

INSTRUMENTATION DIDACTIQUE DES FUTURS ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES. EXEMPLE DE LA CO-VARIATION

Fabienne Venant

Département de mathématiques,
UQAM C.P. 8888, Succursale Centre-ville, PK-5151
Montréal, QC H3C 3P8
venant.fabienne@uqam.ca

Abstract : This work falls within the theoretical framework of the double instrumental genesis (Rabardel 1995, Tapan 2006). We are interested in the construction of techno-educational tools by teachers. We offer an analysis of two initial training sequences on the concept of co-variation using a dynamic geometry software. We highlight the fact that the didactic genesis is not necessarily correlated with advanced technical instrumentation. We use a classical educational tool (a priori analysis -- Charnay, 2003) to engage students in a didactic instrumental genesis.

Résumé : Ce travail s'inscrit dans le cadre théorique de la double genèse instrumentale (Rabardel 1995, Tapan 2006). Nous nous intéressons à la construction d'instruments techno-didactiques par les enseignants. Nous proposons l'analyse de deux séquences de formation initiale portant sur la notion de co-variation avec un logiciel de géométrie dynamique. Nous mettons en évidence le fait que la genèse didactique n'est pas nécessairement corrélée à une instrumentation technique poussée. Nous proposons une utilisation de l'outil pédagogique classique constitué par les analyses a priori (Charnay 2003) pour engager les étudiants dans une genèse instrumentale didactique.

Introduction

Le travail présenté ici repose sur une volonté de favoriser l'intégration de la technologie dans l'enseignement des mathématiques. Ainsi que le remarquent Leclère et *al.* (2007) :

« La plupart des politiques visant à équiper les établissements ou à former les enseignants n'ont pas abouti à un développement important des usages en classe. Les recommandations incitatives, notamment dans les programmes officiels, n'ont pas suffi non plus à dynamiser les pratiques de façon significative. »

De nombreux chercheurs ont mis en avant la difficulté à changer les pratiques comme frein à l'intégration des TICS. Qu'en est-il pour les futurs enseignants qui sont en train de développer leurs propres pratiques? Bien que baignant dans une culture numérique, ils ne semblent pas plus enclins à intégrer la technologie dans leurs pratiques quotidiennes que leur aînés. Nous défendons ici l'idée qu'une bonne intégration de la technologie ne repose pas tant sur des compétences techniques poussées que sur une conscience des possibilités didactiques offertes par la technologie. Nous cherchons donc à développer une réflexion techno-didactique chez les enseignants, aussi bien en formation initiale que continue. Nous appuyons nos réflexions sur deux séquences de formation technologique dispensées dans le cadre des cours MAT3225 (Didactique de la variable et de la fonction) et MAT4812 (explorations mathématiques à l'aide de l'informatique) aux étudiants du Bac en Enseignement des Mathématiques de l'UQAM. Ces séquences portent sur le concept de co-variation, l'accent étant mis sur l'articulation entre les différentes représentations d'une fonction. L'objectif est double: amener les futurs enseignants à appréhender aussi bien qualitativement que quantitativement une situation de co-variation, et les amener à une réflexion didactique sur les possibilités offertes par les logiciels de géométrie dynamique pour articuler ces représentations.

Cadre théorique

Nous nous inscrivons dans le cadre théorique de la genèse instrumentale (Guin & Trouche, 1998; Rabardel, 1995; Trouche, 2007) en reprenant essentiellement l'idée que l'artéfact informatique devient un instrument à travers le double processus de l'instrumentation (l'artéfact conditionne l'action du sujet) et de l'instrumentalisation (adaptation de l'artéfact à l'usage qui en est fait)

(Hoyle et Noss, 2003). Ainsi que le souligne Trouche 2007, l'analyse des processus d'instrumentalisation et d'instrumentation est un outil aidant à suivre les processus de conceptualisation

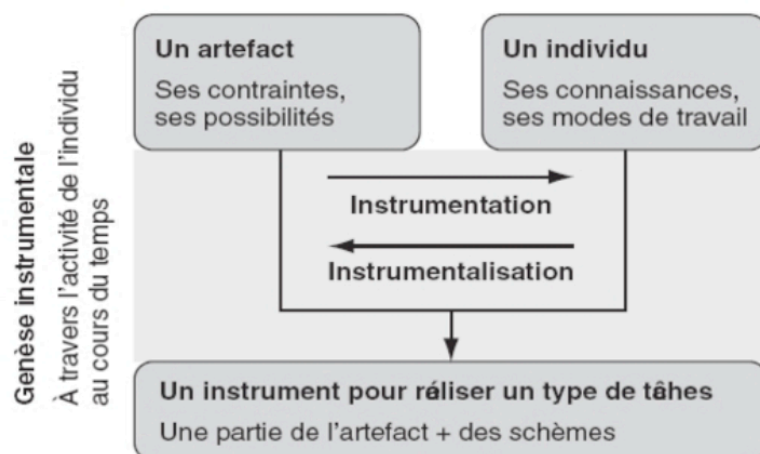


Figure 1. Genèse instrumentale (Trouche, 2007)

A travers ce double processus, c'est l'impact de l'instrument sur la conceptualisation mathématique et didactique qui nous intéresse. Nous reprenons l'idée d'une double genèse instrumentale proposée par Tapan (2006). Pour pouvoir intégrer de façon pertinente la technologie dans leur enseignement, les enseignants doivent non seulement construire des instruments leur permettant de résoudre eux-mêmes des tâches mathématiques, mais aussi et surtout des instruments didactiques leur permettant d'enseigner les mathématiques. Nous ferons donc la distinction entre le premier niveau d'instrumentation, que nous appelons instrumentation technique et le second que nous appelons instrumentation didactique. Dans le cas de futurs enseignants, on peut faire l'hypothèse que la genèse instrumentale didactique se fait en parallèle avec la genèse des connaissances didactiques et s'appuie sur des connaissances mathématiques dont certaines sont récemment acquises. C'est le cas pour la co-variation.

