrons : $h(X) < (h(X) \vee f(y))$. Supposons $h(X) = (h(X) \vee f(y))$, i.e. $f(y) \leq h(X)$. Soit $z \in P$ tel que $\varphi(z) \geq X$. Alors $z \geq x\ \forall x \in P$, tel que $\varphi(x) \leq X$. Donc $f(z) \geq \vee\{f(x) \mid x \in P \text{ et } \varphi(x) \leq X\} = h(X) \geq f(y)$. Donc $z \geq y$. Donc $\varphi(y) \leq \wedge\{\varphi(z) \mid z \in P$ et $\varphi(z) \geq X\} = X$, contradiction.

Montrons : $X < Y \Rightarrow h(X) < h(Y)$. Puisque $Y \not\leq X$, $\exists y \in P$ tel que $\varphi(y) \leq Y$ et $\varphi(y) \not\leq X$, et tel que $h(X) < (h(X) \vee f(y))$. Nous avons : $X < Y \Rightarrow h(X) \leq h(Y)$; et nous avons $\varphi(y) \leq Y \Rightarrow f(y) = h(\varphi(y)) \leq h(Y)$. Donc $h(X) < (h(X) \vee f(y)) \leq h(Y)$.

Montrons : $h(X) = h(Y) \Rightarrow X = Y$. Par ce qui précède, $h(X) = h(Y) \Rightarrow X = Y$ ou (X et Y sont non comparables). Supposons cette dernière possibilité. Alors $Y \not\leq X \ \Rightarrow\ \exists y \in P$ tel que $\varphi(y) \leq Y$ et $\varphi(y) \not\leq X$, et tel que $h(X) < (h(X) \vee f(y))$. Or $\varphi(y) \leq Y \Rightarrow f(y) = h(\varphi(y)) \leq h(Y)$. D'où $h(X) < (h(X) \vee f(y)) = (h(Y) \vee f(y)) \leq h(Y)$, contradiction.

Montrons : $h(X) < h(Y) \Rightarrow X < Y$. Par ce qui précède, $h(X) < h(Y) \Rightarrow X < Y$ ou (X et Y sont non comparables). Supposons cette dernière possibilité. Puisque $X \not\leq Y$, $\exists x \in P$ tel que $\varphi(x) \leq X$ et $\varphi(x) \not\leq Y$. Puisque $Y = \wedge\{\varphi(z) \mid z \in P$ et $\varphi(z) \geq Y\}$, $\exists y \in P$, tel que $\varphi(y) \geq Y$ et $\varphi(x) \not\leq \varphi(y)$. On a alors : $f(x) = h(\varphi(x)) \leq h(X) < h(Y) \leq h(\varphi(y)) = f(y)$, ce qui implique $x < y$; contradiction. Et ceci achève la preuve de (ii). $\square$

Un contre-exemple :



Dans ce diagramme, l'epo P et les treillis S et T sont comme dans le théorème 1.2.8 ; h_1 et h_2 sont définies ainsi : $\forall x \in P$, $h_1 \circ \varphi(x) = h_2 \circ \varphi(x) = f(x) = x$; et $h_1(X) = Y$, $h_2(X) = Z$. On remarque : $h_1(2 \vee 3) = h_1(X) = Y \neq Z = h_1(2) \vee h_1(3)$; $h_2(4 \wedge 5) = h_2(X) = Z \neq Y = h_2(4) \wedge h_2(5)$. Ce diagramme nous montre qu'en général, la fonction h du théorème 1.2.8 n'est pas unique et n'est pas un isomorphisme de treillis.

Théorème 1.2.9 *Soit S un treillis et $\varphi : P \to S$ un morphisme d'epo tel que $\forall X \in S$, on ait : $X = \vee\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\} = \wedge\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \geq X\}$; alors la fonction $h : S \to L(P), X \mapsto \vee_{L(P)}\{\phi_+(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\}$ est un isomorphisme de treillis.*

Preuve : On a que $L(P)$ est un treillis tel que, par le corollaire 1.1.8, $\phi_+ : P \to L_+(P) = L(P)$, $x \mapsto x^-$ est un morphisme d'epo qui préserve, s'ils existent dans P, les sup.

Donc par le théorème 1.2.8 (ii), la fonction $h : S \to L(P), X \mapsto \vee_{L(P)}\{\phi_+(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\}$ est un morphisme d'epo. Puisqu'un morphisme d'epo est injectif, on a alors : $card(S) \leq card(L(P))$.

Nous allons montrer que $card(L(P)) \leq card(S)$, ce qui impliquera $card(S) = card(L(P))$. On aura alors que la fonction h est un morphisme surjectif d'epo, ce qui, par lemme 1.1.1, nous permettra de conclure que h est un isomorphisme de treillis.

On a d'une part : $\forall X \in L(P)$, $X = \vee\{x \in P \mid x \leq X\} = \vee\{\phi_+(x) \mid x \in P$ et $\phi_+(x) \leq X\}$; et par le théorème 1.2.6, $\forall X \in L(P)$, on a : $X = \wedge\{x \in P \mid x \geq X\} = \wedge\{\phi_+(x) \mid x \in P$ et $\phi_+(x) \geq X\}$.

D'autre part, $\varphi : P \to S$ préserve, s'ils existent dans P, les sup.

En effet : soit $x, y \in P$ tels que $x \vee y$ existe dans P ; on a : $x \leq (x \vee y)$ et $y \leq (x \vee y) \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(x \vee y)$ et $\varphi(y) \leq \varphi(x \vee y) \Leftrightarrow (\varphi(x) \vee \varphi(y)) \leq \varphi(x \vee y)$;

supposons $(\varphi(x) \vee \varphi(y)) < \varphi(x \vee y)$; on a : $(\varphi(x) \vee \varphi(y)) = \wedge\{\varphi(z) \mid z \in P$ et $\varphi(z) \geq (\varphi(x) \vee \varphi(y))\}$; or $\varphi(z) \geq (\varphi(x) \vee \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(z) \geq \varphi(x)$ et $\varphi(z) \geq \varphi(y) \Rightarrow z \geq x$ et $z \geq y \Rightarrow z \geq (x \vee y) \Rightarrow \varphi(z) \geq \varphi(x \vee y)$;

donc $(\varphi(x) \vee \varphi(y)) = \wedge\{\varphi(z) \mid z \in P$ et $\varphi(z) \geq \varphi(x) \vee \varphi(y)\} \geq \varphi(x \vee y) > (\varphi(x) \vee \varphi(y))$, contradiction.

Donc par le théorème 1.2.8 (ii), la fonction $h' : L(P) \to S, X \mapsto \vee_S\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\phi_+(x) \leq X\}$ est un morphisme d'epo. Puisqu'un morphisme d'epo est injectif, on a alors : $card(L(P)) \leq card(S)$. $\square$

Corollaire 1.2.10 *$L(P)$ est le plus petit treillis, à isomorphisme de treillis près, qui contient P en ce sens que tout treillis T dans lequel s'injecte P, les sup étant préservés s'ils existent dans P, contient un sous-epo isomorphe à $L(P)$; de plus $\mid L(P) \mid \leq \mid T \mid$.*

$L(P)$ est appelé le *treillis enveloppant* de P. La construction de $L(P)$ est appelée la *construction de MacNeille.*

Théorème 1.2.11 *Soit S un treillis et $\varphi : P \to S$ un morphisme d'epo tel que $\forall X \in S$, $\exists\, P_1, P_2 \subseteq P$, tels que : $X = \vee(\varphi(P_1)) = \wedge(\varphi(P_2))$; alors S et $L(P)$ sont des treillis isomorphes.*

Preuve : Par le théorème 1.2.9, il suffit de montrer : $\forall X \in S$, $X = \vee\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\} = \wedge\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \geq X\}$.

On a : $x \in P_1 \Rightarrow \varphi(x) \leq X$. Donc : $\vee\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\}$ est un majorant de $\varphi(P_1)$; donc $\vee\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\} \geq \vee(\varphi(P_1)) = X$. De plus, X est un majorant de $\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\}$; donc $X \geq \vee\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\}$. Donc $X = \vee\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \leq X\}$.

D'une manière semblable, on montre : $X = \wedge\{\varphi(x) \mid x \in P$ et $\varphi(x) \geq X\}$. $\square$

1.3 Base et cobase dans un epo

Dans cette section, on présente la notion de base et de cobase dans un epo : on verra que la base de P est la même que celle de son treillis enveloppant $L(P)$ et que tout élément de P est le sup d'éléments de la base de P. On s'inspire dans ce qui suit de (Lascoux et Schützenberger, 1996) et de (Reading, 2002).

La *base* d'un epo P, notée $B(P)$, est l'ensemble des $x \in P$ tels que : $\forall Y \subset P,\ x \notin Y$ et $\vee Y$ existe $\Rightarrow x \neq \vee Y$. Les éléments de $B(P)$ sont appelés *éléments basiques* (*join-irreducible* dans (Reading, 2002)). La terminologie "join-irreducible" est réminiscente des nombres premiers et des irréductibles puisqu'une autre manière de voir les éléments de $B(P)$ est la suivante : $x \in B(P) \Leftrightarrow x \neq 0$ et $(\forall y_1, \ldots, y_n \in P,\ x = y_1 \vee \ldots \vee y_n \Rightarrow \exists i,\ x = y_i)$. Autrement dit : un élément de P est dans la base de P s'il n'est pas un suprémum non trivial.

La *cobase* d'un epo P, notée $C(P)$, est l'ensemble des $x \in P$ tels que : $\forall Y \subset P$, $x \notin Y$ et $\wedge Y$ existe $\Rightarrow x \neq \wedge Y$. Les éléments de $C(P)$ sont appelés *éléments cobasiques* (*meet-irreducible* dans (Reading, 2002)).

La notion de cobase est le dual de la notion de base. Ainsi : $x \in C(P) \Leftrightarrow x \neq 1$ et $(\forall y_1, \ldots, y_n \in P,\ x = y_1 \wedge \ldots \wedge y_n \Rightarrow \exists i,\ x = y_i)$. Autrement dit : un élément de P est dans la cobase de P s'il n'est pas un infimum non trivial.

Les résultats de cette section concernant la base d'un epo ont des versions duales concernant la cobase. Ces versions duales ne seront qu'énoncées.

Lemme 1.3.1 $x \in B(P) \Leftrightarrow x \neq \vee(x^+ - x)$, *i.e.* $x \in B(P) \Leftrightarrow x \neq \vee\{y \mid y < x\}$.

Preuve : ($\Rightarrow$) $x \in B(P) \Rightarrow \forall Y \subset P$ tel que $x \notin Y$, $x \neq \vee Y$. En particulier $x \neq \vee(x^+ - x)$.

($\Leftarrow$) Soit $x \notin B(P)$; alors $\exists Y \subset P$, tel que $x \notin Y$ et $x = \vee Y$. On a que x est un majorant de Y. Donc $Y \subseteq x^+ - x$. De plus, x est un majorant de $x^+ - x$. Soit z, un majorant de $x^+ - x$; alors z est un majorant de Y ; donc $z \geq \vee Y = x$. Donc $x = \vee(x^+ - x)$. $\square$

Lemme 1.3.2 $x \in C(P) \Leftrightarrow x \neq \wedge(x^- - x)$, *i.e.* $x \in C(P) \Leftrightarrow x \neq \wedge\{y \mid y > x\}$.

Étant donnés $x, y \in P$ tels que $x > y$, on dit que x *couvre* y (ou que y *est couvert* par x), si $x \geq z \geq y \Rightarrow z = x$ ou $z = y$.

Lemme 1.3.3 *Si P est un treillis, alors $x \in B(P) \Leftrightarrow x$ couvre un et un seul élément. Celui-ci est alors $\vee(x^+ - x)$.*

Preuve : ($\Rightarrow$) On a : $x \in B(P) \Rightarrow$ (par le lemme 1.3.1) $x \neq \vee(x^+ - x)$; or x est un majorant de $(x^+ - x)$. Donc $x > \vee(x^+ - x)$. Supposons $x > y \geq \vee(x^+ - x)$; alors $y \in (x^+ - x)$ et $y \leq \vee(x^+ - x)$; d'où $y = \vee(x^+ - x)$, ce qui montre que x couvre $\vee(x^+ - x)$.

Supposons maintenant que x couvre z. Alors $z \in x^+ - x$. Donc $z \leq \vee(x^+ - x) < x$. Puisque x couvre z, ceci implique $z = \vee(x^+ - x)$. Donc x couvre exactement un seul élément de P.

($\Leftarrow$) Supposons que x couvre un et un seul élément, et que cet élément est y. Alors $x > y$ et $z < x \Rightarrow z \leq y$. Donc y est un majorant de $x^+ - x$. On a : $x > y \geq \vee(x^+ - x)$. Donc $x \neq \vee(x^+ - x)$. Donc $x \in B(P)$. $\square$

Lemme 1.3.4 *Si P est un treillis, alors $x \in C(P) \Leftrightarrow x$ est couvert par un et un seul élément. Celui-ci est alors $\wedge(x^- - x)$.*

Théorème 1.3.5 *$\forall x \in P,\ x = \vee(x^+ \cap B(P))$, i.e. tout élément $x \in P$ est le sup des éléments $\in B(P)$ qui sont $\leq x$.*

Preuve : Remarquons d'abord que les éléments qui couvrent 0 sont dans $B(P)$, puisqu'on a alors : $\vee(x^+ - x) = \vee\{0\} = 0 \neq x$. Ceci implique : $\forall\, x \in P - \{0\},\ x^+ \cap B(P) \neq \emptyset$.

La preuve se fait par induction sur $\text{card}(x^+ \cap B(P))$. Si $\text{card}(x^+ \cap B(P)) = 0$, i.e. si $x = 0$, on observe : $0 = \vee\emptyset = \vee(0^+ \cap B(P))$ puisque $0 \notin B(P)$.

Si $x \in B(P)$, alors $x = \vee(x^+ \cap B(P))$.

Supposons : $x \notin B(P)$ et $\text{card}(x^+ \cap B(P)) > 0$; alors d'après le lemme 1.3.1 $x = \vee(x^+ - x)$ et par hypothèse d'induction : $\forall y \in (x^+ - x),\ y = \vee(y^+ \cap B(P))$. On a alors, parce que $\forall y, y \vee y = y$ et parce que l'opération $\vee$ est associative : $x = \vee(x^+ - x) = \vee_{y \in (x^+ - x)} (\vee(y^+ \cap B(P))) = \vee_{y \in (x^+ - x) \cap B(P)}\, y = \vee_{y \in x^+ \cap B(P)}\, y = \vee(x^+ \cap B(P))$. $\square$

Théorème 1.3.6 *$\forall x \in P,\ x = \wedge(x^- \cap B(P))$, i.e. tout élément $x \in P$ est l'inf des éléments $\in C(P)$ qui sont $\geq x$.*

Pour $x \in P$, on note $REC_P(x)$ l'ensemble des éléments maximaux de $x^+ \cap B(P)$. Les éléments de $REC_P(x)$ sont appelés les *rectrices* de x dans P. Pour $x \in P$, on note $COREC_P(x)$ l'ensemble des éléments minimaux de $x^- \cap B(P)$. Les éléments de $COREC_P(x)$ sont appelés les *corectrices* de x dans P.

Théorème 1.3.7 *$B(P) = B(L(P))$, i.e. $\phi_+(B(P)) = B(L(P))$: les éléments basiques de P et de son treillis enveloppant $L(P)$ sont les mêmes.*

Preuve : Soit $X \in B(L(P))$. Puisque $L(P)$ est un treillis, par le lemme 1.3.3, X couvre un et seul élément Y de $L(P)$. X, comme tout élément de $L(P)$, est le sup d'éléments de P ; donc par le théorème 1.3.5, X est le sup d'éléments $x_1, \ldots, x_m \in B(P)$. Supposons que $\forall i,\ x_i < X$; alors $\forall i,\ x_i \leq Y$, ce qui entraîne : $X = (x_1 \vee \ldots \vee x_m) \leq Y$, contradiction puisque X couvre Y. Donc $X = x_i$, pour un certain $x_i \in B(P)$.

Soit $x \in B(P)$. Par le théorème 1.3.5, on a que $x^- = \phi_+(x)$ est le sup d'éléments $Y_1, \ldots, Y_n \in B(L(P))$. On a montré ci-dessus que $B(L(P)) \subseteq B(P)$. On a ainsi : $x = \phi_+(x) = Y_1 \vee \ldots \vee Y_n \Rightarrow$ (parce que $x \in B(P)$) x est un des $Y_i \Rightarrow x \in B(L(P))$. $\square$

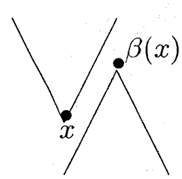
Théorème 1.3.8 *$C(P) = C(L(P))$, i.e. $\phi_+(C(P)) = C(L(P))$: les éléments cobasiques de P et de son treillis enveloppant $L(P)$ sont les mêmes.*

Par le lemme 1.3.3 et par le théorème 1.3.7, on constate que tout $x \in B(P)$ couvre un et seul $X \in L(P)$. Par le lemme 1.3.4 et par le théorème 1.3.8, on constate que tout $x \in C(P)$ est couvert par un et seul $X \in L(P)$.

1.4 Élément clivant dans un epo

Dans cette section, on présente la notion de clivage : des éléments clivent P en ce sens qu'ils séparent P. Ces éléments sont des éléments basiques et cobasiques. On suit ici (Lascoux et Schützenberger, 1996).

Selon (Lascoux et Schützenberger, 1996), un élément $x \in P$ est un élément *clivant* (*upper dissector* dans (Reading, 2002)) de P, s'il existe un élément noté $\beta(x)$, tel que $P - x^- = \beta(x)^+$:



Un élément $x \in P$ est appelé un élément *coclivant* (*lower dissector* dans (Reading, 2002)), s'il existe un élément noté $\beta^{-1}(x)$, tel que $P - (\beta^{-1}(x))^- = x^+$.

L'ensemble des éléments clivants est noté $Cl(P)$ et celui des éléments coclivants $CCl(P)$.

Lemme 1.4.1 *La fonction $\beta : Cl(P) \to CCl(P)$, $x \mapsto \beta(x)$ est bijective.*

Preuve : Supposons $\beta(x) = \beta(y)$; alors d'une part $x \not\leq \beta(x) \Rightarrow x \geq y$ et d'autre part

$y \not\leq \beta(y) \Rightarrow y \geq x$; d'où $x = y$ et β est injective.

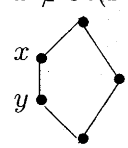
Soit $x \in CCl(P)$; alors $P - (\beta^{-1}(x))^- = x^+$ implique $\beta^{-1}(x) \in Cl(P)$ et $\beta(\beta^{-1}(x)) = x$; d'où β est surjective. $\square$

Théorème 1.4.2 $Cl(P) \subseteq B(P)$, *i.e. un élément clivant est un élément basique.*

Preuve : Soit $x \in Cl(P)$ et $\beta(x)$ tels que : $P - x^- = \beta(x)^+$. Puisque $\forall y \in (x^+ - x)$, $x > y$, on a $\forall y \in (x^+ - x)$, $y \leq \beta(x)$, ce qui implique que si $\vee(x^+ - x)$ existe, alors $\vee(x^+ - x) \leq \beta(x)$. Ceci implique $x \in B(P)$, puisque $x \notin B(P) \Rightarrow$ (par le lemme 1.3.1) $x = \vee(x^+ - x) \leq \beta(x)$, contradiction. $\square$

Théorème 1.4.3 $CCl(P) \subseteq C(P)$, *i.e. un élément coclivant est un élément cobasique.*

En général, on a : $Cl(P) \subsetneq B(P)$ et $CCl(P) \subsetneq C(P)$. Contre-exemple : dans le diagramme suivant, $x \in B(P)$ et $x \notin Cl(P)$, $y \in C(P)$ et $y \notin CCl(P)$:



Un epo P est *clivable* si $Cl(P) = B(P)$. Un epo P est *coclivable* si $CCl(P) = C(P)$.

Théorème 1.4.4 $Cl(P) = Cl(L(P))$, *i.e.* $\phi_+(Cl(P)) = Cl(L(P))$ *: les éléments clivants de P et de son treillis enveloppant $L(P)$ sont les mêmes.*

Preuve : Montrons : $Cl(P) \subseteq Cl(L(P))$. Soit $x \in Cl(P)$; on à montrer : $\forall X \in L(P)$, $X \geq x$ ou (exclusif) $X \leq \beta(x)$.

Rappelons par le théorème 1.2.7 : $L(P) = L_+(P)$.

Soit $X \in L(P)$. On a : $X =$ (par le théorème 1.2.5) $\cap_{z \in X^+} z^-$. S'il existe $y \in X^+$ tel que $y \geq x$, alors $X = \cap_{z \in X^+} z^- \subseteq y^- \subseteq x^- \Rightarrow X \geq x$. S'il n'existe pas un tel y, i.e.

si $\forall z \in X^+,\ z \leq \beta(x)$, alors $\forall z \in X^+,\ z^- \supseteq \beta(x)^-$, ce qui implique $X = \cap_{z \in X^+} z^- \supseteq \beta(x)^-$, i.e. $X \leq \beta(x)^-$. Donc $X \geq x$ ou (exclusif) $X \leq \beta(x)$.

Montrons : $Cl(P) \supseteq Cl(L(P))$. Soit $X \in Cl(L(P))$; on a : $\forall y \in P \subseteq L(P),\ y \geq X$ ou (exclusif) $y \leq \beta(X)$. Il reste à montrer que $X, \beta(X) \in P$.

Par le théorème 1.4.2, $X \in B(L(P))$ et par le théorème 1.3.7, $X \in B(P)$; par le théorème 1.4.3, $\beta(X) \in C(L(P))$ et par le théorème 1.3.8, $\beta(X) \in C(P)$. Puisque $B(P), C(P) \subseteq P$, $X, \beta(X) \in P$. $\square$

Théorème 1.4.5 *$CCl(P) = CCl(L(P))$, i.e. $\phi_+(CCl(P)) = CCl(L(P))$: les éléments coclivants de P et de son treillis enveloppant $L(P)$ sont les mêmes.*

1.5 Treillis distributif

Le but de cette section est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que le treillis enveloppant $L(P)$ d'un epo fini P soit distributif. C'est essentiellement le théorème 7 de (Reading, 2002) et le théorème 2.8 de (Lascoux et Schützenberger, 1996). On suit ici en grande partie (Stanley, 1997), chapitre 3, section 3.4 : Distributive Lattices.

Rappelons qu'un treillis T est *distributif* si

(i) $\forall x, y, z \in T,\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ et

(ii) $\forall x, y, z \in T,\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

En fait, les énoncés (i) et (ii) sont équivalents (MacLane et Birkhoff, 1967). Montrons que (i) $\Rightarrow$ (ii) :

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
&= x \vee (z \wedge (x \vee y)) \\
&= x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) \\
&= (x \vee (z \wedge x)) \vee (z \wedge y) \\
&= x \vee (z \wedge y)
\end{aligned}$$

Un *idéal ordonné* d'un epo P est un sous-ensemble I de P tel que $x \in I$ et $y \leq x \Rightarrow y \in I$. En d'autres termes, I est un idéal si $I = \cup_{x \in \, max(I)} x^+$. Un idéal ordonné I est *principal* s'il existe $x \in I$ tel que $y \in I \Rightarrow y \leq x$, i.e. s'il existe x tel que $I = x^+$.

Soit $J(P) = \{I \mid I \text{ est un idéal ordonné de } P\}$, avec la relation $I_1 \leq I_2 \Leftrightarrow I_1 \subseteq I_2$. Puisque $\forall I_1, I_2 \in J(P)$, $I_1 \cap I_2$ et $I_1 \cup I_2 \in J(P)$, et puisque pour tout ensembles A, B, C, on a $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $J(P)$ est un treillis distributif avec : $I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2$ et $I_1 \vee I_2 = I_1 \cup I_2$.

Lemme 1.5.1 *$x \mapsto x^+$ est un isomorphisme d'epo entre P et $B(J(P))$. Autrement dit, les éléments basiques de $J(P)$ sont les idéaux principaux de P.*

Preuve : Montrons : $L_-(P) \subseteq J(P)$, i.e. montrons : $X \in L_-(P) \Rightarrow X$ est un idéal ordonné. Soit $x \in X$ et $y \leq x$; alors $\forall z \in X^-$ on a : $z \geq x \geq y$; donc $y \in X^{-+} = X$, ce qui montre que X est un idéal ordonné.

Par le théorème 1.1.6, $x \mapsto x^+$ est un morphisme d'epo de P vers $L_-(P)$, et donc vers $J(P)$.

Montrons : $x^+ \in B(J(P))$. Supposons : $x^+ = \vee_{J(P)} \{I \in J(P) \mid I <_{L_-(P)} x^+\}$ (i.e. supposons $x^+ = \cup_{I \subsetneq x^+} I$) ; alors $\exists I \in J(P)$ tel que $I <_{L_-(P)} x^+$ (i.e. $I \subsetneq x^+$) et $x \in I$; or $x \in I \Rightarrow x^+ \subseteq I$, contradiction. Donc par lemme 1.3.1, $\forall x \in P$, $x^+ \in B(J(P))$. Donc $x \mapsto x^+$ est une fonction de P vers $B(J(P))$.

Il reste à montrer que $x \mapsto x^+$ est surjective. Supposons $I \in B(J(P))$; puisque $I = \cup_{x \in I} x^+ = \vee_{x \in I} x^+ \in B(J(P))$, $\exists y \in I$ tel que $I = y^+$. Ce qui montre que $x \mapsto x^+$ est surjective. $\square$

Corollaire 1.5.2 *Soit P et Q deux epo finis ; alors $P \cong Q \Leftrightarrow J(P) \cong J(Q)$.*

Preuve : $J(P) \cong J(Q) \Rightarrow B(J(P)) \cong B(J(Q)) \Rightarrow$ (par le lemme qui précède) $P \cong Q \Rightarrow J(P) \cong J(Q)$. $\square$

Lemme 1.5.3 *$\phi : P \to J(B(P))$, $x \mapsto x^+ \cap B(P)$ est un morphisme d'epo.*

Preuve : Montrons : $(x^+ \cap B(P)) \in J(B(P))$. Soit $y \in (x^+ \cap B(P))$; soit $z \in B(P)$ tel que $z \leq y$; alors $z \leq x$, parce que $y \in x^+$, ce qui implique : $z \in x^+ \cap B(P)$ et montre que $(x^+ \cap B(P)) \in J(B(P))$.

$\forall x, y \in P$, on a : $x \leq y \Rightarrow x^+ \subseteq y^+ \Rightarrow (x^+ \cap B(P)) \subseteq (y^+ \cap B(P)) \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$;

et $\forall x, y \in P$, on a, par le théorème 1.3.5 : $x = \vee(x^+ \cap B(P))$, $y = \vee(y^+ \cap B(P))$; d'où $\phi(x) \leq \phi(y) \Rightarrow (x^+ \cap B(P)) \subseteq (y^+ \cap B(P)) \Rightarrow x = \vee(x^+ \cap B(P)) \leq \vee(y^+ \cap B(P)) = y$. Donc ϕ est un morphisme d'epo. $\square$

Théorème 1.5.4 *Soit T un treillis distributif fini ; alors $T \cong J(B(T))$.*

Preuve : Par le lemme 1.5.3 et par le lemme 1.1.1, il suffit de montrer que $\phi : T \to J(B(T))$, $x \mapsto x^+ \cap B(T)$ est surjective pour conclure que $T \cong J(B(T))$.

Montrons donc que ϕ est surjective. Soit $I \in J(B(T))$ et $x = \vee I$ (dans T) ; par le théorème 1.3.5, on a $x = \vee(x^+ \cap B(T))$. Montrons : $I = x^+ \cap B(T)$, i.e. $I = \phi(x)$. On a d'une part : $I \subseteq x^+ \cap B(T)$, puisque $z \in I \Rightarrow (z \leq \vee I = x)$ et $(z \in B(T))$.

Montrons : $I \supseteq x^+ \cap B(T)$. Soit $z \in x^+ \cap B(T)$;

on a $\vee I = x = \vee(x^+ \cap B(T)) \Rightarrow (z \wedge (\vee I)) = (z \wedge (\vee(x^+ \cap B(T))) \Rightarrow$ (puisque T est distributif) $\vee_{y \in I}(z \wedge y) = \vee_{y \in x^+ \cap B(T)}(z \wedge y)$;

on a : $\vee_{y \in x^+ \cap B(T)}(z \wedge y) = z$ puisque 1) $\forall y \in T$, $z \wedge y \leq z$; 2) $z \wedge z = z$; et 3) $z \in (x^+ \cap B(T))$;

puisque $z = \vee_{y \in I}(z \wedge y)$ et puisque $z \in B(T)$, $\exists y \in I$ tel que $z = z \wedge y$;

puisque $(z = z \wedge y), z \leq y$; puisque $y \in I$ et puisque I est un idéal ordonné de $B(T)$, on a $z \in I$.

Donc $I \supseteq x^+ \cap B(T)$, ce qui achève de montrer que ϕ est surjective. $\square$

Corollaire 1.5.5 *Soit T un treillis distributif fini ; soit P un epo tel que $T \cong J(P)$. Alors $P \cong B(T)$.*

Preuve : Par le théorème 1.5.4, $T \cong J(B(T))$; d'où $J(B(T)) \cong J(P)$. On obtient $P \cong B(T)$ par le corollaire 1.5.2. $\square$

Théorème 1.5.6 *Soit T un treillis distributif fini ; alors T est clivable, i.e. $B(T) \subseteq Cl(T)$.*

Preuve : Soit $x \in B(T)$; supposons $x \notin Cl(T)$. Soit x_1 le seul élément que couvre x (voir le lemme 1.3.3).

Si $T - x^-$ ne contient qu'un seul élément maximal z, alors $\vee(T - x^-) = z$ et $T - x^- = z^+$, i.e. $x \in Cl(T)$. On peut donc supposer que $T - x^-$ contient au moins deux éléments maximaux distincts r et s. On a $r \vee s \geq x$ puisque r et s sont des éléments maximaux distincts de $T - x^-$. On a donc : $x \wedge (r \vee s) = x$.

On a : $(x \wedge r) < x$ puisque $(x \wedge r) \leq x$ et $r \not\geq x$; de même $(x \wedge s) < x$. D'où $(x \wedge r) \leq x_1$ et $(x \wedge s) \leq x_1$, ce qui implique $(x \wedge r) \vee (x \wedge s) \leq x_1 < x$. Ceci contredit le fait que T soit distributif. Donc $x \in Cl(T)$. $\square$

Théorème 1.5.7 *Soit T un treillis distributif fini ; alors T est coclivable, i.e. $C(T) \subseteq CCl(T)$.*

Un élément $x \in P$ est un élément *premier* si $\forall X \subseteq P$ tel que $x \leq \vee X$, $\exists y \in X$, tel que $x \leq y$.

Lemme 1.5.8 *Dans un treillis T, x est premier $\Leftrightarrow$ x est clivant.*

Preuve : ($\Rightarrow$) Soit x premier et soit $X = \{y \in T \mid y \not\geq x\}$. Posons $z = \vee X$. On a : $x \not\leq z$ puisque $x \leq z \Rightarrow \exists y \in X$ tel que $x \leq y$; contradiction. Donc $x^- \cap z^+ = \emptyset$. On a : $\forall w \in P$, $w \geq x$ ou $w \not\geq x$, i.e. $w \geq x$ ou $w \in X$, i.e. $w \geq x$ ou $w \leq z$. Donc $x^- \cup z^+ = T$. Donc $T - x^- = z^+$, i.e. x est clivant.

($\Leftarrow$) Soit x clivant et $\beta(x)$ tel que $T - x^- = \beta(x)^+$; soit $X \subseteq T$ tel que $x \leq \vee X$. Supposons que $\forall y \in X, x \nleq y$; alors $\forall y \in X, y \leq \beta(x)$, ce qui implique $x \leq \vee X \leq \beta(x)$; contradiction. Donc $\exists y \in X$ tel que $x \leq y$, i.e. x est premier. $\square$

Théorème 1.5.9 *Soit T un treillis clivable fini ; alors T est distributif.*

Preuve : Par le lemme 1.5.3 et par le lemme 1.1.1, il suffit de montrer que $\phi : T \to J(B(T))$, $x \mapsto x^+ \cap B(T)$ est surjective, lorsque T est clivable, pour conclure que $T \cong J(B(T))$. Puisque $J(B(T))$ est distributif, on pourra conclure que T est distributif.

Soit $I \in J(B(T))$ et soit $x = \vee I$. Montrons que $x^+ \cap B(T) = I$, i.e. que $\phi(x) = I$. On a bien sûr : $I \subseteq x^+ \cap B(T)$.

Montrons : $I \supseteq x^+ \cap B(T)$. Soit $y \in x^+ \cap B(T)$; alors $y \in B(T) \Rightarrow y \in Cl(T)$, puisque T est clivable ; donc par le lemme 1.5.8, y est premier ; puisque $y \leq x = \vee I$, $\exists y' \in I$, tel que $y \leq y'$; et puisque I est un idéal ordonné, $y \in I$; ce qui prouve que $x^+ \cap B(T) \subseteq I$. Donc ϕ est surjective. $\square$

Théorème 1.5.10 *Soit T un treillis coclivable fini ; alors T est distributif.*

Corollaire 1.5.11 *Soit T un treillis fini ; alors T est distributif $\Leftrightarrow$ T est clivable.*

Preuve : On obtient ce corollaire par les théorèmes 1.5.6 et 1.5.9. $\square$

Corollaire 1.5.12 *Soit T un treillis fini ; alors T est distributif $\Leftrightarrow$ T est coclivable.*

On est maintenant en mesure d'énoncer et de donner une preuve du théorème 7 de (Reading, 2002) :

Théorème 1.5.13 *Soit P un epo fini ; alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) P est clivable

(ii) $L(P)$ est distributif

(iii) $L(P) \cong J(B(P))$

Preuve : P est clivable $\Leftrightarrow$ $B(P) = Cl(P)$ $\Leftrightarrow$ (par les théorèmes 1.3.7 et 1.4.4) $B(L(P)) = Cl(L(P))$ $\Leftrightarrow$ (par le corollaire 1.5.11) $L(P)$ est distributif $\Leftrightarrow$ (par le théorème 1.5.4) $L(P) \cong J(B(L(P)))$ $\Leftrightarrow$ (par le théorème 1.3.7) $L(P) \cong J(B(P))$. $\square$

On est maintenant en mesure d'énoncer et de donner une preuve du théorème 2.8 de (Lascoux et Schützenberger, 1996) :

Théorème 1.5.14 *Soit P un epo fini ; $L(P)$ est distributif $\Leftrightarrow$ il existe un isomorphisme d'epo α entre $B(P)$ et $C(P)$ tel que $\forall x \in B(P),\ P - x^- = \alpha(x)^+$.*

Preuve : ($\Rightarrow$) $L(P)$ distributif implique (par les corollaires 1.5.11 et 1.5.12) $B(L(P)) = Cl(L(P))$ et $C(L(P)) = CCl(L(P))$;

par les théorèmes 1.3.7 et 1.3.8, $B(P) = B(L(P))$ et $C(P) = C(L(P))$;

par les théorèmes 1.4.4 et 1.4.5, $Cl(P) = Cl(L(P))$ et $CCl(P) = CCl(L(P))$;

donc $B(P) = Cl(P)$ et $C(P) = CCl(P)$.

Alors la fonction $\beta : B(P) = Cl(P) \rightarrow C(P) = CCl(P),\ x \mapsto \beta(x)$, (on rappelle que $\beta(x)$ est telle que : $P - x^- = \beta(x)^+$) est un isomorphisme d'epo puisque, par le lemme 1.4.1, β est bijective et puisque : $\forall x, y \in B(P) = Cl(P),\ x < y \Leftrightarrow y \not< \beta(x) \Leftrightarrow \beta(x) < \beta(y)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\alpha : B(P) \rightarrow C(P),\ x \mapsto \alpha(x)$ soit un isomorphisme d'epo tel que : $P - x^- = \alpha(x)^+$; donc $x \in B(P) \Rightarrow x \in Cl(P)$, ce qui implique par le théorème 1.4.2 : $B(P) = Cl(P)$. Donc par les théorèmes 1.3.7 et 1.3.8, $B(L(P)) = B(P) = Cl(P) = Cl(L(P))$, ce qui montre que $L(P)$ est clivable. Par le corollaire 1.5.11, on obtient que $L(P)$ est distributif. $\square$

CHAPITRE II

MATRICES DE RANG

Dans ce chapitre, on présente l'ensemble partiellement ordonné des matrices de rang. On étudie cet epo : on trouvera la base, la cobase, les éléments clivants et coclivants, le treillis enveloppant ... L'intérêt d'étudier cet epo réside dans le fait qu'on peut associer bijectivement une fonction partielle injective à une matrice de rang.

