UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

# ANALYSE DES RESSOURCES MISES À CONTRIBUTION PAR ENSEIGNANT ET CHERCHEUR DANS L'ÉLABORATION DE SCÉNARIOS D'ENSEIGNEMENT EN DÉNOMBREMENT VISANT LE DÉVELOPPEMENT DE LA MODÉLISATION EN SECONDAIRE 1

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN ÉDUCATION

PAR

SOULEYMANE BARRY

AVRIL 2009

*À Nadine Bednarz, mon mentor en recherche*

# REMERCIEMENTS

Je tiens tout particulièrement à remercier ma directrice de thèse, madame Nadine Bednarz, professeure émérite au département de mathématiques à l'université du Québec à Montréal, pour sa totale disponibilité dans l'encadrement impeccable de cette thèse que j'ai préparée, quelque fois dans des conditions de grande précarité qu'elle m'a souvent fait oublier par ses encouragements sans relâche et son aide multiforme. Sans elle, cette thèse n'aurai jamais vu le jour et je la lui dédie. Merci Nadine!

Je remercie aussi mon co-directeur de thèse, monsieur Fernando Hitt, professeur au département de mathématiques à l'université du Québec à Montréal, pour sa disponibilité, sa grande écoute et pour m'avoir si souvent invité à me poser ces questions « difficiles » dont les réponses, même partielles, ont souvent été éclairant pour moi dans mon cheminement doctoral. Gracias Fernando !

Je remercie très sincèrement l'enseignant avec qui cette recherche a été faite, ALSAMADAY, c'est le nom qu'il s'est choisi pour me permettre de le nommer de façon moins anonyme que le XXX qui apparaît dans les extraits de verbatim. Merci Alsamaday pour avoir osé explorer avec moi des avenues nouvelles!

Ma reconnaissance va également à l'endroit de Serge Desgagné, professeur titulaire à la faculté des sciences de l'éducation de l'université Laval qui m'a introduit à la recherche collaborative et qui avec Nadine sont mes deux mentors en recherche.

Je ne saurai remercier assez mon adorable épouse Ralou Baudin qui s'est occupée de TOUT pendant la rédaction de ce travail, dont notre petite fille Saïbatou. Elles sont, Ralou et Saïbatou, les deux plus heureux événements qui ont jalonné mon aventure doctorale.

Je remercie mon grand frère Samba Barry à qui je dois en grande partie ma venue au Québec. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour son soutien multiforme. Dans la même foulée un grand MERCI à toute ma famille restée au Sénégal!

Je remercie cinq formidables amis du Québec qui m'ont accompagné, appuyé dans cette aventure doctorale. Il s'agit de Nguéye Thiam (« commandant »), Ndéye Thiam (« commandante »), Moévi Adoté (mon frère du Togo), Moussa Diao (« my man ») et Lucie Filion à qui je dois la mise en forme de cette thèse (un gros merci Lucie!).

Enfin, j'exprime mes remerciements à toutes ces merveilleuses personnes que j'ai côtoyées à l'UQAM ou à l'université Laval pendant mes études à la maîtrise puis au doctorat et qui, de près ou de loin, m'ont encouragé, soutenu, conseillé. Hélas, je ne puis ici les citer toutes : Claude Gaulin (qui a dirigé mon essai de maîtrise), Kalifa Traoré (mon « grand frère » du Burkina Faso), Mireille Saboya, Lily Bacon, Jean-François Maheux, Christian Morasse, Claudia Corriveau, Izabella Oliveira, Caroline Lajoie, Denis Tanguay, Louis Charbonneau, Rita Chamberland, Jeanne Laporte.

# TABLE DES MATIÈRES

## LISTE DES FIGURES

# LISTE DES TABLEAUX

# RÉSUMÉ

La combinatoire élémentaire ou le dénombrement évoque pour beaucoup d'élèves de nombreuses expériences négatives, lorsqu'elle est un objet explicite d'enseignement, l'accent étant souvent mis dans cet enseignement sur le recours à des formules de dénombrement que les élèves ne peuvent rattacher à des modèles de situations (Grenier et Payan, 1998). Dans cette recherche nous sommes intéressé à explorer des voies et moyens permettant d'associer des expériences plus positives à la résolution de problèmes combinatoires, et ce dès les premières années du secondaire.

Un tel pari apparaît d'autant plus pertinent que plusieurs études soulignent d'une part non seulement des caractéristiques intéressantes des problèmes combinatoires, soit le fait qu'ils n'exigent presque aucun prérequis notionnel de la part des élèves (Kapur, 1970) et qu'ils sont très peu mathématisés (Grenier et Payan, 1998). Elles soulignent également les accomplissements des élèves qui sont capables, lorsque les situations qu'on leur propose sont bien choisies, de développer des heuristiques puissantes, d'inventer des méthodes de justification ou de validation (Maher, Martino et Alston, 1993; Powell et Maher, 2002). Les problèmes combinatoires apparaissent ainsi intéressants à travailler à différents niveaux d'enseignement et se prêtent au développement de plusieurs processus mathématiques tels la mathématisation, la preuve, le raisonnement inductif (Kapur, 1970; Dubois, 1984; Batanero, Godino et Navarro-Pelayo, 1994; Sriraman et English, 2004). C'est à l'un de ces processus, la modélisation que nous nous sommes plus particulièrement attardé, rejoignant en cela d'autres chercheurs comme Grenier et Payan (1998), mais aussi le nouveau programme de mathématiques du premier cycle du secondaire de l'école québécoise (MELS, 2003) dans lequel la modélisation est associée à la compétence à résoudre des situations-problèmes. Dans la perspective théorique particulière que nous retenons sur la modélisation, celle d'une « modélisation

émergente » (Gravemeijer, 2007), l'accent est mis sur l'activité informelle des élèves à qui il faut donner l'opportunité de créer des « modèles spontanés » et par la suite de les revisiter, les raffiner et au besoin de les généraliser (Gravemeijer, 1999).

L'élaboration d'une approche d'enseignement mettant l'accent sur l'exploitation de problèmes de dénombrement et le développement du processus de modélisation exige toutefois que le chercheur se donne également une perspective particulière pour aborder la conceptualisation de ces scénarios d'enseignement. Plusieurs recherches ont contribué à développer des situations et séquences sur l'exploration de la combinatoire. Dans ce cas, les séquences ont pour l'essentiel été élaborées par les chercheurs, à partir d'analyses didactiques préalables, et ce, pour les apprentissages potentiels qu'elles favorisent chez les élèves (Glaymann et Varga, 1975; Fischbein et Gazit, 1988; Batanero, Godino et Navarro-Pelayo, 1994). Bien sûr, dans le cas de ces différents travaux portant sur la combinatoire et son exploitation, des expérimentations ont été réalisées en classe auprès d'élèves, et des enseignants ont souvent été impliqués dans l'implantation de ces situations. Toutefois, le rôle qu'y jouent ces enseignants demeure limité à ces expérimentations. Leurs visions quant à la manière dont un tel sujet peut se développer et fonctionner en pratique, leurs connaissances, leur savoir d'expérience n'est pas vraiment pris en compte dans la conceptualisation des situations élaborées, qui demeurent donc ici sous l'entière responsabilité des chercheurs. La perspective adoptée par les chercheurs dans ce cas, vis-à-vis de l'enseignant, s'inscrit dans le courant plus global de la recherche en didactique des mathématiques au plan international dans les années 1990 (Hoyles, 1992 ; Ponte, 1994 ; Jaworski, sous presse). Cette prise en compte de l'enseignant, de la complexité du travail auquel il fait face dans la pratique, des connaissances qu'il construit - en pratique, est en effet un phénomène relativement récent (Jaworski, sous presse). C'est dans cette dernière perspective que se place notre travail. Pour construire des situations fécondes sur le plan des apprentissages des élèves, mais aussi viables dans les pratiques des enseignants, tenant compte des contraintes et de la complexité de leur pratique, il nous apparaît en effet nécessaire de prendre en compte le point de vue des enseignants, leur savoir d'expérience, leurs connaissances dans la construction même de scénarios visant le développement du processus de modélisation.

Nous avons cherché à documenter, de l'intérieur d'une démarche conjointe d'élaboration d'un tel scénario, les apports respectifs du chercheur et de l'enseignant sous l'angle : des problèmes de dénombrement élaborés; du processus de modélisation développé par les élèves en lien avec ces problèmes et leur exploitation; de l'enseignement visant le développement de ce processus.

Une recherche collaborative a été menée à cette fin, impliquant le chercheur et un enseignant de mathématique au secondaire qui ont eu à élaborer et expérimenter dans deux classes de secondaire 1 d'une école de la région de Montréal deux scénarios, un premier en novembre 2006 et un second en mai 2007.

La démarche de recherche a pris la forme de rencontres réflexives d'élaboration des scénarios et de retour sur les scénarios expérimentés (le dialogue initié lors de ces rencontres se poursuivant sous une forme virtuelle). Le matériau engrangé puis analysé est donc constitué principalement des verbatims des rencontres réflexives de construction des scénarios et de retour sur les scénarios (bilans et récits d'expérimentation).

Une analyse par théorisation ancrée (Glaser et Strauss, 1967) nous a permis de dégager de multiples ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur, nous édifiant ainsi sur leur éclairage respectif sur : les problèmes de dénombrement en jeu, le processus de modélisation par les élèves et l'enseignement visant le développement de ce processus. Ces ressources sont de deux sortes: des ressources interprétatives, c'est-à-dire permettant de donner un sens, de proposer une certaine lecture des aspects abordés dans ce travail conjoint d'élaboration de scénarios, et des ressources

d'action, c'est-à-dire des ressources prenant la forme de suggestions de manières de faire, de propositions d'aménagement ou d'animation. Ces ressources, interprétatives et d'action, puisent aux cadres de référence du chercheur et de l'enseignant, mais elles montrent une certaine sensibilité théorique et une capacité d'interprétation. Selon le cas, la lecture interprétative de l'enseignant confirme, réfute, nuance ou étend celle du chercheur qui, au demeurant, témoigne d'une certaine sensibilité pratique, sensibilités théorique et pratique n'étant en définitive l'apanage ni de l'un ni de l'autre. Notre étude permet donc d'élargir la notion de ressources interprétatives telle que l'envisage la sociologie de l'expérience qui la définit surtout en termes de ressources argumentatives et critiques permettant aux acteurs de prendre position par rapport aux élaborations, théories proposées par les chercheurs (Dubet, 1994). Dans une telle perspective, le croisement est vu de façon dichotomique, en termes uniquement des accords et des désaccords entre les acteurs et les chercheurs. Entre les deux, l'accord et la réfutation, avons-nous montré, il y a l'espace d'une nuance, d'une extension.

Enfin, dans l'optique du développement du processus de modélisation en début secondaire, l'analyse nous a permis de mettre en évidence des caractéristiques que l'on gagnerait à retrouver dans des problèmes combinatoires, d'identifier des routines d'appui et d'échanges à installer puis à maintenir dans la classe et ce pour installer une culture de modélisation (Tanner et Jones, 1994). Ce travail sur la modélisation s'inscrit dans une pragmatique de la résolution de problèmes questionnant à la fois la prépondérance dans l'enseignement des problèmes d'application et la recherche à tout prix de l'efficacité chez les élèves.