La partie psychologique de la genèse d'un instrument peut-être appréhendée par l'intermédiaire des schèmes mis en place. Nous reprenons ici la caractérisation de schème donnée par Vergnaud (1996): une organisation invariante de l'activité, incluant notamment des règles d'action, structurée par des invariants opératoires (connaissances implicites) qui se forgent au cours de l'activité et qui la pilotent. Ce sont les schèmes que le sujet constitue dans le cadre de la réalisation d'un type de tâches. Ces schèmes font partie intégrante de l'instrument construit par le sujet.

Notre objectif est de mieux comprendre le processus d'instrumentation didactique des futurs enseignants de mathématiques et de mettre au point des outils de formation permettant à la fois d'observer et d'accompagner leur genèse instrumentale.

Registres sémiotiques de la fonction

Les situations à l'étude ont été sélectionnées selon leur adéquation aux préconisations du MELS (Programme de formation de l'école québécoise -- Second cycle du secondaire en mathématiques -- MELS, p. 51)

« Au cours de sa formation, l'élève [...] développe son habileté à modéliser des situations... [...] Il améliore aussi sa capacité à évoquer une situation en faisant appel à plusieurs registres de représentation. Par exemple, les fonctions peuvent être représentées graphiquement ou sous forme de tableau ou de règle, et chacune de ces représentations est porteuse d'un point de vue qui lui est propre, complémentaire ou équivalent aux autres. »

Le programme fait ici explicitement référence aux registres de représentations sémiotiques tels qu'ils ont été définis par Duval (1993). De nombreuses recherches (Carlson 1998; Hitt 1998; Monk 1992; De Cotret 1985) soulignent les difficultés éprouvées par les étudiants avec le concept de fonctions et plus particulièrement avec l'articulation entre les différents registres de représentation. Nous avons sélectionné des situations qui s'appuient sur la géométrie dynamique pour permettre une conception plus globale de la co-variation, basée sur des allers et retours entre différents registres sémiotiques.

Duval (1993) définit trois critères constitutifs d'un registre sémiotique : l'existence de représentations identifiables, l'existence d'activités de traitement, c'est-à-dire de transformations d'une représentation à une autre au sein du même registre et enfin l'existence de mécanismes de conversion vers d'autres registres. Se basant sur ces critères, Passaro (2007) considère deux registres de représentation pour la fonction, que nous reprenons ici : le registre graphique et la situation. Nous nous intéressons ici à des situations de co-variation, c'est-à-dire une description verbale ou figurale d'une situation, accompagnée de l'identification explicite des grandeurs en co-variation. Nous considérons également un troisième registre : le registre symbolique, c'est-à-dire la représentation d'une fonction par une équation de type $y=f(x)$.

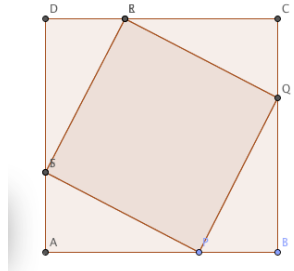
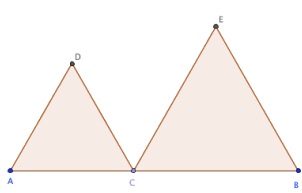
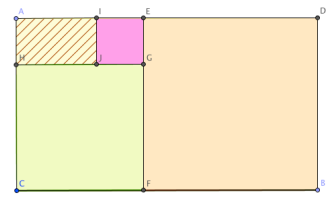
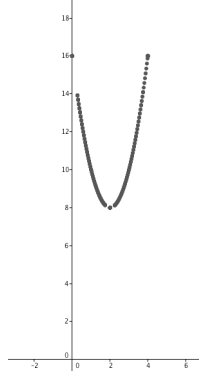
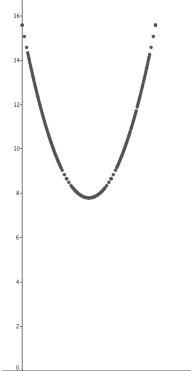
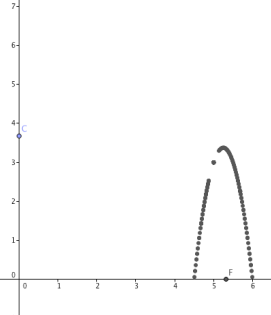
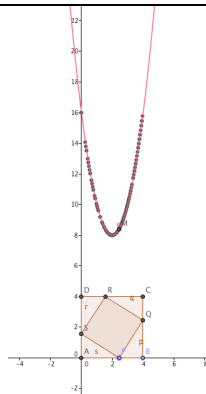
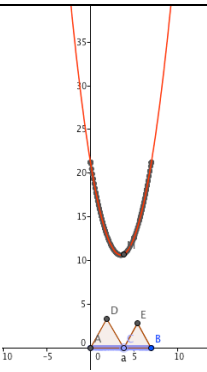
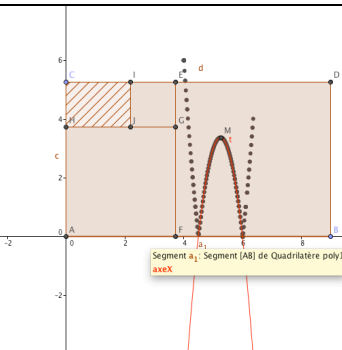
Les fonctions du déplacement