2.1 Définitions

Dans cette section, on donne les définitions et les premières propriétés qui caractérisent l'epo des matrices de rang, epo qui n'est pas un treillis. On commence par donner la définition de RG_n qui sera le treillis enveloppant de l'epo R_n des matrices de rang.

RG_n est l'ensemble des matrices carrées de format n A à valeurs $\in \{0, 1, ..., n\}$ telles que :

1) $A[i,j] = A[i,j+1]$ *ou* $A[i,j+1]+1, i = 1,\dots,n, j = 1,...,n-1$
2) $A[i,j] = A[i-1,j]$ *ou* $A[i-1,j]+1, i = 2,\dots,n, j = 1,...,n$
3) $A[1,j] \in \{0,1\}, j = 1,\dots,n$
4) $A[i,n] \in \{0,1\}$, $i = 1,\dots,n$

Pour faciliter la compréhension et l'écriture de ce texte, on considère qu'une ligne de zéros a été ajoutée au nord de A, ligne numérotée 0, qu'une colonne de zéros a été ajoutée à l'est de A, colonne numérotée n+1, qu'une colonne identique à la colonne 1 de A a été ajoutée à l'ouest de A, colonne numérotée 0, et qu'une ligne identique à la ligne n de A a été ajoutée au sud de A, ligne numérotée n+1.

Exemple 2.1.1

$$A = \begin{array}{ccc}
0 & \begin{matrix}0 & 0 & 0 & 0\end{matrix} & 0 \\
\begin{matrix}1\\2\\3\\3\end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix} \\
3 & \begin{matrix}3 & 2 & 2 & 1\end{matrix} & 0
\end{array} \in RG_4$$

Les lignes de $A \in RG_n$ sont décroissantes de gauche à droite et se terminent par 0 (en colonne $n+1$) et les colonnes de A sont décroissantes de bas en haut et se terminent par 0 (en ligne 0). Ceci implique le lemme suivant.

Lemme 2.1.2 *Soit $A \in RG_n$; alors $0 \leq A[r,s] \leq min\{r, n+1-s\}$.*

Lemme 2.1.3 *Soit $A \in RG_n$ telle que $A[r,s] = a$; alors*

$$\begin{array}{llll}
(i) & A[i,j] & \geq a & si\ i \geq r, j \leq s \\
(ii) & A[i,j] & \geq max\{a-(r-i), 0\} & si\ i \leq r, j \leq s \\
(iii) & A[i,j] & \geq max\{a-(j-s), 0\} & si\ i \geq r, j \geq s \\
(iv) & A[i,j] & \geq max\{a-(r-i)-(j-s), 0\} & si\ i \leq r, j \geq s
\end{array}$$

Preuve : Lorsqu'on se déplace vers le bas ou vers la gauche dans une matrice $A \in RG_n$, les éléments de A demeurent inchangés ou augmentent d'au plus 1, ce qui implique (i). Lorsqu'on se déplace vers le haut ou vers la droite dans une matrice $A \in RG_n$, les éléments de A demeurent inchangés ou diminuent d'au plus 1, jusqu'à éventuellement atteindre 1 ou 0, ce qui implique (ii), (iii) et (iv). $\square$

Lemme 2.1.4 *Soit $A \in RG_n$ telle que $A[r,s] = a$; alors*

$$\begin{array}{rlcll}
(i) & A[i,j] & \leq & min\{a, i, n+1-j\} & si\ i \leq r, j \geq s \\
(ii) & A[i,j] & \leq & min\{i, a+s-j\} & si\ i \leq r, j \leq s \\
(iii) & A[i,j] & \leq & min\{a+i-r, n+1-j\} & si\ i \geq r, j \geq s \\
(iv) & A[i,j] & \leq & min\{i, n+1-j, a+i-r+s-j\} & si\ i \geq r, j \leq s
\end{array}$$

Preuve : Le lemme 2.1.2 et le fait que lorsqu'on se déplace vers le haut ou vers la droite dans une matrice $A \in RG_n$, les éléments de A demeurent inchangés ou diminuent d'au plus 1, impliquent (i). Le lemme 2.1.2 et le fait que lorsqu'on se déplace vers la gauche ou vers le bas dans une matrice $A \in RG_n$, les éléments de A demeurent inchangés ou augmentent d'au plus 1, impliquent (ii), (iii) et (iv). □

Une matrice $A \in RG_n$ possède le *motif* $\boxed{\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{array}}$ *en position* r, s si $A[r,s] = a_{11}, \dots, A[r, s+p-1] = a_{1p}, \dots, A[r+m-1, s] = a_{m1}, \dots, A[r+m-1, s+p-1] = a_{mp}$. Nous dirons aussi que ce motif est situé en position r, s dans A.

L'ensemble R_n des *matrices de rang* est le sous-ensemble des matrices $A \in RG_n$ telles que A ne possède pas le motif $\boxed{\begin{array}{cc} a+1 & a \\ a+1 & a+1 \end{array}}$, $a = 0, \dots, n-1$, motif appelé *motif interdit*.

On définit l'*ordre* de $A \in RG_n$ comme étant l'élément $A[n,1]$. On dira que $A \in RG_n$ est une *matrice de rang généralisée* d'ordre $A[n,1]$. On notera que cet ordre est le maximum des entrées de A.

On définit un ordre partiel sur RG_n de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl}
\forall A, A' \in RG_n, \quad A \leq A' & \Leftrightarrow & A[i,j] \leq A'[i,j] \ \ \forall i,j \\
& \Leftrightarrow & 0 \leq A'[i,j] - A[i,j] \ \ \forall i,j
\end{array}$$

$(RG_n, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné dans lequel s'injecte R_n.

Théorème 2.1.5 *RG_n est un treillis où :*

$$(A \vee A')[i,j] = max\{A[i,j], A'[i,j]\}, \;\; (A \wedge A')[i,j] = min\{A[i,j], A'[i,j]\}$$

Preuve : Supposons $\vee(\boxed{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} a' & b' \\ c' & d' \end{matrix}}) = \boxed{\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}}$. On doit montrer : ($a = b$ ou $b+1$, $a = c$ ou $c-1$, $a' = b'$ ou $b'+1$, et $a' = c'$ ou $c'-1$) $\Rightarrow$ ($A = B$ ou $B+1$) et ($A = C$ ou $C-1$).

Supposons sans perte de généralité que $A = a \geq a'$.

Supposons $a > a'$: on a alors $b \geq a'$ puisque ($a = b$ ou $b+1$) ; on obtient $b \geq b'$ puisque $a' \geq b'$; d'où $B = b = a = A$ ou $B = b = a - 1 = A - 1$.

Supposons $a = a'$: si $b = a$ ou $b' = a'$ alors $B = A$, et si $b = a - 1$ et $b' = a' - 1$ alors $B = A - 1$.

On montre d'une manière semblable que $A = C$ ou $C - 1$.

On a ainsi montré que $\vee(A, A') \in RG_n$. Et on montre d'une manière semblable que $\wedge(A, A') \in RG_n$. $\square$

R_n n'est pas un treillis. Contre-exemple :

Exemple 2.1.6 *Dans R_2, les majorants des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Aucune de ces trois matrices n'est plus petite que les deux autres. Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'existe pas dans R_2 (voir la figure 2.1).*

La matrice A telle que $A[i,j] = 0 \ \forall i,j$, est notée : $\mathbf{0}$; la matrice A telle que $A[i,j] = min\{i, n+1-j\} \ \forall i,j$, est notée : $\mathbf{1}$. On a : $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1} \in R_n$. De plus, par le lemme 2.1.2, on a : $\vee\emptyset = \mathbf{0}$ et $\wedge\emptyset = \mathbf{1}$. $\forall A \in RG_n$, on a : $\mathbf{0} \leq A \leq \mathbf{1}$.

Exemple 2.1.7 *La matrice **1** dans RG_5 est :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

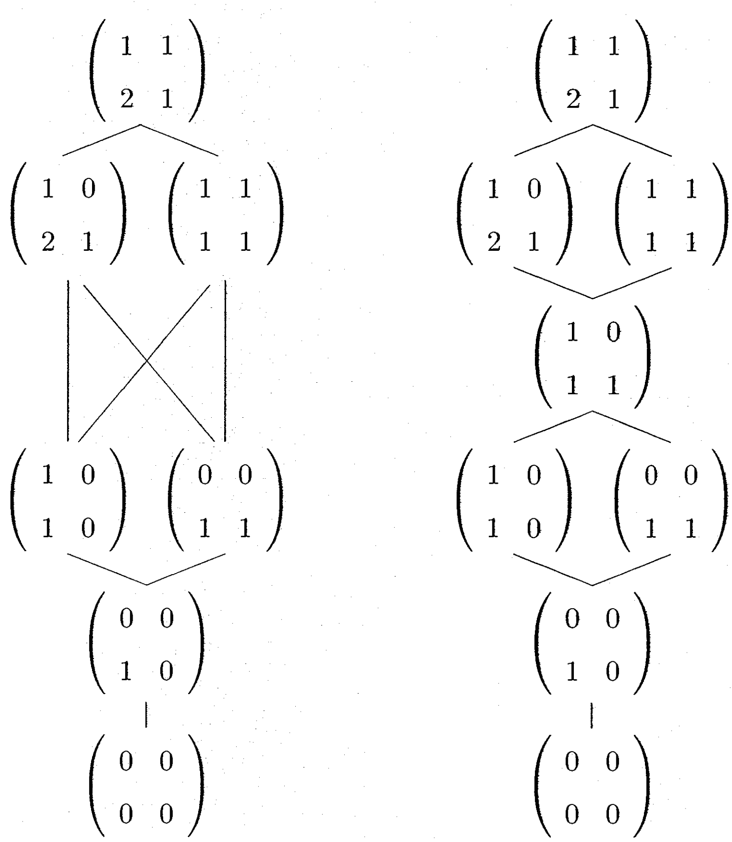


Figure 2.1 L'epo R_2 et le treillis RG_2

La figure 2.7 qui est à la fin du chapitre donne l'epo R_3.

2.2 Treillis enveloppant des matrices de rang

L'objectif de cette section et de la prochaine est de montrer que le treillis enveloppant de R_n est RG_n : $L(R_n) = RG_n$. Pour ce faire, on montrera : $\forall A \in RG_n,\ \exists P_1, P_2 \subseteq R_n$, tels que : $A = \vee P_1 = \wedge P_2$.

Soit la matrice dans RG_n, notée $B_{r,s,a,n}$, $1 \leq r, s \leq n$, $0 < a \leq min\{r, n+1-s\}$, et construite en posant $B_{r,s,a,n}[r,s] = a$ et en mettant dans $B_{r,s,a,n}[i,j]$ la plus petite valeur permise pour que $B_{r,s,a,n} \in RG_n$.

La matrice $B_{r,s,a,n}$ est définie ainsi :

$$\begin{array}{lcll}
B_{r,s,a,n}[i,j] & = & a & si\ i \geq r, j \leq s \\
B_{r,s,a,n}[i,j] & = & max\{a-(r-i),0\} & si\ i \leq r, j \leq s \\
B_{r,s,a,n}[i,j] & = & max\{a-(j-s),0\} & si\ i \geq r, j \geq s \\
B_{r,s,a,n}[i,j] & = & max\{a-(r-i)-(j-s),0\} & si\ i \leq r, j \geq s
\end{array}$$

La matrice $B_{r,s,a,n}$ est représentée dans la figure 2.2.

Notons : $B_{r,s,a,n}[r,s] = a$.

La façon avec laquelle matrice $B_{r,s,a,n}$ est construite donne le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 $\forall r, s, a,\ B_{r,s,a,n} = inf_{RG_n}\{A \in RG_n \mid A[r,s] \geq a\}$. *Autrement dit :* $\forall A \in RG_n,\ A[r,s] \geq a \Rightarrow A \geq B_{r,s,a,n}$. *De plus* $B_{r,s,a,n} \in R_n$.

Preuve : Soit $A \in RG_n$ telle que $A[r,s] = a' \geq a$. La conclusion suit du lemme 2.1.3. Par exemple : si $i \leq r$ et $j \leq s$, alors $A[i,j] \geq max\{a'-(r-j),0\} \geq max\{a-(r-j),0\} = B_{r,s,a,n}[i,j]$.

La figure 2.2 montre que $B_{r,s,a,n} \in R_n$. $\square$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} & & s & & & & & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
2 & \cdots & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a-1 & \cdots & a-1 & a-2 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a & \cdots & \mathbf{a} & a-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a & \cdots & a & a-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Figure 2.2 $\forall r, s, a,\ B_{r,s,a,n} = inf_{RG_n}\{A \mid A[r,s] = \mathbf{a}\}$

Exemple 2.2.2

$$B_{4,3,3,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Corollaire 2.2.3 $\forall A \in RG_n, A \not\geq B_{r,s,a,n} \Leftrightarrow A[r,s] < a$.

Preuve : ($\Leftarrow$) Évident.

($\Rightarrow$) ($A \not\geq B_{r,s,a,n} \Rightarrow A[r,s] < a$) est la contraposée de $A[r,s] \geq a \Rightarrow A \geq B_{r,s,a,n}$ du lemme 2.2.1. $\square$

Corollaire 2.2.4 *Soit* $a > 0$ *; et soit la matrice* A *telle que* $A[r,s] = a - 1$ *et telle que* $A[i,j] = B_{r,s,a,n}[i,j]\ \forall (i,j) \neq (r,s)$ *; alors* $A \in RG_n$.

Preuve : Le motif 3x3 que possède la matrice A en position $r-1, s-1$ est :

$\boxed{\begin{array}{ccc} a-1 & a-1 & max\{a-2,0\} \\ a & a-1 & a-1 \\ a & a & a-1 \end{array}}$. Donc $A \in RG_n$. $\square$

Remarque : La matrice A du corollaire précédent appartient en général à $RG_n - R_n$ sauf si ($a = 1$ et $s = 1$) ou si ($a = 1$ et $r = n$).

Théorème 2.2.5 *Soit $A \in RG_n$; alors $A = sup\{B_{r,s,a,n} \mid 1 \leq r, s \leq n,\ A[r,s] = a\}$.*

Preuve : Par le lemme 2.2.1, $\forall r, s$ tels que $A[r,s] > 0$, $A \geq B_{r,s,A[r,s],n}$. Donc $A \geq \vee\{B_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\}$. Donc $A[i,j] \geq (\vee\{B_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\})[i,j]\ \forall i,j$.

Supposons $A[i,j] \neq 0$; alors $A[i,j] = B_{i,j,A[i,j],n}[i,j]$; d'où $A[i,j] \geq \vee(\{B_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\})[i,j] \geq B_{i,j,A[i,j],n}[i,j] = A[i,j]$. On a ainsi : $A[i,j] \neq 0 \Rightarrow A[i,j] = \vee(\{B_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\})[i,j]$.

Supposons $A[i,j] = 0$; alors $0 = A[i,j] \geq \vee(\{B_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\})[i,j] \geq 0$ (par définition RG_n). On a ainsi : $A[i,j] = 0 \Rightarrow A[i,j] = \vee(\{B_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\})[i,j]$. Ceci achève de montrer : $A = \vee\{B_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\}$. $\square$

Corollaire 2.2.6 *$\forall A \in RG_n$, il existe $P_1 \subseteq R_n$ tel que $A = \vee P_1$.*

Preuve : Soit $A \in RG_n$; posons $P_1 = \{B_{r,s,a,n} \mid 1 \leq r, s \leq n\ et\ A[r,s] = a > 0\}$. Par le théorème 2.2.5, $A = \vee P_1$ et par le lemme 2.2.1, $P_1 \subseteq R_n$. $\square$

Soit la matrice dans RG_n, notée $C_{r,s,a,n}$, $1 \leq r, s \leq n$, $0 \leq a < min\{r, n+1-s\}$, et construite en posant $C_{r,s,a,n}[r,s] = a$ et en mettant dans $C_{r,s,a,n}[i,j]$ la plus grande valeur permise pour que $C_{r,s,a,n} \in RG_n$.

La matrice $C_{r,s,a,n}$ est définie ainsi :

$$\begin{array}{lcll} C_{r,s,a,n}[i,j] & = & min\{a, i, n+1-j\} & si\ i \leq r, j \geq s \\ C_{r,s,a,n}[i,j] & = & min\{i, a+s-j\} & si\ i \leq r, j \leq s \\ C_{r,s,a,n}[i,j] & = & min\{a+i-r, n+1-j\} & si\ i \geq r, j \geq s \\ C_{r,s,a,n}[i,j] & = & min\{i, n+1-j, a+i-r+s-j\} & si\ i \geq r, j \leq s \end{array}$$

On a : $C_{r,s,a,n}[r,1] = min\{r, a+s-1\}$. La matrice $C_{r,s,a,n}$, $a+s-1 < r$, est représentée dans la figure 2.3 et la matrice $C_{r,s,a,n}$, $a+s-1 \geq r$, est représentée dans la figure 2.4.

Notons : $C_{r,s,a,n}[r,s] = a$; notons aussi : $C_{n,1,0,n} = \mathbf{0}_n$.

La façon avec laquelle matrice $C_{r,s,a,n}$ est construite donne le lemme suivant :

Lemme 2.2.7 $\forall r, s, a,\ C_{r,s,a,n} = sup_{RG_n}\{A \in RG_n \mid A[r,s] \leq a\}$. *Autrement dit :* $\forall A \in RG_n,\ A[r,s] \leq a \Rightarrow A \leq C_{r,s,a,n}$. *De plus* $C_{r,s,a,n} \in R_n$.

Preuve : Soit $A \in RG_n$ telle que $A[r,s] = a' \leq a$. La conclusion suit du lemme 2.1.4. Par exemple : si $i \leq r$ et $j \leq s$, alors $A[i,j] \leq min\{i, a'+s-j\} \leq min\{i, a+s-j\} = C_{r,s,a,n}[i,j]$.

Les figures 2.3 et 2.4 montrent que $C_{r,s,a,n} \in R_n$. $\square$

Exemple 2.2.8

$$C_{6,4,1,8} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & \mathit{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, a+s-1 = 4 < 6 = r$$

Exemple 2.2.9

$$
C_{3,4,2,8} = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\
5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
7 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{pmatrix}, a+s-1 = 5 \geq 3 = r
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & s & & & & & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a & \cdots & a & a & \cdots & a & \cdots & a & a & \cdots & 1 \\
a+1 & \cdots & a+1 & a & \cdots & a & \cdots & a & a & \cdots & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a+s-1 & \cdots & a+1 & a & \cdots & a & \cdots & a & a & \cdots & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a+s-1 & \cdots & a+1 & \mathbf{a} & \cdots & a & \cdots & a & a & \cdots & 1 \\
a+s & \cdots & a+2 & a+1 & \cdots & a+1 & \cdots & a+1 & a & \cdots & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
T & \cdots & R+1 & R & \cdots & R & \cdots & a+1 & a & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

où $T = a+n-r+s-1$, $R = a+n-r$.

Figure 2.3 $\forall r, s, a,$ *avec* $a+s-1 < r$, $C_{r,s,a,n} = sup_{RG_n}\{A \mid A[r,s] = \mathbf{a}\}$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & s & & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
a+1 & \cdots & a+1 & a+1 & \cdots & a+1 & a & \cdots & a & \cdots & 1 \\
a+2 & \cdots & a+2 & a+2 & \cdots & a+1 & a & \cdots & a & \cdots & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
r & \cdots & r & r & \cdots & a+1 & \mathbf{a} & \cdots & a & \cdots & 1 \\
r+1 & \cdots & r+1 & r+1 & \cdots & a+2 & a+1 & \cdots & a & \cdots & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
S & \cdots & S & S & \cdots & n+2-s & n+1-s & \cdots & a & \cdots & 1 \\
S+1 & \cdots & S+1 & S & \cdots & n+2-s & n+1-s & \cdots & a & \cdots & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
n & \cdots & S+1 & S & \cdots & n+2-s & n+1-s & \cdots & a & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

où $S = n+1-s+r-a$

Figure 2.4 $\forall r, s, a,$ *avec* $a+s-1 \geq r,$ $C_{r,s,a,n} = sup_{RG_n}\{A \mid A[r,s] = \mathbf{a}\}$

Corollaire 2.2.10 $\forall A \in RG_n, A \not\leq C_{r,s,a,n} \Leftrightarrow A[r,s] > a.$

Preuve : ($\Leftarrow$) Évident.

($\Rightarrow$) ($A \not\leq C_{r,s,a,n} \Rightarrow A[r,s] > a$) est la contraposée de $A[r,s] \leq a \Rightarrow A \leq C_{r,s,a,n}$ du lemme 2.2.7. $\square$

Corollaire 2.2.11 *Soit* $a < min\{r, n+1-s\}$ *; et soit la matrice* A *telle que* $A[r,s] = a+1$ *et telle que* $A[i,j] = C_{r,s,a,n}[i,j]$ $\forall (i,j) \neq (r,s)$ *; alors* $A \in RG_n$.

Preuve : Si $r < n$ et $s < n$, le motif 3x3 que possède la matrice A en position $r-1, s-1$ est : $\boxed{\begin{matrix} a & a & a \\ a+1 & a+1 & a \\ & a+1 & a+1 \end{matrix}}$. Donc $A \in RG_n$.

Si $r = n$ et $s < n$, le motif 2x3 que possède la matrice A en position $r-1, s-1$

est : $\boxed{\begin{array}{ccc} a & a & a \\ a+1 & a+1 & a \end{array}}$. Donc $A \in RG_n$.

Si $r < n$ et $s = n$, alors $a = 0$ et le motif 3x2 que possède la matrice A en position $r-1, n-1$ est : $\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}}$. Donc $A \in RG_n$.

Si $r = n$ et $s = n$, alors $a = 0$ et le motif 2x2 que possède la matrice A en position $n-1, n-1$ est : $\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}}$. Donc $A \in RG_n$. $\square$

Théorème 2.2.12 *Soit $A \in RG_n$; alors $A = inf\{C_{r,s,a,n} \mid 1 \leq r, s \leq n,\ A[r,s] = a\}$.*

Preuve : Par le lemme 2.2.7, $\forall r, s$ tels que $A[r,s] < min\{r, n+1-s\}$, $A \leq C_{r,s,A[r,s],n}$. Donc $A \leq \wedge\{C_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\}$. Donc $A[i,j] \leq (\wedge\{C_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\})[i,j]\ \forall i, j$.

Supposons $A[i,j] \neq min\{i, n+1-j\}$; alors $A[i,j] = C_{i,j,A[i,j],n}[i,j]$; d'où $A[i,j] \leq \wedge(\{C_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\})[i,j] \leq C_{i,j,A[i,j],n}[i,j] = A[i,j]$. On a ainsi : $A[i,j] \neq min\{i, n+1-j\} \Rightarrow A[i,j] = \wedge(\{C_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\})[i,j]$.

Supposons $A[i,j] = min\{i, n+1-j\}$; alors $min\{i, n+1-j\} = A[i,j] \leq \wedge(\{C_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\})[i,j] \leq min\{i, n+1-j\}$ par le lemme 2.1.2. On a ainsi : $A[i,j] = min\{r, n+1-s\} \Rightarrow A[i,j] = \wedge(\{C_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\})[i,j]$. Ceci achève de montrer : $A = \wedge\{C_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\}$. $\square$

Corollaire 2.2.13 *$\forall A \in RG_n$, il existe $P_2 \subseteq R_n$ tel que $A = \wedge P_2$.*

Preuve : Soit $A \in RG_n$; posons $P_2 = \{C_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a < min\{r, n+1-s\}\}$. Par le théorème 2.2.12, $A = \wedge P_2$ et par le lemme 2.2.7, $P_2 \subseteq R_n$. $\square$

Théorème 2.2.14 *$L(R_n) \cong RG_n$: le treillis enveloppant de R_n est isomorphe à RG_n.*

Preuve : Par les corollaires 2.2.6 et 2.2.13, $\forall A \in RG_n$, $\exists\ P_1, P_2 \subseteq R_n$ tels que $A = \vee P_1 = \wedge P_2$. La conclusion du théorème vient alors du théorème 1.2.11. $\square$

2.3 Base et cobase des matrices de rang

L'objectif de cette section est de montrer que la base de l'epo R_n est l'ensemble des matrices $B_{r,s,a,n}$, $1 \leq r, s \leq n$, $0 < a \leq min\{r, n+1-s\}$; et que la cobase de l'epo R_n est l'ensemble des matrices $C_{r,s,a,n}$, $1 \leq r, s \leq n$, $0 \leq a < min\{r, n+1-s\}$.

Lemme 2.3.1 *$\forall r, s, a$ tels que $1 \leq r, s \leq n$, $0 < a \leq min\{r, n+1-s\}$, on a : $B_{r,s,a,n} \in B(R_n)$.*

Preuve : Puisque $RG_n \cong L(R_n)$, on a, par le théorème 1.3.7, $B(R_n) = B(RG_n)$. Par le lemme 1.3.3, $B_{r,s,a,n} \in B(RG_n)$ si $B_{r,s,a,n}$ couvre une et une seule matrice $A \in RG_n$.

On construit A ainsi : $A[i,j] = B_{r,s,a,n}[i,j]$ $\forall (i,j) \neq (r,s)$ et $A[r,s] = a-1$. Par le corollaire 2.2.4, $A \in RG_n$. On a alors $A \leq Y \leq B_{r,s,a,n} \Rightarrow Y[r,s] = a$ ou $a-1 \Rightarrow Y = B_{r,s,a,n}$ ou $Y = A$. Donc $B_{r,s,a,n}$ couvre A. De plus : $Z < B_{r,s,a,n} \Rightarrow \forall (i,j) \neq (r,s)$, $Z[i,j] \leq B_{r,s,a,n}[i,j] = A[i,j]$ et (par le corollaire 2.2.3) $Z[r,s] \leq a-1$. Donc $Z < B_{r,s,a,n} \Rightarrow Z \leq A$, ce qui montre que A est la seule matrice que couvre $B_{r,s,a,n}$. $\square$

Exemple 2.3.2

$$B_{4,3,3,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & \mathit{3} & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{couvre seulement} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & \mathit{2} & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 2.3.3 *La base de R_n est formée exactement des matrices $B_{r,s,a,n}$.*

Preuve : Par le lemme 2.3.1, il suffit de montrer : $A \in B(R_n) \Rightarrow A$ est une matrice $B_{r,s,a,n}$.

Par le théorème 2.2.5, $A = \vee\{B_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\}$. Supposons : $\{B_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\} = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$, où les Y_i sont des matrices $B_{r,s,a,n}$. Puisque $A \in B(R_n)$, on a : $A = Y_1 \vee \ldots \vee Y_m \Rightarrow \exists i$, tel que $A = Y_i$, ce qui montre que A est une matrice $B_{r,s,a,n}$. $\square$

Lemme 2.3.4 *$\forall r, s, a$ tels que $1 \leq r, s \leq n$, $0 \leq a < min\{r, n+1-s\}$, on a : $C_{r,s,a,n} \in C(R_n)$.*

Preuve : Puisque $RG_n \cong L(R_n)$, on a, par le théorème 1.3.8, $C(R_n) = C(RG_n)$. Par le lemme 1.3.4, $C_{r,s,a,n} \in C(RG_n)$ si $C_{r,s,a,n}$ n'est couvert que par une et une seule matrice $A \in RG_n$.

On construit A ainsi : $A[i,j] = C_{r,s,a,n}[i,j]$ $\forall (i,j) \neq (r,s)$ et $A[r,s] = a+1$. Par le corollaire 2.2.11, $A \in RG_n$. On a alors $A \geq Y \geq C_{r,s,a,n} \Rightarrow Y[r,s] = a$ ou $a+1 \Rightarrow Y = C_{r,s,a,n}$ ou $Y = A$. Donc $C_{r,s,a,n}$ est couvert par A. De plus : $Z > C_{r,s,a,n} \Rightarrow \forall (i,j) \neq (r,s)$, $Z[i,j] \geq C_{r,s,a,n}[i,j] = A[i,j]$ et (par le corollaire 2.2.10) $Z[r,s] \geq a+1$. Donc $Z > C_{r,s,a,n} \Rightarrow Z \geq A$, ce qui montre que $C_{r,s,a,n}$ n'est couvert que par A. $\square$.

Exemple 2.3.5

$$C_{4,3,3,5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & \mathit{2} & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \textit{ n'est couvert que par } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & \mathit{3} & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 2.3.6 *La cobase de R_n est formée exactement des matrices $C_{r,s,a,n}$.*

Preuve : Par le lemme 2.3.4, il suffit de montrer : $A \in C(R_n) \Rightarrow A$ est une matrice $C_{r,s,a,n}$.

Par le théorème 2.2.12, $A = \wedge\{C_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\}$. Supposons : $\{C_{r,s,a,n} \mid A[r,s] = a\} = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$, où les Y_i sont des matrices $C_{r,s,a,n}$. Puisque $A \in C(R_n)$, on a : $A = Y_1 \vee \ldots \vee Y_m \Rightarrow \exists i$, tel que $A = Y_i$, ce qui montre que A est une matrice $C_{r,s,a,n}$.
$\square$

Théorème 2.3.7 *$\forall r, s, a$ tels que $1 \leq r, s \leq n$, $0 < a \leq min\{r, n+1-s\}$, on a : $RG_n - B^-_{r,s,a,n} = C^+_{r,s,a-1,n}$, i.e. $B^-_{r,s,a,n}$ et $C^+_{r,s,a-1,n}$ clivent RG_n.*

Preuve : Soit $A \in RG_n$; par le lemme 2.2.1, on a : $A[r,s] \geq a \Rightarrow A \geq B_{r,s,a,n}$; par le lemme 2.2.7, on a : $A[r,s] \leq a-1 \Rightarrow A \leq C_{r,s,a-1,n}$. Donc $RG_n - B^-_{r,s,a,n} = C^+_{r,s,a-1,n}$.
□

Corollaire 2.3.8 *$B(RG_n) \subseteq Cl(RG_n)$ et $C(RG_n) \subseteq CCl(RG_n)$.*

Corollaire 2.3.9 *$B(RG_n) = Cl(RG_n)$ et $C(RG_n) = CCl(RG_n)$.*

Preuve : Par les théorèmes 1.4.2 et 1.4.3, $Cl(RG_n) \subseteq B(RG_n)$ et $CCl(RG_n) \subseteq C(RG_n)$. Donc par le corollaire précédent, $B(RG_n) = Cl(RG_n)$ et $C(RG_n) = CCl(RG_n)$.
□

Corollaire 2.3.10 *$B(R_n) = Cl(R_n)$ et $C(R_n) = CCl(R_n)$.*

Preuve : Puisque $RG_n \cong L(R_n)$, par le théorème 1.3.7, le corollaire 2.3.9 et le théorème 1.4.4, on a : $B(R_n) = B(RG_n) = Cl(RG_n) = Cl(R_n)$; et, par le théorème 1.3.8, le corollaire 2.3.9 et le théorème 1.4.5, on a $C(R_n) = C(RG_n) = CCl(RG_n) = CCl(R_n)$.
□

Corollaire 2.3.11 *RG_n est un treillis distributif.*

Preuve : On a : le treillis enveloppant de R_n est isomorphe à RG_n et R_n, par le corollaire 2.3.10, est clivable. Donc par le théorème 1.5.13, RG_n est un treillis distributif. □

On peut montrer que RG_n est un treillis distributif d'une façon plus élémentaire. Soit $X, Y, Z \in RG_n$; alors $\forall i, j$ on a : $X[i,j] \wedge (Y[i,j] \vee Z[i,j]) = (X[i,j] \wedge (Y[i,j]) \vee (X[i,j] \wedge Z[i,j])$. En effet, $\forall x, y, z \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, on vérifie aisément : $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, i.e. $min\{x, max\{y, z\}\} = max\{min\{x, y\}, min\{x, z\}\}$.

Théorème 2.3.12 *$card(B(R_n)) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.*

Preuve : Soit $B_{r,s,a,n} \in R_n$, $0 < a \leq min\{r, n+1-s\}$. Le a peut se retrouver en position r, s, où $a \leq r \leq n$ et $1 \leq s \leq n+1-a$. Il y a donc $(n+1-a)^2$ positions possibles pour un a donné. Il y a donc $\sum_{a=1}^{n} (n+1-a)^2 = \sum_{a=1}^{n} a^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ matrices $B_{r,s,a,n}$. $\square$

Corollaire 2.3.13 $card(C(R_n)) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Preuve : Puisque $RG_n \cong L(R_n)$ est un treillis distributif, on a par le théorème 1.5.14 : $card(B(R_n)) = card(C(R_n))$. Donc on a la conclusion du corollaire. $\square$

Rappelons, en terminant cette section, qu'il existe, par le théorème 1.5.14, puisque R_n est distributif, un isomorphisme d'epo entre $B(R_n)$ et $C(R_n)$. Cet isomorphisme envoie $B_{r,s,a,n}$ vers $C_{r,s,a-1,n}$.

2.4 Rectrices des matrices de rang généralisées

L'objectif de cette section est de trouver les rectrices d'une matrice de rang généralisée. Rappelons qu'une rectrice de $A \in RG_n$ est un élément maximal de $A^+ \cap B(RG_n)$. Puisque $RG_n \cong L(R_n)$, par le théorème 1.3.7, une rectrice de $A \in RG_n$ est un élément maximal de $A^+ \cap B(R_n)$.

On sait, par les théorèmes 1.3.5 et 2.3.3, que toute matrice de rang généralisée A est le sup des matrices $B_{r,s,a,n}$ qui sont $\leq A$: $A = \vee\{B_{r,s,a,n} \mid B_{r,s,a,n} \leq A\} = \vee(A^+ \cap B(R_n))$.

Lemme 2.4.1 *Si $B_{r,s,a,n}$ est une rectrice de $A \in RG_n$, alors $A[r,s] = a$.*

Preuve : Puisque $B_{r,s,a,n}$ est une rectrice de A, $X \in A^+ \cap B(R_n)$ et $X \neq B_{r,s,a,n}$ impliquent $X \not\geq B_{r,s,a,n}$; et on obtient alors, par le corollaire 2.2.3, $X[r,s] < a$.

Ce qui implique, puisque $B_{r,s,a,n} \in A^+ \cap B(R_n)$ et $B_{r,s,a,n}[r,s] = a$: $A[r,s] = (\vee(A^+ \cap B(R_n)))[r,s] = a$. $\square$

Une matrice $A \in RG_n$ possède un *point essentiel* $\boxed{\begin{array}{ccc} & a-1 & \\ a & a & a-1 \\ & a & \end{array}}$ en position r, s, $1 \leq r, s \leq n$ de *valeur* $a > 0$, si $A[r-1, s] = A[r, s+1] = a - 1$, $A[r, s-1] = A[r, s] = A[r+1, s] = a$. En clair, A possède un point essentiel en position r, s, si en remplaçant $A[r, s]$ par $A[r, s] - 1$, on est toujours dans RG_n. Par le lemme 2.2.1, on a : $\forall r, s$, tels que $A[r, s] \neq 0$, $A \geq B_{r,s,A[r,s],n}$.

Exemple 2.4.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathit{1} & 0 & 0 \\ \mathit{2} & 1 & 1 & \mathit{1} & 0 \\ 2 & 2 & \mathit{2} & 1 & \mathit{1} \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ \mathit{4} & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A possède des points essentiels en position 1,3; 2,1; 2,4; 3,3; 3,5; 5,1; de valeurs respectivement 1, 2, 1, 2, 1, 4.