Mots-clés : Ressources-interprétation-action-développement-modélisation

# INTRODUCTION

Au cœur de cette thèse, il y a un profond intérêt pour les savoirs pratiques des enseignants, et la conviction d'un nécessaire dialogue entre « didactique de recherche » et « didactique praticienne » pour faire avancer les savoirs à propos de l'enseignement/apprentissage des mathématiques, influencé en cela par Martinand (1992) à qui nous devons le terme de didactique praticienne, et surtout par Dubet (1994) qui nous invite à admettre qu'il y a en réalité entre le monde des idées savantes et celui des idées de sens commun plus de passerelles que ne le postulent certaines rhétoriques professionnelles. Mais, comment en sommes-nous venu à nous intéresser aux savoirs pratiques des enseignants?

Nous devons dire que nous sommes entré dans l'enseignement avec uniquement une formation en mathématiques (un baccalauréat). Nous ignorions tout de la didactique des mathématiques à nos débuts dans l'enseignement. Nous nous sommes donc formé sur le terrain au contact de praticiens plus *anciens*. L'expertise de ces derniers nous apparaissait et nous apparaît toujours comme le fruit de leçons tirées de la résolution de problèmes de différents ordres rencontrés dans leurs enseignements, en somme une expertise en contexte, voire pratique. Nous avons donc appris en partie le métier d'enseignant au contact de collègues dont les pratiques ainsi que les perspectives qu'ils véhiculaient selon le cas complétaient, divergeaient ou convergeaient avec notre propre pratique.

Tout ce qui précède vise à rappeler que nous avons été un praticien enseignant avant de nous lancer dans la recherche en didactique des mathématiques, et à indiquer au lecteur que notre «sensibilité pratique» (Desgagné, 2007) a son ancrage dans notre expérience d'enseignant en mathématiques au secondaire. Une telle sensibilité pratique nous fait croire au praticien enseignant, valoriser son jugement pratique. Pour nous, l'enseignant est un partenaire incontournable pour le chercheur parce qu'il est à la fois source et constructeur de savoir, un savoir d'action certes implicite (Schön, 1983), mais tout de même un savoir qu'il construit «avec ou sans le chercheur et qu'il fait évoluer tout au long de son expérience» (Desgagné et Bednarz, 2005).

Par ailleurs, notre intérêt pour la combinatoire est issu de nos travaux réalisés à la maîtrise et qui nous ont conduit à la rédaction d'un essai portant sur le développement du raisonnement combinatoire dans l'apprentissage des mathématiques (Barry, 2003). L'objet de cette thèse est à la jonction des ces deux intérêts pour: les savoirs pratiques des enseignants et la combinatoire.

La présente recherche collaborative porte sur l'élaboration avec un enseignant de scénarios d'enseignement exploitant des problèmes de dénombrement en mathématiques et visant le développement du processus de modélisation en secondaire 1. L'enjeu dans cette recherche est de faire rencontrer didactique de recherche et didactique praticienne, de faire dialoguer la logique pratique d'un enseignant et celle théorique du chercheur, un chercheur qui s'efforce de faire en sorte que « l'espace de coconstruction, dans le projet collaboratif, soit une lutte de sens et non une lutte de pouvoir, une rencontre entre des raisons différentes, raison pratique et raison théorique, plutôt qu'une rencontre entre des statuts différents, statut de concepteur et statut d'exécutant.» (Desgagné, 2007, p. 100).

Avant d'aborder la structure globale de la thèse, nous tenons à préciser pour le lecteur la spécificité du style d'écriture que nous avons retenu pour celle-ci. Ce style est inductif, et ce, pour refléter la démarche de théorisation émergente dans laquelle nous nous inscrivons dans cette recherche. Ainsi, certains éléments d'un chapitre se précisent dans les chapitres suivants, ou, au besoin, des éléments nouveaux d'un chapitre donné ne sont annoncés nullement dans les chapitres précédents, précisément parce qu'ils ont émergé «là». Il s'agit donc d'un style d'écriture qu'il ne serait pas inapproprié de qualifier d'émergent dans la mesure où nous nous efforçons dans le compte rendu de la recherche à continuer de témoigner d'une logique non linéaire dans laquelle les chapitres découleraient entièrement les uns des autres. Il s'agit là d'une démarcation avec un style d'écriture plus déductif pour lequel nous avons tout le respect, mais qui n'est pas en phase avec la méthodologie retenue dans cette recherche.

Dans le premier chapitre de la thèse, la problématique, nous montrons dans un premier temps l'importance de la combinatoire (encore appelée dénombrement) en mathématiques en lien avec des apprentissages divers (tels la mathématisation, la validation et la modélisation). Ensuite, nous nous penchons sur la combinatoire comme contenu d'enseignement pour surtout souligner qu'elle n'est pas un objet explicite d'enseignement au premier cycle du secondaire au Québec, ce qui rend intéressant l'exploitation de problèmes de dénombrement *à des fins de modélisation* pour peu qu'on ne reproduise pas des approches d'enseignement problématiques qu'on retrouve à d'autres niveaux d'enseignement et qui sont source de nombreuses difficultés pour les élèves dans la résolution de ce type de problèmes. Dans la dernière partie de la problématique, nous nous intéressons au développement d'une approche alternative prenant appui sur le fait que la combinatoire est un terreau fertile pour plusieurs apprentissages mathématiques. Dans cette optique, nous précisons notre conceptualisation de la construction de situations d'enseignement, une entreprise qui exige une prise en compte par les chercheurs des perspectives des enseignants si tant est qu'on veut s'assurer non seulement de leur fécondité mais aussi de la viabilité de celles-ci dans les pratiques des enseignants, en misant sur la richesse de ce qu'ils peuvent apporter en ce sens. D'où notre objectif de travailler à l'élaboration conjointe de situations d'enseignement exploitant des problèmes de dénombrement en mathématiques et visant le développement de la modélisation en classe. Nous chercherons à documenter cette intervention conjointe enseignant-chercheur sous l'angle des contributions respectives.

Dans le second chapitre de la thèse, le cadre théorique, nous indiquons d'abord le cadre de référence du chercheur susceptible d'intervenir dans cette co-construction, soit les concepts de modèles et de modélisation, plus précisément la notion de modèle spontané ainsi que celle de modélisation émergente vue comme un processus cyclique dans lequel l'accent est mis, dans la perspective que retenons, sur l'activité informelle des élèves à qui il faut donner l'opportunité de créer des «modèles spontanés» et par la suite de les revisiter, raffiner et au besoin de les généraliser (Gravemeijer, 1999). Ensuite, nous nous attardons sur les concepts de didactique praticienne, de savoir d'expérience, mais aussi de rationalité pratique qui permettent quelque peu d'aborder l'analyse de la contribution de l'enseignant dans cette co-construction. À la fin de ce deuxième chapitre, nous reformulons nos objectifs et questions de recherche à la lumière des concepts présentés, explicités.

Dans le troisième chapitre consacré au cadre méthodologique, nous précisons l'orientation globale de cette thèse puis le sens que revêt pour nous une recherche collaborative. Plus spécifiquement, nous présentons la démarche de recherche négociée avec un enseignant de mathématique au secondaire et qui a débouché sur l'élaboration et l'expérimentation de deux scénarios visant le développement de la modélisation, et ce, au moyen de problèmes de dénombrement. Nous clôturons ce chapitre par quelques notes sur la théorisation ancrée (Glaser et Strauss, 1967), le mode d'analyse du matériau engrangé dans cette recherche (verbatims des rencontres réflexives de construction des scénarios, de retour sur les scénarios avec les bilans et récits d'expérimentation ; entrevue préalable avec l'enseignant) que nous utilisons.

Dans le quatrième chapitre de la thèse, nous explicitons dans un premier temps, le cadre de référence de l'enseignant avant la recherche, issu de l'analyse de l'entrevue préalable. Ensuite, l'essentiel du chapitre est consacré à l'analyse du matériau issu de la recherche, une analyse par théorisation ancrée comme nous l'avons annoncé précédemment. Dans le cinquième chapitre, l'interprétation des données, nous procédons à une lecture transversale des résultats mis en évidence au chapitre précédent. En conclusion, nous revenons à notre problématique de départ, soit le développement de la modélisation au premier cycle du secondaire au moyen de problèmes de dénombrement. Nous soulignons les défis que soulèvent, mais également les pistes prometteuses qu'ouvre l'approche à laquelle nous avons contribué, enseignant et chercheur.

# CHAPITRE I

# PROBLÉMATIQUE

## 1.1 Introduction

Notre préoccupation de recherche part d'un questionnement portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la combinatoire ayant pour nous de multiples ancrages. Tout d'abord comme élève et étudiant[1] en mathématiques aux prises avec une variété de problèmes aux énoncés souvent anodins mais qui se sont avérés intrigants voire complexes quand venait le moment de les résoudre. Ensuite, comme enseignant de mathématiques la combinatoire s'est invitée à nos réflexions parce que nous avons constaté que pour beaucoup d'élèves elle évoque de nombreuses expériences négatives, surtout au niveau postsecondaire (équivalent au collégial au Québec) où nous avons enseigné en Afrique (Sénégal, Gabon). D'où notre souci de comprendre ce qui rend son apprentissage problématique pour certains élèves, et qui nous a conduit à un essai de maîtrise portant sur le développement de la capacité et du raisonnement combinatoire[2] dans l'apprentissage (Barry, 2003). Cet essai décrit des

---

[1] Dans ce chapitre et tous les autres, le générique masculin est utilisé sans aucune discrimination et uniquement pour alléger le texte.

[2] Définir le raisonnement combinatoire n'est pas chose aisée. En effet, selon les auteurs on trouve différentes caractérisations. Ainsi, pour le définir on avance une certaine capacité que devrait posséder les sujets (Piaget et Inhelder, 1951; Fischbein, 1975) ou bien on évoque la proximité du raisonnement combinatoire avec d'autres types de raisonnements mathématiques : raisonnement inductif (Fischbein, 1975; Batanero et al., 1994 et 1997), déductif (Piaget et Inhelder, 1966). Pour notre part, nous définirons simplement le raisonnement combinatoire comme celui mobilisé dans la résolution de problèmes combinatoires. La résolution de tels problèmes exige souvent des procédures systématiques qui permettent au solutionneur dans un dénombrement de prendre en compte tous les cas possibles, nous avons là l'idée de capacité combinatoire. Le raisonnement combinatoire repose aussi sur le raisonnement inductif qui permet d'aller du particulier au général. Eu égard au raisonnement inductif, nous distinguerons avec Fischbein (1975) deux types d'induction : l'induction empirique qui permet sur des cas particuliers de conjecturer une propriété et l'induction mathématique complète, encore appelée raisonnement par récurrence, et qui permet mathématiquement de généraliser les régularités ou

difficultés de différents ordres rencontrées par les élèves en lien avec la résolution de problèmes combinatoires (nous reviendrons dans la suite de ce chapitre sur certaines de ces difficultés). Les difficultés liées à l'apprentissage de la combinatoire étant identifiées, nous nous sommes intéressés aux voies et moyens qui permettraient d'associer des expériences plus positives pour les élèves à la résolution de problèmes combinatoires. Plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'exploitation de problèmes combinatoires avec les élèves (Kapur, 1970; Dubois, 1984; Batanero, Godino et Navarro-Pelayo, 1994; Sriraman et English, 2004). Ces travaux mettent en évidence le potentiel que présentent ces situations qui permettent de travailler le développement de certains processus mathématiques (nous reviendrons sur ceci plus loin). Notre projet de recherche s'inscrit dans une telle perspective.