La géométrie dynamique repose sur l'utilisation du déplacement, c'est-à-dire la possibilité de déplacer les éléments d'une figure avec la souris. Les fonctions du déplacement ont été étudiées depuis longtemps. Restrepo (2008) propose une très bonne synthèse des différentes utilisations du déplacement (déplacement erratique, limité, guidé, discret, continu...). Elle montre également que l'utilisation de déplacement n'est immédiate ni pour les élèves ni pour les enseignants. Une utilisation efficace et pertinente du déplacement repose donc sur une instrumentation efficace. Ainsi que le souligne Soury-Lavergne (2011), « un savoir didactique sur la géométrie dynamique est le fait que le déplacement peut avoir plusieurs fonctions. ». Les situations que nous avons choisies reposent sur deux fonctions du déplacement :

- le déplacement pour explorer, qu'il soit continu (exhiber une continuité de configurations intermédiaires entre deux configurations données) ou discret (exploration de quelques configurations particulières),
- le déplacement pour visualiser la trajectoire un point, reposant sur l'utilisation de l'activation de la trace d'un point modélisant la situation fonctionnelle.

Situations exploitées

Le tableau ci-dessous récapitule les situations mises en jeu ainsi que leurs différentes représentations. Les trois situations sont construites sur un même schéma : on part d'un énoncé écrit décrivant la situation, accompagné éventuellement d'un dessin statique illustrant cet énoncé (situation 3). Les étudiants commencent par construire la figure modélisant la situation dans le logiciel. La construction de la figure est facilitée par les outils de construction disponibles dans le logiciel, de sorte que l'obtention de la figure repose principalement sur une compréhension des relations entre les différentes grandeurs géométriques. A partir de là, on s'attend à ce que les étudiants utilisent le déplacement des points mobiles pour explorer la situation. Ils ont ainsi accès à une exploration qualitative de la situation, et notamment la recherche des valeurs limites. Le graphe peut ensuite être obtenu depuis la figure, par activation de trace d'un point représentant la co-variation, et piloté en déplaçant le point mobile sur la figure. Le graphe peut également être obtenu à partir de l'équation de la fonction. Les étudiants peuvent utiliser la figure dynamique pour donner du sens au graphique obtenu. La juxtaposition et la comparaison de toutes les représentations permettent de faire des liens entre elles, de leur donner du sens et de comprendre la nature de la relation en jeu (il s'agit de relations quadratiques)

	Situation 1	Situation 2	Situation 3 ¹
figural			
verbal	Le carré PQRS est inscrit dans le carré ABCD de côté 4 cm. P est un point mobile sur [AB]	Les triangles ADC et CEB sont équilatéraux. Le point C est mobile sur [AB]	Le rectangle CBDA représente un bâtiment de largeur 9 cm. Les pièces colorées sont des carrés. La pièce hachurée est rectangulaire.
Co-Variation	Aire de PQRS en fonction de AP	Somme des aires des triangles en fonction de AC	Aire de la pièce rectangulaire en fonction de la largeur du bâtiment.
Graphique			
Symbolique	$f(x) = 2x^2 - 8x + 16$	On pose $AB=a$ $h(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 2ax + a^2)$	$h(x) = -6x^2 + 63x - 162$
Juxtaposition et comparaison			

¹ D'après : <http://eduscol.education.fr/bd/urtic/maths/index.php?commande=aper&id=2769>

Séquence 1- cours MAT3225 : didactique de la variable et de la fonction

Ce cours est un cours de mathématique et de didactique. Il vise à la fois à renforcer les concepts mathématiques des étudiants et à les amener à un recul didactique dans une perspective d'enseignement. Le cours aborde les liens entre les différentes représentations d'une fonction. On s'intéresse ici à une séance destinée à sensibiliser les étudiants à l'apport possible des outils technologiques pour l'enseignement de la fonction. Lors de cette séquence, on présente en grand groupe la situation 1 ci-dessus. La figure est déjà construite, le formateur l'anime en avant. Les étudiants travaillent ensuite en dyades sur l'activité 2 avant un retour en grand groupe. Nous avons capté et analysé l'activité de deux dyades.

Déroulement de la séquence pour l'équipe 1

Cette équipe est formée de deux étudiantes qui ne maîtrisent pas tout à fait le logiciel GeoGebra mais n'ont aucune réticence à l'utiliser. Leur instrumentation est en cours et nous avons montré dans Tremblay & Venant (2015) que certains schèmes élémentaires comme « *distinction entre un point mobile et un point fixe* » ne sont pas encore tout à fait en place pour ces étudiantes. On voit par exemple dans l'extrait ci-dessous que le schème « *création d'un segment de longueur donnée* » est découvert à l'occasion de cette activité :

Rosalie: C'est juste pour savoir, AB, y'es fixe, c'est tout ?