Lemme 2.4.3 *Toute matrice $B_{r,s,a,n}$ possède un et un seul point essentiel; ce point essentiel est en position r,s de valeur a.*

Preuve : La conclusion du lemme vient de la définition de $B_{r,s,a,n}$: voir aussi la figure 2.2. $\square$

Lemme 2.4.4 *Soit $A \in RG_n$; si A possède un point essentiel en position r, s de valeur a, alors $B_{r,s,a,n} \in REC_{R_n}(A)$.*

Preuve : Puisque $A[r, s] = a$, $A \geq B_{r,s,a,n}$, ce qui implique : $B_{r,s,a,n} \in A^+ \cap B(R_n)$. Supposons que $X \in A^+ \cap B(R_n)$, avec $X > B_{r,s,a,n}$. Puisque A possède un point essentiel en position r, s de valeur a, puisque $A \geq X$, et par définition de $B_{r,s,a,n}$, on a :

$$a = A[r, s-1] \geq X[r, s-1] \geq B_{r,s,a,n}[r, s-1] = a \Rightarrow X[r, s-1] = a,$$

$$a = A[r, s] \geq X[r, s] \geq B_{r,s,a,n}[r, s] = a \Rightarrow X[r, s] = a,$$

$$a - 1 = A[r, s + 1] \geq X[r, s + 1] \geq B_{r,s,a,n}[r, s + 1] = a - 1 \Rightarrow X[r, s + 1] = a - 1,$$

$$a - 1 = A[r - 1, s] \geq X[r - 1, s] \geq B_{r,s,a,n}[r - 1, s] = a - 1 \Rightarrow X[r - 1, s] = a - 1,$$

$$a = A[r + 1, s] \geq X[r + 1, s] \geq B_{r,s,a,n}[r + 1, s] = a \Rightarrow X[r + 1, s] = a.$$

Donc X a un point essentiel en position r, s de valeur a. Contradiction puisque, par le lemme 2.4.3, X ne possède qu'un point essentiel. Donc $X \not> B_{r,s,a,n}$, ce qui implique : $B_{r,s,a,n} \in REC_{R_n}(A)$. $\square$

Théorème 2.4.5 *Soit $A \in RG_n$; alors $REC_{R_n}(A) = \{B_{r,s,a,n} \mid A$ possède un point essentiel en position r,s de valeur $a\}$.*

Preuve : Par le lemme 2.4.4, il suffit de montrer que si $B_{r,s,a,n} \in REC_{R_n}(A)$, alors A possède un point essentiel en position r, s de valeur a.

Par le lemme 2.4.1, $A[r, s] = a$.

Montrons que si $s > 1$ alors $A[r, s - 1] = a$.

Puisque $A[r, s] = a$, on a : $A[r, s - 1] = a + 1$ ou a. Supposons $A[r, s - 1] = a + 1$. Donc $Z = B_{r,s-1,a+1,n} \in A^+ \cap B(R_n)$. Puisque $B_{r,s,a,n} \in REC_{R_n}(A)$, $Z \not\geq B_{r,s,a,n}$; d'où, par le corollaire 2.2.3, $Z[r, s] < a$; ce qui implique : $Z[r, s - 1] \leq a$. Contradiction. Donc $A[r - 1, s] = a$.

On montre d'une manière semblable que si $r < n$ alors $A[r + 1, s] = a$.

Montrons que si $r > 1$ alors $A[r - 1, s] = a - 1$.

Puisque $A[r, s] = a$, on a : $A[r - 1, s] = a - 1$ ou a. Supposons $A[r - 1, s] = a$. Donc $Z = B_{r-1,s,a,n} \in A^+ \cap B(R_n)$. Puisque $B_{r,s,a,n} \in REC_{R_n}(A)$, $Z \not\geq B_{r,s,a,n}$; d'où, par le corollaire 2.2.3, $Z[r, s] < a$; ce qui implique : $Z[r - 1, s] < a$. Contradiction. Donc $A[r - 1, s] = a - 1$.

On montre d'une manière semblable que si $s < n$ alors $A[r, s + 1] = a - 1$.

Donc A possède un point essentiel en position r, s de valeur a. $\square$

Soit $A \in RG_n$, $A \neq \mathbf{0}$ et i, j une position dans la matrice A ; ce qui suit est un algorithme qui nous donne une rectrice X de A telle que $A[i,j] = X[i,j]$. Autrement dit, l'algorithme nous donne une matrice $X = B_{r,s,a,n}$ telle que 1) $X \leq A$; 2) $A[i,j] = X[i,j]$; et 3) A possède un point essentiel en position r, s de valeur a.

1) Supposons $A[i,j] = A[i,j+1] = b > 0$; soit s, le plus petit entier $\geq j+1$ tel que $A[i,s+1] = b-1$. Un tel s existe puisque $A[i,n+1] = 0$.

i) Supposons que $A[i-1,s] = b-1$; on définit $r \geq i$ comme étant le plus petit entier tel que $A[r,s] = A[r+1,s]$; un tel r existe puisque la ligne $n+1$ est une copie de la ligne n ; on pose $A[r,s] = d$. On retrouve sur les lignes $i-1, i, i+1, \ldots, r, r+1$ de A :

$$
\begin{array}{cccccc}
 & j & & & s & \\
i-1 & & & & b-1 & \\
i & b & \ldots & b & b & b-1 \\
i+1 & b+1 & \ldots & b+1 & b+1 & b \\
\vdots & & & & \vdots & \\
r-1 & d-1 & \ldots & d-1 & d-1 & d-2 \\
r & d & \ldots & d & d & d-1 \\
r+1 & & & & d &
\end{array}
$$

On a que A possède un point essentiel en position r, s de valeur d. De plus on observe que $A[i',j'] = B_{r,s,d,n}[i',j']$, $\forall i', j'$ tels que $i \leq i' \leq r$, $j \leq j' \leq s$. En particulier $A[i,j] = B_{r,s,d,n}[i,j]$ et on a trouvé la rectrice X.

ii) Supposons que $A[i-1,s] = b$; on définit $r \leq i$ comme étant le plus grand entier tel que $A[r-1,s] = b-1$; un tel r existe parce que $b > 0$ et parce que $A[0,s] = 0$.

On retrouve sur les lignes $r-1, r, \ldots, i-1, i$ de A :

$$\begin{array}{cccccc}
 & j & & & s & \\
r-1 & & & & b-1 & \\
r & b & \ldots & b & b & b-1 \\
\vdots & & & & \vdots & \\
i-1 & b & \ldots & b & b & b-1 \\
i & b & \ldots & b & b & b-1
\end{array}$$

On a que A possède un point essentiel en position r, s de valeur b. De plus on observe que $A[i', j'] = B_{r,s,b,n}[i', j']$, $\forall i', j'$ tels que $r \leq i' \leq i,\ j \leq j' \leq s$. En particulier $A[i, j] = B_{r,s,d,n}[i, j]$ et on a trouvé la rectrice X.

2) Supposons $A[i, j] = b > A[i, j+1]$; soit s, le plus grand entier $\leq j$ tel que $A[i, s-1] = A[i, s]$; un tel s existe puisque $A[i, 0] = A[i, 1]$; on pose $A[i, s] = c$.

i) Supposons que $A[i-1, s] = c-1$; on définit $r \geq i$ comme étant le plus petit entier tel que $A[r, s] = A[r+1, s]$; un tel d existe puisque la ligne $n+1$ est une copie de la ligne n ; on pose $A[r, s] = d$;. On retrouve sur les lignes $i-1, i, i+1, \ldots, r, r+1$ de A :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & s-1 & s & s+1 & & & j & \\
i-1 & & c-1 & & & & & \\
i & c & c & c-1 & \ldots & b+1 & b & b-1 \\
i+1 & c+1 & c+1 & c & \ldots & b+2 & b+1 & \\
\vdots & & & & & & \vdots & \\
r-1 & d-1 & d-1 & d-2 & \ldots & b+r-i & b+r-i-1 & \\
r & d & d & d-1 & \ldots & b+r-i+1 & b+r-i & \\
r+1 & & d & & & & &
\end{array}$$

On a que A possède un point essentiel en position r, s de valeur d. De plus on observe que $A[i', j'] = B_{r,s,d,n}[i', j']$, $\forall i', j'$ tels que $i \leq i' \leq r,\ s \leq j' \leq j$. En particulier $A[i, j] = B_{r,s,d,n}[i, j]$ et on a trouvé la rectrice X.

ii) Supposons que $A[i-1,s] = c$; on définit $r \leq i$ comme étant le plus grand entier tel que $A[r-1,s] = c-1$; un tel r existe parce que $c > 0$ et parce que $A[0,s] = 0$. On retrouve sur les lignes $r-1, r, \ldots, i-1, i$ de A :

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & s-1 & s & s+1 & & & j & \\
r-1 & & c-1 & & & & & \\
r & c & c & c-1 & \ldots & b+1 & b & \\
\vdots & & & & & & \vdots & \\
i-1 & c & c & c-1 & \ldots & b+1 & b & \\
i & c & c & c-1 & \ldots & b+1 & b & b-1
\end{array}
$$

On a que A possède un point essentiel en position r, s de valeur c. De plus on observe que $A[i',j'] = B_{r,s,c,n}[i',j']$, $\forall i',j'$ tels que $r \leq i' \leq i,\ \ s \leq j' \leq j$. En particulier $A[i,j] = B_{r,s,c,n}[i,j]$ et on a trouvé la rectrice X.

3) Supposons $A[i,j] = 0$; puisque $A \neq \mathbf{0}$, il existe $i \leq i' \leq n,\ 1 \leq j' \leq j$ tel que $A[i',j'] = 1$. Par 1) et 2), il existe r, s, a tels que $B_{r,s,a,n} \in REC_{R_n}(A)$ et $B_{r,s,a,n}[i',j'] = 1$. Puisque $i \leq i' \leq n,\ 1 \leq j' \leq j,\ B_{r,s,a,n}[i,j] = 0$ et on a trouvé la rectrice X. $\square$

Pour construire A à partir de ses rectrices, on met a en position r, s pour toutes les $B_{r,s,a,n} \in REC_{R_n}(A)$, et on met aux autres positions la plus petite valeur possible de telle façon qu'on soit toujours dans RG_n ; si dans ces dernières positions, on ne retrouve pas la plus petite valeur possible, c'est qu'on a alors un point essentiel, ce qui est une contradiction.

Pour construire A à partir de ses rectrices, on peut aussi procéder ainsi : $\forall i, j,\ A[i,j] = \vee\{X[i,j] \mid X \in REC_{R_n}(A)\}$.

Exemple 2.4.6 *Supposons que les rectrices de A soient $B_{2,3,1,4}$ et $B_{4,2,3,4}$; alors*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & \mathit{1} & * \\ * & * & * & * \\ * & \mathit{3} & * & * \end{pmatrix} \quad et\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \mathit{1} & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & \mathit{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \mathit{1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & \mathit{3} & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \mathit{1} & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & \mathit{3} & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

2.5 Corectrices des matrices de rang généralisées

L'objectif de cette section est de trouver les corectrices d'une matrice de rang généralisée. Cette section est en quelque sorte la version duale de la section précédente. Rappelons qu'une corectrice de $A \in RG_n$ est un élément minimal de $A^- \cap C(RG_n)$. Puisque $RG_n \cong L(R_n)$, par le théorème 1.3.8, une corectrice de $A \in RG_n$ est un élément minimal de $A^- \cap C(R_n)$.

On sait, par les théorèmes 1.3.6 et 2.3.6, que toute matrice de rang généralisée A est l'inf des matrices $C_{r,s,a,n}$ qui sont $\geq A$: $A = \wedge\{C_{r,s,a,n} \mid C_{r,s,a,n} \geq A\} = \wedge(A^- \cap C(R_n))$.

Lemme 2.5.1 *Si $C_{r,s,a,n}$ est une corectrice de $A \in RG_n$, alors $A[r,s] = a$.*

Preuve : Puisque $C_{r,s,a,n}$ est une corectrice de A, $X \in A^- \cap C(R_n)$ et $X \neq C_{r,s,a,n}$ impliquent $X \nleq C_{r,s,a,n}$; et on obtient alors, par le corollaire 2.2.10, $X[r,s] > a$.

Ce qui implique, puisque $C_{r,s,a,n} \in A^- \cap C(R_n)$ et $C_{r,s,a,n}[r,s] = a$: $A[r,s] = (\wedge(A^- \cap C(R_n)))[r,s] = a$. $\square$

Une matrice $A \in RG_n$ possède un *point coessentiel* $\boxed{\begin{array}{ccc} & a & \\ a+1 & a & a \\ & a+1 & \end{array}}$ *en position* $r, s,\ 1 \leq r \leq n-1,\ 1 < s \leq n$ de *valeur* a, $0 \leq a < min\{r, n+1-s\}$, si $A[r-1, s] = A[r, s] = A[r, s+1] = a$, $A[r, s-1] = A[r+1, s] = a+1$. On a aussi que $\boxed{\begin{array}{ccc} & a & \\ a+1 & a & a \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{cc} a & \\ a & a \\ a+1 & \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{cc} a & \\ a & a \end{array}}$ sont aussi des points coessentiels de valeur a, en position respectivement $n, s,\ s > 1$; $r, 1,\ r < n$; et $n, 1$. En clair, A possède un point coessentiel en position r, s, si en remplaçant $A[r, s]$ par $A[r, s]+1$, on est toujours dans RG_n. Par lemme 2.2.7, on a : $\forall r, s$, tels que $A[r, s] < min\{r, n+1-s\}$, $A \leq C_{r,s,A[r,s],n}$.

Exemple 2.5.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathit{0} & 0 \\ 2 & \mathit{1} & 1 & 1 & \mathit{0} \\ \mathit{2} & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & \mathit{2} & 2 & 1 & 1 \\ \mathit{3} & 3 & 2 & \mathit{1} & 1 \end{pmatrix}$$

A possède des points coessentiels en position 1,4 ; 2,2 ; 2,5 ; 3,1 ; 4,2 ; 5,1 ; 5,4 ; de valeurs respectivement 0, 1, 0, 2, 2, 3, 1.

Lemme 2.5.3 *Toute matrice $C_{r,s,a,n}$ possède un et un seul point coessentiel ; ce point coessentiel est en position r,s de valeur a.*

Preuve : La conclusion du lemme vient de la définition de $C_{r,s,a,n}$: voir aussi les figures 2.3 et 2.4. $\square$

Lemme 2.5.4 *Soit $A \in RG_n$; si A possède un point coessentiel en position r, s de valeur a, alors $C_{r,s,a,n} \in COREC_{R_n}(A)$.*

Preuve : Supposons que $X \in A^- \cap C(R_n)$, avec $X < C_{r,s,a,n}$. Puisque A possède un point coessentiel en position r, s de valeur a, puisque $A \leq X$, et par définition de $C_{r,s,a,n}$, on a :

$$a+1 = A[r,s-1] \leq X[r,s-1] \leq C_{r,s,a,n}[r,s-1] = a+1 \Rightarrow X[r,s-1] = a+1,$$

$$a = A[r,s] \leq X[r,s] \leq C_{r,s,a,n}[r,s] = a \Rightarrow X[r,s] = a,$$

$$a = A[r,s+1] \leq X[r,s+1] \leq C_{r,s,a,n}[r,s+1] = a \Rightarrow X[r,s+1] = a,$$

$$a = A[r-1,s] \leq X[r-1,s] \leq C_{r,s,a,n}[r-1,s] = a \Rightarrow X[r-1,s] = a,$$

$$a+1 = A[r+1,s] \leq X[r+1,s] \leq C_{r,s,a,n}[r+1,s] = a+1 \Rightarrow X[r+1,s] = a+1.$$

Donc X a un point coessentiel en position r,s de valeur a. Contradiction puisque, par le lemme 2.5.3, X ne possède qu'un point coessentiel. Donc $X \not< C_{r,s,a,n}$, ce qui implique : $C_{r,s,a,n} \in COREC_{R_n}(A)$. $\square$

Théorème 2.5.5 *Soit $A \in RG_n$; alors $COREC_{R_n}(A) = \{C_{r,s,a,n} \mid A$ possède un point coessentiel en position r,s de valeur a.*

Preuve : Par le lemme 2.5.4, il suffit de montrer que si $C_{r,s,a,n} \in COREC_{R_n}(A)$, alors A possède un point coessentiel en position r,s de valeur a.

Par le lemme 2.5.1, $A[r,s] = a$.

Montrons que si $s > 1$ alors $A[r,s-1] = a+1$.

Puisque $A[r,s] = a$, on a : $A[r,s-1] = a+1$ ou a. Supposons $A[r,s-1] = a$. Puisque $a < min\{r, n+1-s\}$, $a < min\{r, n+1-(s-1)\}$; d'où $Z = C_{r,s-1,a,n} \in A^- \cap C(R_n)$. Puisque $C_{r,s,a,n} \in COREC_{R_n}(A)$, $Z \not\leq C_{r,s,a,n}$; d'où, par le corollaire 2.2.10, $Z[r,s] > a$; ce qui implique : $Z[r,s-1] > a$. Contradiction. Donc $A[r,s-1] = a+1$.

On montre d'une manière semblable que si $r < n$ alors $A[r+1,s] = a+1$.

Montrons que si $r > 1$ alors $A[r-1,s] = a$.

Puisque $A[r,s] = a$, on a : $A[r-1,s] = a$ ou $a-1$. Supposons $A[r-1,s] = a-1$. Puisque $a < min\{r, n+1-s\}$, $a-1 < min\{r-1, n+1-s\}$; d'où $Z = C_{r-1,s,a-1,n} \in$

$A^- \cap C(R_n)$. Puisque $C_{r,s,a,n} \in CORECR_{R_n}(A)$, $Z \nleq C_{r,s,a,n}$; d'où, par le corollaire 2.2.10, $Z[r, s] > a$; ce qui implique : $Z[r-1, s] \geq a$. Contradiction. Donc $A[r-1, s] = a$.

On montre d'une manière semblable que si $s < n$ alors $A[r, s+1] = a$.

Donc A possède un point coessentiel en position r, s de valeur a. $\square$

Soit $A \in RG_n$, $A \neq \mathbf{1}$ et i, j une position dans la matrice A ; ce qui suit est un algorithme qui nous donne une corectrice X de A telle que $A[i, j] = X[i, j]$. Autrement dit, l'algorithme sous donne une matrice $X = C_{r,s,a,n}$ telle que 1) $X \geq A$; 2) $A[i, j] = X[i, j]$; et 3) A possède un point coessentiel en position r, s de valeur a.

1) Supposons $A[i, j] = A[i, j+1] = b < min\{i, n+1-j\}$; soit s, le plus grand entier $\leq j$ tel que $A[i, s-1] = b+1$. Si un tel s n'existe pas, on pose $s = 1$.

i) Supposons que $A[i-1, s] = b$; on définit $r \geq i$ comme étant le plus petit entier tel que $A[r+1, s] = b+1$. Si un tel r n'existe pas, on pose $r = n$. On retrouve sur les lignes $i-1, i, i+1, \ldots, r, r+1$ de A :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & s-1 & s & & & j & \\
i-1 & & b & & & & \\
i & b+1 & b & \cdots & b & b & b \\
i+1 & b+1 & b & \cdots & b & b & \\
\vdots & & & & & \vdots & \\
r & b+1 & b & \cdots & b & b & \\
r+1 & & b+1 & & & &
\end{array}$$

On a que A possède un point coessentiel en position r, s de valeur b. De plus on observe que $A[i', j'] = C_{r,s,b,n}[i', j']$, $\forall i', j'$ tels que $i \leq i' \leq r$, $s \leq j' \leq j$. En particulier $A[i, j] = C_{r,s,b,n}[i, j]$ et on a trouvé la corectrice X.

ii) Supposons que $A[i-1, s] = b-1$; on définit $r < i$ comme étant le plus grand entier tel que $A[r-1, s] = A[r, s]$; Un tel r existe parce que $b < i$; on pose $A[r, s] = c$.

On retrouve sur les lignes $r-1, r, r+1, \ldots, i-1, i$ de A :

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & s-1 & s & & & j & \\
r-1 & & c & & & & \\
r & c+1 & c & \ldots & c & c & \\
r+1 & c+2 & c+1 & \ldots & c+1 & c+1 & \\
\vdots & & & & & \vdots & \\
i-1 & b & b-1 & \ldots & b-1 & b-1 & \\
i & b+1 & b & \ldots & b & b & b
\end{array}
$$

On a que A possède un point coessentiel en position r, s de valeur c. De plus on observe que $A[i', j'] = C_{r,s,c,n}[i', j']$, $\forall i', j'$ tels que $r \leq i' \leq i,\ s \leq j' \leq j$. En particulier $A[i, j] = C_{r,s,c,n}[i, j]$ et on a trouvé la corectrice X.

2) Supposons $A[i, j] = b < min\{i, n+1-j\}$ et $A[i, j+1] = b-1$; soit s, le plus petit entier $> j$ tel que $A[i, s] = A[i, s+1]$; un tel s existe, parce que $b < n+1-j$; on pose $A[i, s] = c$.

i) Supposons que $A[i-1, s] = c$; on définit $r \geq i$ comme étant le plus petit entier tel que $A[r+1, s] = c+1$. Si un tel r n'existe pas, on pose $r = n$. On retrouve sur les lignes $i-1, i, i+1, \ldots, r, r+1$ de A :

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & j & & & & s & \\
i-1 & & & & & c & \\
i & b & b-1 & \ldots & c+1 & c & c \\
i+1 & b & b-1 & \ldots & c+1 & c & c \\
\vdots & & & & & \vdots & \\
r & b & b-1 & \ldots & c+1 & c & c \\
r+1 & & & & & c+1 &
\end{array}
$$

On a que A possède un point coessentiel en position r, s de valeur c. De plus on observe que $A[i', j'] = C_{r,s,c,n}[i', j']$, $\forall i', j'$ tels que $i \leq i' \leq r,\ j \leq j' \leq s$. En particulier $A[i, j] = C_{r,s,c,n}[i, j]$ et on a trouvé la corectrice X.

ii) Supposons dans un second temps que $A[i-1,s] = c-1$; on définit $r < i$ comme étant le plus grand entier tel que $A[r-1,s] = A[r,s]$; un tel r existe parce que $c < i$; on pose $d = A[r,s]$. On retrouve sur les lignes $i-1, i, i+1, \ldots, r, r+1$ de A :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & j & & & & s & \\
r-1 & & & \ldots & & d & d \\
r & b-(i-r) & b-(i-r)-1 & \ldots & d+1 & d & d \\
r+1 & b-(i-r)+1 & b-(i-r) & \ldots & d+2 & d+1 & d+1 \\
\vdots & & & & & \vdots & \\
i-1 & b-1 & b & \ldots & c & c-1 & c-1 \\
i & b & b-1 & \ldots & c+1 & c & c
\end{array}$$

On a que A possède un point coessentiel en position r, s de valeur d. De plus on observe que $A[i',j'] = C_{r,s,d,n}[i',j']$, $\forall i', j'$ tels que $r \leq i' \leq i,\ j \leq j' \leq s+1$. En particulier $A[i,j] = C_{r,s,c,n}[i,j]$ et on a trouvé la corectrice X.

3) Supposons que $A[i,j] = b = min\{i, n+1-j\}$. Puisque $A \neq \mathbf{1}$, $\exists i', j'$ tels que $A[i',j'] = min\{i', n+1-j'\} - 1$. Soit r, s tels que $A[r,s] = min\{r, n+1-s\} - 1$ et tels que : $\forall r', s'$ tels que la position r', s' est strictement à l'intérieur du quadrilatère formé des positions i, j ; r, s ; i, s ; r, j ; on ait $A[r',s'] = min\{r', n+1-s'\}$. Alors $A[i,j] = C_{r,s,min\{r,n+1-s\}-1,n}[i,j]$ et on a trouvé la corectrice X. $\square$

Pour construire A à partir de ses corectrices, on met a en position r, s pour toutes les $C_{r,s,a,n} \in COREC_{R_n}(A)$, et on met aux autres positions la plus grande valeur possible de telle façon qu'on soit toujours dans RG_n ; si dans ces dernières positions, on ne retrouve pas la plus grande valeur possible, c'est qu'on a alors un point coessentiel, ce qui est une contradiction.

Pour construire A à partir de ses corectrices, on peut aussi procéder ainsi : $\forall i, j,\ A[i,j] = \wedge\{X[i,j] \mid X \in COREC_{R_n}(A)\}$.

Exemple 2.5.6 *Supposons que les corectrices de A soient $C_{2,3,0,4}$ et $C_{4,2,2,4}$; alors*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & \mathit{0} & * \\ * & * & * & * \\ * & \mathit{2} & * & * \end{pmatrix} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \mathit{0} & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & \mathit{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \mathit{0} & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \mathit{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \mathit{0} & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & \mathit{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

2.6 Matrices de rang généralisées et matrices alternantes

On montre dans cette section qu'il y a une bijection entre les matrices de rang généralisées d'ordre n et les matrices à signes alternant. Cette bijection se généralise en une bijection entre les matrices de rang généralisées et les matrices alternantes.

Soit $SG_n = \{A \in RG_n \mid A[n,1] = n\}$. SG_n est l'ensemble des matrices de rang généralisées d'ordre n. Si $A \in SG_n$, alors la première colonne de A est $[1,\ldots,n]^T$ et la dernière ligne de A est $[n,\ldots,1]$. SG_n est un sous-treillis de RG_n parce que $SG_n \subseteq RG_n$ et parce que $\forall X, Y \in SG_n$, $(X \vee Y)[n,1] = (X \wedge Y)[n,1] = n$.

Soit SR_n l'ensemble des matrices de rang d'ordre n. En clair, $SR_n = \{A \in R_n \mid A[n,1] = n\}$. On a évidemment $SR_n \subseteq SG_n$.

Pour une matrice $A \in RG_n$, le motif interdit $\boxed{\begin{matrix} a+1 & a \\ a+1 & a+1 \end{matrix}}$, $a = 0,\ldots,n-1$, est aussi appelé un *motif moins* ; le motif $\boxed{\begin{matrix} a & a \\ a+1 & a \end{matrix}}$, $a = 0,\ldots,n-1$, est appelé un *motif plus* ; tout autre motif 2×2 est appelé un *motif zéro*.

Si A possède le motif $\boxed{\begin{matrix} a \\ a+1 \end{matrix}}$, en position r, s, $0 \leq r < n, 0 < s \leq n$, alors il est suivi à droite soit du motif $\boxed{\begin{matrix} a \\ a+1 \end{matrix}}$, soit du motif $\boxed{\begin{matrix} a-1 \\ a \end{matrix}}$, soit du motif $\boxed{\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}}$. Si A possède le motif $\boxed{\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}}$, en position r, s, $0 \le r < n, 0 < s \le n$, alors il est suivi soit du motif $\boxed{\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}}$, soit du motif $\boxed{\begin{matrix} a-1 \\ a-1 \end{matrix}}$, soit du motif $\boxed{\begin{matrix} a-1 \\ a \end{matrix}}$.

Les remarques qui précèdent permettent de voir qu'un motif plus en position r, s, $0 \le r < n, 0 < s < n$, est suivi en position $r, s+1$ soit d'un motif zéro, soit d'un motif moins :

$$\boxed{\begin{matrix} a & a & a \\ a+1 & a & a \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} a & a & a-1 \\ a+1 & a & a-1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} a & a & a-1 \\ a+1 & a & a \end{matrix}};$$

et qu'un motif moins en position r, s, $0 \le r < n, 0 < s < n$, est suivi en position $r, s+1$ soit d'un motif zéro, soit d'un motif plus :

$$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a-1 \\ a+1 & a+1 & a \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a \end{matrix}};$$

que le motif $\boxed{\begin{matrix} a \\ a+1 \end{matrix}}$, en position r, s, $0 \le r < n, 0 < s \le n$, est le début d'un motif zéro ou d'un motif plus :

$$\boxed{\begin{matrix} a & a \\ a+1 & a+1 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} a & a-1 \\ a+1 & a \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} a & a \\ a+1 & a \end{matrix}};$$

que le motif $\boxed{\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}}$, en position r, s, $0 \le r < n, 1 < s \le n+1$, est la fin d'un motif zéro ou d'un motif plus :

$$\boxed{\begin{matrix} a & a \\ a & a \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} a+1 & a \\ a+1 & a \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} a & a \\ a+1 & a \end{matrix}}.$$

On a donc horizontalement que les motifs plus et moins vont en alternant, le dernier étant un motif plus, parce qu'il y a le motif $\boxed{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}}$, en position $r, n+1$, $\forall r$ tel que $0 \leq r < n$, et qu'ils sont précédés, suivis et entrecoupés d'un certain nombre (qui peut être 0) de motifs zéro. Si $A \in SR_n$, on a de plus que le premier motif, parmi les motifs plus et moins, est un motif plus, parce que la première colonne de A est $[1, \ldots, n]^T$.

Exemple 2.6.1 *:*

$$\boxed{\begin{matrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}} \quad \text{donne} : 0\,0\ +\ 0\ -\ +0\ -\ 0\,0+$$

Si maintenant on travaille verticalement (du bas vers le haut), on arrive aux conclusions : les motifs plus et moins vont en alternant, le dernier (le plus au nord) étant un motif plus, parce qu'il y a le motif $\boxed{0 \quad 0}$, en position $0, s$, $\forall s$ tel que $1 \leq s \leq n$, et qu'ils sont précédés, suivis et entrecoupés d'un certain nombre (qui peut être 0) de motifs zéro. Si $A \in SR_n$, on a de plus que le premier motif (le plus au sud), parmi les motifs plus et moins, est un motif plus, parce que la dernière ligne de A est $[n, \ldots, 1]$.

On associe à une matrice $A \in RG_n$, une matrice notée A' :

$$A'[r,s] = \begin{cases} +1 & \text{si } A \text{ possède un motif plus en position } r-1, s \\ -1 & \text{si } A \text{ possède un motif moins en position } r-1, s \\ 0 & \text{si } A \text{ possède un motif zéro en position } r-1, s \end{cases}$$

Toutes les considérations qui précèdent nous donnent les quatre remarques suivantes.

(1) Si $A \in RG_n$, alors A' est une *matrice alternante*, i.e. une matrice carrée de $0, 1, -1$ telle que la somme des éléments sur chaque ligne et sur chaque colonne est 1 ou 0, les 1 et les -1 allant en alternant sur chaque ligne et sur chaque colonne, l'entrée $\neq 0$ le plus à droite (si elle existe) sur toute ligne est un 1, l'entrée $\neq 0$ le plus au nord (si elle existe) sur toute colonne est un 1.

Notons que dans une matrice alternante, il peut y avoir des lignes ou des colonnes nulles.

Exemple 2.6.2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *donne* $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) si $A \in SG_n$, alors A' est une *matrice à signe alternant*, i.e. une matrice alternante telle que la somme des éléments sur chaque ligne et sur chaque colonne est 1. Notons que dans une matrice à signe alternant, le premier élément non nul et le dernier élément non nul d'une ligne et d'une colonne sont 1.

Exemple 2.6.3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *donne* $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) Si $A \in R_n$, alors A' est une matrice alternante sans -1, parce que A n'a pas de motif moins.

Exemple 2.6.4 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *donne* $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) Si $A \in SR_n$, alors A' est une matrice alternante sans -1, parce que A n'a pas de motif moins, telle que la somme des éléments sur chaque ligne et sur chaque colonne est 1. Les matrices A' sont alors des matrices de permutations.

Exemple 2.6.5 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *donne* $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Lemme 2.6.6 *Soit $A \in RG_n$ et soit $|r, s| =$*

$$card\{(r', s') \mid r' < r, s' \geq s, A \text{ possède un motif plus en position } r', s'\}$$

$$- \, card\{(r', s') \mid r' < r, s' \geq s, A \text{ possède un motif moins en position } r', s'\};$$

(En clair, $|r, s|$ est le nombre de motifs plus - le nombre de motifs moins situés au nord-est de la position r, s)

alors $A[r, s] = |r, s|$.

Preuve : Si A possède un motif $\boxed{\begin{array}{c} a \\ a+1 \end{array}}$, en position $r-1, s,\ 1 \leq r \leq n,\ 1 \leq s \leq n$, alors c'est le début d'un motif plus ou d'un motif zéro ; si c'est un motif zéro, ce motif zéro est suivi d'un certain nombre de motifs zéro et d'un motif plus ; puisque les motifs plus et moins alternent pour se terminer par un motif plus, il y a horizontalement à droite du motif $\boxed{\begin{array}{c} a \\ a+1 \end{array}}$ un nombre de motifs plus qui est un de plus que le nombre de motifs moins. Ainsi $A[r, s] = A[r-1, s] + 1 \;\Rightarrow\; |r, s| = |r-1, s| + 1$.

Si A possède un motif $\boxed{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}}$, en position $r-1, s,\ 1 \leq r \leq n,\ 1 \leq s \leq n$, alors c'est le début d'un motif moins ou d'un motif zéro ; si c'est un motif zéro, ce motif zéro est suivi d'un certain nombre de motifs zéro et possiblement d'un motif moins ; puisque les motifs plus et moins alternent pour se terminer par un motif plus, on a qu'il y a horizontalement à droite du motif $\boxed{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}}$ autant de motifs plus que de motifs moins. Ainsi $A[r, s] = A[r-1, s] \;\Rightarrow\; |r, s| = |r-1, s|$.

Si on travaille verticalement (du bas vers le haut), on arrive aux conclusions : $A[r, s+1] = A[r, s] - 1 \;\Rightarrow\; |r, s| = |r, s+1| - 1$ et $A[r, s+1] = A[r, s] \;\Rightarrow\; |r, s| = |r, s+1|$, $1 \leq r \leq n$, $1 \leq s \leq n$.

Puisque $A[1, 1] = 1$ s'il y a un motif plus en position $0, s$, pour un certain s (il ne peut pas y en avoir plus d'un), et $A[1, 1] = 0$ sinon, on a $A[1, 1] = |1, 1|$ et on obtient la conclusion du lemme par double induction sur r et s. $\square$

Corollaire 2.6.7 *Soit $A \in R_n$; alors $A[r, s] =$*

$$card\{(r', s') \mid r' < r, s' \geq s, A \text{ possède un motif plus en position } r', s'\}$$

En clair, $A[r, s]$ est le nombre de motifs plus situés au nord-est de la position r, s

Preuve : On obtient facilement la conclusion du corollaire puisque $A \in R_n$ ne possède pas de motif interdit, i.e. ne possède pas de motif moins. $\square$

Théorème 2.6.8 *Il y a une bijection entre RG_n, l'ensemble des matrices de rang généralisées, et les matrices alternantes.*

Preuve : Le lemme 2.6.6 montre que l'association $SG_n \ni A \mapsto A'$ est une fonction bijective puisque $A[r, s] =$ le nombre de motifs plus - le nombre de motifs moins situés au nord-est de la position r, s, i.e. le nombre de motifs plus - le nombre de motifs moins en position i, j où $0 \leq i < r$, $j \leq s \leq n$. Donc $A[r, s] =$ le nombre de +1 - le nombre de -1 situés au nord, à l'est, au nord-est de la position r, s ou à la position r, s, dans la matrice A'. $\square$

Théorème 2.6.9 *Il y a une bijection entre SG_n, l'ensemble des matrices de rang généralisées d'ordre n, et les matrices à signes alternant.*

Preuve : Voir la remarque (2) ci-haut. $\square$

Corollaire 2.6.10 *La cardinalité de R_n est :*

$$\sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}^2 i!$$

Preuve : Par la remarque 3, construire une matrice $A \in R_n$, c'est construire une matrice carrée d'ordre n A' de 0 et de 1, chaque ligne et chaque colonne contenant au plus un 1. Pour ce faire, on choisit d'abord une ligne et une colonne, ce qui se fait de $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}^2$ façons, i représentant le nombre de 1 ; ensuite sur chaque ligne choisie, on choisit une colonne, ce qui se fait de $i!$ façons. □

Corollaire 2.6.11 *Il y a une bijection entre SR_n, l'ensemble des matrices de rang d'ordre n, et le groupe symétrique.*

Preuve : Voir la remarque (4) ci-haut. □

Exemple 2.6.12 *: La matrice A' de l'exemple 2.6.5 représente la permutation :*

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7 Base des matrices de rang d'ordre n

Par le corollaire 2.6.11, on a une bijection entre le groupe symétrique et SR_n, l'ensemble des matrices de rang d'ordre n. Le but de cette section est de caractériser la base de SR_n, $B(SR_n)$, et de calculer card$(B(SR_n))$.

On remarque par le lemme 2.2.1 : $\wedge_{SR_n} = \mathbf{0}_{SR_n} = B_{n,1,n,n}$, i.e. $\forall A \in SR_n = \{X \in R_n \mid X[n,1] = n\}$, $B_{n,1,n,n} \leq A$. Donc $\forall A \in SR_n$, $B_{n,1,n,n} \in A^+ \cap B(R_n)$.