Dans ce premier chapitre, nous présenterons d'abord la combinatoire qui est une composante importante des mathématiques dites discrètes, les liens qu'elle entretient avec certains domaines mathématiques et des disciplines connexes de manière à montrer son importance. Ensuite, nous aborderons l'apprentissage et l'enseignement de la combinatoire, pour montrer que son apprentissage est important et illustrer que certains choix didactiques faits dans l'enseignement en compromettent l'apprentissage, ce qui nous amènera à envisager une approche alternative pour approcher les problèmes combinatoires. Une telle entreprise pour nous exige la nécessaire collaboration des enseignants qui ont sur leur pratique une compréhension agissante qui éclaire sur la viabilité des situations qui leur sont proposées (Bednarz, Poirier, Desgagné et Couture, 2001). Enfin, nous indiquons nos objectifs de recherche.

---

propriétés observées sur des configurations combinatoires particulières. Le raisonnement par récurrence est donc un cas particulier de raisonnement inductif.

## 1.2 Importance de la combinatoire

### *1.2.1 La combinatoire comme domaine mathématique : exemples de problèmes combinatoires*

Dénombrer les différentes possibilités est une activité qui de prime abord parait naturelle, partout présente. Pensons au propriétaire de magasin de crème glacée qui veut annoncer sur une affiche tous les choix possibles de crème glacée que peuvent trouver les clients dans son magasin. Un second exemple est celui du parieur qui n'ayant aucune information sur les performances de chevaux prenant part à une course, veut miser sur tous les quartés gagnants possibles, etc. À côté de ces situations prosaïques, les exemples sont nombreux de situations concrètes, variées, tirées de différentes sphères d'activités et dans lesquelles il s'agit peu ou prou de dénombrer, de mobiliser un raisonnement combinatoire. Mais, qu'est-ce que la combinatoire? Quelle est sa place dans l'apprentissage et dans l'enseignement des mathématiques?

Dans son ouvrage posthume *Ars Conjectandi* (1713) (l'art de conjecturer), le mathématicien Bernoulli (1654-1705) définit la combinatoire comme l'art d'énumérer toutes les possibilités, de combiner, de mélanger entre eux un nombre donné d'objets de sorte qu'aucun groupement formé avec ces objets ne soit omis. Des exemples de tels groupements sont les *arrangements*, *permutations* et *combinaisons*[3]. Cependant, l'objet d'étude de la combinatoire dépasse largement les arrangements, permutations et combinaisons. Plus généralement, la combinatoire s'occupe des configurations formées avec des ensembles finis (on dit aussi des ensembles *discrets*) d'objets et en étudie divers aspects : existence, relations, méthodes spécifiques d'énumération, de dénombrement, etc.

---

[3] Pour les définitions des arrangements, permutations et combinaisons, nous renvoyons le lecteur à la page 64 du cadre théorique.

La combinatoire est une composante importante des mathématiques dites *discrètes* qui sont aujourd'hui une des branches actives des mathématiques[4]. Elle recouvre un vaste champ d'étude comprenant notamment l'analyse combinatoire, la géométrie combinatoire, l'optimisation combinatoire, etc. Dans cette recherche, nous nous intéressons à l'analyse combinatoire encore appelée combinatoire énumérative ou *dénombrement* dont l'objet d'étude est la classification et le dénombrement de différentes situations combinatoires. Ce dénombrement va donc être mobilisé dans la résolution de problèmes combinatoires. Par la suite, chaque fois que nous utilisons le terme combinatoire, nous renvoyons au dénombrement de différentes possibilités dans ces problèmes. Donnons deux exemples pour illustrer des problèmes possibles de combinatoire que l'on trouve dans les recherches en didactique des mathématiques, pouvant être exploitées avec des élèves du primaire ou du secondaire (Varga et Dumont, 1973b; Powell, 2003).

**Problème des couleurs** (Varga et Dumont, 1973b) :
*Choisis trois couleurs de réglettes que tu préfères. Quelles couleurs as-tu choisies?*
*Tu dois maintenant construire des tours de deux étages, en partant des couleurs de réglettes que tu as choisies.*

1. Tu peux utiliser dans une tour deux fois la même couleur. Combien de tours différentes peux-tu construire?
2. Tu ne peux utiliser dans une même tour qu'une seule fois chaque couleur. Combien de tours sont possibles?

*Construis maintenant des tours de trois étages, en partant toujours des couleurs que tu as choisies.*

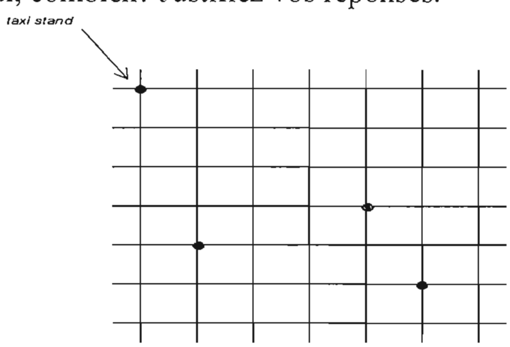
---

[4] Les mathématiques discrètes sont l'étude des structures mathématiques fondamentalement discrètes. La plupart des objets étudiés en mathématiques discrètes, si ce n'est pas la totalité, sont des ensembles dénombrables comme celui des entiers. Les mathématiques discrètes sont devenues populaires ces dernières décennies du fait de leurs applications dans l'informatique. Les notations et les concepts des mathématiques discrètes sont utilisés pour exprimer ou étudier des problèmes et des objets en algorithmique et en programmation. Elles sont donc, les mathématiques discrètes, une lunette particulière avec laquelle on analyse certains objets mathématiques. À ce propos, Grenier et Payan (1998) donnent l'exemple d'une famille finie de droites qui peut être considérée comme un objet discret, quoiqu'une droite ne soit pas un objet discret, et dans le précédent exemple on peut s'intéresser au nombre de régions délimitées par cette famille finie de droites. Une telle approche relève de la *discrétisation*.

1. Tu peux utiliser, dans une tour, autant de fois que tu veux la même couleur. Combien de tours différentes peux-tu construire?
2. Dans une même tour, deux étages successifs ne peuvent être de la même couleur. Combien de tours peux-tu faire?
3. Tous les étages d'une tour doivent être de couleurs différentes. Combien de tours peux-tu construire?

Ce problème a été proposé par Varga et Dumont (1973b) pour des élèves de deuxième année du primaire. Il peut être réalisé par les élèves en utilisant des minicubes emboîtables. Sur cet exemple simple, par manipulation directe, les enfants peuvent prendre conscience de l'incidence de l'ordre et de la répétition d'une même couleur sur les tours fabriquées, un apprentissage combinatoire non négligeable!

**Problème du taxi** (Powell, 2003)[5]
Un conducteur de taxi couvre un territoire donné d'une ville, territoire représenté par la grille de la figure ci-dessous. Toutes les courses commencent au stand de taxi, le point du coin gauche supérieur de la grille. Pendant une nuit d'activités au ralenti, le conducteur est appelé seulement trois fois et à chaque fois, il prend des passagers à une des intersections indiquées par les autres points sur la grille. Pour passer le temps, il considère tous les itinéraires possibles qu'il aurait pu prendre à chaque point de ramassage et se demande s'il aurait pu choisir un itinéraire plus court. Quel est l'itinéraire le plus court du stand de taxi à chaque point? Comment savez-vous que c'est le plus court? Y a-t-il plus d'un plus court chemin menant jusqu'à chaque point ? Si non, pourquoi? Si oui, combien? Justifiez vos réponses.




Ce problème a été proposé par Powell à des élèves du niveau équivalent au collégial dans le système québécois (grade 12). Lors de la résolution de ce problème,

[5] Traduction libre de l'anglais.

dans l'étude de Powell (2003), des élèves qui travaillent depuis longtemps ensemble (une étude longitudinale sur des problèmes combinatoires a été réalisée auprès de ces élèves) établissent des liens intéressants avec des problèmes du type de celui des «tours», comme dans le premier exemple (pour plus de détails nous renvoyons à la thèse de Powell, 2003).

Dans la section suivante, nous examinerons la combinatoire sous l'angle de ses liens avec d'autres domaines mathématiques ainsi que des disciplines connexes, et ce afin d'en montrer l'importance.

### *1.2.2 L'importance de la combinatoire en mathématiques et dans des disciplines connexes*

La combinatoire est très utilisée dans les calculs de probabilités. En fait, la théorie des probabilités se réduit à la combinatoire énumérative lorsqu'elle s'applique à des ensembles discrets. Le lien entre la combinatoire et les probabilités est encore plus évident si nous considérons la définition que donne Laplace (1820) de la probabilité d'un événement aléatoire, soit le rapport du nombre de cas favorables à cet événement sur le nombre de cas possibles[6]. Une telle approche de la probabilité, basée sur l'hypothèse d'équiprobabilité [7] des événements simples, repose

---

[6] En théorie élémentaire des probabilités, les issues possibles suite à une expérience ou épreuve aléatoire sont appelées des *événements*. Ces événements peuvent être simples (comme chacun des chiffres obtenus lors du lancer d'un dé à six faces, les différentes faces du dé étant numérotées de 1 à 6) ou composés (par exemple, obtenir un chiffre pair lors du lancer d'un dé : un tel événement se réalise avec les chiffres, 2, 4 ou 6).

[7] L'hypothèse d'*équiprobabilité* veut que dans une expérience aléatoire, tous les événements simples aient la même probabilité ou chance d'apparaître. Dans le cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement quelconque est le rapport (quotient) du nombre de cas favorables à cet événement sur le nombre de cas possibles. Ainsi, la probabilité d'obtenir un nombre pair lors du lancer aléatoire d'un dé à six faces (donc à 6 issues simples) est 3/6, c'est-à-dire ½. Une autre approche possible de la notion de probabilité est celle dite fréquentielle et en réalité très proche des statistiques. L'approche fréquentielle est basée sur des expérimentations et simulations numériques (avec le recours à du matériel manipulable ou à des programmes informatiques pour décrire des expériences réelles). Ainsi, dans une telle approche la probabilité d'un événement est définie comme le nombre autour duquel oscille la fréquence relative de l'événement considéré : un tel nombre est appelé aussi en mathématiques «fréquence limite». Enfin, dans cette rubrique des approches possibles de la notion de probabilité à

essentiellement sur des méthodes combinatoires pour la détermination du nombre de cas favorables à un événement ainsi que celle du nombre de cas possibles dans une expérience aléatoire. Toutefois, l'approche Laplacienne de la probabilité a le malheureux effet de présenter la combinatoire comme seulement un outil pour le calcul de probabilités. Ce qui limite significativement l'importance de la combinatoire et brouille les rapports qu'elle entretient avec le domaine du calcul de probabilités.

La combinatoire intervient également dans plusieurs autres branches des mathématiques comme l'algèbre, la topologie, la géométrie, la théorie des nombres, la théorie des graphes. Un de ces domaines qui intègre la perspective combinatoire dans l'approche des objets mathématiques est la combinatoire algébrique née dans les années soixante (1964) sous l'impulsion du mathématicien Gian-Carlo Rota (1932-1999). Ce dernier, s'intéressa à la combinatoire que plusieurs, avant ses travaux, considéraient au mieux comme un domaine des mathématiques avec des trucs astucieux, variés, et isolés, pour résoudre les problèmes qui s'y rattachaient. Il donnera à ce domaine ses lettres de noblesse en le dotant des théorèmes algébriques qui l'organisent.