Formateur: Ouin, oui, c'est ça. Donc là on se donne un d'une longueur ...

Rosalie: Ah oui, je le vois là, ça c'est bon, regarde, regarde je suis en train de le voir... Regarde, tu fais - segment de longueur donnée.

Malgré cette instrumentation fragile, les deux étudiantes réussissent à construire un instrument intéressant pour explorer la situation. Construire la figure leur prend un certain temps (environ 4mn) mais à aucun moment elles ne perdent de vue l'enjeu mathématique de la tâche: explorer une situation de co-variation. Une fois la figure obtenue, elles prennent le temps de déplacer le point C et d'analyser les effets de ce déplacement. Il est à noter que malgré la fragilité de leurs schèmes, elles ont parfaitement instrumenté le déplacement pour explorer.

Florence: Dans le fond! Mets le donc au centre, ils vont avoir la même aire.

Rosalie: Ça c'est poly1, poly2, avec les couleurs, pis chaque fois ça donne, valeur de ce nombre là, c'est l'aire du polygone. Regarde tu vois, ils ont la même aire.

Florence: Ok. Et là si j'en rapetisse un? [Elle prend la souris] c'est-tu des moitiés ?

Rosalie: À 2.5

Florence: Ok

Rosalie: Tu passes à 2.71 à 24.

Florence: Tantôt on avait 20 quelque d'aire, là on a...

C'est bien la nature de la co-variation qu'elles cherchent à élucider. Cependant leur utilisation du déplacement est discrète. Elles ne cherchent pas à se faire une vision globale du phénomène mais visent rapidement des positions caractéristiques du point C (au milieu, au quart du segment AB) et entrent directement dans une approche quantitative. L'instrument qu'elles construisent relève donc plus de l'instrument de mesure perfectionné que de la représentation dynamique. Cette observation les amène cependant assez rapidement à dégager la grandeur la plus pertinente à étudier : la somme des aires des deux triangles.

Florence: On est rendu quasiment à 27 là. Plus que 27 même.

Rosalie: De quoi là? Ça c'est 24 ça.

Florence: Si tu calcules l'aire totale des deux

Rosalie: Ah d'accord.

Elles utilisent pour établir une table de valeur en effectuant des mesures à bonds constants. Cette

approche quantitative aboutit et elles en viennent à découvrir la nature quadratique de la relation.

Florence : Ah! That's it! (Elles se tapent dans les mains) C'est une parabole!

Elles cherchent ensuite à vérifier leur conjecture en traçant le graphique. Elles connaissent l'existence du schème « *activer la trace d'un point modélisant les grandeurs en relation* ». Elles sont même conscientes de certains invariants opératoires mais ne sont pas capables de les mettre en œuvre. Leur problème est essentiellement de créer les variables correspondant aux grandeurs en co-variation :

Rosalie : De quoi le sommet? Ah ouais... mais il faudrait faire le sommet avec une trace active.

Rosalie : on pourrait créer un point de coordonnées distance AC, mais ça c'est h, de h et i.

Avec l'aide du formateur, elles finissent par obtenir le graphique. Elles commencent alors une exploration plus qualitative, cherchant à faire le lien entre les calculs qu'elles ont effectués, le tableau de valeurs obtenu, le déplacement du point de coordonnées dynamiques sur le graphique et la position du point C.

Florence : Pourquoi qu'il part là ? Pourquoi qu'il est dans les airs ?

Rosalie : Ben, un, il ne va jamais y avoir une aire de zéro, tu comprends?

Florence : Ok donc là il est à 5, et la plus petite aire qu'on peut avoir c'est quoi ?

Rosalie : C'est à 5.

Florence : Qu'est-ce qu'on avait dit ? C'est à 21,5. C'est la plus petite somme qu'on va avoir.

Florence : Ah OK je comprends. Et puis le maximum c'est quoi ? C'est à 43,3 ?

Rosalie : on peut se rendre à $AC=0$ pis à $AC=10$. Il faudrait

Florence : j'comprends, j'comprends tout.

Elles sont interrompues à ce stade de leur exploration par le lancement de la mise en commun.

Bilan de l'activité pour l'équipe 1 :

L'instrument d'exploration construit n'est pas celui attendu, de ce fait l'exploration qualitative n'a pas réellement lieu. Les étudiantes restent dans une approche très quantitative. Du début à la fin, elles restent accrochées aux valeurs des aires affichées. On peut cependant supposer que si l'activité avait duré un peu plus longtemps, elles seraient entrées dans une exploration plus globale de la co-variation. Le fait que leur instrumentation technique n'est pas solide n'est pas tellement préjudiciable ici dans la mesure où le formateur travaille en permanence avec elle. On peut se demander jusqu'où elles auraient été si elles avaient été livrées à elles-mêmes. Si l'activité échoue à développer chez ces étudiantes une intuition globale d'une variation quadratique, elle leur permet cependant de donner du sens à la notion de graphique, avec des allers et retours systématiques entre la figure dynamique et le graphique, pour chaque position du point courant sur le graphique. On ne les voit à aucun moment prendre un recul didactique sur ce qu'elles sont en train de vivre, ni sur le rôle joué par la technologie dans cette exploration. Cependant, l'état de réflexion dans lequel elles se trouvent à la fin de l'activité les rend réceptives à la réflexion didactique proposée par le formateur durant la période de mise en commun.