On a : $B_{n,1,n,n}[r,s] = max\{n-(n-r)-(s-1), 0\} = max\{r-s+1, 0\}$.

Exemple 2.7.1 :

$$B_{5,1,5,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lemme 2.7.2 *$B_{n,1,n,n}$ est un élément maximal de $B(R_n)$.*

Preuve : Supposons $B_{r,s,a,n} \geq B_{n,1,n,n}$. Donc, par le lemme 2.2.1, $B_{r,s,a,n}[n,1] \geq n$.

Par définition de $B_{r,s,a,n}$, on a : $B_{r,s,a,n}[n,1] = a$. Or $a \leq min\{r, n+1-s\} \leq n$. Donc $n \leq B_{r,s,a,n}[n,1] = a \leq min\{r, n+1-s\} \leq n$. Donc $r = n$, $s = 1$, $a = n$. Donc $B_{r,s,a,n} \geq B_{n,1,n,n} \Rightarrow B_{r,s,a,n} = B_{n,1,n,n}$. D'où la conclusion du lemme. $\square$

Corollaire 2.7.3 *$\forall A \in SR_n$, $B_{n,1,n,n} \in REC_{R_n}(A)$.*

Preuve : On a : $B_{n,1,n,n} \in A^+ \cap B(R_n)$. Par le lemme 2.7.2, $B_{n,1,n,n}$ est un élément maximal de $A^+ \cap B(R_n)$. D'où $B_{n,1,n,n} \in REC_{R_n}(A)$. $\square$

Par le corollaire 2.2.3, $B_{n,1,n,n} \not\geq B_{r,s,a,n} \Leftrightarrow B_{n,1,n,n}[r,s] = max\{r-s+1, 0\} < a = B_{r,s,a,n}[r,s]$. Donc, par par lemme 2.7.2, $B_{n,1,n,n}$ et $B_{r,s,a,n}$ sont non comparables ssi $a > max\{r-s+1, 0\}$.

On définit pour $a > max\{r-s+1, 0\}$: $BS_{r,s,a,n} = B_{r,s,a,n} \vee B_{n,1,n,n}$. Notons : $BS_{r,s,a,n}[r,s] = a > max\{r-s+1, 0\}$. Nous allons montrer que la base de SR_n est formée exactement des matrices $BS_{r,s,a,n}$.

Lemme 2.7.4 *$REC_{R_n}(BS_{r,s,a,n}) = \{B_{r,s,a,n}, B_{n,1,n,n}\}$.*

Preuve : Posons $X = BS_{r,s,a,n}$. Par le lemme 2.7.3, $B_{n,1,n,n} \in REC_{R_n}(X)$.

Puisque $X = B_{r,s,a,n} \vee B_{n,1,n,n}$, on a : $\forall i,j,\ X[i,j] = B_{r,s,a,n}[i,j] \vee B_{n,1,n,n}[i,j]$. On a alors :

$X[r,s] = a$ puisque $B_{r,s,a,n}[r,s] = a > max\{r-s+1,0\} = B_{n,1,n,n}[r,s]$;

$X[r,s-1] = a$ puisque $B_{r,s,a,n}[r,s-1] = a \geq max\{r-(s-1)+1,0\} = B_{n,1,n,n}[r,s-1]$;

$X[r+1,s] = a$ puisque $B_{r,s,a,n}[r+1,s] = a \geq max\{(r+1)-s+1,0\} = B_{n,1,n,n}[r+1,s]$;

$X[r-1,s] = a-1$ puisque $B_{r,s,a,n}[r-1,s] = a-1 > max\{(r-1)-s+1,0\} = B_{n,1,n,n}[r-1,s]$;

$X[r,s+1] = a-1$ puisque $B_{r,s,a,n}[r,s+1] = a-1 > max\{r-(s+1)+1,0\} = B_{n,1,n,n}[r+1,s]$.

Donc X possède un point essentiel en position r,s de valeur a ; d'où, par le lemme 2.4.4, $B_{r,s,a,n} \in REC_{R_n}(X)$.

Supposons que $B_{x,y,z,n} \in REC_{R_n}(X) - B_{n,1,n,n}$. Par le théorème 2.4.5, X a un point essentiel en position xy de valeur z. On a donc : $X[x,y-1] = X[x,y] = X[x+1,y] = z > 0$ et $X[x-1,y] = X[x,y+1] = z-1$.

De plus, $x < n$ ou $y > 1$. En effet, $x = 1$ et $y = n$ impliquent $z < n$, puisque $B_{x,y,z,n} \neq B_{n,1,n,n}$; on a alors : $B_{x,y,z,n} = B_{n,1,z,n} < B_{n,1,n,n}$, ce qui implique $B_{x,y,z,n} \notin REC_{R_n}(X)$, contradiction.

On a : $B_{r,s,a,n}[x,y] = z$ ou $B_{n,1,n,n}[x,y] = z$. Supposons $B_{n,1,n,n}[x,y] = z$. Alors, par définition de $B_{n,1,n,n}$, si $x < n$ alors $B_{n,1,n,n}[x+1,y] = z+1$, et si $y > 1$ alors $B_{n,1,n,n}[x,y-1] = z+1$. Puisque $x < n$ ou $y > 1$, on a une de ces deux possibilités. Ceci contredit le fait que X possède un point essentiel en position x,y de valeur z. D'où : $B_{r,s,a,n}[x,y] = z > B_{n,1,n,n}[x,y]$. Et ceci implique :

$B_{r,s,a,n}[x,y-1] = z$ puisque $z = B_{r,s,a,n}[x,y] \leq B_{r,s,a,n}[x,y-1] \leq X[x,y-1] = z$;

$B_{r,s,a,n}[x+1,y] = z$ puisque $z = B_{r,s,a,n}[x,y] \leq B_{r,s,a,n}[x+1,y] \leq X[x+1,y] = z$;

$B_{r,s,a,n}[x-1,y] = z-1$ puisque $z-1 \leq B_{r,s,a,n}[x,y]-1 \leq B_{r,s,a,n}[x-1,y] \leq X[x-1,y] = z-1$;

$B_{r,s,a,n}[x,y+1] = z-1$ puisque $z-1 \leq B_{r,s,a,n}[x,y]-1 \leq B_{r,s,a,n}[x,y+1] \leq X[x,y+1] = z-1$.

D'où $B_{r,s,a,n}$ possède un point essentiel en position x, y de valeur z. Par le lemme 2.4.3, $B_{r,s,a,n}$ ne possède qu'un point essentiel. D'où $B_{x,y,z,n} = B_{r,s,a,n}$. On a ainsi la conclusion du lemme. $\square$

On construit $BS_{r,s,a,n}$ en mettant a en position r, s ; n en position $n, 1$; et la plus petite valeur possible dans les autres positions de façon à avoir une matrice de RG_n.

Exemple 2.7.5 *Pour construire* $BS_{3,4,1,5}$ *:*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & \mathit{1} & * \\ * & * & * & * & * \\ \mathbf{5} & * & * & * & * \end{pmatrix} \quad \text{et } BS_{3,4,1,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \mathit{1} & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{5} & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lemme 2.7.6 $BS_{r,s,a,n} \in SR_n$.

Preuve : $BS_{r,s,a,n}[n,1] = n$, puisque $BS_{r,s,a,n} = B_{r,s,a,n} \vee B_{n,1,n,n}$ et puisque $B_{n,1,n,n}[n,1] = n$. Il suffit donc de montrer : $BS_{r,s,a,n} \in R_n$, i.e. que $BS_{r,s,a,n}$ ne possède pas de motif interdit.

Il n'y a qu'une seule façon d'obtenir le motif interdit $\boxed{\begin{matrix} i+1 & i \\ i+1 & i+1 \end{matrix}}$, $i \geq 0$, comme le suprémum de deux motifs non interdits. Ces deux motifs non interdits sont : $\boxed{\begin{matrix} i+1 & i \\ i+1 & i \end{matrix}}$ et $\boxed{\begin{matrix} i & i \\ i+1 & i+1 \end{matrix}}$.

Or les motifs 2 par 2 de $B_{n,1,n,n}$ sont : $\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}}$ et $\boxed{\begin{matrix} j+1 & j \\ j+2 & j+1 \end{matrix}}$, $0 \leq j \leq n-1$. Donc $BS_{r,s,a,n} \in S_n$. $\square$

Théorème 2.7.7 *La base de SR_n est formée exactement des matrices $BS_{r,s,a,n}$.*

Preuve : Montrons : $BS_{r,s,a,n} \in B(SR_n)$. Par le lemme 1.3.1, il suffit de montrer : $BS_{r,s,a,n} \neq \vee_{SR_n}\{X \in SR_n \mid X < BS_{r,s,a,n}\}$.

Rappelons : $BS_{r,s,a,n}[r,s] = a > max\{r-s+1, 0\}$.

On a : $X < BS_{r,s,a,n} \Rightarrow X[r,s] \leq B_{n,1,n,n}[r,s] = max\{r-s+1,0\} \Rightarrow X[r,s] < a \leq a-1$. Donc $X < BS_{r,s,a,n} \Rightarrow$ (par le lemme 2.2.7) $X \leq C_{r,s,a-1,n}$.

La figure 2.4 montre, puisque $a-1 \geq max\{r-s+1,0\}$, que $C_{r,s,a-1,n}[n,1] = n$, i.e. que $C_{r,s,a-1,n} \in SR_n$.

Donc si $\vee_{SR_n}\{X \in SR_n \mid X < BS_{r,s,a,n}\}$ existe, alors $\vee_{SR_n}\{X \in SR_n \mid X < BS_{r,s,a,n}\} \leq C_{r,s,a-1,n}$. On a alors $BS_{r,s,a,n} \neq \vee_{SR_n}\{X \in SR_n \mid X < BS_{r,s,a,n}\}$, puisque $BS_{r,s,a,n} \not\leq C_{r,s,a-1,n}$. Donc $BS_{r,s,a,n} \in B(SR_n)$.

Soit $A \in B(SR_n)$; montrons que A est une matrice $BS_{r,s,a,n}$. On a : $A = \vee REC_{R_n}(A)$; on a aussi : $B_{n,1,n,n} \in REC_{R_n}(A)$. Supposons $REC_{R_n}(A) = \{X_1, \ldots, X_m\}$, avec $X_1 = B_{n,1,n,n}$ et $X_2, \ldots, X_m$, toutes des matrices $B_{r,s,a,n}$ avec $a > max\{r-s+1,0\}$, puisque, $B_{n,1,n,n}$ et $B_{r,s,a,n}$ étant des rectrices de A, sont non comparables. On a $m > 1$, puisque sinon, $A = B_{n,1,n,n}$, ce qui donne une contradiction parce que $0_{SR_n} = B_{n,1,n,n}$ n'est pas dans $B(SR_n)$.

Par le lemme 2.7.6, $(X_1 \vee X_2), \ldots, (X_1 \vee X_m) \in SR_n$. On a aussi que $(X_1 \vee X_2), \ldots, (X_1 \vee X_m)$ sont toutes, par définition, des matrices $BS_{r,s,a,n}$. On a : $A = X_1 \vee \ldots \vee X_m = (X_1 \vee X_2) \vee \ldots \vee (X_1 \vee X_m) \Rightarrow$ (puisque $A \in B(SR_n)$) $\exists i$, $2 \leq i \leq m$, tel que $A = (X_1 \vee X_i)$. Donc A est une matrice $BS_{r,s,a,n}$. $\square$

On verra plus loin que le théorème suivant est un résultat qu'on trouve dans

(Lascoux et Schützenberger, 1996).

Théorème 2.7.8 $card(B(SR_n)) = \begin{pmatrix} n+1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Preuve : On a : $BS_{r,s,a,n}[i,1] = i$ et $BS_{r,s,a,n}[n,j] = n-(j-1)$. Puisque $BS_{r,s,a,n}$ a un point essentiel $\boxed{\begin{array}{ccc} & a-1 & \\ a & a & a-1 \\ & a & \end{array}}$ en position r, s de valeur a, cette position sur la ligne $r = a+k$, $k = 0, 1, \ldots, n-(a-1)-2 = n-a-1$, peut être $a+k, 2+k$; $a+k, 2+k+1$; ... ; $a+k, n-(a-1)$; il y a alors $n-(a-1)-(2+k)+1 = n-a-k$ positions possibles.

À titre d'exemple, les position r, s pour lesquelles il est possible d'avoir une matrice $BS_{r,s,2,6}$ sont : 2,2 ; 2,3 ; 2,4 ; 2,5 ; 3,3 ; 3,4 ; 3,5 ; 4,4 ; 4,5 ; 5,5. Il y en a : $4+3+2+1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ 2 & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & . \\ 3 & 2 & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & . \\ 4 & 3 & 2 & \mathbf{2} & \mathbf{2} & . \\ 5 & 4 & 3 & 2 & \mathbf{2} & . \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc pour une valeur donnée a, il y a le nombre suivant de matrices $BS_{r,s,a,n}$:

$$n-a+\ldots+3+2+1 = \frac{(n-a)(n-a+1)}{2} = \begin{pmatrix} n-a+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Et la cardinalité de $B(SR_n)$ est :

$$\sum_{a=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n-a+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Cette dernière égalité s'explique par le fait que choisir 3 nombres parmi les nombres $1, 2, \ldots, n+1$, c'est : 1) choisir un nombre, disons a, parmi les nombres

$1, 2, \ldots, n-1$ (ce a est le plus petit des 3 nombres qu'on a à choisir) et 2) choisir 2 nombres parmi les nombres $a+1, a+2, \ldots, n+1$, ce qui se fait de $\binom{n+1-(a+1)+1}{2} = \binom{n-a+1}{2}$ façons. $\square$

Théorème 2.7.9 *La cobase de SR_n est formée exactement des matrices $C_{r,s,a,n}$, où $max\{r-s+1, 0\} \leq a < min\{r, n+1-s\}$.*

Preuve : La figure 2.4 montre, puisque $max\{r-s+1, 0\} \leq a$, que $C_{r,s,a,n}[n, 1] = n$, i.e. que $C_{r,s,a,n} \in SR_n$.

Montrons : $C_{r,s,a,n} \in C(SR_n)$. Par le lemme 1.3.2, il suffit de montrer : $C_{r,s,a,n} \neq \wedge_{SR_n}\{X \in SR_n \mid X > C_{r,s,a,n}\}$.

Soit $X \in SR_n$. On a : $X > C_{r,s,a,n} \Rightarrow$(par le corollaire 2.2.10) $X[r, s] > a \geq a+1$. Donc $X > C_{r,s,a,n} \Rightarrow$ (par le lemme 2.2.1) $X \geq B_{r,s,a+1,n}$. De plus, $X[n, 1] = 1$; donc $X \geq B_{n,1,n,n}$. On a donc : $X \geq B_{r,s,a+1,n} \vee B_{n,1,n,n}$. Puisque $a+1 > max\{r-s+1, 0\}$), on a donc : $X > C_{r,s,a,n} \Rightarrow X \geq BS_{r,s,a+1,n}$.

Donc si $\wedge_{SR_n}\{X \in SR_n \mid X > C_{r,s,a,n}\}$ existe, alors $\wedge_{SR_n}\{X \in SR_n \mid X > C_{r,s,a,n}\} \geq BS_{r,s,a+1,n}$. On a alors $C_{r,s,a,n} \neq \wedge_{SR_n}\{X \in SR_n \mid X > C_{r,s,a,n}\}$, puisque $C_{r,s,a,n} \not\geq BS_{r,s,a+1,n}$. Donc $C_{r,s,a,n} \in C(SR_n)$. $\square$

Théorème 2.7.10 *$\forall r, s, a$ tels que $1 \leq r, s \leq n$ et $max\{r-s+1, 0\} < a \leq min\{r, n+1-s\}$; alors $SR_n - BS^-_{r,s,a,n} = C^+_{r,s,a-1,n}$, i.e. $BS^-_{r,s,a,n}$ et $C^+_{r,s,a-1,n}$ clivent SR_n.*

Preuve : Soit $X \in SR_n$.

Par le lemme 2.2.1, on a : $X[r, s] \geq a \Rightarrow X \geq B_{r,s,a,n}$; puisque $X \in SR_n$, $X \geq B_{n,1,n,n}$; puisque $max\{r-s+1, 0\} < a$, on a donc : $X[r, s] \geq a \Rightarrow X \geq BS_{r,s,a,n}$.

Par le lemme 2.2.7, on a : $X[r, s] \leq a-1 \Rightarrow X \leq C_{r,s,a-1,n}$. Puisque $max\{r-s+1, 0\} \leq a-1$, la figure 2.4 montre que $C_{r,s,a-1,n} \in SR_n$.

Donc $SR_n - BS^-_{r,s,a,n} = C^+_{r,s,a-1,n}$. $\square$

Théorème 2.7.11 *$L(SR_n) = SG_n$: le treillis enveloppant de RS_n est SG_n.*

Preuve : La conclusion du théorème vient alors du théorème 1.2.11, puisque $\forall X \in SG_n$, $X = sup\{BS_{r,s,a,n} \mid 1 \leq r, s \leq n, X[r,s] = a\} = inf\{C_{r,s,a,n} \mid 1 \leq r, s \leq n, X[r,s] = a\}$. $\square$

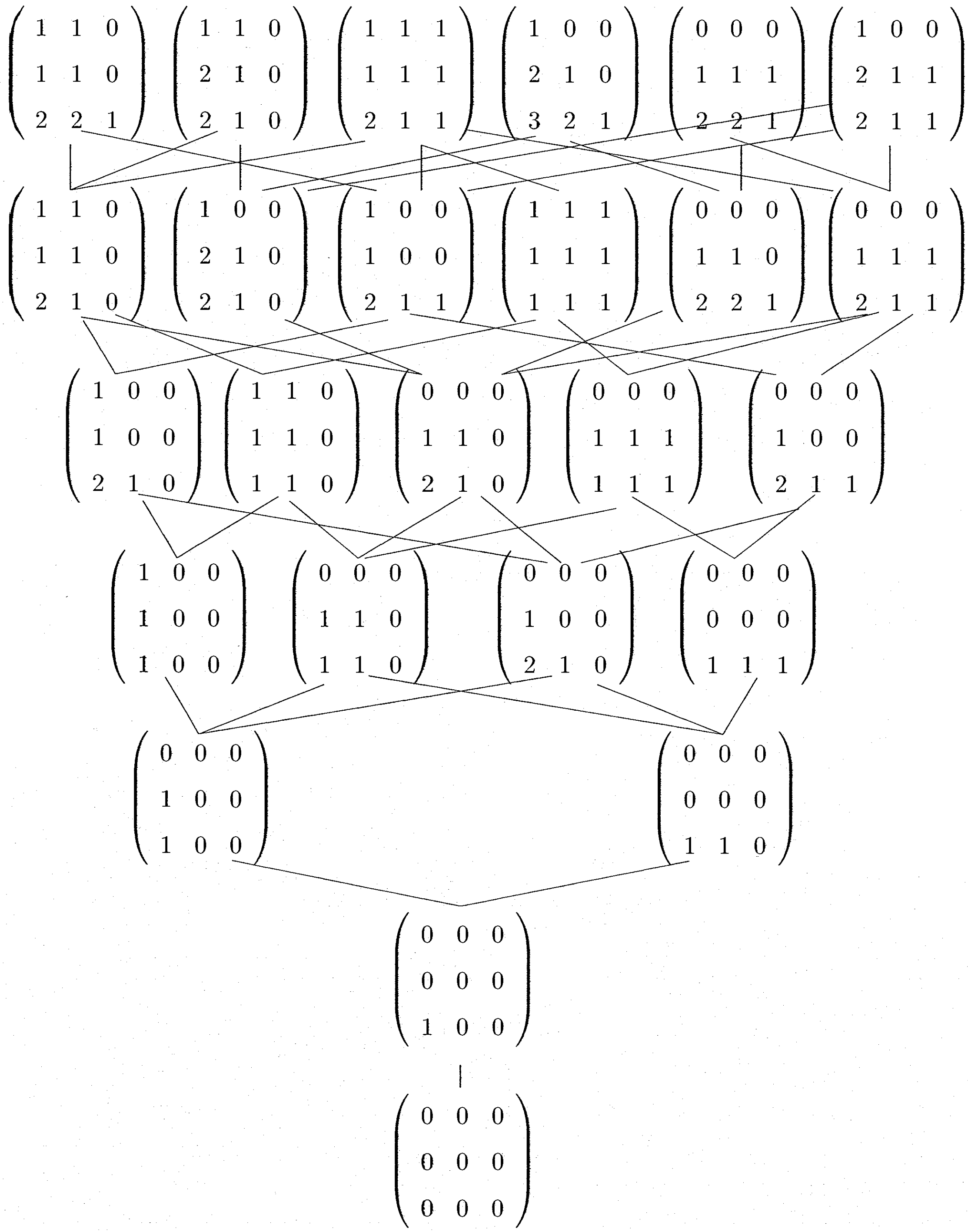
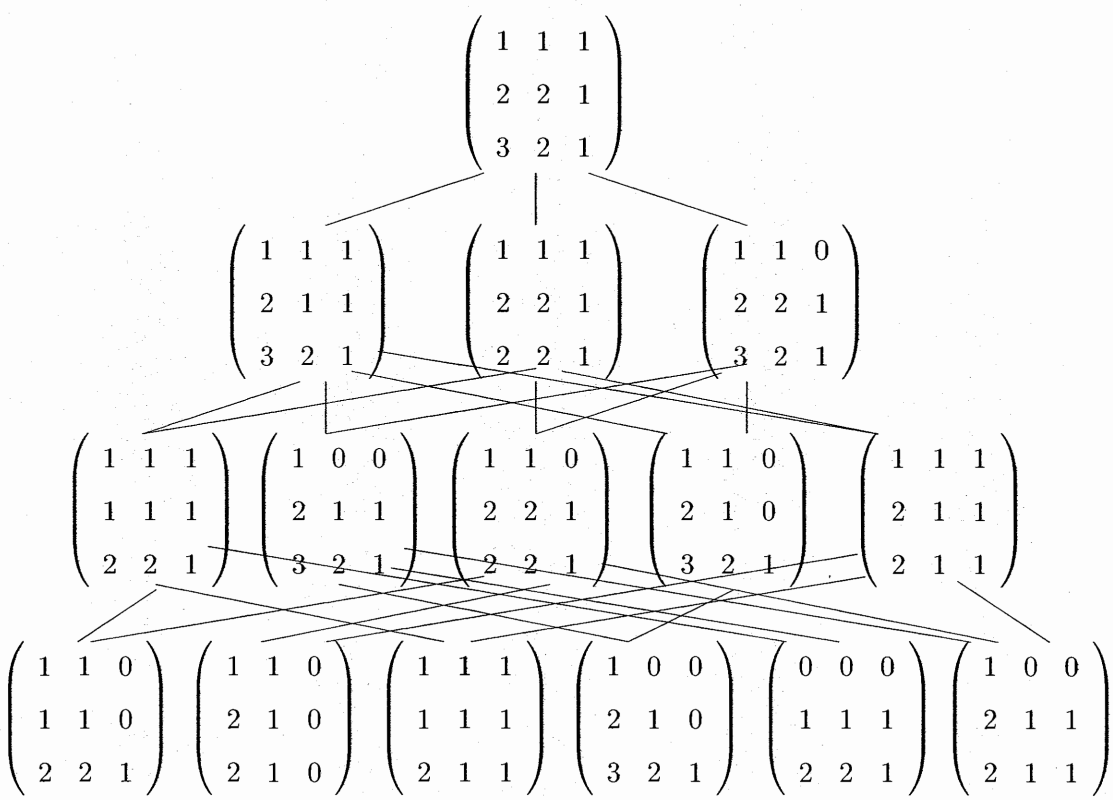


Figure 2.5 L'epo R_3



$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

CHAPITRE III

FONCTIONS PARTIELLES INJECTIVES

Le groupe symétrique, avec l'ordre de Bruhat, est un ensemble partiellement ordonné. Dans ce chapitre, on fait de l'ensemble des fonctions partielles injectives, un ensemble partiellement ordonné en définissant pour ces fonctions un ordre qui généralise l'ordre de Bruhat.

3.1 Définitions

Une *fonction partielle injective d'ordre* n est une fonction injective $f : X \subseteq [n] = \{1, ..., n\} \to [n]$. On note P_n l'ensemble des fonctions partielles injectives d'ordre n. On note S_n l'ensemble des fonctions bijectives $f : [n] \to [n]$. On a : $S_n \subseteq P_n$

Une fonction $f \in P_n$ peut se représenter par un vecteur $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ où :

$$\varepsilon_i = \begin{cases} f(i) & si \quad i \in dom(f) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

En prenant la convention que $f(i) = 0$, si $i \notin dom(f)$, on représente $f \in P_n$ aussi de la manière suivante :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$$

Exemple 3.1.1 *La fonction* $f : \{2,5\} \to [6],\ 2 \mapsto 1,\ 5 \mapsto 2$ *se représente par le vecteur :*

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La fonction $g : \emptyset \to [6]$ *se représente par le vecteur :*

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une fonction bijective se représente par un vecteur qui n'a aucune valeur nulle. Ainsi $h : [6] \to [6],\ i \mapsto 7 - i$, *se représente par le vecteur :*

$$h = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons définir un ordre partiel sur P_n. Cet ordre sera une généralisation de l'ordre de Bruhat sur les fonctions bijectives de $[n]$ dans $[n]$. On suit ici (Renner, 2005).

$$\begin{array}{lll} \text{On pose } f \to g \text{ si :} & 1) & \exists\, i \in [n] \textit{ tel que} \\ & & \quad a)\ f(j) = g(j)\ \forall\, j \neq i \\ & & \quad b)\ f(i) < g(i) \end{array} \tag{3.1}$$

ou

$$\begin{array}{ll} 2) & \exists\, i < j \in [n] \textit{ tels que} \\ & \quad a)\ f(k) = g(k) \textit{ si } k \neq i, j \\ & \quad b)\ f(i) = g(j),\ f(j) = g(i),\ g(i) > g(j) \end{array} \tag{3.2}$$

Exemple 3.1.2

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & \underline{2} & 0 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & \underline{0} & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & \underline{0} & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & \underline{1} & 4 & \underline{5} & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $f \in P_n$, une *inversion* est un couple (i, j) tel que : $i < j$ et $f(i) > f(j)$. On note $inv(f)$ l'ensemble $\{(i, j) \mid (i, j) \text{ est une inversion de } f\}$.

Exemple 3.1.3 *Pour la fonction* $f = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$,

$$inv(f) = \{(1,3), (1,4), (1,6), (2,3), (2,4), (2,6), (4,6), (5,6)\}$$

On définit la *longueur d'une fonction partielle injective* f, notée $L(f)$, ainsi : $L(f) = card(inv(f)) + \sum_{k=1}^{n} f(k))$. $L(f)$ est le nombre d'inversions de f + la somme des valeurs f.

Lemme 3.1.4 *Si $f \to g$ par la condition (3.2), alors $L(f) < L(g)$.*

Preuve : Supposons $f(k) = g(k)$ $\forall k \neq i, j$; $i < j$; et $f(j) = g(i) > g(j) = f(i)$. Puisque la somme des valeurs de f = la somme des valeurs de g, il suffit de montrer : $card(inv(g)) > card(inv(f))$.

Supposons $(r, s) \in inv(f)$, i.e. supposons $r < s$ et $f(r) > f(s)$. Nous allons montrer qu'à une inversion de f, on peut associer une et une seule inversion de g.

Si $r, s \notin \{i, j\}$, alors $g(r) = f(r) > f(s) = g(s)$. On a alors : $(r, s) \in inv(f) \Leftrightarrow (r, s) \in inv(g)$.

Si $r = i$ et $s \neq j$, alors $g(i) > f(i) = f(r) > f(s) = g(s)$. On a alors : $(r = i, s) \in inv(f) \Leftrightarrow (r, s) \in inv(g)$.

Si $r = j$, alors $g(i) = f(j) = f(r) > f(s) = g(s)$. On a alors : $(r = j, s) \in inv(f) \Leftrightarrow (i, s) \in inv(g)$.

Si $s = i$, alors $g(r) = f(r) > f(s) = f(i) = g(j)$. On a alors : $(r, s = i) \in inv(f) \Leftrightarrow (r, j) \in inv(g)$.

Si $r < i$ et $s = j$, alors $g(r) = f(r) > f(s) = f(j) = g(i)$. On a alors : $(r < i, s = j) \in inv(f) \Leftrightarrow (r, i) \in inv(g)$.

si $i < r$ et $s = j$, alors $g(r) = f(r) > f(s) = f(j) = g(j)$. On a alors : $(i < r, s = j) \in inv(f) \Leftrightarrow (r, s) \in inv(g)$.

D'où $card(inv(g)) \geq card(inv(f))$. Et $card(inv(g)) > card(inv(f))$ puisque (i, j) est une inversion de g qui n'est pas une inversion de f. $\square$

Lemme 3.1.5 *Si $f \to g$ par la condition (3.1), alors $L(f) < L(g)$.*

Preuve : Supposons $f(k) = g(k)$ $\forall k \neq i$ et $f(i) < g(i)$. Alors une inversion (r, s) de f n'est pas une inversion de g ssi $s = i$, $g(r) > f(s)$ et $g(r) < g(s)$. Puisqu'il y a $g(i) - f(i) - 1$ nombres entre $f(i)$ et g(i), on a alors : $f \to g$ par la condition (3.2) $\Rightarrow$ $card(inv(g)) \geq card(inv(f)) - (g(i) - f(i) - 1)$.

On a aussi : $\sum_{k=1}^{n} g(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + (g(i) - f(i))$.

D'où $L(g) = card(inv(g)) + \sum_{k=1}^{n} g(k)) \geq card(inv(f)) - (g(i) - f(i) - 1) + \sum_{k=1}^{n} f(k)) + (g(i) - f(i) \geq L(f) + 1$. Donc $L(f) < L(g)$. $\square$

Les lemmes 3.1.4 et 3.1.5 permettent de définir un ordre partiel $\leq$ sur P_n comme étant la fermeture transitive de $\to$.

On a : $\mathbf{0}_{P_n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{1}_{P_n} = \begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. De plus $L(\mathbf{0}_{P_n}) = 0$ et $L(\mathbf{1}_{P_n}) = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$.

Pour f une fonction bijective, la fonction longueur généralement utilisée et notée l est : $l(f) = card(inv(f))$. On a alors : $L(f) = l(f) + \frac{n(n+1)}{2}$.

Le graphe de $f \in P_n$ est le sous-ensemble des points $(i, f(i)) \in \{1, ..., n\} \times \{0, ..., n\}$, i donnant le numéro de la ligne et $f(i)$ le numéro de la colonne. En représentant les points $(i, f(i))$ par une $\times$, les indices des lignes augmentant de haut en bas et ceux des colonnes de gauche à droite, on obtient ce qu'on appelle la *représentation planaire* de f.

Exemple 3.1.6 *La représentation planaire de* $f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *est :*

$$\begin{array}{cccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \times & \cdot & \cdot \\ 2 & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \times & \cdot \\ 5 & \cdot & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Le *diagramme nord-est* d'une fonction $f \in P_n$, noté $NE(f)$, est composé de la représentation planaire de f et de n^2 entiers placés dans chaque carré $[i, i+1] \times [j, j+1] \subseteq [0, n+1] \times [0, n+1]$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$. L'entier placé dans le carré $[i, i+1] \times [j, j+1]$, noté $NE(f)[i, j]$, est :

$$NE(f)[i, j] = card\{k \leq i \mid f(k) > j\}.$$

En clair, $NE(f)[i, j]$ donne le nombre de $\times$ situées au nord-est du carré $[i, i+1] \times [j, j+1]$.

Exemple 3.1.7 *Le diagramme nord-est de* $f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *est :*

$$NE(f) = \begin{array}{ccccccccccccc}
 & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
1 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \times & & \cdot & & \cdot & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\
2 & \times & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\
3 & \cdot & & \cdot & & \times & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & & 2 & & 2 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\
4 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \times & & \cdot & \\
 & & 3 & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 & & 0 \\
5 & \cdot & & \times & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Et finalement, on associe à f une matrice carrée d'ordre n, notée $M(f)$, qui est formée des entiers qu'on retrouve dans les lignes $1, \ldots, n$ et dans les colonnes $0, \ldots, n-1$ de $NE(f)$. On a : $M(f)[i, j] = NE(f)[i, j-1]$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Exemple 3.1.8 *Pour* $f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, *on obtient :*

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 3.1.9 $\forall f \in P_n$, *$M(f)$ est une matrice de rang, i.e.* $M(f) \in R_n$.

Preuve : Dans $NE(f)$, on observe que le contenu d'un carré varie de ± 1 lorsqu'on passe à un carré adjacent ssi, ce faisant, on croise un segment horizontal où il y a à l'est une $\times$, ou si on croise un segment vertical où il y a au nord une $\times$:

$$\begin{array}{ccccc} & i & & & \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \times & \\ & i{+}1 & & & \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} & \times & \\ & \vdots & \\ i+1 & \cdot & i \\ & \cdot & \end{array}$$

Ceci implique : $\forall r, s$, on ne retrouve pas en position r, s le motif $\boxed{\begin{array}{cc} i+1 & i \\ i+1 & i+1 \end{array}}$ dans $M(f)$, puisque $M(f)[r,s] = M(f)[r,s+1]+1 \Rightarrow M(f)[r+1,s] = M(f)[r+1,s+1]+1$. Donc $M(f)$ est une matrice de rang. $\square$

Soit $A \in R_n$; on rappelle qu'une ligne de zéros a été ajoutée au nord de A, ligne numérotée 0, et qu'une colonne de zéros a été ajoutée à l'est de A, colonne numérotée n+1. À la matrice A, on associe $f_A = \{(r, f_A(r)) \in [n] \times [n]\}$, où $r = 1, 2, \ldots, n$ et :

$$f_A(r) = \begin{cases} s & s'il\ existe\ s\ tel\ que\ A\ a\ un\ motif\ plus\ en\ position\ r-1, s \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Théorème 3.1.10 *$\forall A \in R_n$, f_A est une fonction partielle injective, i.e. $f_A \in P_n$, tel que $M(f_A) = A$. Il y a donc une bijection entre R_n et P_n*

Preuve : f_A est une fonction partielle injective parce que dans une matrice $A \in R_n \subseteq RG_n$, les motifs plus et moins vont en alternant horizontalement et verticalement, et parce qu'une matrice $A \in R_n$ ne contient pas de motif moins.

$M(f_A) = A$ parce que, par le corollaire 2.6.7, $A[r,s]$ donne le nombre de motifs plus situés au nord-est de la position r, s, parce que ce nombre est le nombre de $\times$ situées au nord-est du carré $[r, r+1] \times [s-1, s]$ dans le diagramme nord-est de f_A, nombre qui est $NE(f_A)[r, s-1] = M(f_A)[r,s]$. $\square$

Exemple 3.1.11

$$\text{Si } A = \begin{array}{cc} \begin{matrix}0&0&0&0&0\end{matrix} & 0 \\ \begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\2&1&1&0&0\\3&2&2&1&1\\3&2&2&1&1\\4&3&2&1&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\end{matrix}\end{array} \text{ alors } f_A = (3,1,5,0,2)$$

3.2 Isomorphisme d'epo entre les matrices de rang et les fonctions partielles injectives

L'objectif de cette section est de montrer que R_n et P_n sont des ensembles partiellement ordonnés isomorphes.

Soit un couple (f,g) de fonctions de P_n. La représentation planaire de (f,g) est formée des représentations planaires de f et de g, les points du graphe de f étant représentés par une $\times$; ceux du graphe de g par un $\odot$; et les points $(i, f(i) = g(i))$ par le symbole $\otimes$.

Le *diagramme nord-est de* (f,g), noté $NE(f,g)$, est composé de la représentation planaire de (f,g) et de n^2 entiers placés dans chaque carré $[i,i+1] \times [j,j+1] \subset [0,n+1] \times [0,n+1]$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$. L'entier placé dans le carré $[i,i+1] \times [j,j+1]$, noté $NE(f)[i,j]$, est :

$$NE(f,g)[i,j] = card\{k \leq i \mid g(k) > j\} - card\{k \leq i \mid f(k) > j\}$$

En clair, $NE(f,g)[i,j]$ donne le nombre de $\odot$ moins le nombre de $\times$ situés au nord-est du carré $[i,i+1] \times [j,j+1]$. Par le corollaire 2.6.7, on a : $NE(f,g)[i,j-1] = M(g)[i,j] - M(f)[i,j]$, $i,j = 1,\ldots,n$.