On retrouve aussi de nombreuses applications de la combinatoire dans des domaines tels que l'informatique (langages, automates, complexités d'algorithmes, combinatoire des mots), la biologie (par exemple dans les questions de diffusions épidémiques, en génétique), la physique (où le modèle de partition que nous verrons plus tard a des applications importantes en mécanique, thermodynamique et statique), la chimie (par exemple le problème de la détermination des isomères d'une molécule donnée et celui de la topologie de la structure moléculaire sont des problèmes de nature combinatoire), etc.

---

l'école, une dernière est celle de la modélisation des phénomènes aléatoires : ainsi modéliser une situation ou un phénomène aléatoire c'est lui associer une *loi* de probabilité.

Au-delà des mathématiques et des disciplines que nous avons précédemment mentionnées, la combinatoire est également importante en termes d'apprentissages divers (mathématiques entre autres) comme nous essayerons de le montrer dans les deux points suivants.

### *1.2.3 L'importance de la combinatoire pour le développement de la pensée formelle*

Pour Piaget et Inhelder (1966), la combinatoire résulte d'une généralisation des opérations de classification ou de relations d'ordre, qui au stade de la pensée formelle, sont libérées de leurs attaches concrètes et intuitives. La combinatoire est donc selon Piaget et Inhelder (1966) d'une grande importance dans l'extension et le renforcement de la pensée formelle car elle permet de raisonner sur la réalité en fonction de toutes les combinaisons possibles, ce qui pour Piaget et Inhelder renforce considérablement les pouvoirs déductifs de la pensée :

> Cette généralisation des opérations de classification ou de relations d'ordre aboutit à ce qu'on appelle une combinatoire (combinaisons, permutations, etc.), dont la plus simple est constituée par les opérations combinatoires proprement dites, ou classification de toutes les classifications. Or, cette combinatoire est d'une importance primordiale dans l'extension et le renforcement des pouvoirs de la pensée, car, sitôt constituée, elle permet de combiner entre eux des objets ou des facteurs (physiques, etc.) ou encore des idées ou propositions (ce qui engendre une nouvelle logique) et, par conséquent, de raisonner en chaque cas sur la réalité donnée...*en considérant cette réalité, non plus sous ses aspects limités et concrets, mais en fonction d'un nombre quelconque ou de toutes les combinaisons possibles, ce qui renforce considérablement les pouvoirs déductifs de l'intelligence* (Piaget et Inhelder, 1966, pp. 105-106)

L'extrait précédent montre que selon Piaget, pour la combinatoire, les apprentissages en jeu dépassent le strict cadre des mathématiques, montrant là toute leur importance en lien avec le développement même de la pensée. Pour Piaget et Inhelder (1951; 1966), la capacité combinatoire est une composante essentielle de la pensée formelle. Les opérations combinatoires sont des opérations à la seconde puissance, c'est-à-dire «des opérations groupant en un tout supérieur des opérations élémentaires leur servant de contenu» (Piaget et Inhelder, 1951, p. 206), et c'est de telles opérations qui caractérisent la pensée formelle. Pour illustrer cela, Piaget et Inhelder (1951) prennent l'exemple des permutations : «les permutations forment, comme l'ont montré les mathématiciens, un «groupe» opératoire élémentaire : on peut «composer» deux permutations en une troisième, «inverser» une permutation, « associer» des permutations successives de différentes manières et rester dans l'«identité» d'une permutation nulle» (p. 205). Plus loin, ils poursuivent en affirmant que : « (...) les opérations constitutives de ce groupe consistent en changements d'ordre, c'est-à-dire en opérations qui semblent aisées à comprendre et à effectuer» (p. 206). «Si un changement d'ordre est en soi-même, une opération élémentaire, une multiplication de changements d'ordre n'est par contre plus une opération simple, puisqu'il s'agit d'une opération portant sur d'autres opérations, c'est-à-dire d'une opération à la seconde puissance» (p. 206).

Examinons maintenant d'autres apprentissages mathématiques importants en jeu dans la résolution de problèmes combinatoires.

### *1.2.4 Les problèmes combinatoires à la source de l'apprentissage de la mathématisation, justification, validation, modélisation*

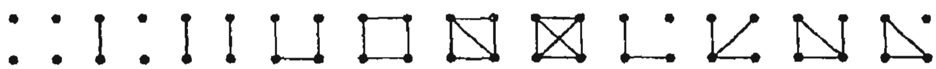
Pour plusieurs auteurs la combinatoire élémentaire offre un terrain rêvé pour le développement de plusieurs processus mathématiques dont la mathématisation (Kapur, 1970; Dubois, 1984), la justification et validation (Martino, 1992; Maher et Martino, 1996; Powell et Maher, 2002; Powell, 2003), la modélisation (Grenier et Payan, 1998; Sriraman, 2004). Dans la suite de cette section, nous examinons les liens possibles entre la résolution de problèmes combinatoires et le développement de ces processus.

Selon Kapur (1970) et Dubois (1984), la combinatoire est une source de situations simples et concrètes, exigeant peu de pré-requis notionnels et de ce fait accessibles à différentes catégories d'élèves, et où peuvent s'exercer la représentation, la généralisation, la mathématisation, des apprentissages au cœur de l'activité mathématique. Kapur (1970) donne différents exemples de problèmes de dénombrement que les élèves peuvent représenter de diverses manières, de problèmes sur lesquels ils peuvent s'exercer à repérer des régularités, trouver des formules générales. Deux exemples proposés et commentés par Kapur (1970) pour illustrer des tels problèmes sur lesquels les enfants peuvent s'exercer (par exemple au moyen de tables de valeurs) à trouver des régularités ou à prédire des nombres de configurations sont :

*1) : Les décompositions d'un nombre donné:* dans un tel cas le nombre est décomposé en sommes de termes, l'ordre dans lequel ceux-ci apparaissent dans une somme devant être pris en compte. Ainsi, il y a 8 décompositions du nombre 4: 4=3+1=1+3=2+2=2+1+1=1+2+1=1+1+2=1+1+1+1.

Ici, avec différents nombres et en considérant toutes les partitions possibles, les élèves peuvent être amenés à construire une table de valeurs dont les régularités sont celles du triangle de Pascal.

*2) : Les graphes linéaires :* pour 4 personnes, les amitiés possibles sont symbolisées par les graphes linéaires ci-dessous :



I II III IV V VI VII VIII IX X XI

Sur cet exemple non exhaustif, les élèves peuvent s'amuser à trouver toutes les amitiés possibles dans un groupe de 4 personnes et certaines régularités, telles les cas IX et XI dans lesquels 3 personnes ont chacune 2 amis et 1 personne n'a aucun ami.

Quant à Dubois (1984), il estime que l'exploitation des situations combinatoires rendrait significatives plusieurs notions ensemblistes (telles les notions d'application, de produit cartésien, de relation d'ordre) qu'elles (ces situations) réalisent bien. Le langage des ensembles permettrait la mathématisation des concepts combinatoires introduits intuitivement. En somme, selon Dubois (1984), les problèmes combinatoires offrent aux élèves des opportunités de se livrer à des activités de mathématisation qui les introduisent facilement au langage des ensembles. Dans le chapitre suivant (cadre théorique), nous reviendrons sur le concept de mathématisation et indiquerons la perspective que nous en avons et qui est différente de celle à notre avis très «formaliste» de Dubois (1984).

Quant aux liens entre la combinatoire et le développement de la validation, Kapur (1970) estimait déjà qu'un des intérêts des problèmes combinatoires est qu'ils permettent aux élèves de distinguer une validation plausible d'une validation rigoureuse. Contrairement à l'apprentissage de la mathématisation, sur l'apprentissage de la justification et de la validation en lien avec des problèmes combinatoires, nous avons des recherches empiriques qui viennent étayer les allégations des chercheurs. Dans une étude longitudinale qui s'est étalée sur près de quinze ans, Maher et ses collaborateurs (Maher et al., 1997; 1998; Powell et Maher, 2002; Powell, 2003) montrent que les élèves sont capables de développer des heuristiques efficaces et de recourir à des raisonnements variés pour résoudre les problèmes combinatoires qu'on leur propose et justifier les réponses auxquelles ils arrivent. Dans cette étude longitudinale des élèves de 3$^{e}$ et 4$^{e}$ année du primaire ont pu inventer des stratégies pour résoudre les problèmes qui leur ont été soumis. Par exemple, la plupart de ces élèves face au problème des tours[8] ont d'abord procédé par

---

[8] Dans la recherche longitudinale du groupe de Maher, il y a une gradation dans les problèmes de tours proposés aux élèves qui selon le cas, travaillent en groupe (le plus souvent) ou individuellement à trouver et justifier les stratégies systématiques leur permettant de dénombrer le nombre total de tours d'une hauteur donnée qu'on peut former avec des cubes Unifix de couleurs données. Dans ce qui suit, nous présentons notre traduction en français des quatre versions de problèmes de tours qui ont été utilisées dans cette recherche. *Problème des tours de 4 cubes de hauteur et 2 couleurs de cubes Unifix* (3$^{e}$ et 5$^{e}$ année du primaire): ton équipe a des cubes Unifix de deux couleurs données. Travaillez ensemble et fabriquez le plus de tours différentes de hauteur 4 qu'il est possible d'avoir avec ces deux couleurs de cube. Regarde si toi et ton coéquipier pouvez trouver une bonne façon d'obtenir toutes les tours dont la hauteur est de 4 cubes. *Problème des tours de 4 cubes de hauteur et 3 couleurs de cubes Unifix* (4$^{e}$ année du primaire): ton équipe a trois couleurs de cubes Unifix. Travaillez ensemble et fabriquez le plus de tours différentes de hauteur 4 qu'il est possible d'avoir avec ces trois couleurs de cube. Regarde si toi et ton coéquipier pouvez trouver une bonne façon d'obtenir toutes les tours dont la

essais et erreurs, puis ils ont essayé de trouver les tours dupliquées. Plus tard, ils ont été plus organisés et ont pu identifier des patterns locaux tels des «tours opposées» (c'est-à-dire deux tours avec des couleurs inversées), des «tours cousines» (c'est-à-dire des tours qui sont des inverses verticales l'une de l'autre), etc., pour enfin utiliser des stratégies plus globales tenant compte des tours dupliquées (Maher et Martino, 1999, 2000; Muter, 1999; Martino, 1992). La méthode initiale utilisée par la plupart des élèves du primaire pour justifier que toutes les tours ont été obtenues est *qu'ils ne peuvent plus en trouver d'autres* (Martino, 1992; Maher et Martino, 1996). Quelques élèves plus tard ont développé une preuve par cas ou par induction (Maher et Speiser, 1997).

Enfin, les situations combinatoires permettent également de travailler la modélisation (Grenier et Payan, 1998). Notre conviction, appuyée en cela par la revue effectuée par Sriraman et English (2004) d'une variété de problèmes combinatoires exploités dans plusieurs travaux de recherches, est que les situations combinatoires peuvent être modélisées même par des élèves jugés académiquement « faibles ». Nous reviendrons dans le chapitre 2 (cadre théorique) sur le sens que nous donnons au terme de modélisation. Mais, déjà, indiquons pour nous qu'elle touche à la fois à des aspects de la mathématisation et de la validation, l'accent dans le processus de modélisation étant mis sur la création de modèles par les élèves, rendant compte de tous les cas possibles, et pouvant prendre des formes variées.