Déroulement de l'activité pour l'équipe 2

L'équipe 2 est constituée de deux étudiants très à l'aise avec le logiciel, et la technologie en général, et fiers de l'être. Ils possèdent parfaitement les schèmes élémentaires. Ainsi construire la figure ne leur prend que 2 minutes, et encore parce qu'ils ont construits des triangles isocèles plutôt qu'équilatéraux. En revanche, ils sont concentrés uniquement sur les aspects techniques de la tâche et perdent facilement de vue les enjeux mathématiques et didactiques. Ainsi, après avoir construit la figure, ils sont obligés de revenir à l'énoncé pour se rappeler l'enjeu mathématique :

Olivier : Maintenant qu'est-ce qu'on fait ? [Lisant la consigne au tableau.] On s'intéresse aux effets sur l'aire des triangles

Franck : Ben fait afficher l'aire du polygone1, polygone2, polygone3, polygone 4. Fais juste t'assurer que 1 et 2 soient les triangles isocèles pis 3 et 4 les équilatéraux là.

Franck : après ça met un curseur ben avec la somme des deux pis check qu'elle reste constante.

On voit que la réponse de Franck est purement technique. Son activité est complètement pilotée par les schèmes instrumentaux. Il ne cherche pas à anticiper quelles sont les grandeurs pertinentes ni la nature de leur relation. Il applique sans réfléchir le schème: « *afficher l'aire d'un polygone* ». En fait, il a une idée préconçue de la situation (la somme des aires des triangles est constante), et ne cherche pas à la mettre en question.

Les deux étudiants évacuent les enjeux mathématiques et didactiques pour se concentrer sur la réalisation d'un fichier GeoGebra le plus aboutit possible techniquement. Ainsi Olivier passe beaucoup de temps à peaufiner l'affichage des aires des triangles à l'aide de textes dynamiques au lieu de se contenter de l'affichage des variables correspondantes dans l'onglet algèbre du logiciel. Franck quant à lui cherche à tracer le plus de polygones possibles dans le même fichier. Il n'envisage pas cela comme une variable didactique mais plutôt comme un défi technologique.

Franck: Ouais c'est ça, là ça va être mieux. Fait qu'on va avoir des triangles isocèles et des triangles équilatéraux. T'effaceras... ou tu mettras une couleur différente pour les autres triangles.

Olivier: ouais c'est ça que j'comptais faire.

Franck: Fait que comme ça on va être deux fois meilleurs que les autres puisqu'on aura deux triangles. Deux sets de triangles.

Nicolas: Il y en a qui vont...

Franck: Ouais et tu feras des hexagones après qui ont la même base. On va voir si avec des hexagones on va se faire battre.

C'est Olivier qui finit par ramener la tâche sur l'obtention de graphiques mais sans qu'aucune exploration de la figure dynamique ait eu lieu.

Franck : pis après ça tu vas faire les hexagones.

Olivier : tu veux pas qu'on voit comme... les courbes ?

Franck : ben c'est juste pour qu'on... soit meilleurs qu'les autres (rires).

Olivier : j'préfèrerais faire... aller voir la courbe à quoi qu'elle ressemble

Franck : Ok d'abord.

Comme ils maîtrisent parfaitement la création de points de coordonnées dynamiques, ils vont multiplier les traces actives. Leur but est de visualiser toutes les combinaisons possibles entre les différentes grandeurs présentes dans la figure (aire des divers polygones en fonction de la distance AC, aires d'un triangle isocèle en fonction de celle d'un triangle équilatéral...)

Ils obtiennent finalement trois courbes sur lesquelles ils ne prennent pas le temps de s'interroger, obsédés par l'idée d'en obtenir de nouvelles avec d'autres polygones. La mise en commun commence alors qu'ils peaufinent leur fichier par un jeu de couleur sur les courbes. Ils ne questionnent par le fait que plusieurs des points dynamiques génèrent la même courbe (avec 7 points dynamiques, ils obtiennent 3 courbes dont une droite). Ils ne s'interrogent pas non plus sur la nature des relations traduites par les courbes et ne reviennent jamais vers la figure dynamique.