Exemple 3.2.1 *Pour* $f = (3,0,2,4,1)$, *et* $g = (3,4,5,0,0)$ *on obtient :*

$$NE(f,g) = \begin{array}{ccccccccccccc}
 & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
1 & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \otimes & & \cdot & & \cdot & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
2 & \times & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \odot & & \cdot & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 \\
3 & \cdot & & \cdot & & \times & & \cdot & & \cdot & & \odot & \\
 & & 1 & & 1 & & 2 & & 2 & & 1 & & 0 \\
4 & \odot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \times & & \cdot & \\
 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 \\
5 & \odot & & \times & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & & -1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0
\end{array}$$

Lorsqu'on représente $NE(f,g)$, on observe que le contenu d'un carré varie de $+1$ lorsqu'on passe à un carré adjacent si, ce faisant, on croise un segment horizontal où il y a à l'est un $\times$ et pas de $\odot$, ou si on croise un segment vertical où il y a au nord un $\times$ et pas de $\odot$; on observe que le contenu d'un carré varie de -1 lorsqu'on passe à un carré adjacent si, ce faisant, on croise un segment horizontal où il y a à l'est un $\odot$ et pas de $\times$, ou si on croise un segment vertical où il y a au nord un $\odot$ et pas de $\times$. On retrouve les règles suivantes, appelées *règles de passage* :

$$\begin{array}{ccc} & \times & \\ & \vdots & \\ i & \vdots & i+1 \\ & \vdots & \\ & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \times & \\ & \vdots & \\ i & \vdots & i+1 \\ & \vdots & \\ & \odot & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \odot & \\ & \vdots & \\ i+1 & \vdots & i \\ & \vdots & \\ & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \odot & \\ & \vdots & \\ i+1 & \vdots & i \\ & \vdots & \\ & \times & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & i+1 & \\ \odot & \cdots & \times \\ & i & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & i & \\ \times & \cdots & \odot \\ & i+1 & \end{array}$$

On aura besoin du lemme suivant, dont la preuve est évidente, dans le théorème qui suit.

Lemme 3.2.2 *Soit $f,g \in P_n$ telles que $NE(f,g)[i,j] = a, NE(f,g)[i,j+l-1] = c, NE(f,g)[i+k-1,j] = d, NE(f,g)[i+k-1,j+l-1] = b$, où : $k,l \geq 1$, $1 \leq i < i+k \leq n$, $0 \leq j < j+l \leq n-1$:*

$$NE(f,g) = \begin{array}{c|ccccccc}
 & 0 & \cdots & j & \cdots & j+l & \cdots & n \\
1 & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & \\
i & \cdot & \cdots & \cdot_{a} & \cdots & c\cdot & \cdots & \cdot \\
\vdots & & & & & & & \\
i+k & \cdot & \cdots & \cdot^{d} & \cdots & b\cdot & \cdots & \cdot \\
\vdots & & & & & & & \\
n & & & & & & &
\end{array}$$

Alors le nombre de $\odot$ *- le nombre de* $\times$ *à l'intérieur du rectangle dont les sommets sont de coordonnées* $(i+k,j),(i+k,j+l),(i,j),(i,j+l)$ *est d-a-b+c.* $\square$

Exemple 3.2.3 *Dans l'exemple 3.2.1, le nombre de* $\odot$ *- le nombre de* $\times$ *à l'intérieur du rectangle dont les sommets sont de coordonnées* $(4,1),(4,3),(1,1),(1,3)$ *est 1-0-2+0 = -1 : il y a une* $\times$ *de plus que de* $\odot$ *à l'intérieur de ce rectangle.*

Théorème 3.2.4 *Soit* $f,g \in P_n$ *; alors* $f \leq g \iff M(f) \leq M(g)$.

Preuve : $(\Rightarrow)$ Supposons $f \to g$

1) avec la condition 3.1 ; alors :

$$NE(f,g) = \begin{array}{c|cccccccccc}
 & 0 & 1 & \cdots & & f(i) & & g(i) & & \cdots & n \\
1 & & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
i & \cdot & \cdot & \overset{0}{\underset{0}{\cdots}} & & \times & \overset{0}{\underset{1}{\cdots}} & \odot & \overset{0}{\underset{0}{\cdots}} & & \cdot \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
n & & & & & & & & & &
\end{array}$$

et on a bien $M(f) < M(g)$.

2) avec la condition 3.2 ; alors :

$$NE(f,g) = \begin{array}{c|cccccccc}
 & 0 & 1 & \cdots & f(i) & \cdots & f(j) & \cdots & n \\
1 & & & & & & & & \\
\vdots & & & 0 & & 0 & & 0 & \\
i & \cdot & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \odot & \cdots & \cdot \\
\vdots & & & 0 & & 1 & & 0 & \\
j & \cdot & \cdot & \cdots & \odot & \cdots & \times & \cdots & \cdot \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & \\
\vdots & & & & & & & & \\
n & & & & & & & &
\end{array}$$

et on a bien $M(f) < M(g)$.

($\Leftarrow$) Supposons $M(f) < M(g)$; montrons : $\exists\, f' \in P_n$ telle que $f < f'$ et $M(f') \leq M(g)$. On pourra alors conclure que $f < g$, puisque par hypothèse de récurrence $f' \leq g$.

On construit $NE(f,g)$. Rappelons que $M(f') \leq M(g) \Leftrightarrow \forall i,j,\ M(g)[i,j] - M(f')[i,j] \geq 0 \Leftrightarrow \forall i,j,\ NE(f',g)[i,j-1] \geq 0$.

1) Supposons : $\exists i$ tel que $g(i) < f(i)$, i.e. on retrouve sur la ligne i de $NE(f,g)$: $\odot \cdots \times$, le $\odot$ pouvant être dans la colonne 0.

Supposons : $\exists j,k,l$ tels que : $1 \leq j \leq l < i$, $0 \leq k \leq g(i)$, le rectangle de $NE(f,g)$ dont les sommets sont de coordonnées $(i,f(i)),(i,k),(j,k)$ $(j,f(i))$ contient des carrés dont les valeurs sont toutes > 0, $k \leq f(l) < f(i)$:

$$NE(f,g) = \begin{array}{c|ccccccccccc}
 & 0 & \cdots & k & \cdots & g(i) & \cdots & f(l) & \cdots & f(i) & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
j & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \vdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
l & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
i & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \odot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Transporter alors les $\times$ des positions $(l, f(l))$ et $(i, f(i))$ aux positions $(i, f(l))$ et $(l, f(i))$ respectivement, c'est construire une nouvelle fonction f' :

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq i, l \\ f(i) & si \quad x = l \\ f(l) & si \quad x = i \end{cases},$$

telle que :

(1) par la condition (3.2), $f < f'$;

(2) $M(f') \leq M(g)$. En effet, $NE(f,g)$ et $NE(f',g)$ ne diffèrent que sur les carrés du rectangle de sommets de coordonnées $(i, f(i)), (i, f(l)), (l, f(l)), (l, f(i))$; les carrés du rectangle de sommets de ce rectangle de $NE(f',g)$ ayant diminué de 1 par rapport à ceux de $NE(f,g)$, sont ≥ 0.

On a ainsi la fonction f' souhaitée.

Montrons maintenant ce que nous avons supposé, i.e. $\exists j, k, l$ tels que : $1 \leq j \leq l < i$, $0 \leq k \leq g(i)$, le rectangle de $NE(f,g)$ dont les sommets sont de coordonnées $(i, f(i)), (i, k), (j, k)$ $(j, f(i))$ contient des carrés dont les valeurs sont toutes > 0, $k \leq f(l) < f(i)$.

Puisque $M(f) < M(g)$, on a $NE(f,g)[i-1, k'] > 0$, $\forall k'$ tel que $g(i) \leq k' < f(i)$. Supposons qu'il existe $0 < k < g(i)$, tel que : 1) $NE(f,g)[i-1, k'] > 0, \forall\, k \leq k' < f(i)$, et 2) $NE(f,g)[i-1, k-1] = 0$. S'il n'existe pas un tel k, on pose $k = 0$.

(i) Supposons d'abord que $k > 0$:

$$NE(f,g) = \begin{array}{ccccccccc} & 0 & \cdots & k & \cdots & g(i) & \cdots & f(i) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & & 0\;1 & & & >0 & & \\ i & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \odot & \cdots & \times & \cdots \end{array}$$

On définit j, $1 \leq j < i$, comme étant le plus petit entier tel que $NE(f,g)[j', k'] > 0$, $\forall\; j', k'$, tels que $j \leq j' < i$, $k \leq k' < f(i)$. Alors $\exists k''$, $k < k'' \leq f(i)$ tel que $NE(f,g)[j, k''-1] = 1$ et $NE(f,g)[j-1, k''-1] = 0$:

$$NE(f,g) = \begin{array}{c|ccccccccccc}
 & 0 & \cdots & k & \cdots & k'' & \cdots & g(i) & \cdots & f(i) & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
j & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & {}^{0}_{1} & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
i & \cdot & \cdots & {}^{0\ 1} & \cdots & \cdot & \cdots & \odot & {}^{>0}\cdots & \times & \cdots
\end{array}$$

Le rectangle dont les sommets sont de coordonnées $(i, f(i)), (i, k), (j, k), (j, f(i))$ contient des carrés dont les valeurs sont toutes > 0. Par les règles de passage, on a : $f(j) < k''$ et $\exists l' < i$, tel que $f(l') = k$.

Si $f(j) \geq k$, alors on pose $l = j$ et on a la conclusion recherchée.

Si $l' \geq j$, alors on pose $l = l'$ et on a la conclusion recherchée.

Supposons : $f(j) < k$ et $l' < j$. Alors par les règles de passage, on obtient (avec $a = NE(f,g)[j-1, k-1] \geq 0$ et $b = NE(f,g)[i-1, k''-1] > 0$) :

$$NE(f,g) = \begin{array}{c|cccccccccccc}
 & 0 & \cdots & k & & \cdots & k'' & \cdots & g(i) & \cdots & f(i) & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
j & \cdot & \cdots & {}^{a}_{a+1} \cdot & {}^{a+1}_{a+2} & \cdots & {}^{0}_{1} & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
i & \cdot & \cdots & {}^{0\ 1} & & \cdots & {}^{b} & \cdots & \odot & {}^{>0}\cdots & \times & \cdots
\end{array}$$

Par le lemme 3.2.2, le nombre de $\odot$ - le nombre de $\times$ à l'intérieur du rectangle dont les sommets sont de coordonnées $(i, k), (i, k''), (j, k), (j, k'')$ est $1-(a+2)-b+1 = -a-b \leq -b \leq -1$. Donc à l'intérieur de ce rectangle, le nombre de $\times$ est $>$ le nombre de $\odot$. Ce qui implique : $\exists l$, $j < l < i$, tel que $k < f(l) < f(i)$, et on a la conclusion recherchée.

(ii) Supposons maintenant que $k = 0$. On définit j et k'' comme en (i), i.e. : j, $1 \leq j < i$, est le plus petit entier tel que $NE(f,g)[j', k'] > 0$, $\forall\ j', k'$, tels que $j \leq j' < i$, $1 \leq k' < f(i)$; k'', $1 < k'' \leq f(i)$, est tel que $NE(f,g)[j, k''-1] = 1$ et $NE(f,g)[j-1, k''-1] = 0$. On a aussi : $NE(f,g)[i, 1] = d > 0$. D'où :

$$NE(f,g) = \begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & \cdots & k'' & \cdots & g(i) & \cdots & f(i) & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & & & & & \\
j & \cdot & \cdots & \overset{0}{\underset{1}{\cdot}} & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & & & & & \\
i & \overset{d}{\cdot} & \cdots & \cdot & \cdots & \odot & \overset{>0}{\cdots} & \times & \cdots
\end{array}$$

Par les règles de passage, on a $0 \leq f(j) < k''$. On pose alors $l = j$ et on a la conclusion recherchée.

2) Supposons : $\forall i,\ f(i) \leq g(i)$, i.e. on retrouve sur les lignes de $NE(f,g)$ les deux possibilités suivantes : $\times \cdots \odot$ et $\cdot\cdot \otimes \cdot\cdot$.

Parmi toutes lignes où on retrouve $\times \cdots \odot$, prenons celle (disons la ligne i : $f(i) < g(i)$) pour laquelle le $\odot$ est le plus à l'est : $\nexists\ j,\ j \neq i$, tel que $f(j) < g(j)$ et $g(i) < g(j)$. Par les règles de passage, tous les carrés sous $\times \cdots \odot$ contiennent des valeurs ≥ 1.

Par le choix de cette ligne, il ne peut y avoir de $\times$ au nord ou au sud de $\odot$: $\nexists\ j$, $j \neq i$, tel que $f(j) = g(i)$. En effet, s'il existe $j \neq i$, tel que $f(j) = g(i)$, alors soit on a sur ligne j : $\cdot\cdot \otimes \cdot\cdot$, ce qui implique $g(j) = g(i)$, contredisant le fait que g soit injective ; soit on a sur la ligne j : $\times \cdots \odot$, ce qui implique $g(j) > g(i)$, contredisant le choix de i. On peut donc déplacer la $\times$ sur le $\odot$ pour obtenir un nouvelle fonction f' :

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq i \\ g(i) & si \quad x = i \end{cases},$$

telle que :

(1) $f < f'$ par la condition (3.1) ;

(2) $M(f') \leq M(g)$. En effet, $NE(f,g)$ et $NE(f',g)$ ne diffèrent que sur les carrés sous $\times \cdots \odot$ de la ligne i ; ceux de $NE(f',g)$ sous $\times \cdots \odot$ de la ligne i ayant diminué de 1 par rapport à ceux de $NE(f',g)$, sont ≥ 0. $\square$

3.3 Base et cobase de l'epo des fonctions partielles injectives

L'objectif de cette section est caractériser les éléments basiques et cobasiques de l'epo des fonctions partielles injectives.

Puisque $R_n \cong P_n$, la base de P_n, $B(P_n)$, est formée exactement des fonctions f_A telles que A est une matrice $B_{r,s,a,n}$, $1 \leq r, s \leq n$, $0 < a \leq min\{r, n+1-s\}$. On rappelle comment f_A est construite :

$$f_A(r) = \begin{cases} s & s'il\ existe\ s\ tel\ que\ A\ a\ un\ motif\ plus\ en\ position\ r-1, s \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Exemple 3.3.1 *Si* $A = B_{4,3,3,5}$ *(voir l'exemple 2.2.2) alors*

$$f_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $A = B_{r,s,a,n}$, $0 < a \leq min\{r, n+1-s\}$ (voir la figure 2.2) alors

$$f_A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r-a & r-a+1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ 0 & \cdots & 0 & s & \cdots & s+a-1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $A = B_{r,s,a,n}$, on note f_A ainsi : $f_A = fb_{i,j,k,n}$ où $i = r-a+1,\ j = s,\ k = a$. On remarque : $fb_{i,j,k,n}(i) = j$. Ainsi :

$$fb_{i,j,k,n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & \cdots & i+k-1 & i+k & \cdots & n \\ 0 & \cdots & 0 & j & \cdots & j+k-1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On a : $1 \leq i \leq i+k-1 \leq n,\ 1 \leq j \leq j+k-1 \leq n.$

$f \in B(P_n)$ ssi $f(1), \ldots, f(n)$ est une suite commençant par un nombre $(i-1) \geq 0$ de zéros, suivis par un nombre $k > 0$ de nombres consécutifs $j, j+1, \ldots, j+k-1$, $j > 0$, $j+k-1 \leq n$ et $i-1+k \leq n$, et se terminant par des zéros. On obtient $f \in B(P_n)$ en choisissant un nombre $1 \leq k \leq n$, un nombre i parmi les nombres $1, 2, \ldots, n+1-k$, et un nombre j parmi les nombres $1, 2, \ldots, n+1-k$. D'où $card(B(P_n)) = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)^2 = \sum_{i=k}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, comme prévu par le théorème 2.3.12.

On a : $f_{B_{r,s,a,n}} = fb_{r-a+1,s,a,n}$ et $M(fb_{i,j,k,n}) = B_{i+k-1,j,k,n}$.

On a ainsi démontré le théorème suivant :

Théorème 3.3.2 *La base de P_n est formée exactement des $fb_{i,j,k,n}$, $1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq n+1-k$, $1 \leq j \leq n+1-k$:*

$$fb_{i,s,a,n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & \cdots & i+k-1 & i+k & \cdots & n \\ 0 & \cdots & 0 & j & \cdots & j+k-1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

La cobase de P_n, $C(P_n)$, est formée exactement des fonctions f_A telles que A est une matrice $C_{r,s,a,n}$, $1 \leq r, s \leq n$, $0 \leq a < min\{r, n+1-s\}$.

Exemple 3.3.3 *Si $A = C_{6,4,1,8}$ (voir l'exemple 2.2.8) alors*

$$f_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.3.4 *Si $A = C_{3,4,2,8}$ (voir l'exemple 2.2.9) alors*

$$f_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $A = C_{r,s,a,n}$, on note f_A ainsi : $f_A = fc_{i,j,k,n}$ où $i = a+1$, $j = s-1$, $k = r$. On remarque : $fc_{i,j,k,n}(i) = j$.

Si $A = C_{r,s,a,n}$, $a+s-1 < r$, (voir la figure 2.3), on a alors : $i+j-1 < k$, $dom(f) \subsetneq [n]$ et $f_A = fc_{i,j,k,n} = fc_{a+1,s-1,r,n}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a & a+1 & \cdots & a+s & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ n & \cdots & n-a+1 & s-1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & n-a & \cdots & r-a+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & \cdots & i+j & \cdots & k \\ n & \cdots & n-(i-1)+1 & j & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ k+1 & \cdots & & n & & & & \\ n-(i-1) & \cdots & & k-(i-1)+1 & & & & \end{pmatrix}$$

Si $A = C_{r,s,a,n}$, $a+s-1 \geq r$, (voir la figure 2.4), on a alors : $i+j-1 \geq k$, $dom(f) = [n]$ et $f_A = fc_{i,j,k,n} = fc_{a+1,s-1,r,n}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a & a+1 & \cdots & r & r+1 \\ n & \cdots & n-a+1 & s-1 & \cdots & a+s-r & n-a \\ \\ \ldots & & r+1+n-a-s & r+1+n-a-s+1 & \ldots & n & \\ \ldots & & s & a+s-r-1 & \ldots & 1 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i-1 & i & \ldots & k \\ n & \ldots & n-(i-1)+1 & j & \ldots & j-(k-i) \\ \\ k+1 & \ldots & k+1+n-i-j & k+1+n-i-j+1 & \ldots & n \\ n-(i-1) & \ldots & j+1 & j-(k-i)-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$f \in C(P_n)$ ssi $f(1), \ldots, f(n)$ est une suite commençant par les $i-1 \geq 0$ nombres : $n, n-1, \ldots, n-(i-1)+1$; suivis par les $k-i+1 > 0$ nombres : $max\{j,0\}, max\{j-1,0\}, \ldots, max\{j-(k-i),0\}$; suivis enfin, en ordre décroissant, par les $n-k$ plus grands nombres de l'ensemble $[n]$ qui n'ont pas encore été utilisés.

On a : $f_{C_{r,s,a,n}} = fc_{a+1,s-1,r,n}$ et $M(fc_{i,j,k,n}) = C_{k,j+1,i-1,n}$.

On a enfin le théorème suivant :

Théorème 3.3.5 *La cobase de P_n est formée exactement des $fc_{i,j,k,n}$, $1 \leq i \leq min\{k, n-j\}$, $0 \leq j < n$, $1 \leq k \leq n$.*

CHAPITRE IV

CLÉS, TRIANGLES ET GÉNÉRALISATIONS

Dans ce chapitre on étudie l'epo des Clés K_n et le treillis des Clés généralisées KG_n. Les notions de Clé et de Clé généralisée seront respectivement des généralisations des notions de clé et de triangle qu'on retrouve chez (Lascoux et Schützenberger, 1996).

4.1 Définitions

L'ensemble KG_n des *Clés généralisées* est l'ensemble des suites $k = (k_j)_{j=1,\dots,n}$ de n fonctions partielles injectives et décroissantes $k_j : \{1, \dots, j\} \to [n]$, $i \mapsto k_j(i) = k_{ij}$ telles que $k_{i+1,j+1} \leq k_{ij} \leq k_{i,j+1}$, $j = 1, \dots n-1$, $1 \leq i \leq j$.

Rappelons que si $i \notin dom(k_j)$, on écrit $k_j(i) = 0$. Ainsi : $k_{i,j} = k_{i+1,j} \Rightarrow k_{i,j} = k_{i+1,j} = 0$, i.e. $i, i+1 \notin dom(k_j)$.

On représente k ainsi :

$$k = \begin{matrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & k_{nn} \end{matrix}$$

Dans une Clé généralisée, les lignes sont croissantes ; les colonnes sont strictement décroissantes pour ce qui est des valeurs positives parce que les k_j sont injectives et décroissantes : si une colonne contient des 0, ils sont tous sous les valeurs positives de la colonne ; les diagonales sont décroissantes.

Lemme 4.1.1 *Soit* $k \in KG_n$ *; alors* $\forall i, j,\ 0 \le k_{ij} \le n+1-i$.

Preuve : On a la conclusion du lemme parce que les k_j sont injectives et décroissantes. □

Exemple 4.1.2

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 7 \\
 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\
 & & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\
 & & & 0 & 1 & 1 & 2 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0
\end{array} \in KG_7$$

L'ensemble TR_n des *triangles* est l'ensemble des suites $k = (k_j)_{j=1,\ldots,n}$ de n fonctions injectives et décroissantes $k_j : \{1,\ldots,j\} \to [n],\ i \mapsto k_j(i) = k_{ij}$ telles que $k_{i+1,j+1} \le k_{ij} \le k_{i,j+1},\ j = 1,\ldots n,\ 1 \le i \le j$. On a : $k \in KG_n$ est un triangle ssi $\forall i, j,\ k_{ij} \ne 0$, i.e. ssi k ne contient pas de 0.

On a : $TR_n \subseteq KG_n$.

L'ensemble K_n des *Clés* est l'ensemble des Clés généralisées k tel que $k_{i,j} = k_{i,j+1}$ ou $k_{i,j} = k_{i+1,j+1}$.

L'ensemble Cl_n des *clés* est l'ensemble des triangles k tel que $k_{i,j} = k_{i,j+1}$ ou $k_{i,j} = k_{i+1,j+1}$.

On a : $K_n \subseteq Cl_n$.

Notons qu'un élément de Cl_n est appelé une clé, et un élément de K_n est appelé une Clé. Une Clé k est une clé ssi k ne contient pas de 0.

Si $k \in K_n$ alors $k_{ij} = k_{i+1,j+1}$ ou $k_{ij} = k_{i,j+1}$, i.e. que les éléments $\ne 0$ de la colonne j de k se retouvent tous dans la colonne $j+1$. Ceci permet d'associer à $k \in K_n$, une fonction partielle injective $f_k \in P_n$ ainsi : $f_k(1) = k_{11}$ et pour $j = 2, \ldots, n$, $f_k(j)$ est l'élément de la colonne j qui n'est pas dans la colonne $j-1$.

Exemple 4.1.3

$$k = \begin{array}{cccccc} 2 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ & & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{array} \in KG_6 \textit{ et } f_k = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P_6$$

Soit $f \in P_n$; soit $K(f)_j$ la fonction partielle décroissante $K(f)_j : \{1, \ldots, j\} \to [n]$, $i \mapsto K(f)_j(i) = K(f)_{ij}$, qu'on obtient en écrivant en ordre décroissant les éléments de $\{f(1), \ldots, f(j)\}$. Notons $K(f)$ la suite des fonctions partielles $K(f)_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Théorème 4.1.4 *Soit $f \in P_n$; alors $K(f) \in KG_n$ et $f = f_{K(f)}$.*

Preuve : On a à montrer : $\forall i, j$ tels que $1 \leq j < n, 1 \leq i \leq j$, on a : $K(f)_{ij} = K(f)_{i,j+1}$ ou $K(f)_{ij} = K(f)_{i+1,j+1}$.

Si $0 \leq f(j+1) \leq f(i)$ où $i < j+1$, alors $K(f)_{j+1}(i) \geq K(f)_{j+1}(j+1)$, ce qui implique que les i plus grands éléments de $\{f(1), \ldots, f(j)\}$ et de $\{f(1), \ldots, f(j+1)\}$ sont les mêmes, ce qui implique $K(f)_j(i) = K(f)_{j+1}(i)$, i.e. $K(f)_{ij} = K(f)_{i,j+1}$.

Si $f(j+1) > f(i)$ où $i < j+1$, alors $K(f)_{j+1}(i) < K(f)_{j+1}(j+1)$, ce qui implique que le i-ème plus grand élément de $\{f(1), \ldots, f(j)\}$ est le $(i+1)$-ième élément de $\{f(1), \ldots, f(j+1)\}$, ce qui implique $K(f)_j(i) = K(f)_{j+1}(i+1)$, i.e. $K(f)_{ij} = K(f)_{i+1,j+1}$.

Enfin $g_{K(f)}(1) = f(1)$ et pour $j = 2, \ldots, n$, $g_{K(f)}(j)$ est l'élément de la colonne j qui n'est pas dans la colonne $j-1$, i.e. $g_{K(f)}(j) = f(j)$. Donc $f = f_{K(f)}$. $\square$

On définit un ordre sur KG_n de la façon suivante : $k \leq k' \Leftrightarrow k_{ij} \leq k'_{ij}\ \forall i, j$. $(KG_n, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné dans lequel s'injecte K_n.

Théorème 4.1.5 *$(KG_n, \leq)$ est un treillis où :*

$$sup(k, k')_{ij} = max(k_{ij}, k'_{ij}) \quad et \quad min(k, k')_{ij} = inf(k_{ij}, k'_{ij}).$$

Preuve : Supposons que : $sup\left(\begin{array}{cc} y & z \\ & x \end{array}, \begin{array}{cc} y' & z' \\ & x' \end{array}\right) = \begin{array}{cc} X & Y \\ & Z \end{array}$. On doit montrer : $x \leq y \leq z$ et $x' \leq y' \leq z' \Rightarrow X \leq Y \leq Z$.

Supposons (sans perte de généralités) que $Y = y \geq y'$; alors d'une part $Y \leq z \leq sup(z, z') = Z$; et d'autre part $x \leq y = Y$ et $x' \leq y' \leq Y$, ce qui implique $X = sup(x, x') \leq Y$.

On a ainsi montré que $sup(k, k') \in KG_n$. On montre d'une manière semblable que $inf(k, k') \in KG_n$. $\square$

K_n n'est pas un treillis. Contre-exemple :

Exemple 4.1.6 *Dans K_2, les majorants des Clés* $\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ & 0 \end{array}, \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ & 0 \end{array}$ *sont les Clés* $\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ & 1 \end{array}, \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ & 1 \end{array}, \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ & 0 \end{array}$. *Aucune de ces trois Clés n'est plus petite que les deux autres.*

Donc $\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ & 0 \end{array} \vee \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ & 0 \end{array}$ *n'existe pas dans K_2.*

La Clé k, tel que $k_{ij} = 0,\ \forall i, j$, tels que $1 \leq j \leq n,\ 1 \leq i \leq j$, est notée : $\mathbf{0}$; la Clé k, tel que $k_{ij} = n + 1 - i,\ \forall i, j$, tels que $1 \leq j \leq n,\ 1 \leq i \leq j$ est notée : $\mathbf{1}$. On a : $\vee\emptyset = \mathbf{0} \in K_n$ et $\wedge\emptyset = \mathbf{1} \in K_n$.

Exemple 4.1.7 *La clé 1 dans KG_5 est :*

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ & 4 & 4 & 4 & 4 \\ & & 3 & 3 & 3 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & & 1 \end{array} \quad et\ f_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in P_5$$

4.2 Isomorphisme d'epo entre les Clés et les fonctions partielles injectives

L'objectif de cette section est de montrer que K_n, l'ensemble des Clés d'ordre n, et P_n, l'ensemble des fonctions partielles injectives, sont des ensembles partiellement ordonnés isomorphes.

On retrouve dans (Manivel, 1998) et dans (Macdonald, 1991) le théorème suivant : Cl_n, l'ensemble des clés, et S_n, l'ensemble des fonctions bijectives, sont des ensembles partiellement ordonnés isomorphes. Chez ces deux auteurs, on retrouve essentiellement la même preuve, laquelle contient une erreur. Nous expliquerons en quoi consiste cette erreur, et nous donnerons un théorème qui corrige cette erreur et qui sera une généralisation aux epo P_n et K_n.

Soit $f, g \in S_n$ tels que $K(f) < K(g)$; on veut montrer qu'on a alors : $f < g$. Pour ce faire, on construit une fonction bijective f' telle que $f < f'$ et $K(f') \leq K(g)$: on peut alors conclure par récurrence.

Soit k, le plus entier entier ≥ 0, tel que $f(k) \neq g(k)$. On a alors $f(k) < g(k)$, puisque $K(f) < K(g)$; de plus, puisque $\forall i \leq k,\ f(i) = g(i)$ et puisque f et g sont bijectives, $\exists j > k$ tel que $f(j) = g(k)$. On définit alors f' de la façon suivante :

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq k, j \\ f(j) & si \quad x = k \\ f(k) & si \quad x = j \end{cases}$$

On a : $f < f'$, puisque $j > k$, $f(j) > f(k)$ et $f'(j) < f'(k)$, i.e. puisque f' possède une inversion de plus que f.

Alors Manivel et Macdonald affirment, pour conclure, que $K(f') \leq K(g)$, ce qui est faux. Contre-exemple :

Exemple 4.2.1

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \; et \; g = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K(f) = \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 4 \\ & 1 & 3 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{array} \leq K(g) = \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 4 & 4 \\ & 2 & 3 & 3 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 1 \end{array}$$

$$f < f' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; et \; K(f') = \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 4 & 4 \\ & 3 & 3 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{array} \not\leq K(g)$$

L'idée de la preuve du théorème qui suit est de construire f', pour les fonctions f et g de l'exemple ci-haut, ainsi :

Exemple 4.2.2

$$f < f' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \; et \; K(f') = \begin{array}{cccc} 3 & 3 & 4 & 4 \\ & 1 & 3 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{array} \leq K(g)$$

Théorème 4.2.3 *K_n et P_n sont isomorphes, i.e. $f \leq g$ dans $P_n \Leftrightarrow K(f) \leq K(g)$ dans K_n.*

Preuve : ($\Rightarrow$) Il suffit de montrer que si $f \to g$ en raison de 3.1 ou de 3.2, alors $K(f) < K(g)$. Et on obtient la conclusion puisque si on remplace un nombre a dans une colonne décroissante de nombres par un nombre $b > a$, et qu'on réorganise la colonne pour qu'elle soit de nouveau décroissante, la nouvelle colonne est plus grande que celle de départ.

($\Leftarrow$) Supposons $K(f) < K(g)$; montrons : $\exists\, f' \in P_n$ telle que $f < f'$ et $K(f) < K(f') \leq K(g)$ ou $\exists\, g' \in P_n$ telle que $g' < g$ et $K(f) \leq K(g') < K(g)$. On pourra alors conclure que $f < g$ puisque, par hypothèse de récurrence, $f' \leq g$ ou $f \leq g'$.

Soit $s \geq 0$ le plus petit entier tel que les colonnes $1, \ldots, s-1$ de $K(f)$ et de $K(g)$ soient identiques. Soit a, b les deux nombres qui apparaissent pour la première fois dans la colonne s respectivement de $K(f)$ et de $K(g)$. On a : $0 \leq f(s) = a < b = g(s)$.

Si $a > 0$, on définit r_a comme étant la ligne de $K(f)$ telle que : $K(f)_{r_a,s} = a$; si $a = 0$, on pose $r_a = 0$ si la colonne s de $K(f)$ est nulle, sinon on définit r_a comme étant la ligne la plus au nord de $K(f)$ telle que $K(f)_{r_a,s} = 0$.

On définit r_b comme étant la ligne de $K(g)$ telle que : $K(g)_{r_b,s} = b$. Puisque $K(f) < K(g)$, on a : $r_a \geq r_b$.

(1) Supposons qu'il existe $s' > s$ tel que $a < f(s') = c \leq b$. S'il existe un tel s', on choisit le plus petit possible, i.e. $\forall s''$ tel que $s < s'' < s'$, $f(s'') \leq a$ ou $f(s'') > b$. Posons r_c la ligne de $K(f)$ telle que : $K(f)_{r_c,s'} = c$.

Posons : $a < a_1 = K(f)_{r_a-1,s} < \ldots < a_m = K(f)_{r_a-m,s} < c$, avec, si $r_c > 1$, $c < a_{m+1} = K(f)_{r_a-m-1,s}$. Par définition de s', on retrouve $\boxed{\begin{matrix} a_m \\ \vdots \\ a_1 \\ a \end{matrix}}$ dans les colonnes $s, s+1, \ldots, s'-1$ de $K(f)$.

Soit :

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq s, s' \\ c & si \quad x = s \\ a & si \quad x = s' \end{cases}$$

Puisque $a < c$, f' a une inversion de plus que f. D'où $f < f'$.

De plus, $K(f)$ et $K(f')$ sont identiques sauf dans les colonnes $s, s+1, \ldots, s'-1$ où $\begin{array}{|c|}\hline a_m \\ \vdots \\ a_1 \\ a \\ \hline\end{array}$ a été remplacé par $\begin{array}{|c|}\hline c \\ a_m \\ \vdots \\ a_1 \\ \hline\end{array}$. Donc $K(f) < K(f')$.

Montrons maintenant : $K(f') \leq K(g)$. Les colonnes $1, \ldots, s-1$ et $s', \ldots, n$ de $K(f')$ et de $K(g)$ sont identiques. On retrouve dans les colonnes s de respectivement $K(f')$ et $K(g)$:

$$\begin{array}{|cc|}\hline & b \\ \vdots & \\ a_{m+1} & \\ c & a_{m+1} \\ a_m & a_m \\ \vdots & \\ a_1 & a_1 \\ \hline\end{array}$$

Donc la colonne s de $K(f')$ est $\leq$ que la colonne s de $K(g)$.

Si $f'(s+1) = f(s+1) \leq a < a_1$, alors les $a_1, \ldots, a_m, c$ de $K(f')$ ne changent pas de ligne : on conclut alors que la colonne $s+1$ de $K(f')$ est $\leq$ que la colonne $s+1$ de $K(g)$. Si $f'(s+1) = f(s+1) > b$, alors, puisque $K(f) < K(g)$, $g(s+1) > b$; alors les $a_1, \ldots, a_m, c$ de $K(f)$ et les $a_1, \ldots, a_{m+1}$ de $K(g)$ descendent d'une ligne : on conclut de nouveau que la colonne $s+1$ de $K(f')$ est $\leq$ que la colonne $s+1$ de $K(g)$.

D'une façon générale, on conclut que les colonnes s'', $s \leq s'' < s'$ de $K(f')$ sont $\leq$ que les colonnes s'', $s \leq s'' < s'$ de $K(g)$, parce que $K(f) < K(g)$. En effet, $K(f) < K(g)$ implique le nombre de nombres $> b$ dans la colonne s'' de $K(f)$, $s \leq s'' < s'$ est $\leq$ le nombre de nombres $> b$ dans la colonne s'' de $K(g)$, $s \leq s'' < s'$. En d'autres termes, $K(f) < K(g)$ implique que le c dans la colonne s'', $s \leq s'' < s'$ de $K(f')$ est toujours sur une ligne qui est supérieure ou égale à la ligne sur laquelle se trouve le a_{m+1} dans la colonne s'', $s \leq s'' < s'$ de $K(f')$. D'où $K(f') \leq K(g)$.

(2) Supposons qu'il existe $s' > s$ tel que $a \leq g(s') = d < b$. S'il existe un tel s', on choisit le plus petit possible, i.e. $\forall s''$ tel que $s < s'' < s'$, $g(s'') < a$ ou $g(s'') > b$. Posons r_d la ligne de $K(g)$ telle que : $K(g)_{r_d,s'} = d$

Posons : $b > b_1 = K(g)_{r_b+1,s} > \ldots > b_m = K(g)_{r_b+m,s} > d$, avec, si $r_d < s$, $d > b_{m+1} = K(g)_{r_{b_s}-m-1,s}$. Par définition de s', on retrouve $\boxed{\begin{matrix} b \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}}$ dans les colonnes $s, s+1, \ldots, s'-1$ de $K(g)$.