---

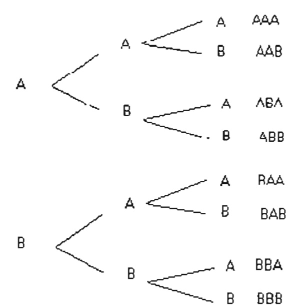
hauteur est de 4 cubes. *Problème des tours de 3 cubes de hauteurs et 2 couleurs de cubes Unifix* (évaluation écrite pour la 5e année du primaire): S'il vous plait, envoyez une lettre a un ami malade et qui ne peut pas être présent en classe. Décrivez toutes les tours différentes que vous avez obtenues et dont la hauteur est de 3 cubes, quand vous avez uniquement 2 couleurs disponibles. Pourquoi étiez-vous sûrs d'avoir fabriqué chaque tour possible et de n'avoir oublié aucune? *Problème des tours de n cubes de hauteur et k couleurs de cubes Unifix* (1ère année du secondaire): Ton équipe a ***k*** cubes Unifix. Travaillez ensemble et fabriquez le plus de tours différentes de hauteur ***n*** qu'il est possible d'avoir avec ces ***k*** couleurs de cube. Regarde si toi et ton coéquipier pouvez trouver une bonne façon d'obtenir toutes les tours dont la hauteur est de ***n*** cubes.

Dans la section suivante, toujours dans le but de situer son importance, nous aborderons la place de la combinatoire dans les curriculums et dans l'enseignement des mathématiques.

## 1.3 La combinatoire comme domaine d'enseignement

### *1.3.1 La combinatoire aux niveaux primaire et secondaire*

Quelle importance la combinatoire a-t-elle de fait dans l'enseignement des mathématiques et dans les programmes usuels? Dans certains pays, la combinatoire a occupé une place importante dans les programmes et l'enseignement des mathématiques et ce dès le primaire. Ainsi, en Hongrie, à la suite des travaux de Varga, Dumont, Glaymann et Varga ont tenté d'enseigner la combinatoire à de jeunes enfants. Sur la base d'expérimentations dans des classes pilotes hongroises (une centaine), Varga et Dumont (1973) ont conçu un programme d'enseignement de la combinatoire pour les huit premières années d'enseignement (élèves de 6 à 14 ans). Varga et Dumont (1973) montrent que le recours à des jeux combinatoires et d'autres activités (contenues dans les fiches de travail qu'ils proposent aux maîtres dans les classes pilotes) permet aux enfants d'assimiler plusieurs concepts et principes combinatoires et constitue des approches fécondes. Dans leur programme, ils proposent de développer, entre autres, l'habileté des enfants à symboliser les événements observés dans leur environnement ou rencontrés dans leurs expériences (de 6 à 7 ans), à recourir à différents types de diagrammes, interpréter de tels diagrammes dans la résolution de problèmes combinatoires (9 à 10 ans), dégager des régularités dans les problèmes combinatoires (12 à 13 ans), exprimer verbalement ou par des formules les généralités observées sur ces problèmes (13 à 14 ans). Dans Varga et Dumont (1973a), mais aussi dans Glaymann et Varga (1975), les auteurs recourent abondamment à divers diagrammes et en particulier aux arbres de choix auxquels Fischbein (1975) donne une importance particulière comme outil de dénombrement pour les élèves. Les arbres de choix sont un type de représentation externe permettant d'illustrer, et dans des cas simples de dénombrer, certains groupements d'objets. La structure d'un arbre de choix comprend un nœud principal supportant des branches qui au besoin aboutissent chacune à des nœuds secondaires, et ainsi de suite. Par exemple, l'arbre suivant donne tous les arrangements avec répétition de deux lettres A et B pris *3 à 3*.




Mais, quelle est la place effective de la combinatoire au primaire et au secondaire au Québec? En général, au primaire et au secondaire la combinatoire n'est pas un objet explicite d'enseignement (Ministère de l'éducation du Québec MEQ, 2000; Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport MELS, 2003). Une analyse plus fine du programme de mathématiques du premier cycle du secondaire[9] de l'école québécoise montre toutefois qu'elles permettent d'introduire les arbres de choix comme outil de dénombrement, le principe de la multiplication, et dans le contenu référent aux probabilités (MELS, 2003). Au Québec, les situations de dénombrement et leur exploitation sont aussi présentes dans le nouveau programme de mathématiques du premier cycle du secondaire à travers les trois compétences disciplinaires (MELS, 2003), surtout la compétence à résoudre une situation problème. Rappelons que dans ce programme les trois compétences mathématiques à développer sont : 1) résoudre une situation problème; 2) déployer un raisonnement mathématique et 3) communiquer à l'aide du langage mathématique.

[9] Au moment où cette recherche a été effectuée le programme du second cycle n'était pas encore sorti.

Dans le nouveau programme de mathématique du premier cycle du secondaire au Québec, les situations de dénombrement sont susceptibles de contribuer au développement de la compétence 1 en lien avec certains savoirs spécifiques, tel celui de probabilité. Ainsi, dans la résolution de problèmes de probabilité, il s'agit selon le nouveau programme pour l'élève de dénombrer les possibilités d'une expérience aléatoire par le recours à différents modes de représentation, comme des arbres de choix, réseaux ou grilles, qui permettent de déduire la règle de multiplication appropriée dans les cas où les possibilités sont trop nombreuses (p. 256).

Eu égard à la compétence 2, la résolution de problèmes combinatoires (en lien ou non avec des problèmes de probabilité) nécessite de déployer un raisonnement combinatoire en procédant par une démarche inductive sur des cas particuliers, en tâchant d'être exhaustif dans l'inventaire des cas, en généralisant autant que possible les conjectures faites, en dégageant des règles de combinatoire. À travers ce bref survol, on perçoit la place qu'occupent les situations combinatoires en lien avec le développement des compétences visées.

La combinatoire est par ailleurs présente au niveau postsecondaire, et là la perspective retenue est tout autre comme nous le verrons dans ce qui suit.

### *1.3.2 La combinatoire dans l'enseignement postsecondaire*

Au niveau postsecondaire, correspondant au collégial au Québec [10], la combinatoire devient souvent un objet explicite d'enseignement. Sont alors enseignées les définitions des opérations combinatoires d'arrangements, permutations,

---

[10] Pour le Québec, la combinatoire au collégial est surtout enseignée dans les programmes techniques et le nombre d'heures qui lui est attribué à l'intérieur de cours de Probabilités et/ou Statistiques varie entre 10 et 15 h. Quelques collèges offrent de plus des cours de mathématiques de base dans lesquels figurent un chapitre exclusif sur la combinatoire, la plupart des collèges ayant supprimé de tels cours de base. Comme on le voit, la combinatoire est plus abordée au niveau universitaire, même si quelques CEGEP offrent encore des cours qui abordent, entre autres contenus mathématiques, les opérations combinatoires et le binôme de Newton (nous avons-nous-même assisté, en mai 2005, à un enseignement sur la combinatoire au CEGEP d'Ahuntsic à Montréal).

de combinaisons, avec ou sans répétitions, et les différentes formules qui permettent de dénombrer de telles configurations.

Analysant les manuels de mathématiques en Espagne, Navarro-Pelayo (1991) montre que les définitions des opérations combinatoires sont généralement associées au modèle de sélection et qu'il n'y a presque pas de problèmes de type partition[11]. Dans le même ordre d'idées, Grenier et Payan (1998) montrent qu'en France dans les manuels de la classe de Terminale (fin du collégial) eu égard à la combinatoire, le «modèle d'urne»[12] est presque le seul modèle de référence, les outils fournis dans les chapitres de dénombrement ne permettent pas selon les auteurs de dénombrer grand-chose. Aussi, Grenier et Payan (1998) soulignent le fait que les problèmes et exercices de dénombrement souvent proposés dans les manuels sont plus concrets (c'est-à-dire à contextes moins mathématiques) que dans les autres chapitres, ils sont alors moins modélisés, et on pourrait s'attendre à ce qu'ils soient l'occasion d'un travail de modélisation, ce qui n'est pas le cas. Sans procéder de façon exhaustive, nous avons nous-même analysé la partie combinatoire de deux manuels[13] de mathématiques utilisés au collégial au Québec et là également le constat est le même que celui de Navarro-Pelayo : une référence quasi exclusive au modèle de sélection.

Comme on le voit, lorsque la combinatoire devient un objet explicite d'enseignement, cet enseignement se caractérise par un accent mis sur les formules, les opérations combinatoires et une absence de diversité des «modèles» combinatoires (au sens large) proposés aux élèves (Navarro-Pelayo, 1991), le modèle de sélection étant souvent le seul modèle enseigné. Cette situation, au-delà de la

---

[11] Pour les définitions des modèles de sélection et de partition nous renvoyons le lecteur aux pages 65 et 66 du cadre théorique.

[12] Par là ils entendent les problèmes de *tirage* (de boules ou autre) dans une urne. Il s'agit donc, dans les termes de Dubois (1984) et de Batanero et al. (1994) de problèmes de type sélection.

[13] Les manuels analysés sont ceux de : 1) Ouellet, G. (1998). *Statistiques et Probabilités Tome III* (p. 131-169) ; et 2) Ross, A. (1991). *Mathématiques pour les techniques de l'informatique* (p. 317-343 chapitre 10 : Arrangements; p. 345-373 chapitre 11 : Combinaisons).

France et de l'Espagne, se retrouve dans plusieurs pays, en particulier les pays sur le continent africain dont les programmes au niveau postsecondaire sont bâtis sur le modèle des programmes de mathématiques de la France (Sénégal et Gabon où nous avons été enseignant pendant six années). Dans la section suivante, nous montrons qu'un tel enseignement de la combinatoire est à la source de plusieurs difficultés chez les élèves, venant questionner en retour une telle approche d'enseignement.

## 1.4 Limites de cet enseignement à la source de nombreuses difficultés chez les élèves

Enseignée au niveau postsecondaire, la combinatoire se caractérise par un accent mis sur le symbolisme et, surtout, sur les formules de dénombrement. En fait, à ce niveau d'enseignement, la combinatoire se réduit aux opérations combinatoires (arrangements, permutations et combinaisons) auxquelles beaucoup d'élèves et d'enseignants l'associent. Peu d'enseignants sont conscients du fait que les définitions des opérations combinatoires données dans les manuels font référence à un modèle particulier, celui de sélection. Nous-même, ni pendant nos études universitaires en mathématiques, ni durant les années où nous avons enseigné les mathématiques, n'avons jamais eu conscience de cela. Ce sont les recherches que nous avons effectuées à la maîtrise (Barry, 2003) qui nous ont permis de prendre connaissance du texte de Dubois (1984) dans lequel l'auteur propose une classification des configurations combinatoires élémentaires selon trois modèles: sélection (ou tirage), distribution[14] (ou rangement) et partition. À l'intérieur de chacun de ces modèles, on peut définir les opérations combinatoires. Le mérite de Dubois est d'avoir précisé qu'eu égard à la combinatoire, l'essentiel est de concevoir les situations avant tout en termes des modèles combinatoires décrits plus haut. Quand on pense à la confusion très répandue (et enseignée!) entre l'analyse combinatoire élémentaire et les opérations combinatoires, on comprend mieux la

[14] Pour la définition du modèle de distribution, nous renvoyons le lecteur à la page 65 du cadre théorique.

portée didactique de la contribution de Dubois qui a été le premier à suggérer que les difficultés des élèves dans la résolution des problèmes combinatoires n'étaient pas toutes du même ordre.