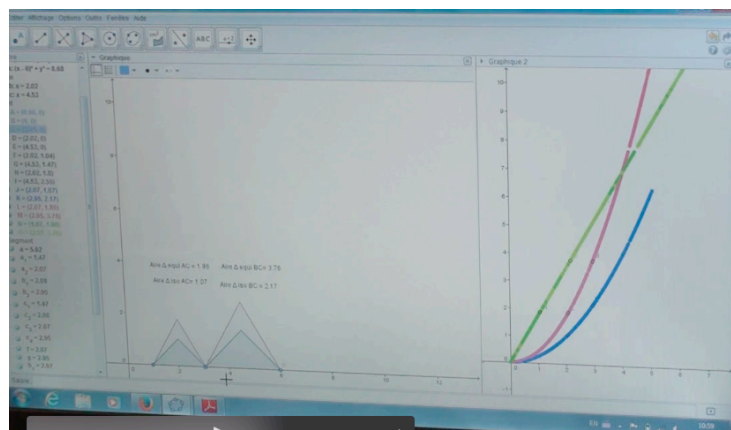


Figure 2. Courbes obtenues par l'équipe 2

Bilan pour l'équipe 2

Cette équipe n'a pas non plus construit l'instrument d'exploration et d'articulation des représentations attendu. Les enjeux technologiques prennent ici le pas sur les enjeux mathématiques. Les étudiants perdent de la nature mathématique de la tâche (explorer une situation fonctionnelle, comprendre la nature d'une relation de co-variation) pour entrer dans une sorte de défi technique. Il est difficile ici de conclure quant à leur conceptualisation de la co-variation, mais on note que le recul didactique attendu n'a pas lieu. A l'issue de l'activité les étudiants n'ont pas perçu les subtilités offertes par le logiciel en termes d'articulation des représentations, bien qu'aucun obstacle instrumental ne se soit interposé entre eux et la tâche. De plus, comme pour eux l'enjeu de la tâche est la réalisation technique du fichier GeoGebra, il n'est même pas sûr que la mise en commun, mettant l'accès sur les aspects didactiques de la situation leur ait été profitable.

Bilan pour la séquence 1

On peut dire que l'activité n'a pas atteint son potentiel ni pour une équipe ni pour l'autre. Les étudiants ne semblent pas mûrs pour prendre du recul didactique sur cette activité. Peut-être parce que la notion de co-variation est encore trop nouvelle pour eux et qu'ils adoptent plus volontiers une position d'étudiants que d'enseignants relativement à cette notion. On voit même avec l'équipe 1 que le graphique d'une fonction est un concept qui n'a pas encore pris tout son sens. A ce stade de leur formation, l'activité intervient donc plus comme une occasion d'approfondir leur propre connaissance du concept de co-variation. On voit, par le contraste entre les équipes 1 et 2 que le niveau d'instrumentation technique, et le fait d'être ou non en autonomie complète, jouent un rôle important sur le type d'activités cognitives qui vont avoir lieu. Les formateurs interviennent plus naturellement auprès des étudiants qu'ils savent moins à l'aise avec la technologie. Or, ce n'est pas parce que des étudiants sont autonomes du point de vue technique qu'ils développent un contrôle mathématico-didactique sur la tâche qu'ils réalisent. On voit qu'une très bonne instrumentation n'est pas forcément garante de la construction d'un instrument d'exploration mathématique et didactique. Le rôle joué par les formateurs est donc crucial. Ils sont responsables de la bonne orchestration des instrumentations didactiques (Trouche, 2007).

On voit donc que bien qu'étant des futurs enseignants, les étudiants ne se lancent pas naturellement dans une prise de recul didactique sur les activités qu'ils vivent. Dans cette séquence, c'est le moment de la mise en commun qui a suivi l'activité qui a été choisi pour les inciter à ce recul. Cependant nous n'avons aucun moyen de mesurer les effets concrets de cette façon de procéder. C'est pourquoi nous avons mis au point une deuxième séquence mettant en oeuvre un outil d'analyse (analyse a priori : Charnay (2003)) destiné à favoriser et recueillir les schèmes didactico-instrumentaux.

Séquence 2 : cours MAT4812- Explorations mathématiques à l'aide de l'informatique

C'est un des derniers cours de la formation des futurs enseignants. A ce stade, les étudiants sont considérés comme des experts mathématiques et on cherche à provoquer chez eux une réflexion didactique. La séquence se déroule en deux temps :

Phase 1: situation 2

Le travail est collectif et se fait en grand groupe, en salle machine. Les étudiants manipulent en même temps que le formateur. La construction de la figure et la réflexion sont collectives et partagées. Les étudiants doivent ensuite proposer une analyse a priori de l'activité. Certains des étudiants ont déjà exploré la situation lors de la séquence 1 et d'autres non. L'accent est mis sur les aspects didactiques.

À la lecture des analyses a priori fournies durant la phase 1, on peut distinguer trois catégories d'étudiants :

La première catégorie regroupe les étudiants qui montrent par leur analyse de la situation qu'ils ont compris que l'enjeu est de travailler la notion de situation fonctionnelle et d'articuler différentes représentations d'une fonction. Ces étudiants maîtrisent également les schèmes didactico-instrumentaux en jeu: construction d'un graphique dynamique par activation de la trace, utilisation d'un tableur pour générer le graphique, gestion des points mobiles, articulation entre les différentes représentations.

La deuxième catégorie regroupe les étudiants qui ont bien compris les enjeux didactiques autour de la co-variation mais maîtrisent moins bien les schèmes instrumentaux en jeu. Comme on peut le voir dans l'extrait ci-dessous, l'utilisation de l'outil trace est envisagée de façon très technique, ce qui laisse supposer un manque de recul:

« Ils [les élèves] peuvent définir deux variables, soit x = distance entre AC et y = somme des aires des triangles afin de pouvoir créer deux droites qui leur sont associées. Par la suite, en utilisant le point d'intersection de ces droites et la trace de ce point, les élèves peuvent bouger le schéma afin de voir la production de la trace. »

L'importance est donnée à la procédure à suivre plus qu'à l'instrument didactique construit. Ces étudiants concentrent leur attention sur le rôle que l'on peut faire jouer au tableur. Ils préconisent l'obtention du graphique à partir d'une table de valeur. Les deux façons envisagées d'obtenir le graphique (trace ou tableur) ne sont pas commentées dans une perspective didactique.