Soit :

$$g'(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \neq s, s' \\ d & si \quad x = s \\ b & si \quad x = s' \end{cases}$$

Puisque $d < b$, f' a une inversion de moins que g. D'où $g' < g$.

De plus, $K(g)$ et $K(g')$ sont identiques sauf dans les colonnes $s, s+1, \ldots, s'-1$ où $\boxed{\begin{matrix} b \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}}$ a été remplacé par $\boxed{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ d \end{matrix}}$. Donc $K(g') < K(g)$.

Montrons maintenant : $K(f) \leq K(g')$. Les colonnes $1, \ldots, s-1$ et $s', \ldots, n$ de $K(f)$ et de $K(g')$ sont identiques. On retrouve dans les colonnes s de respectivement

$K(f)$ et $K(g')$:

$$\boxed{\begin{array}{cc} b_1 & b_1 \\ \vdots & \\ b_m & b_m \\ b_{m+1} & d \\ \vdots & \\ a & \end{array}}$$

Donc la colonne s de $K(f)$ est $\leq$ que la colonne s de $K(g')$.

Si $g'(s+1) = g(s+1) > b$, alors les $b_1, \ldots, b_m, d$ de $K(g')$ descendent d'une ligne : on conclut alors que la colonne $s+1$ de $K(f)$ est $\leq$ que la colonne $s+1$ de $K(g')$. Si $g'(s+1) = g(s+1) < a$, alors, puisque $K(f) < K(g)$, $f(s+1) < a$; alors les $b_1, \ldots, b_{m+1}$ de $K(f)$ et les $b_1, \ldots, b_m, d$ de $K(g')$ ne changent pas de ligne : on conclut de nouveau que la colonne $s+1$ de $K(f)$ est $\leq$ que la colonne $s+1$ de $K(g')$.

D'une façon générale, on conclut que les colonnes s'', $s \leq s'' < s'$ de $K(f)$ sont $\leq$ que les colonnes s'', $s \leq s'' < s'$ de $K(g')$, parce que $K(f) < K(g)$. En effet, $K(f) < K(g)$ implique le nombre de nombres $> b$ dans la colonne s'' de $K(f)$, $s \leq s'' < s'$ est $\leq$ le nombre de nombres $> b$ dans la colonne s'' de $K(g)$, $s \leq s'' < s'$. En d'autres termes, $K(f) < K(g)$ implique que le d dans la colonne s'', $s \leq s'' < s'$ de $K(g')$ est toujours sur une ligne qui est égale ou inférieure à la ligne sur laquelle se trouve le b_{m+1} dans la colonne s'', $s \leq s'' < s'$ de $K(f)$. D'où $K(f) \leq K(g')$.

(3) Supposons enfin qu'il n'existe pas $s' > s$ tel que $a < f(s') = c \leq b$ ou tel que $a \leq g(s') = d < b$. On a alors : $b \notin \text{image}(f)$ et $a \notin \text{image}(g)$.

On retrouve dans les colonnes $s' \geq s$ de $K(f)$ et de $K(g)$ respectivement :

$$\boxed{\begin{array}{c} x_m \\ \vdots \\ x_1 \\ a \end{array}} \quad et \quad \boxed{\begin{array}{c} b \\ x_m \\ \vdots \\ x_1 \end{array}}$$

$K(f) < K(g)$ implique le nombre de nombres $> b$ dans la colonne s'' de $K(f)$, $s \leq s''$, est $\leq$ le nombre de nombres $> b$ dans la colonne s'' de $K(g)$, $s \leq s''$. En d'autres termes, $K(f) < K(g)$ implique que le x_m dans la colonne s'', $s \leq s''$, de $K(f)$ est toujours sur une ligne qui est inférieure (i.e. au-dessus) ou égale à la ligne sur laquelle se trouve le b dans la colonne s'', $s \leq s''$ de $K(g)$.

D'où

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq s \\ b & si \quad x = s \end{cases}$$

est telle que $f < f'$, puisque $b > a$, et $K(f') \leq K(g)$, puisque $K(f')$ et $K(f)$ sont identiques sauf dans les colonnes $s \leq s''$ où $\boxed{\begin{matrix} x_m \\ \vdots \\ x_1 \\ a \end{matrix}}$ a été remplacé par $\boxed{\begin{matrix} b \\ x_m \\ \vdots \\ x_1 \end{matrix}}$.

Notons que

$$g'(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \neq s \\ a & si \quad x = s \end{cases}$$

est telle que $g' < g$ et $K(f) \leq K(g')$. Ceci achève la preuve du théorème. $\square$

4.3 Base et cobase des Clés

L'objectif de cette section est de caractériser les éléments basiques et cobasiques de K_n. La section se termine par un théorème qui dit que le treillis enveloppant de K_n est $KG_n : L(K_n) = KG_n$.

Soit la Clé $\in KG_n$, notée $b[r, s, a, n]$, $1 \leq s \leq n$, $1 \leq r \leq s$, $0 < a \leq n + 1 - r$, et construite en posant $b[r, s, a, n]_{rs} = a$ et en mettant dans $b[r, s, a, n]_{ij}$, la plus petite valeur permise pour que $b[r, s, a, n] \in KG_n$.

La Clé $b[r,s,a,n]$ est définie ainsi :

$$
\begin{array}{lcll}
b[r,s,a,n]_{ij} & = & a+r-i & si\ i \leq r, j \geq s \\
b[r,s,a,n]_{ij} & = & a-(r-i)-(s-j) & si\ i \leq r-(s-j), a \leq j < s \\
b[r,s,a,n]_{ij} & = & 0 & sinon
\end{array}
$$

Notons que : $b[r,s,a,n]_{rs} = a$. La Clé $b[r,s,a,n]$ est représentée dans la figure 4.1. Cette figure montre que $b[r,s,a,n] \in K_n$. On a ainsi le lemme suivant :

Lemme 4.3.1 $b[r,s,a,n] = \wedge_{KG_n}\{k \in KG_n \mid k_{rs} \geq a\} : k_{rs} \geq a \Rightarrow k \geq b[r,s,a,n]$. *De plus* $b[r,s,a,n] \in K_n$.

Corollaire 4.3.2 $\forall k \in RG_n, k \not\geq b[r,s,a,n] \Leftrightarrow k_{rs} < a$

Preuve : ($\Leftarrow$) Évident.

($\Rightarrow$) $k \not\geq b[r,s,a,n] \Rightarrow k_{rs} < a$ est la contraposée de $k_{rs} \geq a \Rightarrow k \geq b[r,s,a,n]$ du lemme 4.3.1. $\square$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & s-r+1 & & & & s & & & \\
 & 0 & \cdots & 0 & a & a+1 & \cdots & a+r-2 & a+r-1 & a+r-1 & \cdots & a+r-1 \\
 & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & 0 & & & & a+1 & a+2 & a+2 & \cdots & a+2 \\
 & & & & 0 & & & a & a+1 & a+1 & \cdots & a+1 \\
r & & & & & 0 & & 0 & \mathbf{a} & a & \cdots & a \\
 & & & & & & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots
\end{array}
$$

Figure 4.1 $\forall r,s,a,\ b[r,s,a,n] = inf_{KG_n}\{k \in KG_n \mid k_{rs} \geq \mathbf{a}\}$

Exemple 4.3.3

$$b[3,4,2,5] = \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ & 0 & 2 & 3 & 3 \\ & & 0 & \mathit{2} & 2 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{array} = \wedge\{k \in KG_5 \mid k_{34} \geq 2\} \in K_5$$

On a : $f_{b[r,s,a,n]} = fb_{s-r+1,a,r,n}$: voir la figure (4.1). On a ainsi dans l'exemple précédent :

$$f_{b[3,4,2,5]} = fb_{2,2,3,5} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On a aussi : $K(fb_{i,j,k,n}) = b[k, i+k-1, j, n]$, puisque $K(fb_{i,j,k,n}) =$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & i & & & & i+k-1 & & & \\
 & 0 & \cdots & 0 & j & j+1 & \cdots & j+k-2 & j+k-1 & j+a-1 & \cdots & j+k-1 \\
 & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & 0 & & & & j+1 & j+2 & j+2 & \cdots & j+2 \\
 & & & & 0 & & & j & j+1 & j+1 & \cdots & j+1 \\
k & & & & & 0 & & 0 & \mathbf{j} & j & \cdots & j \\
 & & & & & & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots
\end{array}$$

Théorème 4.3.4 *La base de K_n est formée exactement des Clés $b[r,s,a,n]$.*

Preuve : Puisque par le théorème 4.2.3, K_n et P_n sont des epo isomorphes, on a : $B(K_n) = \{K(f) \mid f \in B(P_n)\}$. Et, par le théorème 3.3.2, $f \in B(P_n\} \Leftrightarrow f$ est une fonction $fb_{i,j,k,n}$.

Or $K(fb_{i,j,k,n}) = b[k, i+k-1, j, n]$ et $b[r,s,a,n] = fb_{s-r+1,a,r,n}$; d'où la conclusion du théorème. $\square$

Théorème 4.3.5 *Soit $k \in KG_n$; alors $k = \vee\{b[r,s,a,n] \mid k_{rs} = a\}$.*

Preuve : La preuve est analogue à celle du théorème 2.2.5.

Par le lemme 4.3.1, $\forall r, s$ tels que $k_{rs} > 0$, $k \geq b[r, s, k_{rs}, n]$. Donc $k \geq \vee\{b[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\}$. Donc $k_{ij} \geq (\vee\{b[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\})_{ij}$ $\forall i, j$.

Supposons $k_{ij} \neq 0$; alors $k_{ij} = b[i, j, k_{ij}, n]_{ij}$; d'où $k_{ij} \geq \vee(\{b[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\})_{ij} \geq b[i, j, k_{ij}, n]_{ij} = k_{ij}$. On a ainsi : $k_{ij} \neq 0 \Rightarrow k_{ij} = \vee(\{b[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\})_{ij}$.

Supposons $k_{ij} = 0$; alors $0 = k_{ij} \geq \vee(\{b[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\})_{ij} \geq 0$ (par le lemme 4.1.1). On a ainsi : $k_{ij} = 0 \Rightarrow k_{ij} = \vee(\{b[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\})_{ij}$. Ceci achève de montrer : $k = \vee\{b[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\}$. $\square$

Corollaire 4.3.6 *$\forall k \in KG_n$, il existe $P_1 \subseteq K_n$ tel que $k = \vee P_1$.*

Preuve : La preuve est analogue à celle du corollaire 2.2.6.

Soit $k \in KG_n$; posons $P_1 = \{b[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\}$. Par le théorème 4.3.5, $k = \vee P_1$ et par le lemme 4.3.1, $P_1 \subseteq K_n$. $\square$

Soit la clé $\in RG_n$, notée $c[r, s, a, n]$, $1 \leq s \leq n$, $1 \leq r \leq s$, $0 \leq a < n + 1 - r$, et construite en posant $c[r, s, a, n]_{rs} = a$ et en mettant dans $c[r, s, a, n]_{ij}$, la plus grande valeur permise pour que $c[r, s, a, n] \in KG_n$.

La clé $c[r, s, a, n]$ est définie ainsi :

$$\begin{array}{lcll}
c[r,s,a,n]_{ij} & = & n+1-i & si\ i < r, j < s \\
c[r,s,a,n]_{ij} & = & n+1-i & si\ i < r + (j-s), j > s \\
c[r,s,a,n]_{ij} & = & max\{0, a-(i-r)\} & si\ i \geq r, j \leq s \\
c[r,s,a,n]_{ij} & = & max\{0, a-(i-(r+(j-s)))\} & si\ i \geq r + (j-s), j > s
\end{array}$$

Notons que : $c[r, s, a, n]_{rs} = a$. La clé $c[r, s, a, n]$ est représentée dans la figure 4.2. Cette figure montre que $c[r, s, a, n] \in K_n$. On a ainsi le lemme suivant :

Lemme 4.3.7 $c[r, s, a, n] = \vee_{KG_n}\{k \in KG_n \mid k_{rs} \leq a\} : k_{rs} \leq a \Rightarrow k \leq b[r, s, a, n]$. *De plus* $c[r, s, a, n] \in K_n$.

Corollaire 4.3.8 $\forall k \in RG_n, k \not\leq c[r,s,a,n] \Leftrightarrow k_{rs} > c[r,s,a,n]_{rs}$

Preuve : $(\Leftarrow)$ Évident.

$(\Rightarrow)$ $k \not\leq c[r,s,a,n] \Rightarrow k_{rs} < c[r,s,a,n]_{rs}$ est la contraposée de $k_{rs} \leq a \Rightarrow k \leq c[r,s,a,n]$ du lemme 4.3.7, puisque $c[r,s,a,n]_{rs} = a$. $\square$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & s & & \\
 & n & \cdots & n & \cdots & n & n & \cdots \\
 & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & & & n-r+2 & \cdots & n-r+2 & n-r+2 & \cdots \\
r & & & a & \cdots & \mathbf{a} & n-r+1 & \cdots \\
 & & & & \cdots & max\{0,a-1\} & a & \\
 & & & & \cdots & max\{0,a-2\} & max\{0,a-1\} & \ddots \\
 & & & & & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Figure 4.2 $\forall r,s,a,\ c[r,s,a,n] = sup_{KG_n}\{k \in KG_n \mid k_{rs} \leq \mathbf{a}\}$

On a : $f_{c[r,s,a,n]} = fc_{r,a,s,n}$ et $K(fc_{i,j,k,n}) = c[r,k,j,n]$. Voir la figure 4.2.

Exemple 4.3.9

$$
c[3,5,2,8] = \begin{array}{cccccccc}
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
 & & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 \\
 & & & 1 & 1 & 2 & 5 & 5 \\
 & & & & 0 & 1 & 2 & 4 \\
 & & & & & 0 & 1 & 2 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0
\end{array} = \vee\{k \in RG_8 \mid k_{35} \leq 2\} \in K_8
$$

$$
f_{c[3,5,2,8]} = fc_{3,2,5,8} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 1 & 0 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}
$$

Exemple 4.3.10

$$c[3,5,4,8] = \begin{array}{cccccccc} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ & & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ & & & 3 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ & & & & 2 & 3 & 4 & 4 \\ & & & & & 2 & 3 & 3 \\ & & & & & & 2 & 2 \\ & & & & & & & 1 \end{array} = \vee\{k \in RG_8 \mid k_{35} \leq 4\} \in K_8$$

$$f_{c[3,5,4,8]} = fc_{3,4,5,8} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 4.3.11 *La cobase de K_n est formée exactement des Clés $c[r, s, a, n]$.*

Preuve : Puisque par le théorème 4.2.3, K_n et P_n sont des epo isomorphes, on a : $C(K_n) = \{K(f) \mid f \in C(P_n\}$. Par le théorème 3.3.5, $f \in C(P_n\} \Leftrightarrow f$ est une fonction $fc_{i,j,k,n}$.

Or $K(fc_{i,j,k,n}) = c[i, k, j, n]$ et $c[r, s, a, n] = fc_{r,a,s,n}$; d'où la conclusion du théorème. □

Théorème 4.3.12 *Soit $k \in KG_n$; alors $k = \wedge\{c[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\}$.*

Preuve : La preuve est analogue à celle du théorème 2.2.12.

Par le lemme 4.3.7, $\forall r, s$ tels que $k_{rs} < n + 1 - r$, $k \leq c[r, s, k_{rs}, n]$. Donc $k \leq \wedge\{c[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\}$. Donc $k_{ij} \leq (\wedge\{c[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\})_{ij}$ $\forall i, j$.

Supposons $k_{ij} \neq n + 1 - i$; alors $k_{ij} = c[i, j, k_{ij}, n]_{ij}$; d'où $k_{ij} \leq \wedge(\{c[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\})_{ij} \leq c[i, j, k_{ij}, n]_{ij} = k_{ij}$. On a ainsi : $k_{ij} \neq n + 1 - i \Rightarrow k_{ij} = \wedge(\{c[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\})_{ij}$.

Supposons $k_{ij} = n + 1 - i$; alors $k_{ij} \leq \wedge(\{c[r, s, a, n] \mid k_{rs} = a\})_{ij} \leq n + 1 - i$

(par le lemme 4.1.1). On a ainsi : $k_{ij} = n+1-j \Rightarrow k_{ij} = \wedge(\{C_{r,s,a,n} \mid k_{rs} = a\})_{ij}$. Ceci achève de montrer : $k = \wedge\{c[r,s,a,n] \mid k_{rs} = a\}$. $\square$

Corollaire 4.3.13 *$\forall k \in KG_n$, il existe $P_2 \subseteq K_n$ tel que $k = \wedge P_2$.*

Preuve : La preuve est analogue à celle du corollaire 2.2.6.

Soit $k \in KG_n$; posons $P_2 = \{c[r,s,a,n] \mid k_{rs} = a\}$. Par le théorème 4.3.12, $k = \wedge P_2$ et par le lemme 4.3.7, $P_2 \subseteq K_n$. $\square$

Théorème 4.3.14 *$L(K_n) \cong KG_n$: le treillis enveloppant de K_n est isomorphe à KG_n.*

Preuve : Analogue à celle du théorème 2.2.14. Par les corollaires 4.3.6 et 4.3.13, $\forall k \in KG_n$, $\exists\ P_1, P_2 \subseteq K_n$ tels que $k = \vee P_1 = \wedge P_2$. La conclusion du théorème vient alors du théorème 1.2.11. $\square$

4.4 Rectrices des Clés

L'objectif de cette section est de trouver les rectrices d'une Clé généralisée. Rappelons qu'une rectrice de $k \in KG_n$ est un élément maximal de $k^+ \cap B(KG_n)$. Puisque $KG_n \cong L(K_n)$, par le théorème 1.3.7, une rectrice de $k \in KG_n$ est un élément maximal de $k^+ \cap B(K_n)$.

On sait, par les théorèmes 1.3.5 et 4.3.4, que toute Clé de rang généralisée k est le sup des Clés $b[r,s,a,n]$ qui sont $\leq k$: $k = \vee\{b[r,s,a,n] \mid b[r,s,a,n] \leq k\} = \vee(k^+ \cap B(K_n))$.

Lemme 4.4.1 *Si $b[r,s,a,n]$ est une rectrice de $k \in KG_n$, alors $k_{rs} = a$.*

Preuve : Puisque $b[r,s,a,n]$ est une rectrice de k, $X \in k^+ \cap B(K_n)$ et $X \neq b[r,s,a,n]$ impliquent $X \ngeq b[r,s,a,n]$; et on obtient alors, par le corollaire 4.3.2, $X_{rs} < a$.

Ce qui implique, puisque $b[r,s,a,n] \in k^+ \cap B(K_n)$ et $b[r,s,a,n]_{rs} = a$: $k_{rs} = (\vee(k^+ \cap B(K_n)))_{rs} = a$. $\square$

Pour faciliter la compréhension et l'écriture de ce texte, on considère qu'une diagonale de zéros a été ajoutée au sud de k : $k_{10} = k_{21} = \ldots = k_{n+1,n} = 0$; qu'une colonne identique à la colonne n de k a été ajoutée à l'est de k, colonne numérotée $n+1$: $k_{1,n+1} = k_{1,n}$; $k_{2,n+1} = k_{2,n}$; ... ; $k_{n,n+1} = k_{n,n}$; $k_{n+1,n+1} = 0$.

$k \in KG_n$ possède un *point essentiel* $\boxed{\begin{array}{ccc} b & a & \\ & c & d \end{array}}$ en position r, s de valeur $0 < a \leq n+1-r$, si : $k_{rs} = a > b = k_{r,s-1}$, $a > d = k_{r+1,s+1}$ et ($a > c+1 = k_{r+1,s}+1$ ou $c = 0$). En clair, k possède un point essentiel en position r, s, si, en remplaçant k_{rs} par $k_{rs} - 1$, on est toujours dans KG_n. Par le lemme 4.3.1, on a : $k \geq b[r, s, k_{rs}, n]$ $\forall r, s$.

Exemple 4.4.2

$$k = \begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & \mathit{4} & \boldsymbol{\mathit{5}} & 5 & 5 & 5 \\ & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ & & 0 & \mathit{2} & 2 & 2 & 2 \\ & & & 0 & 0 & \mathit{1} & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{array} \in KG_6$$

k possède des points essentiels en position (1,2), (1,3) (3,3), (4,5) de valeurs respectivement 4, 5, 2, 1.

Nous allons montrer que pour $k \in KG_n$, $REC_{K_n}(k) = \{b[r, s, a, n] \mid k$ possède un point essentiel en position r, s de valeur $a\}$.

Lemme 4.4.3 *Toute Clé $b[r, s, a, n]$ possède un et un seul point essentiel; ce point essentiel est en position r,s de valeur a.*

Preuve : La conclusion du lemme vient de la définition de $b[r, s, a, n]$: voir aussi la figure 4.1. $\square$

Lemme 4.4.4 *Soit $k \in KG_n$; si k possède un point essentiel en position r, s de valeur a, alors $b[r, s, a, n] \in REC_{K_n}(k)$.*

Preuve : Puisque $k_{rs} = a$, on a, par les théorème 4.3.5 et 4.3.4 : $b[r, s, a, n] \in k^+ \cap B(K_n)$. Supposons que $X \in k^+ \cap B(K_n)$, avec $X > b[r, s, a, n]$. Puisque A possède un point essentiel en position r, s de valeur a, puisque $k \geq X$, et par définition de $b[r, s, a, n]$, on a :

$a = k_{rs} > k_{r,s-1} \geq X_{r,s-1} \Rightarrow X_{r,s-1} < a$;

$a = k_{rs} \geq X_{rs} \geq b[r, s, a, n]_{rs} = a \Rightarrow X_{rs} = a$;

$a = k_{rs} > k_{r+1,s+1} \geq X_{r+1,s+1} \Rightarrow X_{r+1,s+1} < a$;

si $0 < k_{r+1,s}$, alors $a - 1 > k_{r+1,s} \geq X_{r+1,s}$; donc $0 < k_{r+1,s} \Rightarrow X_{r+1,s} < a - 1$;

si $0 = k_{r+1,s}$, alors $0 = k_{r+1,s} \geq X_{r+1,s}$; donc $0 = k_{r+1,s} \Rightarrow X_{r+1,s} = 0$.

Donc X possède un point essentiel en position r, s de valeur a. Contradiction puisque, par le lemme 4.4.3, X ne possède qu'un point essentiel. Donc $X \not> b[r, s, a, n]$, i.e. $b[r, s, a, n]$ est un élément maximal de $k^+ \cap B(K_n)$, i.e. $b[r, s, a, n] \in REC_{K_n}(k)$. □

Théorème 4.4.5 *Soit $k \in KG_n$; alors $REC_{K_n}(k) = \{b[r, s, a, n] \mid A$ possède un point essentiel en position r,s de valeur $a\}$.*

Preuve : Par le lemme 4.4.4, il suffit de montrer que si $b[r, s, a, n] \in REC_{K_n}(k)$, alors k possède un point essentiel en position r, s de valeur a.

Montrons : $k_{r,s-1} < a$.

On a, par le lemme 4.4.1, $k_{rs} = b[r, s, a, n]_{rs} = a > 0$; d'où, par définition de KG_n, $k_{r,s-1} \leq a$. Supposons $k_{r,s-1} = a$; alors $Y = b[r, s-1, a, n] \in A^+ \cap B(R_n)$ et $Y_{r,s-1} = a$. D'où, puisque $b[r, s, a, n] \in REC_{K_n}(k)$, $Y \not\geq b[r, s, a, n]$. On a alors, par le corollaire 4.3.2, $Y_{rs} < a$. Ce qui implique $Y_{r,s-1} \leq Y_{rs} < a$. Contradiction. Donc $k_{r,s-1} < a$.

On montre d'une manière semblable : $k_{r+1,s+1} < a$.

Si $k_{r+1,s} = 0$, on peut alors conclure que k possède un point essentiel en position

r, s de valeur a. Supposons donc $k_{r+1,s} > 0$. Puisque les colonnes dans une Clé sont strictement décroissantes pour ce qui est des valeurs positives et puisque $k_{rs} = a > 0$, on a alors : $a > 1$. Montrons qu'on a alors : $k_{r+1,s} < a - 1$.

Par définition de KG_n, $k_{r+1,s} < a$. Supposons $k_{r+1,s} = a - 1 > 0$. Alors $Z = b[r+1, s, a-1, n] \in A^+ \cap B(R_n)$ et $Z_{r+1,s} = a-1$. D'où, puisque $b[r, s, a, n] \in REC_{K_n}(k)$, $Z \not\geq b[r, s, a, n]$. On a alors, par le corollaire 4.3.2, $Z_{rs} < a$. Ce qui implique $Z_{r+1,s} < Z_{rs} < a$, i.e. $Z_{r+1,s} < a - 1$. Contradiction. Donc $k_{r+1,s} < a - 1$.

Donc k possède un point essentiel en position r, s de valeur a. $\square$

Soit $k \in KG_n$, $k \neq \mathbf{0}$ et i, j une position dans la Clé k; ce qui suit est un algorithme qui nous donne une rectrice X de k telle que $k_{ij} = X_{ij}$. Autrement dit, l'algorithme sous donne une Clé $X = b[r, s, a, n]$ telle que 1) $X \leq k$; 2) $k_{ij} = X_{ij}$; et 3) k possède un point essentiel en position r, s de valeur a.

(1) Supposons $k_{ij} = k_{i,j+1} = x > 0$; on définit $1 \leq s \leq j$ comme étant le plus petit entier tel que $k_{i,s-1} < k_{i,s} = x$. Un tel s existe puisque $k_{i,i-1} = 0$.

On définit $r \geq i$ comme étant le plus petit entier tel que : $k_{rs} > k_{r+1,s}+1$ ou tel que $k_{r+1,s} = 0$. Un tel r existe parce que : $k_{s+1,s} = 0$. On pose : $k_{rs} = a$, $k_{r,s-1} = b$, $k_{r+1,s} = c$ et $k_{r+1,s+1} = d$. Puisque $k_{i,s-1} < k_{i,s} = x$, puisque les lignes de k sont croissantes et les colonnes strictement décroissantes pour ce qui est des valeurs positives, on retrouve sur les lignes $i, i+1, \ldots, r, r+1$ de k :

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & s & & & & j & & & \\
i & x-1 & x & x & \cdots & x & x & x & & \text{où :} \\
 & x-2 & x-1 & x-1 & \cdots & x-1 & x-1 & x-1 & , & a > c+1 \text{ ou } c = 0 \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & & a > b \\
 & a & a+1 & a+1 & \cdots & a+1 & a+1 & a+1 & & a > d \\
r & b & a & a & \cdots & a & a & a & & \\
 & & c & d & & & & & &
\end{array}$$

On a que k possède un point essentiel en position r, s de valeur a. De plus on observe que $k_{i',j'} = b[r,s,a,n]_{i',j'}$ $\forall i', j'$ tels que $i \leq i' \leq r,\ s \leq j' \leq j+1$. En particulier $k_{ij} = b[r,s,a,n]_{ij}$ et on a trouvé la rectrice X.

(2) Supposons $0 < k_{i,j} = x < k_{i,j+1} = z$. Si $k_{i,j-1} = x$, on se retrouve dans le cas (1). Supposons donc $= k_{i,j-1} = y < x$.

On définit $i' \geq i$ comme étant le plus petit entier tel que $k_{i'+1,j+i'-i+1} < x$; un tel i' existe parce que $k_{i''n} > k_{i''+1,n} = k_{i''+1,n+1}$ $\forall i''$ tel que $k_{i''n} \neq 0$. On pose $s = j+i'-i$.

On définit $r \geq i'$ comme étant le plus petit entier tel que $k_{rs} > k_{r+1,s}+1$ ou tel que $k_{r+1,s} = 0$; on pose $k_{rs} = a$, $k_{r,s-1} = b$, $k_{r+1,s} = c$ et $k_{r+1,s+1} = d$. Puisque les colonnes de k sont strictement décroissantes pour ce qui est des valeurs positives et puisque $k_{i'+1,s+1} < x$, on retrouve sur les lignes $i, \ldots, i', \ldots, r, r+1$ de k :

$$
\begin{array}{ccccccccl}
 & & j & & & & s & & \\
i & y & x & z & & & & & \\
 & & & x & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & x & & & \text{où :} \\
i' & & & & & x-1 & x & & ,\quad a > c+1 \text{ ou } c = 0 \\
 & & & & & x-2 & x-1 & x-1 & a > b \\
 & & & & & & \vdots & & a > d \\
 & & & & & a & a+1 & a+1 & \\
r & & & & & b & a & a & \\
 & & & & & & c & d &
\end{array}
$$

On a donc que k possède un point essentiel en position r, s de valeur a. De plus $k_{ij} = b[r,s,a,n]_{ij}$ et on a trouvé la rectrice X.

(3) Supposons $k_{ij} = 0$; puisque $k \neq \mathbf{0}$, il existe i', j', $1 \leq i' \leq i$ et $j \leq j' \leq n$, tels que $k_{i',j'} > 0$. Par (1) et (2), il existe r, s, a tels que $b[r,s,a,n] \in REC_{K_n}(k)$ et $b[r,s,a,n]_{i',j'} = k_{i',j'}$. On a alors : $b[r,s,a,n]_{ij} = 0$ et on a trouvé la rectrice X. $\square$

Pour construire k à partir de ses rectrices, on met a en position r, s pour toutes les $b[r, s, a, n] \in REC_{K_n}(k)$, et on met aux autres positions la plus petite valeur possible de telle façon qu'on soit toujours dans KG_n ; si dans ces dernières positions, on ne retrouve pas la plus petite valeur possible, c'est qu'on a alors un point essentiel, ce qui est une contradiction.

Pour construire k à partir de ses rectrices, on peut aussi procéder ainsi : $\forall i, j,\ k_{ij} = \vee\{X_{ij} \mid X \in REC_{K_n}(k)\}$.

Exemple 4.4.6 *Supposons que les rectrices de k sont $b[1, 2, 3, 4]$ et $b[3, 3, 1, 4]$; alors*

$$\begin{array}{cccc} * & \mathit{3} & * & * \\ & * & * & * \\ & & \mathit{1} & * \\ & & & * \end{array} \quad \textit{et } k = \quad \begin{array}{cccc} 1 & \mathit{3} & 3 & 3 \\ & 1 & 2 & 2 \\ & & \mathit{1} & 1 \\ & & & 0 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{cccc} 0 & \mathit{3} & 3 & 3 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{array} \quad \vee \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 3 \\ & 1 & 2 & 2 \\ & & \mathit{1} & 1 \\ & & & 0 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{cccc} 1 & \mathit{3} & 3 & 3 \\ & 1 & 2 & 2 \\ & & \mathit{1} & 1 \\ & & & 0 \end{array} \quad = k$$

4.5 Corectrices des Clés

L'objectif de cette section est de trouver les corectrices d'une Clé généralisée. Rappelons qu'une corectrice de $k \in KG_n$ est un élément minimal de $k^- \cap C(KG_n)$. Puisque $KG_n \cong L(K_n)$, par le théorème 1.3.8, une corectrice de $k \in KG_n$ est un élément minimal de $k^+ \cap C(K_n)$.

On sait, par les théorèmes 1.3.6 et 4.3.11, que toute Clé de rang généralisée k est l'inf des Clés $c[r, s, a, n]$ qui sont $\geq k$: $k = \wedge\{c[r, s, a, n] \mid c[r, s, a, n] \geq k\} = \wedge(k^- \cap C(K_n))$.

Lemme 4.5.1 *Si $c[r, s, a, n]$ est une corectrice de $k \in KG_n$, alors $k_{rs} = a$.*

Preuve : Puisque $c[r,s,a,n]$ est une corectrice de k, $Y \in k^- \cap C(K_n)$ et $Y \neq c[r,s,a,n]$ impliquent $Y \not\leq c[r,s,a,n]$; et on obtient alors, par le corollaire 4.3.8, $Y_{rs} > a$.

Ce qui implique, puisque $c[r,s,a,n] \in k^- \cap C(K_n)$ et $c[r,s,a,n]_{rs} = a$: $k_{rs} = (\wedge(k^- \cap C(K_n)))_{rs} = a$. $\square$

$k \in KG_n$ possède un *point coessentiel* $\boxed{\begin{array}{ccc} b & c & \\ & a & d \end{array}}$ en position rs, $1 < r \leq s < n$, *de valeur* $0 \leq a < n+1-r$, si : $k_{rs} = a < c+1 = k_{r-1,s}$, $a < b = k_{r-1,s-1}$ et $a < d = k_{r,s+1}$. On a aussi que $\boxed{\begin{array}{cc} a & d \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{cc} b & c \\ & a \end{array}}$ et $\boxed{a}$ sont des points coessentiels de valeur a en position respectivement $1, s$, $s < n$; r, n, $r > 1$; et $1, n$. En clair, k possède un point coessentiel en position r, s, si, en remplaçant k_{rs} par $k_{rs} + 1$, on est toujours dans RG_n. Par le lemme 4.3.7, on a : $\forall\, r, s$, tel que $k_{rs} < n + 1 - r$, $k \leq c[r, s, k_{rs}, n]$.

Exemple 4.5.2

$$k = \begin{array}{ccccccc} 3 & \boldsymbol{\mathit{3}} & 6 & 6 & 6 & 6 & \boldsymbol{\mathit{6}} \\ & 2 & 4 & 4 & \boldsymbol{\mathit{4}} & 5 & 5 \\ & & \boldsymbol{\mathit{1}} & 3 & 3 & 4 & 4 \\ & & & 1 & \boldsymbol{\mathit{1}} & 3 & 3 \\ & & & & 0 & 0 & \boldsymbol{\mathit{0}} \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{array} \in KG_7$$

k possède des points coessentiels en position (1,2), (1,7), (2,5) (3,3), (4,5), (5,6) de valeurs respectivement 3, 6, 4, 1, 1, 0.

Nous allons montrer que pour $k \in KG_n$, $COREC_{K_n}(k) = \{c[r,s,a,n] \mid k$ possède un point coessentiel en position r, s de valeur $a\}$.

Lemme 4.5.3 *Toute Clé* $c[r,s,a,n]$ *possède un et un seul point coessentiel ; ce point coessentiel est en position r,s de valeur a.*

Preuve : La conclusion du lemme vient de la définition de $c[r,s,a,n]$: voir aussi la figure 4.2. □

Lemme 4.5.4 *Soit $k \in KG_n$; si k possède un point coessentiel en position r, s de valeur a, alors $c[r,s,a,n] \in COREC_{K_n}(k)$.*

Preuve : Puisque $k_{rs} = a$, on a, par les théorèmes 4.3.11 et 4.3.12 : $c[r,s,a,n] \in k^- \cap C(K_n)$. Supposons que $X \in k^- \cap C(K_n)$, avec $X < c[r,s,a,n]$. Puisque k possède un point coessentiel en position r, s de valeur a, puisque $k \leq X$, et par définition de $c[r,s,a,n]$, on a :

$$a = k_{rs} < k_{r-1,s-1} \leq X_{r,s-1} \Rightarrow X_{r-1,s-1} > a\,;$$

$$a = k_{rs} \leq X_{rs} \leq c[r,s,a,n]_{rs} = a \Rightarrow X_{rs} = a\,;$$

$$a = k_{rs} < k_{r,s+1} \leq X_{r,s+1} \Rightarrow X_{r,s+1} > a\,;$$

$$a + 1 = k_{rs} + 1 < k_{r-1,s} \leq X_{r-1,s} \Rightarrow X_{r-1,s} > a + 1.$$

Donc X possède un point coessentiel en position r, s de valeur a. Contradiction puisque, par le lemme 4.5.3, X ne possède qu'un point coessentiel. Donc $X \not< c[r,s,a,n]$, i.e. $c[r,s,a,n]$ est un élément minimal de $k^- \cap C(K_n)$, i.e. $c[r,s,a,n] \in COREC_{K_n}(k)$. □

Théorème 4.5.5 *Soit $k \in KG_n$; alors $COREC_{K_n}(k) = \{c[r,s,a,n] \mid k$ possède un point coessentiel en position r,s de valeur $a\}$.*

Preuve : Par le lemme 4.5.4, il suffit de montrer que si $c[r,s,a,n] \in COREC_{K_n}(k)$, alors k possède un point coessentiel en position r, s de valeur a.