Ainsi, les recherches empiriques menées par Batanero, Navarro-Pelayo et Godino (1994, 1997), confirment la suggestion de Dubois (1984), par la mise en évidence d'une variable didactique appelée *modèle combinatoire implicite de l'énoncé* et qui traduit l'effet du modèle à la fois sur la difficulté relative du problème et le type d'erreurs commises par les élèves (Batanero et al., 1997). En effet, les définitions usuelles (notes 4, 5 et 6) des opérations combinatoires sont efficaces seulement avec les problèmes de sélection, et dès que les situations proposées aux élèves sont de type distribution ou partition, ces mêmes définitions s'avèrent inefficaces. La difficulté soulevée ici est de l'ordre de l'identification de l'opération combinatoire par l'étudiant, lorsque le problème n'est pas de type sélection.

La résolution de problèmes combinatoires simples, peu importe le modèle considéré, exige des élèves de pouvoir passer d'un modèle à l'autre, et au besoin d'être à même de transférer les définitions des opérations combinatoires d'un modèle combinatoire à l'autre. Batanero et al. (1997) décrivent plusieurs erreurs des élèves dans la résolution de problèmes combinatoires, et montrent que certaines de ces erreurs sont spécifiques aux modèles de distribution et de partition qu'on ne rencontre pas souvent dans les manuels, alors que d'autres sont communes aux trois modèles. Ainsi :

Les erreurs communes aux trois modèles sont :

- les erreurs de répétition et d'ordre;
- les erreurs sur le type d'objets: l'élève considère comme différents des objets indiscernables ou le contraire;
- les erreurs d'énumération non exhaustive, de réponses intuitives incorrectes, de mauvaise utilisation d'une bonne formule, de confusion sur les valeurs

des paramètres dans les formules, d'interprétation erronée de diagrammes en arbre ou de mauvaise construction de ce diagramme, etc.

Les erreurs spécifiques aux problèmes de distribution et de partition sont :

- la confusion sur le type de cases (distinctes ou non);
- dans le cas des problèmes de partition: le recouvrement partiel, l'oubli de certaines parties dans une partition donnée.

Comme l'illustrent quelques unes des erreurs décrites ci-dessus, certaines des difficultés des élèves dans la résolution de problèmes combinatoires sont liées aux types de problèmes qui leur sont proposés dans l'enseignement usuel et assurément un choix de problèmes limité à un certain type a des conséquences dans la suite. Aussi, les erreurs du type de celles liées à l'utilisation de formule de dénombrement indiquent une difficulté chez les élèves dans l'application des modèles. À cet égard, nous questionnons la pertinence d'un enseignement de la combinatoire mettant l'accent sur les formules, des modèles explicites dont la compréhension par les élèves reste problématique. Fischbein et Gazit (1988) soulignaient déjà en lien avec les combinaisons, qu'après enseignement c'est comme si la formule pour dénombrer les combinaisons perturbait les stratégies intuitives des élèves d'où les nombreuses erreurs avec cette formule. Dans le même ordre d'idées, Grenier et Payan (1998) soulignent le fait que les formules de dénombrement données aux élèves sont souvent rattachées à des énoncés et à une terminologie ou vocabulaire qui sert comme système de reconnaissance, ce qui évidemment ne permet pas aux élèves de dénombrer grand-chose. En effet, dans certains manuels, des «trucs» sont donnés aux élèves qui doivent comprendre par exemple que le «ou» dans un problème de dénombrement renvoie au principe de la somme, le «et» au principe multiplicatif, ou encore associer chacune des formules de dénombrement (pour les opérations combinatoires) à un mode de tirage de boules dans une urne (Grenier et Payan, 1998)[15]. De telles méthodes contribuent à «algorithmiser» la résolution de problèmes combinatoires et ne permettent assurément pas de dénombrer grand chose.

Pour conclure sur cette section, nous dirons que les limites de cet enseignement de la combinatoire que nous avons rapidement présentées ouvrent sur un questionnement : Quelles approches alternatives possibles permettraient d'exploiter avec les élèves des situations combinatoires et ce en évitant de reproduire les approches problématiques que nous avons soulignées (enseignement de modèles a priori, de formules sans que celles-ci soient associées pour l'élève à des modèles de situations, restriction à un modèle). Dans la section suivante, nous examinons une approche possible de la combinatoire au premier cycle du secondaire au Québec où, rappelons-le, la combinatoire n'est pas un objet explicite d'enseignement.

### 1.5 Autres approches d'enseignement de la combinatoire au secondaire : quelle alternative?

La combinatoire est certainement un terreau riche pour développer plusieurs apprentissages mathématiques, tels nous venons de le voir les processus de modélisation, mathématisation, validation. Lorsque les situations combinatoires sont bien choisies, les élèves sont capables, même au primaire, en tentant de les résoudre, de développer des heuristiques puissantes, d'inventer des méthodes de justification ou de validation, comme en attestent les résultats de l'étude longitudinale de Maher et ses collaborateurs (Maher, Martino et Alston, 1993 ; Maher et Martino, 1998 ; Powell et Maher, 2002). Au secondaire, comme nous l'avons montré dans les pages précédentes, elle n'est pas un objet explicite d'enseignement, il ne s'agit certainement pas d'y aborder la combinatoire en reproduisant peu ou prou les choix d'enseignement problématiques au niveau postsecondaire, telles une centration sur les opérations combinatoires ou sur un seul modèle combinatoire (notamment celui de

[15] La formule des combinaisons aux tirages simultanés, celle des arrangements sans répétitions aux tirages ordonnés sans remise, la formule des arrangements avec répétitions aux tirages ordonnés avec remise. Là encore le modèle de sélection, équivalant ici au modèle d'urne, est le modèle de référence.

sélection), le recours à des formules de dénombrement que les élèves ne savent pas rattacher à des modèles de situations combinatoires. Sans doute, plusieurs expériences négatives qu'évoquent pour certains élèves la résolution de problèmes combinatoires se justifient en partie par de tels choix didactiques. De sorte que pour le secondaire, l'approche proposée par Fischbein et Gazit (1988) qui consiste à enseigner (à partir de 11-12 ans) les opérations combinatoires ainsi que les formules de comptage associées (sauf pour le cas des combinaisons) nous apparaît inappropriée.

Une autre approche plus porteuse au secondaire, dans la lignée des propositions curriculaires de Varga et Dumont (1975), mais aussi de Batanero et al. (1994), est celle qui consiste, sur des situations concrètes, à faire découvrir aux élèves les principes[16], opérations et modèles combinatoires élémentaires. Cependant, cette approche même si elle présente l'intérêt dans notre optique de ne pas aborder la combinatoire comme un objet explicite d'enseignement (avec des définitions, des formules, des propriétés, etc.), vise d'abord une introduction de la combinatoire, raison pour laquelle nous ne la retenons pas dans le contexte qui est le nôtre.

Pour notre part, *nous mettons à l'avant plan* à propos de la résolution de situations combinatoires, les démarches chez les élèves leur permettant de réinventer et de donner sens aux modèles combinatoires en jeu, soit sur le processus de modélisation, et nous rejoignons dans ce choix d'autres chercheurs comme Grenier et Payan (1998) et Powell (2003). Un tel processus, comme nous le verrons plus en détails dans le chapitre consacré au cadre théorique de cette recherche, implique entre autres une dimension de mathématisation et de validation que les situations combinatoires permettent de travailler (Kapur, 1970 ; Powell, 2003). Une telle perspective mettant l'accent sur le développement de la modélisation à partir de problèmes de dénombrement s'inscrit bien dans le nouveau programme de

[16] Il s'agit des principes de la multiplication et la somme ainsi que du principe dit «du berger». Ces principes sont définis à la page 66 du chapitre 2.

mathématique du premier cycle de l'école québécoise dans la mesure où par exemple avec la compétence à résoudre une situation problème (compétence 1), deux des composantes de celle-ci évoquent les dimensions de mathématisation et de validation que nous avons explicitées précédemment, soit « représenter la situation problème par un modèle mathématique » et « valider la solution » proposée (MELS, 2003, p. 240)[17]. En somme, nous privilégions une approche qui permet le développement de la modélisation au moyen de problèmes de dénombrement exigeant très peu de prérequis notionnels (Kapur, 1970 ; Sriraman, 2004).

Dans la section suivante, nous nous penchons sur le développement d'une telle intervention visant le développement de la modélisation chez les élèves et ce au moyen de problèmes de dénombrement, et sur la manière dont nous envisageons ce développement. Une telle élaboration ne peut en effet, selon nous, être envisagée par le chercheur seul, sans la collaboration des praticiens. Nous justifierons pourquoi.

### 1.6 Perspective adoptée pour approcher le développement de scénarios d'enseignement visant le développement de la modélisation au premier cycle du secondaire

L'élaboration de scénarios d'enseignement mettant l'accent sur l'exploitation de problèmes de dénombrement et le développement du processus de modélisation chez les élèves exige non seulement une perspective sur la conceptualisation de ces problèmes ainsi que sur le travail de modélisation par les élèves (nous reviendrons sur ce dernier point dans le chapitre suivant) mais elle oblige aussi le chercheur à préciser la posture qu'il adopte dans cette construction vis à vis les praticiens (concernés par

---

[17] Le tableau 3.1 aux pages 97 et 98 du chapitre portant sur la méthodologie met bien en évidence les liens entre les étapes du processus de modélisation (après que ce processus ait été précisé au cadre théorique) et les composantes de la compétence à résoudre une situation problème. Ce tableau justifie la pertinence pour le milieu scolaire de s'intéresser au développement de la modélisation. On voit bien sur cet exemple la pertinence du style inductif repris dans cette thèse : le lien modélisation/compétence à résoudre des situations problèmes est abordé dans cette problématique pour montrer la pertinence de travailler la modélisation et les problèmes de dénombrement, il est précisé sur le plan conceptuel au chapitre 2, et explicité sur un plan méthodologique pour justifier son intérêt pour le milieu scolaire.

cette expérimentation). Pour situer le lecteur par rapport à notre façon d'envisager l'élaboration de situations d'enseignement visant le développement de la modélisation, nous présenterons d'abord différentes perspectives sur le rôle des enseignants dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques, ce qui nous amènera ensuite à indiquer quelques raisons qui justifient pour nous la nécessité d'impliquer les enseignants dans la conceptualisation et l'analyse de ces situations d'enseignement.

### *1.6.1 Différentes perspectives sur le rôle de l'enseignant dans la construction de situations/scénarios d'enseignement en mathématiques*

À travers les recherches en didactique des mathématiques se dégagent différentes perspectives sur le rôle des enseignants dans l'élaboration de situations d'enseignement. Prenant appui sur le portrait global que peint Bednarz (2001) sur les recherches en didactique des mathématiques menées en France, Italie, aux Pays-Bas et au Québec, nous pouvons distinguer différents statuts de l'enseignant dans ces recherches.