Ces étudiants ne perçoivent pas la possibilité d'articulation entre les différentes représentations offertes par la technologie. Pour eux, le rôle de la technologie est essentiellement d'offrir des possibilités de visualisation et d'automatisation. Ils ont cependant perçu que le déplacement peut remplir plusieurs fonctions didactiques et sont capables de nommer celle qui est mise en jeu :

« Les élèves peuvent utiliser le déplacement afin de bien visualiser la situation. Le déplacement leur permet d'explorer une infinité de cas possibles afin d'émettre une hypothèse. »

La troisième catégorie regroupe des étudiants qui maîtrisent mal les enjeux didactiques de la situation: ils la considèrent comme ancrée dans le domaine de la géométrie, centrée sur les polygones réguliers et les calculs d'aire, tout en lui reconnaissant une composante algébrique :

« Possibilité d'analyse algébrique (connaître l'aire du deuxième triangle selon la base du premier triangle ainsi que la longueur du segment AB). »

Dans ce cas, les enjeux technologiques tournent autour de la construction de figures dans GeoGebra et l'exploration de différents cas possibles. La situation ayant été étudiée en classe, ces étudiants se rappellent qu'on a construit des graphiques mais on sent que le lien entre le graphique obtenu et la situation de départ est artificiel pour eux. Les stratégies proposées sont très procédurales. Elles décrivent les actions à effectuer dans le logiciel sans vraiment de vision globale.

Phase 2 : Situation 3

Les étudiants travaillent individuellement. Ils sont invités à explorer la situation selon trois modes : papier/crayon, tableur et GeoGebra. Ils doivent ensuite proposer une activité mettant en jeu cette situation avec des élèves du secondaire, en milieu technologique. Ils sont laissés libres dans le choix du logiciel à utiliser avec les élèves. Ils doivent fournir une analyse a priori de l'activité proposée.

On constate que les étudiants des catégories 1 et 2 reconnaissent dans la situation 3 la possibilité d'appréhender la notion de co-variation et de situation fonctionnelle. La différence dans leurs propositions respectives se situe au niveau de l'instrumentation de la trace. Les étudiants de la catégorie 1 analysent son utilisation :

« L'élève doit se rendre compte qu'il n'y a en effet qu'une seule valeur maximale pour l'aire de la pièce (connaissances sur la quadratique). »

Ils anticipent également les difficultés des élèves:

« Difficultés: Comment et sur quoi afficher la trace? ».

Les étudiants de la catégorie 2 sont plus évasifs quant à l'obtention du graphique :

« Il [l'élève] peut construire le graphique (avec la techno ou en papier-crayon) ».

Cela donne à penser que la technologie ne fait qu'automatiser les méthodes utilisées en papier crayon. Cela se confirme avec le choix presque systématique du tableur pour travailler la situation avec les élèves. Ces étudiants s'attardent donc davantage que les autres sur les enjeux didactiques de l'utilisation d'un tableur :

« Les élèves passeraient progressivement vers une méthode plus algébrique (pour pouvoir répondre à la question) à partir des réponses obtenues par essais-erreurs grâce aux méthodes intuitives arithmétiques réalisées dans le tableur ».

Ce sont cependant ces étudiants de la catégorie 2 qui sont le plus sensibles à l'articulation entre les différents registres de représentation de la fonction :

« But de l'activité: Amener les élèves à explorer une relation fonctionnelle et à la traduire dans différents modes de représentations (graphique, équation, tableau, etc.). Pour cela, ils devront dégager les variables dépendantes et indépendantes. »

Les autres étudiants situent cette activité dans le domaine de la géométrie pour un travail sur l'aire des rectangles. Les grandeurs en situation de co-variation sont identifiées mais le lien avec le concept de fonction n'est pas fait :

« Les élèves doivent trouver de quelle manière la largeur donnée au bâtiment influencera les dimensions des autres pièces. ».

La résolution proposée est numérique, avec éventuellement un lien vers l'algèbre pour exprimer les relations entre les différentes grandeurs :

« On veut faire travailler l'élève avec une inconnue, une variable et différentes expressions algébriques dans lesquelles on utilise l'inconnue de départ. »

Les différentes représentations sont envisagées sous l'angle de l'exploration de différents cas de figure. La mesure (ou affichage des valeurs) est omniprésente dans l'exploration envisagée.

« En déplaçant les points non-fixes, il observe toutes les valeurs possibles des dimensions du rectangle brun et les écrits sur une feuille. Avec l'outil aire, on affiche l'aire de la région brune pour identifier les dimensions maximisant l'aire de la région brune. »

Le lien avec la notion de fonction n'est pas fait. L'utilisation de l'outil Trace n'est pas envisagée.