Montrons : $k_{r-1,s} > a + 1$.

On a, par le lemme 2.5.1, $k_{rs} = c[r,s,a,n]_{rs} = a < n+1-r$; d'où, par définition de KG_n, $k_{r-1,s} = a + 1 < n + 1 - (r-1)$ ou $k_{r-1,s} > a + 1$. Supposons $k_{r-1,s} = a + 1$; alors $Y = b[r-1, s, a+1, n] \in A^- \cap C(R_n)$ et $Y_{r-1,s} = a + 1$. D'où, puisque $c[r,s,a,n] \in COREC_{K_n}(k)$, $Y \not\leq c[r,s,a,n]$. On a alors, par le corollaire 4.3.2, $Y_{rs} > a$.

Ce qui implique $a+1 = Y_{r-1,s} > Y_{rs} > a$. Contradiction. Donc $k_{r-1,s} > a+1$.

Montrons : $k_{r-1,s-1} > a$.

Supposons $k_{r-1,s-1} = a$. Puisque $a+1 < k_{r-1,s} \leq n+1-(r-1)$, on a : $a < n+1-(r-1)$; alors $Y = b[r-1, s-1, a, n] \in A^- \cap C(R_n)$ et $Y_{r-1,s-1} = a$. D'où, puisque $c[r,s,a,n] \in COREC_{K_n}(k)$, $Y \not\leq c[r,s,a,n]$. On a alors, par le corollaire 4.3.2, $Y_{rs} > a$. Ce qui implique $a = Y_{r-1,s-1} \geq Y_{rs} > a$. Contradiction. Donc $k_{r-1,s-1} > a$.

Montrons enfin : $k_{r,s+1} < a$.

Supposons $k_{r,s+1} = a$. Puisque $n+1-(r-1) \geq k_{r-1,s} > a+1$, on a : $a < n+1-r$; alors $Y = b[r, s+1, a, n] \in A^- \cap C(R_n)$ et $Y_{r,s+1} = a$. D'où, puisque $c[r,s,a,n] \in COREC_{K_n}(k)$, $Y \not\leq c[r,s,a,n]$. On a alors, par le corollaire 4.3.2, $Y_{rs} > a$. Ce qui implique $a = Y_{r,s+1} \geq Y_{rs} > a$. Contradiction. Donc $k_{r,s+1} > a$.

Donc k possède un point coessentiel en position r,s de valeur a. $\square$

Soit $k \in KG_n$, $k \neq \mathbf{1}$ et i,j une position dans la Clé k ; ce qui suit est un algorithme qui nous donne une corectrice X de k telle que $k_{ij} = X_{ij}$. Autrement dit, l'algorithme sous donne une Clé $X = c[r,s,a,n]$ telle que 1) $X \geq k$; 2) $k_{ij} = X_{ij}$; et 3) k possède un point coessentiel en position rs de valeur a.

Si $k = \mathbf{0}$, alors k possède un point coessentiel en position $1,n$ de valeur 0 tel que : $\forall i,j,\ k_{ij} = 0 = c[1,n,0,n]_{ij}$. Si $k \neq \mathbf{0}$ et si la colonne j est nulle, alors k possède un point coessentiel en position $1,s$, où $s+1$ est la première colonne non nulle de k, de valeur 0, tel que : $\forall i,\ k_{ij} = 0 = c[1,s,0,n]_{ij}$.

Dans ce qui suit, on suppose que la colonne j de k est non nulle et que si $k_{ij} = 0$, alors $k_{i-1,j} \neq 0$.

(1) Supposons $0 \leq k_{ij} = x = k_{i,j-1} < n+1-i$; on définit $s \geq j$ comme étant le plus petit entier tel que $k_{i,s+1} > x$. Si un tel s n'existe pas, on pose $s = n$.

On définit $r \leq i$ comme étant le plus grand entier tel que : $k_{rs} < k_{r-1,s}+1$. Un tel

r existe parce que $x < n+1-i$. Puisque les lignes de k sont croissantes et les colonnes strictement décroissantes pour ce qui est des valeurs positives, on retrouve sur les lignes $r-1, r, \ldots, i$ de k :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & j & & & s & & & \\
 & & & \cdots & b & c & & & \text{où :} \\
r & a & a & \cdots & a & a & d & , & a < c-1 \\
 & a-1 & a-1 & \cdots & a-1 & a-1 & a & & a < b \\
 & & \vdots & & & \vdots & & & a < d \\
 & x+1 & x+1 & \cdots & x+1 & x+1 & x+2 & & \\
i & x & x & \cdots & x & x & x+1 & &
\end{array}
$$

On a que k possède un point coessentiel en position r, s de valeur a. De plus on observe que $k_{i',j'} = c[r,s,a,n]_{i',j'}$, $\forall i', j'$ tels que $r \leq i' \leq i,\ j-1 \leq j' \leq s$. En particulier $k_{ij} = c[r,s,a,n]_{ij}$ et on a trouvé la corectrice X.

(2) Supposons $0 \leq k_{ij} = x < n+1-i$ et $k_{i,j-1} = y < x$; si $k_{i,j+1} = x$ (avec $j < n$) on est ramené au cas (1). Supposons donc $k_{i,j+1} = z > x$ (avec $j < n$).

On définit $i' \leq i$ comme étant le plus grand entier tel que $k_{i'-1,j-(i-i')-1} > x$. Si un tel i' n'existe pas, on pose $i' = 1$. On pose $s = j - (i - i')$.

On définit $r \leq i'$ comme étant le plus grand entier tel que : $k_{rs} < k_{r-1,s} + 1$. Un tel r existe parce que $x < n+1-i'$: en effet, parce que les colonnes sont strictement décroissantes pour ce qui est des valeurs positives, on a $k_{i',s+1} > x$, ce qui implique

$x+1 \leq n+1-i'$. On retrouve sur les lignes $r-1, r, \ldots, i$ de k :

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & s & & & & j & \\
 & b & c & & & & & \\
r & a & a & d & & & & \\
 & a-1 & a-1 & a & & & & \\
 & & \vdots & & & & & \\
 & x+1 & x+1 & x+2 & & & & \\
i' & & x & x+1 & & & & \\
 & & & x & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & x & & \\
i & & & & \cdots & y & x & z
\end{array}
\qquad , \qquad
\begin{array}{c}
\text{où :} \\
a < c-1 \\
a < b \\
a < d
\end{array}
$$

On a que k possède un point coessentiel en position r, s de valeur a. De plus on observe $k_{ij} = c[r,s,a,n]_{ij}$ et on a trouvé la corectrice X.

(3) Supposons $k_{ij} = n+1-i$; puisque $k \neq 1$, il existe i', j', $i < i' \leq n$, $j < j' \leq n$ tels que $k_{i',j'} < n+1-i'$. Par (1) et (2), il existe r, s, a tels que $c[r,s,a,n] \in COREC_{RG_n}(k)$ et $c[r,s,a,n]_{i',j'} = k_{i',j'}$. On a alors : $c[r,s,a,n]_{ij} = n+1-i$ et on a trouvé la corectrice X. $\square$

Pour construire k à partir de ses corectrices, on met a en position r, s pour toutes les $c[r,s,a,n] \in COREC_{K_n}(k)$, et on met aux autres positions la plus grande valeur possible de telle façon qu'on soit toujours dans KG_n ; si dans ces dernières positions, on ne retrouve pas la plus grande valeur possible, c'est qu'on a alors un point coessentiel, ce qui est une contradiction.

Pour construire k à partir de ses corectrices, on peut aussi procéder ainsi : $\forall i, j,\ k_{ij} = \wedge\{X_{ij} \mid X \in COREC_{K_n}(k)\}$.

Exemple 4.5.6 *Supposons que les corectrices de k soient $c[1,2,3,4]$ et $c[3,3,0,4]$; alors*

$$\begin{array}{cccc} * & \boldsymbol{\mathit{3}} & * & * \\ & * & * & * \\ & & \boldsymbol{\mathit{0}} & * \\ & & & * \end{array} \quad \textit{et } k = \quad \begin{array}{cccc} 3 & \boldsymbol{\mathit{3}} & 4 & 4 \\ & 2 & 3 & 3 \\ & & \boldsymbol{\mathit{0}} & 2 \\ & & & 0 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{cccc} 3 & \boldsymbol{\mathit{3}} & 4 & 4 \\ & 2 & 3 & 3 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 1 \end{array} \ \wedge \ \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 4 & 4 \\ & 3 & 3 & 3 \\ & & \boldsymbol{\mathit{0}} & 2 \\ & & & 0 \end{array} \ = \ \begin{array}{cccc} 3 & \boldsymbol{\mathit{3}} & 4 & 4 \\ & 2 & 3 & 3 \\ & & \boldsymbol{\mathit{0}} & 2 \\ & & & 0 \end{array} \ = k$$

4.6 Construction de la Clé associée à une matrice de rang

L'objectif de cette section est de construire la Clé $K(f_A)$ associée à la matrice de rang A, dans un premier temps à partir des rectrices de A et dans un second temps à partir des corectrices de A. Cette construction se transporte des matrices de rang généralisées vers les Clés généralisées.

On a : $R_n \cong P_n \cong K_n$. On a ainsi :

$$\forall A \in R_n,\ A \leftrightarrow f_A \leftrightarrow K(f_A)$$

$$\forall A \in R_n,\ REC_{R_n}(A) \leftrightarrow REC_{P_n}(f_A) \leftrightarrow REC_{K_n}K(f_A)$$

$$\forall A \in R_n,\ COREC_{R_n}(A) \leftrightarrow COREC_{P_n}(f_A) \leftrightarrow COREC_{K_n}K(f_A)$$

On a aussi :

$$B_{r,s,a,n} \leftrightarrow fb_{r-a+1,s,a,n} \leftrightarrow b[a,r,s,n]$$

$$C_{r,s,a,n} \leftrightarrow fc_{a+1,s-1,r,n} \leftrightarrow c[a+1,r,s-1,n]$$

Pour $A \in R_n$, on construit $K(f_A)$ de la façon suivante :

1) on met s en position ar pour toutes les rectrices $B_{r,s,a,n}$ de A, i.e. pour tous les points essentiels en position r, s de valeur a de A ;

2) on met ailleurs les plus petites valeurs possibles de façon à être toujours dans KG_n.

Exemple 4.6.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boldsymbol{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \boldsymbol{3} & 2 & 1 & \boldsymbol{1} & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{5} & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in R_6 \ , \ f_A = (3,2,0,5,1,4)$$

$$REC_{R_6}(A) = \{B_{1,3,1,6}, B_{2,2,2,6}, B_{4,2,3,6}, B_{4,5,1,6}, B_{6,1,5,6}\}$$

$$REC_{K_6}(K(f_A) = \{b[1,1,3,6], b[2,2,2,6], b[3,4,2,6], b[1,4,5,6], b[5,6,1,6]\}$$

$$\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{3} & . & . & \boldsymbol{5} & . & . \\ & \boldsymbol{2} & . & . & . & . \\ & & . & \boldsymbol{2} & . & . \\ & & & . & . & . \\ & & & & . & \boldsymbol{1} \\ & & & & & . \end{array} \quad et\ K(f(A)) = \begin{array}{cccccc} \boldsymbol{3} & 3 & 3 & \boldsymbol{5} & 5 & 5 \\ & \boldsymbol{2} & 2 & 3 & 3 & 4 \\ & & 0 & \boldsymbol{2} & 2 & 3 \\ & & & 0 & 1 & 2 \\ & & & & 0 & \boldsymbol{1} \\ & & & & & 0 \end{array} \in K_6$$

$$f_{K(f_A)} = (3,2,0,5,1,4) = f_A$$

Pour $A \in R_n$, on peut aussi construire $K(f_A)$ de la façon suivante :

1) on met $s-1$ en position $a+1, r$ pour toutes les corectrices $C_{r,s,a,n}$ de A, i.e. pour tous les points coessentiels en position r, s de valeur a de A ;

2) on met ailleurs les plus grandes valeurs possibles de façon à être toujours dans KG_n.

Exemple 4.6.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{2} & 2 & 1 & \boldsymbol{0} & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & \boldsymbol{1} & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \in R_6 \ , \ f_A = (3,2,0,5,1,4)$$

$$COREC_{R_6}(A) = \{C_{3,1,2,6}, C_{3,4,0,6}, C_{5,4,1,6}, C_{6,6,0,6}\}$$

$$COREC_{K_6}(K(f_A) = \{c[3,3,0,6], c[1,3,3,6], c[2,5,3,6], c[1,6,5,6]\}$$

$$\begin{array}{cccccc} . & . & \boldsymbol{3} & . & . & \boldsymbol{5} \\ & . & . & . & \boldsymbol{3} & . \\ & & \boldsymbol{0} & . & . & . \\ & & & . & . & . \\ & & & & . & . \\ & & & & & . \end{array} \quad et \ K(f(A)) = \begin{array}{cccccc} 3 & 3 & \boldsymbol{3} & 5 & 5 & \boldsymbol{5} \\ & 2 & 2 & 3 & \boldsymbol{3} & 4 \\ & & \boldsymbol{0} & 2 & 2 & 3 \\ & & & 0 & 1 & 2 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{array} \in K_6$$

$$f_{K(f_A)} = (3,2,0,5,1,4) = f_A$$

Puisque $R_n \cong K_n$, on a : $RG_n \cong L(R_n) \cong L(K_n) \cong KG_n$. De plus, on a : $\forall\ A \in RG_n,\ A = \vee(REC_{R_n}(A)) = \wedge(COREC_{R_n}(A))$; $\forall\ k \in RG_n,\ k = \vee(REC_{K_n}(k)) = \wedge(COREC_{K_n}(k))$. Ainsi les deux contructions décrites ci-haut donnent la Clé généralisée k_A qui est associée à la matrice de rang généralisée $A \in RG_n$.

Exemple 4.6.3

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \in RG_3 - R_3$$

$$REC_{R_3}(A) = \{B_{1,1,1,3}, B_{3,3,1,3}\}$$

$$REC_{K_3}(k_A) = \{b[1,1,1,3], b[1,3,3,3]\}$$

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{1} & . & \boldsymbol{3} \\ & . & . \\ & & . \end{array} \quad et\ k_A = \quad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{1} & 1 & \boldsymbol{3} \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{array} \quad \in KG_6 - K_6$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \boldsymbol{0} & 0 \\ \boldsymbol{1} & 1 & 1 \end{pmatrix} \in RG_3 - R_3$$

$$COREC_{R_3}(A) = \{C_{2,2,0,3}, C_{3,1,1,3}\}$$

$$COREC_{K_3}(k_A) = \{c[1,2,1,3], c[2,3,0,3]\}$$

$$\begin{array}{ccc} . & \boldsymbol{1} & . \\ & . & \boldsymbol{0} \\ & & . \end{array} \quad et\ k_A = \quad \begin{array}{ccc} 1 & \boldsymbol{1} & 3 \\ & 0 & \boldsymbol{0} \\ & & 0 \end{array} \quad \in KG_6 - K_6$$

CHAPITRE V

ENDOFONCTIONS PARTIELLES INJECTIVES ET PERMUTATIONS

Dans les chapitres 2 et 3, on a montré que R_n, l'epo des matrices de rang, et P_n, l'epo des fonctions partielles injectives, sont des epo isomorphes. On a trouvé la base et la cobase de R_n, ce qui nous a donné la base et la cobase de P_n. Dans ce chapitre, on retrouvera la base et la cobase de P_n et de S_n, l'epo des permutations, en étudiant la matrice de rang associée à une fonction partielle injective. Dans la dernière section de ce chapitre, on montrera que le treillis des matrices de rang généralisées est isomorphe au treillis des Clés généralisées sans passer par le treillis enveloppant de l'epo des matrices de rang.

5.1 Base des fonctions partielles injectives

Nous savons, par le théorème 3.3.2, que la base de P_n est formée exactement des $fb_{i,j,k,n}$. Nous allons redémontrer ce résultat en étudiant la matrice de rang $M(fb_{i,j,k,n})$ associée à $fb_{i,j,k,n}$.

L'ensemble $\{x, x+1, \ldots, x+m-1 = y\} \subset \{1, 2, 3, \ldots\}, m \geq 1$, noté $[x, y]$, est appelé un *intervalle de nombres* de l'ensemble des naturels.

On rappelle que $fb_{i,j,k,n}$ est aussi notée $fb_{r-a+1,s,r,n}$, où $i = r-a+1,\ j = s,\ k = a$.

On a :

$$fb_{r-a+1,s,r,n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r-a & r-a+1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ 0 & \cdots & 0 & s & \cdots & s+a-1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$
$1 \leq r, s \leq n,\ 0 < a \leq min\{r, n+1-s\}$.

On a donc que $f \in P_n$ est une fonction $fb_{r-a+1,s,r,n} \Leftrightarrow \exists r, s, a$ avec $1 \leq r, s \leq n,\ 0 < a \leq min\{r, n+1-s\}$, tels que : (i) f est croissante, (ii) dom(f) est un intervalle (dom(f) $= \{r-a+1, \ldots, r\}$), et (iii) image(f) est un intervalle (image(f) $= \{s, \ldots, s+a-1\}$). En prenant la contraposée de cette définition, on obtient :

Lemme 5.1.1 *f n'est pas une fonction $fb_{r-a+1,s,r,n}$ de P_n* $\Leftrightarrow$

$$\exists\ i < j \in dom(f) \text{ tels que } f(i) > f(j) \tag{5.1}$$

$$ou \quad \exists\ i < k < j \text{ tels que } i, j \in dom(f), f(k) = 0 \tag{5.2}$$

$$ou \quad \exists\ i < k < j \text{ tels que } i, j \in ima(f), k \notin ima(f) \tag{5.3}$$

Lemme 5.1.2 *Soit $f, g, h \in P_n$ et soit des entiers $a, a', b, b', c, c', d, d'$, tels que*

$$(i) \quad ([a,b] \times [c,d]) \ \cap\ ([a',b'] \times [c',d']) = \emptyset,$$

$$(ii) \quad M(g)[p,q] = \begin{cases} M(f)[p,q] - 1 & si\ a \leq p \leq b\ et\ c \leq q \leq d \\ M(f)[p,q] & sinon \end{cases}$$

$$(iii) \quad M(h)[p,q] = \begin{cases} M(f)[p,q] - 1 & si\ a' \leq p \leq b'\ et\ c' \leq q \leq d' \\ M(f)[p,q] & sinon \end{cases}$$

alors $f = \vee_{P_n}\{g, h\}$.

Preuve : $M(g)$ et $M(f)$ prennent les mêmes valeurs sauf sur le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ où les valeurs de $M(f)$ sont celles de $M(g) + 1$.

$M(h)$ et $M(f)$ prennent les mêmes valeurs sauf sur le rectangle $[a', b'] \times [c', d']$ où les valeurs de $M(f)$ sont celles de $M(h) + 1$.

Puisque les deux rectangles sont disjoints, $M(f) = \vee_{R_n}\{M(g), M(h)\}$. Puisque $R_n \cong P_n$, on a $f = \vee_{P_n}\{g, h\}$. $\square$

Le théorème suivant est le théorème 3.3.2 où $i = r - a + 1, j = s, k = a$.

Théorème 5.1.3 *Les éléments basiques de P_n sont exactement les*

$$fb_{r-a+1,s,r,n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r-a & r-a+1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ 0 & \cdots & 0 & s & \cdots & s+a-1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$1 \leq r, s \leq n,\ 0 < a \leq min\{r, n+1-s\}$.

Preuve : La représentation planaire $NE(fb_{r-a+1,s,r,n})$ est :

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & \cdots & s-1 & s & s+1 & \cdots & s+a-1 & \cdots & n \\
1 & \times & \cdots & . & . & . & \cdots & . & \cdots & . \\
 & 0 & & & & & & & & \\
2 & \times & \cdots & . & . & . & \cdots & . & \cdots & . \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
r-a & \times & \cdots & . & . & . & \cdots & . & \cdots & . \\
 & 0 & & & & & & & & \\
r-a+1 & . & \cdots & . & \times & . & \cdots & . & \cdots & . \\
 & 1 & & 1 & & 0 & & & & \\
r-a+2 & . & \cdots & . & . & \times & \cdots & . & \cdots & . \\
 & 2 & & 2 & & 1 & 0 & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
r & . & \cdots & . & . & . & \cdots & \times & \cdots & . \\
 & a & & a & & \text{a-1} & \text{a-2} & 1\ \ 0 & & \\
r+1 & \times & \cdots & . & . & . & \cdots & . & \cdots & . \\
 & a & & a & & \text{a-1} & \text{a-2} & 1\ \ 0 & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
n & \times & \cdots & . & . & . & \cdots & . & \cdots & . \\
 & a & & a & & \text{a-1} & \text{a-2} & 1\ \ 0 & &
\end{array}$$

On remarque : $M(fb_{r-a+1,s,r,n}) = B_{r,s,a,n}$. (Voir la figure 2.2).

Une fonction g telle que $g \to fb_{r-a+1,s,r,n}$ est obtenue :

1) soit en déplaçant la $\times$ de la position $r - a + k, s + k - 1$ $(1 \leq k \leq a)$ à la position $r - a + k, k'$ $(0 \leq k' < s)$: on a alors $M(g)[r, s] = a - 1$;

2) soit en déplaçant la $\times$ de la position $r - a + k, s + k - 1$ $(1 \leq k \leq a)$ à la position $r + k', s + k - 1$ $(r < r + k' \leq n)$, et en déplaçant la $\times$ de la position $r + k', 0$ à la position $r - a + k, s + k - 1$: on a alors $M(g)[r, s] = a - 1$.

Ceci montre : $(\vee_{RG_n}\{M(g) \mid g < fb_{r-a+1,s,r,n}\})[r,s] = a-1$. D'où $M(fb_{r-a+1,s,r,n}) \neq \vee_{R_n}\{M(g) \mid g < fb_{r-a+1,s,r,n}\}$. Puisque $P_n \cong R_n$, on a : $fb_{r-a+1,s,r,n} \neq \vee_{P_n}\{g \mid g < fb_{r-a+1,s,r,n}\}$. On conclut par le lemme 1.3.1 que $fb_{r-a+1,s,r,n} \in B(P_n)$.

Montrons maintenant que si f n'est pas une $fb_{r-a+1,s,r,n}$, alors $f \notin B(P_n)$.

Si f n'est pas une fonction $fb_{r-a+1,s,r,n}$ en raison de 5.1, alors on observe dans le diagramme nord-est de f :

$$NE(f) = \begin{array}{cccccccc}
 & 0 & \cdots & f(j) & \cdots & f(i) & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
i & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
j & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Si on déplace les $\times$ des positions $i, f(i)$ et $j, f(j)$ aux positions $i, f(j)$ et $j, f(i)$ respectivement, on obtient $g \in P_n$ tel que :

$$\begin{array}{rcll}
M(g)[p,q] & = & M(f)[p,q]-1 & si\ i \leq p < j\ et\ f(j) < q \leq f(i) \\
M(g)[p,q] & = & M(f)[p,q] & sinon
\end{array}$$

En clair seules les cases du rectangle dont les sommets sont les points de coordonnées $(i, f(j))$, $(i, f(i))$, $(j, f(i))$ et $(j, f(j))$ ont diminué de 1. On a ainsi : $M(g) < M(f)$, ce qui implique $g < f$.

Si on déplace la $\times$ de la position $j, f(j)$ à la position $j, 0$, on obtient $h \in P_n$ tel que :

$$\begin{array}{rcll}
M(h)[p,q] & = & M(f)[p,q]-1 & si\ j \leq p\ et\ q \leq f(j) \\
M(h)[p,q] & = & M(f)[p,q] & sinon
\end{array}$$

En clair seules les cases sous le segment dont les extrémités sont les points de coordonnées $(j,0)$ et $(j, f(j))$ ont diminué de 1. On a ainsi : $M(h) < M(f)$, ce qui implique $h < f$.

Par le lemme 5.1.2, $f = \vee_{P_n}\{g,h\}$; ce qui permet de conclure, puisque $g < f$ et $h < f$: $f \notin B(P_n)$.

Si f n'est pas une fonction $fb_{r-a+1,s,r,n}$ en raison de 5.2, alors on observe dans le diagramme nord-est de f :

$$NE(f) = \begin{array}{c|ccccccc}
 & 0 & \cdots & f(i) & \cdots & f(j) & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
i & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
k & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
j & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

La fonction $g < f$ qu'on obtient en déplaçant les $\times$ des positions $i, f(i)$ et $k, 0$ aux positions $i, 0$ et $k, f(i)$ respectivement, et la fonction $h < f$ qu'on obtient en déplaçant $\times$ de la position $j, f(j)$ à la position $j, 0$, sont telles que, par le lemme 5.1.2, $f = \vee_{P_n}\{g,h\}$. On conclut de nouveau $f \notin B(P_n)$.

Si f n'est pas une fonction $fb_{r-a+1,s,r,n}$ en raison de 5.3, alors on observe dans le diagramme nord-est de f :

$$NE(f) = \begin{array}{c|ccccccccc}
 & 0 & \cdots & i & \cdots & k & \cdots & j & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
f^{-1}(i) & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
f^{-1}(j) & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

La fonction $g < f$ qu'on obtient en déplaçant la $\times$ de la position $f^{-1}(i), i$ à la position $f^{-1}(i), k$, et la fonction $h < f$ qu'on obtient en déplaçant la $\times$ de la position $f^{-1}(j), j$ à la position $f^{-1}(j), k$, sont telles que, par le lemme 5.1.2, $f = \vee_{P_n}\{g, h\}$. On conclut de nouveau $f \notin B(P_n)$.

On a ainsi montré que si f n'est pas une fonction $fb_{r-a+1,s,r,n}$, alors $f \notin B(P_n)$.

□

5.2 Cobase des fonctions partielles injectives de domaine $\subsetneq [n]$

Nous savons, par le théorème 3.3.5, que la cobase de P_n est formée exactement des $fc_{i,j,k,n}$. Dans cette section, nous allons en partie redémontrer ce résultat en étudiant la matrice de rang $M(fc_{i,j,k,n})$ associée à $fc_{i,j,k,n}$. Plus précisément, nous allons montrer que les fonctions de domaine $\subsetneq [n]$ dans la cobase de P_n sont exactement les $fc_{i,j,k,n}$ de domaine $\subsetneq [n]$.

On rappelle que $fc_{i,j,k,n}$ est aussi notée $fc_{a+1,s-1,r,n}$, où $i = a+1,\ j = s-1,\ k = r$.

Si $a + s - 1 < r$, on a : $dom(f) \subsetneq [n]$ et $fc_{a+1,s-1,r,n} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & a & a+1 & \cdots & a+s & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ n & \cdots & n-a+1 & s-1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & n-a & \cdots & r-a+1 \end{pmatrix}$$

On a donc que $f \in P_n$ est une fonction $fc_{a+1,s-1,r,n}$ de domaine $\subsetneq [n] \Leftrightarrow \exists r, s, a$ avec $1 \leq r, s \leq n,\ 0 \leq a < min\{r, n+1-s\},\ a + s - 1 < r$, tels que :

(i) le domaine de f est l'union de deux intervalles, le premier (si non vide) commençant à 1 et le deuxième (si non vide) se terminant à n : $dom(f) = [1, a+s-1] \cup [r+1, n]$,

(ii) f est décroissante sur chacun des intervalles $[1, a+s-1]$ et $[r+1, n]$,

(iii) l'image de f est l'union de deux intervalles, le premier (si non vide) commençant à 1 et le deuxième (si non vide) se terminant à n : image$(f) = [1, s-1] \cup [r-a+1, n]$.

En prenant la contraposée de cette définition, on obtient :

Lemme 5.2.1 *Si $dom(f) \subsetneq [n]$, alors f n'est pas une fonction $fc_{a+1,s-1,r,n}$ P_n* $\Leftrightarrow$

$$\exists\ i < j < k, \text{ tels que } j \in dom(f), i, k \notin dom(f) \tag{5.4}$$

$$\text{ou} \quad \exists\ i < j \text{ et } (k < i \text{ ou } k > j) \text{ tels que } f(i) < f(j) \text{ et } k \notin dom(f) \tag{5.5}$$

$$\text{ou} \quad \exists\ i < j < k, \text{ tels que } j \in image(f), i, k \notin image(f) \tag{5.6}$$

Lemme 5.2.2 *Soit $f, g, h \in P_n$ et soit des entiers $a, a', b, b', c.c', d, d'$, tels que*

$$(i) \quad ([a,b] \times [c,d]) \ \cap\ ([a',b'] \times [c',d']) = \emptyset,$$

$$(ii) \quad M(g)[p,q] = \begin{cases} M(f)[p,q] + 1 & si\ a \leq p \leq b \ et\ c \leq d \\ M(f)[p,q] & sinon \end{cases}$$

$$(iii) \quad M(h)[p,q] = \begin{cases} M(f)[p,q] + 1 & si\ a' \leq p \leq b' \ et\ c' \leq d' \\ M(f)[p,q] & sinon \end{cases}$$

alors $f = \wedge_{P_n}\{g, h\}$.

Preuve : $M(g)$ et $M(f)$ prennent les mêmes valeurs sauf sur le rectangle $[a,b] \times [c,d]$ où les valeurs de $M(f)$ sont celles de $M(g)$ - 1.

$M(h)$ et $M(f)$ prennent les mêmes valeurs sauf sur le rectangle $[a',b'] \times [c',d']$ où les valeurs de $M(f)$ sont celles de $M(h)$ - 1.

Puisque les deux rectangles sont disjoints, $M(f) = \wedge_{R_n}\{M(g), M(h)\}$. Puisque $R_n \cong P_n$, on a $f = \wedge_{P_n}\{g, h\}$. $\square$

Théorème 5.2.3 *Les éléments cobasiques de P_n de domaine $\subsetneq [n]$ sont exactement les $fc_{a+1,s-1,r,n}$*

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a & a+1 & \cdots & a+s & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ n & \cdots & n-a+1 & s-1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & n-a & \cdots & r-a+1 \end{pmatrix},$$

$$1 \leq r, s \leq n, \ 0 \leq a < min\{r, n+1-s\}.$$

Preuve : La représentation planaire $NE(fc_{a+1,s-1,r,n})$ est :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & 0 & \cdots & s-1 & \cdots & r-a+1 & \cdots & n-a & n-a+1 & \cdots & n \\
1 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \times \\
 & 1 & & & & & & & & 1 & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \cdot & & \cdot & \cdot & \iddots & \vdots \\
 & a\text{-}1 & & & & & & a\text{-}1 & a\text{-}1 & & 1 \\
a & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \times & \cdots & \cdot \\
 & a & & & & & & a & a\text{-}1 & & 1 \\
a+1 & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & a\text{+}1 & & a\text{+}1 & a & & & a & a\text{-}1 & & 1 \\
\vdots & \vdots & \iddots & \vdots & & \cdot & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a+s & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \vdots \\
 & a\text{+}s\text{-}1 & & a\text{+}1 & a & & & a & a\text{-}1 & & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \cdot & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
r & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & a\text{+}s\text{-}1 & & a\text{+}1 & a & & & a & a\text{-}1 & & 1 \\
r+1 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdot & \cdots & \vdots \\
 & a\text{+}s & & a\text{+}2 & a\text{+}1 & & & a & a\text{-}1 & & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \cdot & \iddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
n & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & T & & & a\text{+}n\text{-}r & & & a & a\text{-}1 & & 1
\end{array}
$$

où $T = a + n - r + s - 1$.

On a $M(fc_{a+1,s-1,r,n})[r,s] = a$ et $M(fc_{a+1,s-1,r,n}) = C_{r,s,a,n}$ (Voir la figure 2.3).

Une fonction g telle que $fc_{a+1,s-1,r,n} \to g$ est obtenue :

1) soit en déplaçant la $\times$ qui est sur la ligne $a+1+k$, $(a+1 \leq a+1+k \leq r)$ à la position $a+1+k, k'$ $(s-1 < k' < r-a+1)$: on a alors $M(g)[r,s] = a+1$;

2) soit en déplaçant la $\times$ qui est sur la ligne $a+1+k$, $(a+1 \leq a+1+k \leq r)$, disons en position $a+1+k, k''$ à la position $a+1+k, r-a+1+k'$ $(r-a+1 \leq r-a+1+k' \leq n-a)$, et en déplaçant la $\times$ qui est en position $r+1+k', r-a+1+k'$ à la position $r+1+k', k''$: on a alors $M(g)[r,s] = a+1$.

Ceci montre : $(\wedge_{RG_n}\{M(g) \mid g > fc_{a+1,s-1,r,n}\})[r,s] = a+1$. D'où $M(fc_{a+1,s-1,r,n}) \neq \wedge_{R_n}\{M(g) \mid g > fc_{a+1,s-1,r,n}\}$. Puisque $P_n \cong R_n$, on a : $fc_{a+1,s-1,r,n} \neq \wedge_{P_n}\{g \mid g > fc_{a+1,s-1,r,n}\}$. On conclut, par le lemme 1.3.2, que $fc_{a+1,s-1,r,n} \in C(P_n)$.

Montrons maintenant que si f n'est pas une fonction $fc_{a+1,s-1,r,n}$ de domaine $\subsetneq [n]$, alors $f \notin C(P_n)$. Puisque $dom(f) \subsetneq [n]$, $image(f) \subsetneq [n]$; d'où $\exists\ 1 \leq l \leq n$ tel que $l \notin image(f)$.

Si f n'est pas une fonction $fc_{a+1,s-1,r,n}$ de domaine $\subsetneq [n]$ en raison de 5.4, alors on observe dans le diagramme nord-est de f :

$$NE(f) = \begin{array}{ccccccc} & 0 & \cdots & f(j) & \cdots & l & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ i & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ j & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ k & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Si on déplace les $\times$ des positions $i, 0$ et $j, f(j)$ aux positions $i, f(j)$ et $j, 0$ respectivement, on obtient $g \in P_n$ tel que :

$$\begin{array}{rcll} M(g)[p,q] & = & M(f)[p,q]+1 & si\ i \leq p < j\ et\ 1 \leq q \leq f(j) \\ M(g)[p,q] & = & M(f)[p,q] & sinon \end{array}$$

En clair seules les cases du rectangle dont les sommets sont les points de coordonnées $(i, 0)$, $(i, f(j))$, $(j, f(j))$ et $(j, 0)$ ont augmenté de 1. On a ainsi : $M(g) > M(f)$, ce qui implique $g > f$.

Si on déplace la $\times$ de la position $k, 0$ à la position k, l, on obtient $h \in P_n$ tel que :

$$\begin{array}{rcll} M(h)[p,q] & = & M(f)[p,q]+1 & si\ k \leq p\ et\ q \leq l \\ M(h)[p,q] & = & M(f)[p,q] & sinon \end{array}$$

En clair seules les cases sous le segment dont les extrémités sont les points de coordonnées $(k, 0)$ et (k, l) ont augmenté de 1. On a ainsi : $M(h) > M(f)$, ce qui implique $h > f$.

Par le lemme 5.2.2, $f = \wedge_{P_n}\{g, h\}$; ce qui permet de conclure, puisque $g > f$ et $h > f$: $f \notin C(P_n)$.

Si f n'est pas une fonction $fc_{a+1,s-1,r,n}$ de domaine $\subsetneq [n]$ en raison de 5.5, alors on observe dans le diagramme nord-est de f :

$$NE(f) = \begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & \cdots & f(i) & \cdots & f(j) & \cdots & l & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
i & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
j & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
k & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

La fonction $g > f$ qu'on obtient en déplaçant les $\times$ des positions $i, f(i)$ et $j, f(j)$ aux positions $i, f(j)$ et $j, f(i)$ respectivement, et la fonction $h > f$ qu'on obtient en déplaçant la $\times$ de la position $k, 0$ à la position k, l, sont telles que, par le lemme 5.2.2, $f = \wedge_{P_n}\{g, h\}$. On conclut de nouveau $f \notin C(P_n)$.