Dans certaines de ces recherches, comme c'est le cas pour quelques travaux de didacticiens français des mathématiques, l'enseignant, par le biais d'une entrée récente sur les pratiques d'enseignement, est un objet d'étude. Dans le cas de la construction de séquences d'enseignement, celui-ci apparaît souvent exclu du champ de réflexion des didacticiens. Les ingénieries didactiques sont conçues par les chercheurs sur la base d'analyses préalables et a priori [18] qui pour l'essentiel accordent peu de place à l'enseignant (Artigue, 1988). Ces ingénieries éclairent peu sur le rôle possible de l'enseignant dans l'expérimentation de ces ingénieries dans la

---

[18] De telles analyses portent sur les interactions potentielles entre l'apprenant et le savoir mathématique et ce dans un «milieu» qui comprend tous les objets matériels ou symboliques via lesquels vont s'organiser les interactions avec le savoir et d'autres apprenants (Brousseau, 1998). Dans deux articles récents, Artigue (2002a et 2002b) montre que les recherches didactiques au niveau du lycée et de l'université questionnent le concept d'ingénierie en mettant en cause, entre autres, les limites des interactions a-didactiques, la médiation de l'enseignant pouvant faire évoluer le milieu a-didactique ou les interactions avec ce milieu.

classe. Toutefois, dans la théorie des situations didactiques de Brousseau (1986, 1998), il y a un travail qui porte sur l'enseignant dont l'action en classe est l'objet d'efforts de théorisation (comme dans les phases d'institutionnalisation sur lesquelles nous reviendrons plus loin dans ce chapitre, voir note de bas de page 43). Comme on le voit, dans ce type de recherches en didactique des mathématiques, l'enseignant et son action en classe est l'objet de tentatives de théorisations, il est toutefois quelque peu évincé du processus de conception des ingénieries[19]. Il se pose alors la question dans ce cas de la pertinence pour les enseignants des savoirs didactiques développés par les seuls chercheurs.

Contrairement aux recherches précédentes, d'autres conçoivent l'enseignant comme un acteur ayant un rôle à jouer dans la construction des savoirs didactiques élaborés, et ce rôle n'est assurément pas à l'extérieur mais au cœur du processus. Ainsi, certaines recherches en didactique des mathématiques en Italie, proches de la recherche-action, perçoivent l'enseignant comme un co-chercheur prenant activement part à toutes les phases de la recherche. Dans le même sens, les travaux de recherche développés par Fiorentini (2008) au Brésil placent l'enseignant au cœur de la construction de curriculums ancrés en contexte. Dans une telle perspective, l'enseignant est potentiellement le meilleur chercheur (Hawkins, 1973), celui dont l'intervention longitudinale et réflexive permet le mieux d'observer, de saisir la complexité de la réalité de la classe. Retraçant l'évolution de la didactique des mathématiques en Italie, Arzarello et Bartolini Bussi (1998) rappellent le rôle déterminant joué par les enseignants dans ce qu'ils désignent par le courant de l'innovation, un courant né au départ des préoccupations des enseignants. En Italie, la collaboration entre des enseignants et des mathématiciens intéressés par les questions

---

[19] Des ingénieries récentes, comme celle conçue par Sauvegrain dans le domaine des activités physiques et sportives (cité dans Artigue, 2002b), montrent que la prise en compte de l'enseignant permet de combler certaines des limites de l'analyse a priori. Artigue (200b) estime que l'évolution de la théorie des situations didactiques offre des outils didactiques qui permettent des ingénieries plus proches des pratiques des enseignants.

d'enseignement ainsi que des didacticiens des mathématiques a permis la naissance d'un mouvement original ayant pour objet l'innovation elle-même : «la recherche pour l'innovation». Dans ce mouvement, des opportunités de travail collaboratif sont données aux enseignants qui y déploient leurs compétences professionnelles (Arzarello et Bartolini Bussi, 1998).

Un autre courant de recherche en didactique des mathématiques à analyser, pour ce qui est de la position qu'y occupent les enseignants, est le courant hollandais né sous l'impulsion de Freudenthal et plus connu sous le nom de Realistic Mathematics Education RME (pour plus de précisions sur la RME voir le chapitre suivant, la section 2.1 sur modèles et modélisation). Dans la RME, les didacticiens des mathématiques sont engagés dans des recherches-développement et ce dès le début des années soixante dix. Dans ces recherches, les enseignants sont impliqués dans l'évaluation et la validation des situations d'enseignement développées (Gravemeijer, 1999). Il y a donc une prise en compte à travers eux des conditions de leurs interventions et ce pour déterminer la validité des produits et des théories spécifiques générés. Mais, par comparaison au mouvement italien de recherche pour l'innovation, nous pouvons remarquer que les enseignants ne sont pas des co-chercheurs et peuvent être absents de certaines phases des recherches-développement, surtout lors de la phase initiale de conception des activités ou situations d'enseignement.

Une dernière perspective sur laquelle nous nous attarderons est celle développée à travers les recherches collaboratives en didactique des mathématiques menées au Québec par Bednarz et ses collaborateurs (Bednarz, Poirier, Desgagné et Couture, 2001 ; Bednarz, Desgagné, Diallo et Poirier, 2001). Dans ces recherches qui visent la production de savoirs didactiques pertinents pour la pratique, une place centrale est accordée à l'enseignant dont les perspectives sur l'enseignement et les situations d'enseignement conçues sont prises en compte dans le processus de la recherche, sans toutefois faire de lui un chercheur[20].

En somme, eu égard à la place des enseignants dans les recherches en didactique des mathématiques que nous venons de passer en revue se dessine un continuum avec deux pôles extrêmes : un premier pôle où les enseignants ne sont pas des acteurs centraux dans la conception de situations d'enseignement et un second pôle où les enseignants sont des co-chercheurs prenant part à toutes les étapes de la recherche. Entre ces deux pôles que nous avons esquissés, nous pouvons envisager une variété d'approches de recherches en didactique des mathématiques dans lesquelles l'enseignant est plus ou moins intégré à la recherche. Dans ce qui suit, nous exposons dans le cadre de notre recherche les raisons pour lesquelles nous estimons qu'il faut impliquer les enseignants dans la conceptualisation des situations d'enseignement visant le développement de la modélisation chez les élèves.

### *1.6.2 Quelques raisons pour impliquer les enseignants dans la conceptualisation même des situations d'enseignement en mathématiques*

À propos de la conception de situations d'enseignement (élaboration d'activités, de problèmes, de stratégies d'enseignement, etc.), comme nous l'avons vu précédemment, plusieurs approches sont possibles. Parmi celles-ci, une approche consiste pour les chercheurs à élaborer eux-mêmes des situations riches au plan des apprentissages, sur la base de certains savoirs didactiques et à les proposer ensuite aux enseignants pour qu'ils les expérimentent ou pour qu'ils s'en inspirent dans leurs

---

[20] Dans la recherche collaborative, le chercheur assume le volet de la recherche et les enseignants n'ont pas à faire de la recherche au sens formel, sauf si faire de la recherche s'inscrit pour eux dans un projet de formation ou de développement professionnel. Toutefois, le chercheur doit se faire l'écho du point de vue des enseignants aux différentes étapes de la recherche, que ces derniers y prennent directement part ou non. Le chercheur dans la recherche collaborative admet que même si le praticien peut développer une grande «sensibilité théorique», il n'est pas formé à porter le chapeau du chercheur qui, en revanche, peut développer une forte «sensibilité pratique»; ce qui l'amène à refléter le plus authentiquement possible la perspective du praticien, surtout si ce dernier venait à ne pas participer à l'analyse du matériau engrangé à certaines étapes de la recherche.

interventions. Cette approche caractérise les recherches didactiques menées sur l'enseignement de la combinatoire comme celle de Batanero et al. (1994) et dans lesquelles les enseignants n'ont qu'un rôle en aval, une fois que les chercheurs ont fini d'élaborer les situations qu'ils leur proposent ensuite d'essayer, d'expérimenter. Il se pose alors la question de la viabilité de ces situations d'enseignement qui souvent posent problème dans la pratique (Artigue, 1990 ; Arsac, Balacheff et Mante, 1992), ou ne sont pas tout simplement reprises dans la pratique par les enseignants. En effet, les enseignants compte tenu de leurs contraintes (pédagogiques et institutionnelles), de leurs savoirs pédagogiques professionnels (Shulman, 1986) se réapproprient ces situations, les modifient, et des fois au grand dam des chercheurs (Bednarz, Poirier, Desgagné et Couture, 2001).

Une autre perspective sur la construction de situations d'enseignement et qui permet de dépasser les limites de l'approche précédente consiste, dès le départ, à impliquer les enseignants dans la conceptualisation de ces situations, en intégrant leurs «points de vue de praticiens, leurs savoirs d'expérience, leurs contextes particuliers d'intervention, leurs routines d'interprétation et d'action, leurs contraintes» (Bednarz, Poirier, Desgagné et Couture, 2001, p. 43). Nous nous inscrivons dans une telle approche où les perspectives des enseignants sont essentielles dans la construction des situations d'enseignement visant le développement de la modélisation, car pensons-nous, les enseignants ont sur leur pratique une compréhension agissante qui éclaire sur la viabilité des situations proposées, sur leur réalisation en action, sur ce qu'ils y perçoivent (Bednarz, Poirier, Desgagné et Couture, 2001). Plus précisément dans le cas de cette recherche, les perspectives des enseignants sont essentielles dans la conception des situations de dénombrement utilisées pour développer chez les élèves le processus de modélisation et dans l'enseignement qui va être mis en place pour instaurer dans la classe, ce que nous nommerons par la suite une « culture de modélisation » (Tanner et Jones, 1994)[21] qui permet aux élèves de comprendre les enjeux dans une activité véritable de modélisation, de s'entendre sur quelques règles de fonctionnement (au cœur par exemple d'une pratique qui cherche à mettre en place une communauté de validation). Comme on l'entrevoit, l'animation de ces activités en classe (pour développer le processus de modélisation) interpelle les enseignants qui ont forcément une idée de ce que veut dire résoudre un problème en mathématiques, modéliser (par exemple, ce que veut dire valider, un aspect du processus de modélisation sur lequel nous reviendrons dans le chapitre 2). Plus globalement, les enseignants disposent sur les situations d'enseignement en mathématiques de ce que Bednarz et al. (2001) nomment des ressources interprétatives, plus ou moins structurées mais éclairées, qui aident le chercheur à comprendre le devenir de ces situations dans la pratique. Cette compétence en contexte (Giddens, 1987) nous apparaît centrale pour comprendre la restructuration de ces situations en pratique. Dans le même ordre d'idée, Dubet (1994) indique que les acteurs sont «dans une certaine mesure des experts en ce sens qu'ils ont accumulé une connaissance, une "sagesse", une information relative aux mécanismes intimes de l'action» (p. 234) que n'a pas toujours le chercheur.

### *1.6.3. Retour sur le problème*

Cette problématique nous a conduit, nous l'avons vu antérieurement, à nous positionner, d'une part, en regard de l'enseignement usuel de la combinatoire, dont nous avons montré les limites, et à nous orienter vers une approche d'enseignement allant davantage dans le sens de l'exploitation de problèmes de dénombrement et visant le développement du processus de modélisation par les élèves. Elle nous a conduit, d'autre part, à préciser la manière dont nous nous positionnions pour aborder cette élaboration. Le regard croisé du chercheur et de l'enseignant dans la conception

[21] Nous reviendrons par la suite, dans le chapitre 2, sur ce cette culture de modélisation et ce rôle central de l'enseignant en regard du processus de modélisation et d'une culture de modélisation.

de situations d'enseignement visant le développement de la modélisation chez les élèves, leur réalisation en classe et le retour sur celles-ci est dans notre cas central pour mieux comprendre le potentiel qu'elles présentent ainsi que leur viabilité dans la pratique.