Bilan de la séquence 2 :

Les étudiants sont entrés dans une analyse didactique des situations travaillées, dans la mesure de leur propre compréhension des concepts à l'étude. L'instrumentation didactique qui est réalisée durant ces séquences est assez peu dépendante du niveau d'instrumentation technique. Lors de la phase 1 cela s'explique par le fait que l'activité est réalisée collectivement, et que donc les instrumentations des uns et des autres (y compris celle du formateur) se mettent au service d'une exploration collective. Si un étudiant est moins à l'aise pour certaines manipulations dans le logiciel, il se trouve toujours quelqu'un pour l'aider à s'approprier les schèmes sous-jacents. Dans la phase 2, on constate que les étudiants ne se tournent pas nécessairement vers le logiciel avec lequel ils sont le plus à l'aise, mais vers celui pour lequel ils maîtrisent mieux les enjeux didactiques. Ainsi durant le cours, les étudiants ont été très sensibles au rôle intermédiaire entre arithmétique et algèbre joué par le tableur. Et on constate en effet que bien que les étudiants soient globalement plus à l'aise avec GeoGebra, ils proposent majoritairement de faire travailler les élèves dans le tableur. Ceci est à nuancer avec le fait que beaucoup d'entre eux ont vu dans cette situation l'occasion d'un travail sur les équations plus que sur les fonctions.

Conclusion

Nous voyons dans ce travail une avancée vers la mise en place d'une instrumentation didactique des futurs enseignants. Il apparaît qu'il ne suffit pas de faire travailler les étudiants en milieu technologique pour provoquer cette genèse. Le rôle du formateur est primordial et nous comptons approfondir cette question dans le cadre théorique de l'orchestration instrumentale proposé par (Trouche, 2003). Le rôle du formateur est très subtil car il ne doit être ni trop intrusif, ce qui empêcherait les étudiants de mettre en place leurs propres schèmes, ni trop extérieur car les genèses doivent être guidées. Le point important, qui nous conforte dans nos hypothèses de travail, c'est que la genèse didactique n'est pas nécessairement corrélée à une instrumentation technique poussée. Les observations de la séquence 1 nous confortent dans l'idée qu'il est plus important de sensibiliser les futurs enseignants aux choix didactiques plus ou moins conscients, sous-jacents à l'utilisation d'un logiciel pour une tâche mathématique, que de vouloir en faire des experts techniques. Une expertise technique sans conscience didactique ne mènera pas à une intégration efficace de la technologie dans l'enseignement.

La séquence 2 constitue un premier pas vers cette prise de conscience. Cependant, on voit que l'instrumentation didactique nécessite un recul didactique sur les notions travaillées. Les étudiants les moins sensibles aux apports possibles de la technologie sont ceux qui ont aussi du mal à cerner les enjeux pédagogiques et didactiques des situations proposées. Le cas de la co-variation est un peu particulier car de nombreuses recherches ont montré qu'il s'agit d'un concept difficile à appréhender de façon globale, même pour des étudiants en mathématiques. Nous proposons donc de poursuivre nos investigations sur des concepts pour lesquels nous serions plus à même de distinguer la connaissance didactique sur le concept de la connaissance didactique sur la technologie.

REFERENCES

- Carlson, M. (1998). Physical enactment : a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships ? In *Representations and mathematics visualization* (p. 63-77).
- Charnay, R. (2003). L'analyse a priori, un outil pour l'enseignant! *RMT: potentialités pour la classe et la formation*, 199-208.
- De cotret, S. R. (1985). « *Etude historique de la notion de fonction: analyse épistémologique et expérimentation didactique* ». Université du Québec à Montréal.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Guin, D., & Trouche, L. (1998). Complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3), 195-227.
doi:10.1023/A:1009892720043
- Hitt, F. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de didactique et de sciences cognitives*,.
- Leclère, P., Simonnot, B., & Barcenilla, Javier, Dinet, J. (2007). Les freins à l'intégration des tice en classe. *TICE Méditerranée*, 1-11.
- MELS. (s. d.). Programme de formation de l'école québécoise. Consulté 17 janvier 2015, à l'adresse <https://www7.mels.gouv.qc.ca/dc/liste%5Forthographique/>
- MELS. (2000). Programme de formation de l'école québécoise - deuxième cycle du secondaire en mathématiques.
- Monk, S. (1992). The concept of function aspects of epistemology and pedagogy. In G. H. Dubinsky (Éd.), *MAA notes and reports series* (p. 175-194).

- Passaro, V. (2007). *Covariation Entre Deux Grandeurs Révélé Par Une Analyse Des Représentations Spontanées D ' Élèves Du Premier Cycle Par Valériane*.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains. Consulté à l'adresse <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462/document>
- Restrepo, A. M. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème*. Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- Soury-Lavergne, S. (2011). De l'intérêt des construction molles en géométrie dynamique. *Mathématique*.
- Tapan, M. S. (2006). *Différents types de savoirs mis en oeuvre dans la formation initiale d'enseignants de mathématiques à l'intégration de technolgoies de géométrie dynamique*. Université Joseph Fourier- Grenoble 1.
- Tremblay, K.-P., & Venant, F. (2015). La technologie au carrefour des cadres théoriques : une double analyse autour de la notion de co-variation. Montréal: GDM.
- Trouche, L. (2003). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. Consulté à l'adresse <https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190091/>
- Trouche, L. (2007). Chapitre 1. Environnements informatisés d'apprentissage : quelle assistance didactique pour la construction des instruments mathématiques ? *Perspectives en éducation et formation*. De Boeck Supérieur.
doi:10.3917/dbu.flori.2007.01.0019
- Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. In J.-M. Barbier (Éd.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (Pédagogie). PUF.