Si f n'est pas une fonction $fc_{a+1,s-1,r,n}$ de domaine $\subsetneq [n]$ en raison de 5.6, alors $\exists\ 1 \leq m \leq n$ tel que $m \notin dom(f)$. On observe dans le diagramme nord-est de f :

$$NE(f) = \begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & k & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
f^{-1}(j) & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
m & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

La fonction $g > f$ qu'on obtient en déplaçant la $\times$ de la position $f^{-1}(j), j$ à la position $f^{-1}(j), k$, et la fonction $h > f$ qu'on obtient en déplaçant la $\times$ de la position $m, 0$ à la position m, i, sont telles que, par le lemme 5.2.2, $f = \wedge_{P_n}\{g, h\}$. On conclut de nouveau $f \notin C(P_n)$.

On a ainsi montré que si f n'est pas une fonction $fc_{a+1,s-1,r,n}$ de domaine $\subsetneq [n]$, alors $f \notin C(P_n)$. $\square$

5.3 Base et cobase des permutations

Nous allons trouver dans cette section la base et la cobase de S_n, l'epo des permutations. Nous montrerons aussi (théorème 5.3.9) que les éléments de $C(S_n)$ sont les éléments cobasiques de P_n de domaine $= [n]$.

La fonction $f \in S_n$ a une *descente* en i si $f(i) > f(i+1)$. La fonction $f \in S_n$ a un *recul* en j si $f^{-1}(j-1) > f^{-1}(j)$, i.e. si f^{-1} a une descente en $j-1$.

Exemple 5.3.1 *La fonction* $f = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ *a des descentes en 2 et en 5, et des reculs en 2, en 4 et en 6 :*

$$f = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & . & \times & . & . & . & . \\ 2 & . & . & . & \times & . & . \\ 3 & \times & . & . & . & . & . \\ 4 & . & . & \times & . & . & . \\ 5 & . & . & . & . & . & \times \\ 6 & . & . & . & . & \times & . \end{array}$$

Une *bigrassmannienne* est une $f \in S_n$ qui n'a qu'une seule descente et qu'un seul recul.

Selon (Lascoux et Schützenberger, 1996), les bigrassmanniennes sont obtenues en permutant deux sous-suites consécutives de la suite : $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$. Une bigrassmannienne est entièrement déterminée en choisissant le début x, $1 \leq x$, de la première sous-suite, le début y, $x < y$, et la fin z, $y \leq z \leq n$, de la deuxième sous-suite. La suite $1, \ldots, n$ devient alors : $1, \ldots, x-1, y, \ldots z, x, \ldots y-1, z+1, \ldots, n$.

Exemple 5.3.2 *Si on permute les sous-suites* $3(=x), 4, 5, 6$ *et* $7(=y), 8, 9(=z)$ *de la suite* $1, 2, \ldots, 10$*, on obtient la bigrassmannienne :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 7 & 8 & 9 & 3 & 4 & 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & \times & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & . & \times & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 3 & . & . & . & . & . & . & \times & . & . & . \\ 4 & . & . & . & . & . & . & . & \times & . & . \\ 5 & . & . & . & . & . & . & . & . & \times & . \\ 6 & . & . & \times & . & . & . & . & . & . & . \\ 7 & . & . & . & \times & . & . & . & . & . & . \\ 8 & . & . & . & . & \times & . & . & . & . & . \\ 9 & . & . & . & . & . & \times & . & . & . & . \\ 10 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \times \end{array}$$

Les nombres x, y, z tels que $1 \leq x < y \leq z \leq n$, déterminent entièrement une bigrassmannienne f. La figure 5.1 donne le diagramme nord-est de f, où on a indiqué le recul s de f et la descente r de f.

On observe dans la figure 5.1 : $s = y$, avec $f(x) = y$, et $r = x + z - y$, avec $f(r) = z$.

Posons : $a = z - y + 1$. On a : $a \leq min\{r, n+1-s\}$, puisque, en clair, a est le nombre de $\times$ sur la diagonale qui va de (x, s) à (r, z). On a $a \geq 1$, puisque $y \leq z$. Puisque f a une descente en r, on a : $f(r) > r$; d'où : $a = f(r) - s + 1 > r - s + 1$ et $a \geq 1$ impliquent $a > max\{r - s + 1, 0\}$.

Les x, y, z qui déterminent f donnent les a, s et r, avec $max\{r - s + 1, 0\} < a \leq min\{r, n + 1 - s\}$. On construit la matrice de rang $M(f)$ à partir du diagramme nord-est de f : voir la figure 5.1. On observe que $M(f)$ a exactement deux points essentiels : l'un en position r, s de valeur a et l'autre en position $n, 1$ de valeur n. Donc $M(f) = \vee\{B_{r,s,a,n}, B_{n,1,n,n}\} = BS_{r,s,a,n}$.

Inversement, si on donne le recul s, la descente r et a tels que $max\{r - s + 1, 0\} < a \leq min\{r, n + 1 - s\}$, i.e. si on a une matrice $BS_{r,s,a,n}$, on retrouve une bigrassmannienne. En effet, posons : $y = s$, $z = a + s - 1$ et $x = r - a + 1$. On doit montrer : $1 \leq x < y \leq z \leq n$.

On a : $x = r - a + 1 \geq 1$ puisque $a \leq r$;

$y > x$ puisque $y = s > r - a + 1 = x$;

$z \geq y$ puisque $z = a + s - 1 \geq s = y$;

$z \leq n$ puisque $z = a + s - 1 \leq n + 1 - s + s - 1 = n$.

Nous pouvons donc noter $f = fbg_{r,s,a,n}$.

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc}
 & 0 & 1 & \cdots & \cdot & x & \cdots & \cdot & s=y & \cdots & z & \cdot & \cdots & n \\
1 & \cdot & \times & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \times & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
x & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \times & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
r & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \times & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \times & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
z & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \times & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \times & \cdots & \cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \times
\end{array}
$$

Figure 5.1 diagramme nord-est d'une bigrassmannienne de descente r et de recul s.

Exemple 5.3.3 *La bigrassmannienne de l'exemple 5.3.2 est* $fbg_{5,7,3,10}$, *puisque* $x = 3$, $y = 7$ *et* $z = 9$ *impliquent* $a = z - y + 1 = 3$, $s = y = 7$ *et* $r = x + a - 1 = 5$ *; d'où :*

$$M(fbg_{5,7,3,10}) = BS_{5,7,3,10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & \boldsymbol{\mathit{3}} & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ \boldsymbol{\mathit{10}} & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 5.3.4 *La base de* S_n *est formée exactement des* $fbg_{r,s,a,n}$.

Preuve : Puisque $RS_n \cong S_n$, puisque, par le théorème 2.7.7 la base RS_n est formée exactement des matrices $BS_{r,s,a,n}$, puisque $\forall r, s, a$ tels que $max\{r - s + 1, 0\} < a \leq min\{r, n+1-s\}$, on a une bigrassmannienne $fbg_{r,s,a,n}$ telle que $M(fbg_{r,s,a,n}) = BS_{r,s,a,n}$, on a la conclusion du théorème.

Voici une autre preuve.

Une fonction g telle que $g \to fbg_{r,s,a,n}$ est obtenue (voir la figure 5.1)

en déplaçant la $\times$ de la position $r + 1 + k, f(r + 1 + k)$, où $r + 1 \leq r + 1 + k \leq z$ à la position $r + 1 + k, s + k'$ où $s \leq s + k' \leq z$,

et en déplaçant la $\times$ de la position $f^{-1}(s+k'), s+k'$ à la position $f^{-1}(s+k'), f(r+1+k)$.

On a alors $M(g)[r, s] = a - 1$. Ceci montre : $(\vee_{RG_n}\{M(g) \mid g < fbg_{r,s,a,n}\})[r, s] = a - 1$. D'où $M(fbg_{r,s,a,n}) \neq \vee_{R_n}\{M(g) \mid g < fbg_{r,s,a,n}\}$. Puisque $P_n \cong R_n$, on a :

$fbg_{r,s,a,n} \neq \vee_{P_n}\{g \mid g < fbg_{r,s,a,n}\}$. On conclut par le lemme 1.3.1 que $fbg_{r,s,a,n} \in B(S_n)$.

Supposons que $f \neq \mathbf{0}_{S_n}$ ne soit pas une bigrassmannienne. Alors f possède au moins deux descentes ou au moins deux reculs. Supposons que f possède deux descentes en i et en $j > i$, telles que, sans perte de généralités, $f(i) < f(j+1)$. Alors on observe dans le diagramme nord-est de f :

$$NE(f) = \begin{array}{ccccccccccc} & & f(i+1) & \cdots & f(i) & \cdots & f(j+1) & \cdots & f(j) & \cdots \\ \vdots & & & & & & & & & \\ i & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ i+1 & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \vdots & & & & & & & & & \\ j & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots \\ j+1 & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots \\ \vdots & & & & & & & & & \end{array}$$

La fonction $g < f$ qu'on obtient en déplaçant les $\times$ des positions $i, f(i)$ et $i+1, f(i+1)$ aux positions $i, f(i+1)$ et $i+1, f(i)$ respectivement, et la fonction $h < f$ qu'on obtient en déplaçant $\times$ des positions $j, f(j)$ et $j+1, f(j+1)$ aux positions $j, f(j+1)$ et $j+1, f(j)$ respectivement, sont telles que, par le lemme 5.1.2, $f = \vee_{P_n}\{g, h\}$. On conclut $f \notin B(S_n)$.

On montre d'une façon que si f possède au moins deux reculs, alors $f \notin B(S_n)$.

□

Puisque une bigrassmannienne est entièrement déterminée par les nombres x, y, z, tels $1 \leq x < y \leq z \leq n$, le nombre de bigrassmanniennes, i.e. la cardinalité de $B(S_n)$, est $\begin{pmatrix} n+1 \\ 3 \end{pmatrix}$, comme prévu par le théorème 2.7.8.

La fonction $f \in S_n$ a une *montée* en i si $f(i) < f(i+1)$. La fonction $f \in S_n$ a une *avancée* en j si $f^{-1}(j) > f^{-1}(j-1)$, i.e. si f^{-1} a une montée en $j-1$.

Exemple 5.3.5 *La fonction* $f = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ *a des montées en 1, en 3 et en 4, et des avancée en 3 et en 5 :*

$$f = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & . & \times & . & . & . & . \\ 2 & . & . & . & \times & . & . \\ 3 & \times & . & . & . & . & . \\ 4 & . & . & \times & . & . & . \\ 5 & . & . & . & . & . & \times \\ 6 & . & . & . & . & \times & . \end{array}$$

Une *cobigrassmannienne* est une permutation $f \in S_n$ qui n'a qu'une seule montée et qu'une seule avancée.

Selon (Lascoux et Schützenberger, 1996), les cobigrassmanniennes sont obtenues en permutant deux sous-suites consécutives de la suite strictement décroissante : $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$. Une cobigrassmannienne est entièrement déterminée en choisissant le début x, $n \geq x$, de la première sous-suite, le début y, $x > y$, et la fin z, $y \geq z \geq 1$, de la deuxième sous-suite. La suite $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ devient alors : $n, \ldots, x+1, y, \ldots z, x, \ldots y+1, z-1, \ldots, 1$.

Exemple 5.3.6 *Si on permute les sous-suites* $8(=x), 7, 6, 5$ *et* $4(=y), 3, 2(=z)$ *de la suite* $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$*, on obtient la cobigrassmannienne :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 4 & 3 & 2 & 8 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \times \\ 2 & . & . & . & . & . & . & . & . & \times & . \\ 3 & . & . & . & \times & . & . & . & . & . & . \\ 4 & . & . & \times & . & . & . & . & . & . & . \\ 5 & . & \times & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 6 & . & . & . & . & . & . & . & \times & . & . \\ 7 & . & . & . & . & . & . & \times & . & . & . \\ 8 & . & . & . & . & . & \times & . & . & . & . \\ 9 & . & . & . & . & \times & . & . & . & . & . \\ 10 & \times & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

Les nombres x, y, z tels que $n \geq x > y \geq z \geq 1$, déterminent entièrement une cobigrassmannienne f. La figure 5.2 donne le diagramme nord-est de f, où on a indiqué l'avancée s de f et la montée r de f.

On observe dans la figure 5.2 : $s = y + 1$, avec $f(n + 1 - z) = y + 1$, et $r = n + 1 - x + y - z$, avec $f(r) = z$.

Posons : $a = n - x$. On a : $a < min\{r, n+1-s\}$, puisque, en clair, a est le nombre de $\times$ sur la diagonale qui va de $(1, n)$ à $(n-x, x+1)$. On a $a \geq 0$ puisque $x \leq n$. Puisque $r - s + 1 = n + 1 - x + y - z - y - 1 + 1 = n + 1 - x - z = a - z + 1$ et puisque $z \geq 1$, on a : $r - s + 1 \geq a$.

Les x, y, z qui déterminent f donnent les a, s et r, avec $max\{r - s + 1, 0\} \leq a < min\{r, n+1-s\}$. On construit la matrice de rang $M(f)$ à partir du diagramme nord-est de f : voir la figure 5.2. On observe que $M(f)$ a exactement un point coessentiel en position r, s de valeur a. Donc $M(f) = C_{r,s,a,n}$.

Inversement, si on donne l'avancée s, la montée r et a tels que $max\{r - s + 1, 0\} \leq a < min\{r, n + 1 - s\}$, i.e. si on a une matrice $C_{r,s,a,n} \in RS_n$, on retrouve une cobigrassmannienne. En effet posons : $y = s - 1$, $z = a + s - r$ et $x = n - a$. On doit montrer : $n \geq x > y \geq z \geq 1$.

On a : $n = x + a \geq x$ puisque $a \geq 0$;

$x > y$ puisque $a < n + 1 - s$; en effet, $x = n - a > n - n - 1 + s = s - 1 = y$;

$y \geq z$; en effet, puisque $a < r$, on a $y = s - 1 > s + a - r - 1 = z - 1$; ce qui implique $y \geq z$;

$z \geq 1$ puisque $z = a + s - r \geq 1$ parce que $a \geq 0$ et parce que $a < r$.

Nous pouvons donc noter $f = fcbg_{r,s,a,n}$.

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc}
 & 0 & 1 & \cdots & & z & \cdots & y & s & \cdots & x & & \cdots & n \\
1 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \times \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\
 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \times & \cdots & \cdot \\
n+1-x & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \times & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
r & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \times & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \times & \cdot & \cdots & \cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
n+1-z & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \times & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdots & \times & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \iddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
n & \cdot & \times & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot
\end{array}
$$

Figure 5.2 diagramme nord-est d'une cobigrassmannienne de montée r et d'avancée s.

Exemple 5.3.7 *La cobigrassmannienne de l'exemple 5.3.6 est $fcbg_{7,7,2,10}$, puisque $x = 8$, $y = 4$ et $z = 2$ impliquent $a = n - x = 2$, $s = y + 1 = 5$ et $r = n + 1 - x + y - z = 5$; d'où :*

$$M(fcbg_{5,5,2,10}) = C_{5,5,2,10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 6 & 5 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 5.3.8 *La cobase de S_n est formée exactement des $fcbg_{r,s,a,n}$.*

Preuve : Puisque $RS_n \cong S_n$, puisque, par le théorème 2.7.9 la cobase de RS_n est formée exactement des matrices $C_{r,s,a,n}$ où $max\{r-s+1, 0\} \leq a < min\{r, n+1-s\}$, puisque $\forall r, s, a$ tels que $max\{r-s+1, 0\} \leq a < min\{r, n+1-s\}$, on a une cobigrassmannienne $fcbg_{r,s,a,n}$ telle que $M(fcbg_{r,s,a,n}) = C_{r,s,a,n}$, on a la conclusion du théorème.

Voici une autre preuve.

Une fonction g telle que $fcbg_{r,s,a,n} \rightarrow g$ est obtenue (voir la figure 5.2)

en déplaçant la $\times$ de la position $n+1-x+k, f(n+1-x+k)$, où $n+1-x \leq n+1-x+k \leq r$, à la position $n+1-x+k, s+k'$ où $s \leq s+k' \leq x$,

et en déplaçant la $\times$ de la position $f^{-1}(s+k'), s+k'$ à la position $f^{-1}(s+k'), f(n+1-x+k)$.

On a alors $M(g)[r,s] = a+1$. Ceci montre : $(\wedge_{RG_n}\{M(g) \mid g > fbg_{r,s,a,n}\})[r,s] = a+1$. D'où $M(fcbg_{r,s,a,n}) \neq \wedge_{R_n}\{M(g) \mid g > fcbg_{r,s,a,n}\}$. Puisque $P_n \cong R_n$, on a : $fcbg_{r,s,a,n} \neq \wedge_{P_n}\{g \mid g > fcbg_{r,s,a,n}\}$. On conclut par le lemme 1.3.2 que $fcbg_{r,s,a,n} \in C(S_n)$.

Supposons que $f \neq \mathbf{1}_{S_n}$ ne soit pas une cobigrassmannienne. Alors f possède au moins deux montées ou au moins deux avancées. Supposons que f possède deux montées en i et en $j > i$, telles que, sans perte de généralités, $f(i+1) < f(j)$. Alors on observe dans le diagramme nord-est de f :

$$
NE(f) = \begin{array}{cccccccccc}
 & & f(i) & \cdots & f(i+1) & \cdots & f(j) & \cdots & f(j+1) & \cdots \\
\vdots & & & & & & & & & \\
i & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\
i+1 & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\
\vdots & & & & & & & & & \\
j & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots & \cdot & \cdots \\
j+1 & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \times & \cdots \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

La fonction $g < f$ qu'on obtient en déplaçant les $\times$ des positions $i, f(i)$ et $i+1, f(i+1)$ aux positions $i, f(i+1)$ et $i+1, f(i)$ respectivement, et la fonction $h < f$ qu'on obtient en déplaçant $\times$ des positions $j, f(j)$ et $j+1, f(j+1)$ aux positions $j, f(j+1)$ et $j+1, f(j)$ respectivement, sont telles que, par le lemme 5.1.2, $f = \wedge_{P_n}\{g, h\}$. On conclut $f \notin C(S_n)$.

On montre d'une façon que si f possède au moins deux avancées, alors $f \notin C(S_n)$. $\square$

Théorème 5.3.9 *Les éléments cobasiques de P_n de domaine $= [n]$ sont exactement les $fcbg_{r,s,a,n}$, où $max\{r-s+1, 0\} \leq a < min\{r, n+1-s\}$.*

Preuve : Nous savons, par le théorème 3.3.5, que la cobase de P_n est formée exactement des $fc_{i,j,k,n} = fc_{a+1,s-1,r,n}$. On sait que la matrice de rang associée à $fc_{a+1,s-1,r,n}$ est $C_{r,s,a,n}$.

Si le domaine de $fc_{i,j,k,n}$ est $[n]$, alors $i+j-1 \geq k$, i.e. $a+1+s-1-1 \geq r$, i.e. $a \geq r-s+1$. Et ceci implique que $C_{r,s,a,n} \in RS_n$, i.e. $fc_{i,j,k,n} = fcbg_{r,s,a,n}$. $\square$

5.4 Matrices de rang, Clés et matrices alternantes

Le but de cette section est de décrire d'une autre façon l'isomorphisme de treillis entre les matrices de rang généralisées et les Clés généralisées ; on fera appel aux matrices alternantes.

On retrouve chez (Bressoud, 1999) la description d'une bijection entre les matrices à signe alternant et les triangles. Nous allons décrire cette bijection pour ensuite la prolonger à une bijection entre les matrices alternantes et les Clés généralisées.

À une matrice à signe alternant A'', on associe une matrice X de même format dont les éléments sont tous des 0 ou des 1. On définit $X[i,j] = \sum_{l=1}^{j} A''[i,l]$.

À partir de X, on retrouve A'' ainsi : $A''[i,1] = B[i,1]$ et pour $j > 1$, $A''[i,j] = X[i,j] - X[i,j-1]$. L'exemple suivant est tiré de (Bressoud, 1999) :

Exemple 5.4.1

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On associe alors à la matrice X obtenue, un triangle k : $\forall j$, $k_{1j}, \ldots, k_{jj}$ sont les indices des colonnes en ordre décroissant des 1 apparaissant sur la ligne j de X. On poursuit l'exemple précédent :

Exemple 5.4.2

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ & 2 & 3 & 4 & 4 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{matrix}$$

On généralise cette bijection des matrices alternantes aux Clés généralisées de la façon suivante. On associe à une matrice alternante A' une matrice X de même format dont les éléments sont tous des 0 ou des 1. On définit $X[i,j] = \sum_{k=1}^{j} A'[i,k]$. En somme, on construit X de la même façon que ci-haut.

Si la ligne j de X contient r 1, alors on pose : $k_{1j}, \ldots, k_{rj}$ sont les indices des colonnes en ordre décroissant des 1 apparaissant sur la ligne j de X, et $k_{r+1,j} = \ldots = k_{jj} = 0$. On a alors : $k_j : \{1, \ldots, j\} \to [n], k_j(i) = k_{ij}$ est une fonction partielle injective et décroissante.

On a : $X[i,j] = 1$ et $card\{l \mid l \geq j$ et $X[i,l] = 1\} = r$ ssi $k_{ri} = j$.

Théorème 5.4.3 *Les k_j forment une Clé généralisée k.*

Preuve : Puisque les k_j sont décroissantes, nous avons à montrer : $k_{i+1,j+1} \leq k_{ij} \leq k_{i,j+1}$, $j = 1, \ldots n$, $1 \leq i \leq j$.

Puisque le premier élément non nul d'une colonne de A' est 1 et que les 1 et les -1 vont en alternant dans une colonne, $A'[i,j] = -1 \Rightarrow X[i,j] = 0$ et $A'[i,j] = 1 \Rightarrow X[i,j] = 1$. Ceci a pour conséquence, puisque le dernier élément non nul d'une ligne de A' est 1 et que les 1 et les -1 vont en alternant dans une ligne, que $\forall i,j$:

$$card\{l \geq j \mid X[i,l] = 1\} = card\{l \geq j \mid X[i+1,l] = 1\}$$

ou

$$card\{l \geq j \mid X[i,l] = 1\} = card\{l \geq j \mid X[i+1,l] = 1\} + 1$$

Autrement dit, si le nombre de 1 sur une ligne i de X, à partir de la colonne j, est m, alors le nombre de 1 sur la ligne $i+1$ de X, à partir de la colonne j, est m ou $m+1$.

On a ainsi, en numérotant de droite à gauche les 1 sur les lignes de X, que le r-ième 1 sur la ligne $i+1$ est au moins à droite du r-ième 1 sur la ligne i, i.e. que la colonne du r-ième 1 sur la ligne $i+1$ est $\geq$ la colonne du r-ième 1 sur la ligne i, i.e. $k_{r,i} \leq k_{r,i+1}$;

et on a aussi que le $(r+1)$-ième 1 sur la ligne $i+1$ (s'il existe) est au plus à gauche du r-ième 1 sur la ligne i, i.e. que la colonne du $(r+1)$-ième 1 sur la ligne $i+1$ est $\leq$ la colonne du r-ième 1 sur la ligne i, i.e. $k_{r,i} \geq k_{r+1,i+1}$. $\square$

Exemple 5.4.4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$et\ k = \begin{array}{ccccccc} 3 & 4 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ & 1 & 3 & 3 & 4 & 6 & 6 \\ & & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

On a montré, théorème 2.6.8, qu'il y a une bijection entre les matrices de rang généralisées et les matrices alternantes. Pour $A \in RG_n$, on notera A' la matrice alternante que nous donne cette bijection ; on notera X_A la matrice X associée ci-haut à A', et $k(A)$ la Clé généralisée associée ci-haut à $X = X_A$.

La fonction $A \mapsto k(A)$ est donc une bijection entre RG_n et KG_n. Montrons que c'est en fait un isomorphisme de treillis. Pour $a \in KG_n$, nous noterons $M(a)$ la matrice de RG_n telle que $k(M(a)) = a$.

Nous allons montrer : $\forall A, B \in RG_n,\ A < B \Leftrightarrow k(A) < k(B)$.

Supposons $A < B$ dans RG_n. Alors A possède un point coessentiel que ne possède pas B, disons en position r, s de valeur a. En effet, la matrice A est la plus grande matrice de RG_n ayant les points coessentiels que possède A. Donc la matrice B ne peut à la fois posséder les points coessentiels de A et être $> A$.

La matrice $C[i,j] = \begin{cases} A[i,j]+1 & si\ (i,j)=(r,s) \\ A[i,j] & sinon \end{cases}$ couvre la matrice A, i.e. $A \leq Y \leq C \Rightarrow Y = A$ ou $Y = C$.

Montrons : $C \leq B$. Pour ce faire, il suffit de montrer : $C[r,s] \leq B[r,s]$.

Si $A[r-1,s] < B[r-1,s]$ alors $C[r,s] = A[r,s]+1 = A[r-1,s]+1 < B[r-1,s]+1 \leq B[r,s]+1$; d'où $C[r,s] < B[r,s]+1$; d'où $C[r,s] \leq B[r,s]$;

d'une façon similaire, on montre : si $A[r+1,s] < B[r+1,s]$ ou $A[r,s-1] < B[r,s-1]$ ou $A[r,s+1] < B[r,s+1]$ alors $C[r,s] \leq B[r,s]$;

et si $A[r-1,s] = B[r-1,s]$ et $A[r+1,s] = B[r+1,s]$ et $A[r,s-1] = B[r,s-1]$ et $A[r,s+1] = B[r,s+1]$, alors, puisque B ne possède pas de point coessentiel en position r, s, $A[r,s] < B[r,s]$; d'où $C[r,s] = A[r,s]+1 \leq B[r,s]$; d'où $C[r,s] \leq B[r,s]$.

Tout ceci donne les théorèmes :

Théorème 5.4.5 *$A < B$ ssi il existe $C_1, \ldots C_{m-1}$, telles que, en posant $C_0 = A$ et $C_m = B$, C_t, pour $t = 0, \ldots, m-1$, possède un point coessentiel en position r_t, s_t telles que*

$$C_{t+1}[i,j] = \begin{cases} C_t[i,j]+1 & si\ (i,j)=(r_t,s_t) \\ C_t[i,j] & sinon \end{cases}$$

Théorème 5.4.6 *B couvre A ssi B ne diffère de A qu'en une seule position r, s, où on a $B[r,s] = A[r,s]+1$.*

Théorème 5.4.7 *$A < B$ ssi il existe $C_1, \ldots C_{m-1}$, telles que : $A = C_0 < C_1 < \ldots < C_m = B$ et C_{t+1} couvre C_t, $t = 0, \ldots, m-1$.*

En travaillant avec les Clés généralisées, on arriverait aux mêmes conclusions, à savoir :

la Clé généralisée b couvre la Clé généralisée a ssi b diffère de a qu'en une seule position r, s, où on a $b_{rs} = a_{rs} + 1$;

$a < b$ ssi il existe $c_1, \ldots c_{m-1}$, telles que : $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_m = b$ et c_{t+1} couvre c_t, $t = 0, \ldots, m-1$.

Donc pour montrer : $\forall A, B \in RG_n,\ A < B \Leftrightarrow k_A < k_B$, il suffit de montrer : $\forall A, B \in RG_n$, B couvre $A \Leftrightarrow k(A)$ couvre $k(B)$.

Supposons que B couvre A ; soit r, s et a tels que A a un point coessentiel en position r, s de valeur a et tels que $B[r, s] = a + 1$.

Il y a 16 motifs 3x3 différents en position $r-1, s-1$ que peut avoir la matrice A. Dans les lignes qui suivent, nous avons ces 16 motifs avec le motif correspondant pour la matrice B en position $r-1, s-1$, et les motifs correspondants pour les matrices A', B', X_A et X_B en position r, s.

Il est bon de rappeler que dans les matrices A et B le motif zéro $\boxed{\begin{matrix} a & a \\ a+1 & a+1 \end{matrix}}$ est précédé de motifs zéro et possiblement d'un motif moins $\boxed{\begin{matrix} i & i-1 \\ i & i \end{matrix}}$; que le motif zéro $\boxed{\begin{matrix} a+1 & a \\ a+1 & a \end{matrix}}$ est précédé de motifs zéro et d'un motif plus $\boxed{\begin{matrix} i & i \\ i+1 & i \end{matrix}}$. C'est ce qui explique qu'un 0 dans la matrice A' ou dans la matrice B' peut devenir un 1 dans la matrice X_A ou dans la matrice X_B.

A	B	A'	B'	X_A	X_B
$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a \\ a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a \\ a+1 & a+1 & a \\ a+1 & a+1 & a \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline + & 0 \\ - & + \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & + \\ 0 & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a-1 \\ a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a-1 \\ a+1 & a+1 & a \\ a+1 & a+1 & a \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline + & - \\ - & + \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a \\ a+1 & a & a \\ a+2 & a+1 & a \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a \\ a+1 & a+1 & a \\ a+2 & a+1 & a \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline + & 0 \\ 0 & + \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & + \\ + & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a-1 \\ a+1 & a & a \\ a+2 & a+1 & a \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a-1 \\ a+1 & a+1 & a \\ a+2 & a+1 & a \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline + & - \\ 0 & + \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & 0 \\ + & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a \\ a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a+1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a \\ a+1 & a+1 & a \\ a+1 & a+1 & a+1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline + & 0 \\ - & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & + \\ 0 & - \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a-1 \\ a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a+1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a-1 \\ a+1 & a+1 & a \\ a+1 & a+1 & a+1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline + & - \\ - & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & 0 \\ 0 & - \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a \\ a+1 & a & a \\ a+2 & a+1 & a+1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a \\ a+1 & a+1 & a \\ a+2 & a+1 & a+1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline + & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & + \\ + & - \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline\end{array}$
$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a-1 \\ a+1 & a & a \\ a+2 & a+1 & a+1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline a & a & a-1 \\ a+1 & a+1 & a \\ a+2 & a+1 & a+1 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline + & - \\ 0 & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & 0 \\ + & - \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline\end{array}$

A	B	A'	B'	X_A	X_B
$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a \\ a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a \\ a+1 & a+1 & a \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ - & + \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} - & + \\ 0 & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}}$
$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a-1 \\ a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a-1 \\ a+1 & a+1 & a \\ a+1 & a+1 & a \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & - \\ - & + \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} - & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}}$
$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a \\ a+1 & a & a \\ a+2 & a+1 & a \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a \\ a+2 & a+1 & a \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & + \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} - & + \\ + & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}$
$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a-1 \\ a+1 & a & a \\ a+2 & a+1 & a \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a-1 \\ a+1 & a+1 & a \\ a+2 & a+1 & a \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & - \\ 0 & + \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} - & 0 \\ + & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}$
$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a \\ a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ - & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} - & + \\ 0 & - \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}$
$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a-1 \\ a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a-1 \\ a+1 & a+1 & a \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & - \\ - & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} - & 0 \\ 0 & - \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}$
$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a \\ a+1 & a & a \\ a+2 & a+1 & a+1 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a \\ a+1 & a+1 & a \\ a+2 & a+1 & a+1 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} - & + \\ + & - \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}}$
$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a-1 \\ a+1 & a & a \\ a+2 & a+1 & a+1 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} a+1 & a & a-1 \\ a+1 & a+1 & a \\ a+2 & a+1 & a+1 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & - \\ 0 & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} - & 0 \\ + & - \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}}$

De ces 16 lignes, on constate que si B couvre A, avec $B[r,s] = A[r,s]+1$, alors la matrice alternante B' diffère de la matrice alternante A' que sur le motif 2x2 en position r, s. On constate aussi que sur ce motif, on a : $A'[r,s]+A'[r+1,s] = B'[r,s]+B'[r+1,s]$ et $A'[r,s+1] + A'[r+1,s+1] = B'[r,s+1] + B'[r+1,s+1]$.

Ceci implique que les matrices X_A et X_B ne diffèrent que sur les positions r, s et $r, s+1$. En fait, on a : $X_A[r,s] = X_B[r,s+1] = 1$ et $X_A[r,s+1] = X_B[r,s] = 0$. Autrement dit, le motif en position r, s de X_A est $\boxed{1 \quad 0}$ et devient en position r, s de X_B le motif $\boxed{0 \quad 1}$.

Donc $card\{l \mid l \geq s$ et $X_A[r,l] = 1\} = card\{l \mid l \geq s+1$ et $X_B[r,l] = 1\}$. Soit t ce nombre.

Puisque $X_A[r,s] = 1$ et $card\{l \mid l \geq s$ et $X_A[r,l] = 1\} = t$, $k(A)_{tr} = s$; puisque $X_B[r,s+1] = 1$ et $card\{l \mid l \geq s+1$ et $X_A[r,l] = 1\} = t$, $k(B)_{tr} = s+1$.

Ceci implique que les Clés généralisées $k(A)$ et $k(B)$ ne diffèrent qu'en position t, r avec $k(B)_{tr} = k(A)_{tr}+1$, i.e. que $k(B)$ couvre $k(A)$.

Donc on a montré : si B couvre A, avec $B[r,s] = A[r,s]+1$, alors $k(B)$ couvre $k(A)$, avec $k(B)_{tr} = k(A)_{tr}+1$, où $t = card\{l \mid l \geq s$ et $X_A[r,l] = 1\}$.

Si on interprète ces 16 lignes à l'envers, i.e. si on travaille avec les Clés généralisées, on obtient un résultat similaire, à savoir : si a et b sont des Clés généralisées telles que b couvre a, avec $b_{tr} = a_{tr}+1$, alors la matrice $M(b)$ couvre la matrice $M(a)$, avec $M(b)[r, b_{tr}] = M(a)[r, b_{tr}]+1$.

Donc : B couvre $A \Leftrightarrow k(B)$ couvre $k(A)$. Et ceci implique : $A < B \Leftrightarrow k(B) < k(A)$. Donc $A \mapsto k(A)$ est un isomorphisme de treillis.

Exemple :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \mathbf{2} & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{couvre} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \mathbf{1} & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{couvre} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{couvre} \quad X_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k(B) = \begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ & 1 & 3 & \mathbf{4} & 4 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{array} \quad \text{couvre} \quad k(A) = \begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ & 1 & 3 & \mathbf{3} & 4 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{array}$$

CONCLUSION

On a montré que le treillis enveloppant de l'ensemble partiellement ordonné des fonctions partielles injectives de $[n]$ vers $[n]$ est isomorphe au treillis des matrices de rang généralisées et est aussi isomorphe au treillis des Clés généralisées. On a aussi décrit explicitement et étudié des isomorphismes entre ces deux treillis. Ces deux treillis sont aussi en bijection avec l'ensemble des matrices alternantes, ce qui permet de définir un ordre sur l'ensemble des matrices alternantes.

Pour donner une suite à ce travail, on peut poser comme questions : est-ce qu'il existe m tel qu'il un morphisme d'epo de l'epo des fonctions partielles injectives P_n vers l'epo des permutations S_m ?

Autre question : on a montré que si la matrice A est plus petite dans le treillis des matrices de rang généralisées que la matrice B, alors la somme des éléments de A est plus petite que la somme des éléments de B ; ceci permet de conjecturer que la dimension du treillis des matrices de rang généralisées, i.e. la longueur de la plus longue antichaîne, est le nombre de matrices dont la somme des éléments est un nombre donné, nombre qui reste à déterminer.

Autre question : dénombrer les matrices alternantes, i.e. dénombrer RG_n.

BIBLIOGRAPHIE

Birkhoff, G. 1995. *Lattice Theory.* T. 25. American Mathematical Society Colloquium Publications, troisième édition.

Bressoud, D. M. 1999. *Proofs and Confirmations The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture.* Coll. « Spectrum series ». The Mathematical Association of America.

Kassel, C., A. Lascoux, et C. Reutenauer. 2003. « The singular locus of a Schubert variety », *Journal of Algebra*, no. 269, p. 74–108.

Lascoux, A. et M.-P. Schützenberger. 1996. « Treillis et bases des groupes de Coxeter », *Electron. J. of Combin.*, no. 3, # R27.

Macdonald, I. 1991. *Notes on Schubert Polynomials*, no 6. Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique.

MacLane, S. et G. Birkhoff. 1967. *Algebra.* The MacMillan Company.

Manivel, L. 1998. *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence.* Coll. « Cours spécialisés 3 ». Société Mathématique de France 1998.

Reading, N. 2002. « Order Dimension, Strong Bruhat Order and Lattice Properties for Posets », *Order 19*, p. 73–100.

Renner, L. E. 2005. *Linear Algebraic Monoids.* Coll. « Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 134 ». Springer Verlag.

Stanley, R. P. 1997. *Enumerative Combinatorics.* T. I, série *Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49.* Cambridge University Press.

INDEX