À la base de la conceptualisation des problèmes combinatoires, il y a l'idée pour le chercheur d'élaborer des situations visant le développement de la modélisation, en prenant en compte la complexité d'un tel processus ainsi que les défis qu'il peut représenter dans l'enseignement effectif. Des situations et séquences existent sur la combinatoire (Glaymann et Varga, 1975; Batanero, Godino et Navarro-Pelayo, 1994) qui fournissent un matériau pour concevoir des situations fécondes en terme de modélisation. Cependant, ces situations, pour l'essentiel élaborées par les chercheurs pour les apprentissages potentiels qu'elles favorisent chez les élèves (Varga et Dumont, 1973; Glaymann et Varga, 1975), en tenant compte de variables didactiques isolées par ces derniers (Batanero, Godino et Navarro-Pelayo, 1994, 1997; Fischbein et Gazit, 1988), n'ont pas été regardées sous l'angle de leur potentiel et vraisemblance pour l'enseignant. Que peut ici apporter le regard croisé des enseignants et des chercheurs sur ces problèmes de dénombrement et le choix des situations à la base du processus de modélisation? Et sur le processus de modélisation lui-même par les élèves?

D'autre part, une approche centrée sur le développement du processus de modélisation chez les élèves risque fort d'être confrontée au défi d'installer dans la classe une *culture de modélisation* (Tanner et Jones, 1994). En effet, pour s'engager dans une activité véritable de modélisation les élèves doivent en cerner les enjeux (entre autres la production et la validation de construits provisoires), mais surtout s'entendre sur quelques règles de fonctionnement qui facilitent le remue-méninge initial, l'expression de conjectures, le recours libre mais justifié à différentes représentations, la délibération, la validation par les pairs. Là encore, les perspectives des enseignants sont à prendre en compte pour mieux comprendre les défis que pose cette installation et ce développement dans la classe, les éléments possibles à l'appui, les difficultés.

Ce qui précède nous amène donc à considérer le point de vue des enseignants et des chercheurs comme des éléments clés à considérer pour éclairer l'élaboration et l'exploitation en classe de problèmes de dénombrement visant le développement du processus de modélisation. La contribution de la didactique praticienne et de la didactique de recherche à cette construction nous apparaît en effet porteuse pour cerner des problèmes et une exploitation de ces problèmes non seulement fécondes sur le plan des apprentissages, mais également viables en contexte de pratique. À cette étape, cette réflexion reste toutefois théorique et demande à être davantage documentée sur un plan empirique, en mettant en évidence l'éclairage nouveau qu'apporte le regard de ces deux types d'acteurs sur ces problèmes et leur exploitation. Les objectifs que nous poursuivons dans cette recherche s'inscrivent dans une telle perspective.

## 1.7 Objectif de recherche

Cette recherche est donc centrée sur l'analyse de l'élaboration conjointe (mettant à contribution didactique de recherche et didactique praticienne) de scénarios d'enseignement s'articulant sur l'exploitation de problèmes de dénombrement et visant le développement de la modélisation chez les élèves du secondaire. Plus spécifiquement, notre objectif principal de recherche est d'analyser les contributions qu'enseignant et chercheur apportent à l'élaboration, la réalisation et à l'analyse de situations d'enseignement visant le développement de la modélisation chez les élèves du premier cycle du secondaire, plus précisément sous l'angle :

- des problèmes de dénombrement élaborés ensemble et qui s'inscrivent dans le développement de la modélisation;
- du processus de modélisation par les élèves en lien avec ces problèmes et leur exploitation;

- de l'enseignement visant le développement de ce processus.

Le chapitre 2 qui suit est consacré au cadre théorique de cette recherche. Nous y revenons, entre autres, sur les concepts de modèles et de modélisation, et sur les concepts de didactique praticienne (Martinand, 1992) à la base des contributions susceptibles d'être mobilisées par les acteurs dans cette construction conjointe.

# CHAPITRE II

# CADRE THÉORIQUE

## 2.1 Introduction

Rappelons que notre objectif principal de recherche est d'analyser les contributions qu'enseignant et chercheur peuvent apporter à l'élaboration et à l'analyse de situations d'enseignement visant le développement de la modélisation chez les élèves du premier cycle du secondaire. L'enjeu dans cette recherche étant la négociation et la constitution d'un espace réflexif dans lequel il s'agit de faire rencontrer le sens que le chercheur construit avec celui de l'enseignant et ce à propos des problèmes choisis à la base du processus de modélisation, des scénarios élaborés autour de ces problèmes, du processus de modélisation par les élèves et de l'enseignement visant le développement de ce processus de modélisation.

Dans le présent chapitre, nous indiquons quelques balises théoriques qui éclairent sur les cadres de référence et les ressources susceptibles d'être mobilisés ou d'intervenir dans la co-construction entre enseignant et chercheur de ces situations et leur analyse. Pour cela, dans un premier temps, nous définissons les concepts de modèle et de modélisation susceptibles de servir de balises au chercheur dans ses interventions. Ensuite, dans un second temps, nous nous attardons sur les concepts de didactique praticienne (Martinand, 1992), de savoirs d'expérience, de routines et de rationalité pratique qui renvoient à la pratique de l'enseignant, à son cadre de référence construit en contexte et à partir duquel il oriente et contrôle son intervention. Ces concepts pourraient s'avérer porteurs pour l'analyse des contributions de l'enseignant dans cette co-construction.

## 2.2 Les concepts de modèles et de modélisation : ou un pan du cadre de référence du chercheur dans cette construction

### *2.2.1 Le concept de modèle*

#### 2.2.1.1 Qu'entend-on par modèle dans l'activité mathématique?

En mathématiques et en sciences où le terme de modèle est apparu (plus précisément dans les sciences physiques), il existe plusieurs acceptions du mot. Ainsi, en sciences un modèle évoque soit des images, des schémas, des constructions théoriques ou des formes mathématisées (Dupin, 1995) : par exemple, le squelette d'une molécule chimique, le modèle hydraulique de la circulation sanguine, le modèle mathématique d'évolution d'une population de lapins, etc. À la suite d'Astolfi et de Drouin (1992), Dupin (1995) voit trois sens dans le terme de modèle : «l'image, privilégiant l'aspect figuratif du modèle; la théorie, mettant en avant le côté construit du modèle, par opposition au côté empirique; la mathématisation, qui retient en premier lieu la dimension formelle» (p. 248). Ces trois sens se retrouvent à travers les exemples de modèles que donne Van Den Heuvel-Panhuizen (2003)[22] : matériaux, croquis, opérations (comme la soustraction répetée), schèmes[23], diagrammes,

---

[22] Van Den Heuvel-Panhuizen s'inspire du courant Realistic Mathematics Education (RME). La RME est une perspective en didactique des mathématiques qui a vu le jour en Hollande sous l'impulsion de Hans Freudenthal. Cette approche particulière remonte au début des années soixante dix lorsque Freudenthal et ses collègues en jetèrent les bases dans ce qui allait devenir plus tard le Freudenthal Institute, l'IOWO (Instituut *Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs*, qu'on pourrait traduire par Institut de développement en didactique des mathématiques). Basée sur l'idée de Freudenthal (1977) que les mathématiques pour avoir une valeur humaine doivent être connectées à la réalité, rester proches des enfants et être utiles à la société, l'utilisation de contextes réalistes est caractéristique de l'approche hollandaise. Toutefois le terme réaliste, sans nier l'importance de rattacher les mathématiques à la vie de tous les jours, renvoie plus en hollandais à une intention, celle de proposer aux élèves des situations qu'ils puissent s'imaginer (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Cette précision est importante quand on pense à la polysémie en français du terme «réaliste». Dans la perspective donc de la RME, un contexte réaliste n'est pas nécessairement une situation de la vie réelle, il peut aussi s'agir d'un contexte imaginaire ou mathématique aussi longtemps qu'un tel contexte est «réel» pour les élèves.

[23] Le mot schème, plus précisément *schème-d'action*, est employé ici au sens de Piaget et Von Glasersfeld. Comme le résume si bien Von Glasersfeld (1994), un schème peut être décrit de la façon suivante : le sujet reconnaît une situation et exécute l'action qu'il a associée à cette situation, en s'attendant à ce que cette action produise le résultat auquel cette action a menée dans des expériences passées. Les schèmes, selon toujours Von Glasersfeld, forment la base de la construction des concepts

symboles sont tous considérés comme des modèles. Chevallard (1989) quant à lui définit le modèle mathématique d'un système[24] (système qui peut être mathématique ou non) comme l'ensemble des relations entre les différentes variables par lesquelles on découpe ce système dans le domaine de réalité où il nous apparaît.

Essentiellement, un modèle est donc une construction de l'esprit à partir d'un objet, phénomène ou système auquel il se substitue «pour l'ensemble des opérations intellectuelles qu'on peut effectuer sur ce dernier (déduction, induction, analyse, synthèse, application).» (Host, 1980) Comme construit intellectuel le modèle pose la question de sa relation à l'ordre de réalité dont il cherche à rendre compte. Dans bien des cas, le modèle dans sa construction implique une opération de sélection, une certaine discrimination, le choix de paramètres ou de caractéristiques essentiels. En ce sens, un modèle est aussi un construit simplifié (Caron et Muller, 2005). Comme l'indique Dupin (1992), «la science construit un modèle en découpant dans l'extrême complexité du réel des aspects limités, définissant les limites de validité du modèle.» (p. 249). Chevallard (1989) estime que « le modèle n'est pas à proprement parler une copie ou une reproduction du réel, mais un ajout au réel, une construction artificielle, mise en relation d'une manière déterminée, supposée adéquate, avec le réel» (Chevallard, 1989, p. 60). Entre la situation de départ et le modèle mathématique de cette situation, il y a un modèle intermédiaire que certains auteurs (Blum et al., 2002; Maaβ, 2005) désignent par le terme de *modèle réel* (non mathématisé) et qui dépend des connaissances, intérêts et choix du modéliste.

En somme, nous pouvons considérer deux catégories de modèles : des modèles externes (tels des matériaux, croquis, diagrammes, symboles, des concepts ou structures mathématiques) et des modèles internes (par exemple, des schèmes, des

et de tout ce qu'on peut abstraire en réfléchissant sur les actions et les opérations mentales qu'on exécute.

[24] Un système tel qu'il en parle est l'équivalent d'un phénomène, d'un problème ou d'une situation.

théories, des opérations)[25]. Toutefois, ces deux catégories ne sont pas exclusives. Dans la section qui suit nous présentons les caractéristiques et fonctions des modèles dans l'apprentissage et dans l'enseignement des mathématiques.

2.2.1.2 Modèles et apprentissage des élèves : différentes caractéristiques et fonctions des modèles

Fischbein (1987) estime que les modèles sont importants d'un point de vue cognitif, en lien avec l'apprentissage. En effet, pour lui, chaque fois qu'une personne est confrontée à une notion ou situation difficilement accessible, elle a tendance, de façon consciente ou non, à fabriquer des substituts intuitivement plus accessibles de cette notion ou situation. Fischbein appelle ces substituts, explicites ou implicites, des modèles intuitifs. Un modèle intuitif est explicite s'il est délibérément utilisé ou construit pour faciliter la recherche d'une solution (tels les graphes et graphiques, les diagrammes, les histogrammes, etc.). Toutefois, les modèles sont souvent construits spontanément et utilisés tacitement en lien avec une certaine réalité : de tels modèles sont implicites (Fischbein, 1987). Plusieurs modèles intuitifs sont basés sur des éléments graphiques standards et généralement désignés par le terme de modèles diagrammatiques (par exemple, des diagrammes de Venn, arbres de choix, courbes de fonctions).

Fischbein introduit une distinction entre modèle intuitif et modèle abstrait. Un modèle abstrait d'une situation "concrète[26]" est l'expression directe ou renvoie directement à celle-ci. Par exemple, la fonction quadratique $s = \frac{1}{2}at^2$ est un modèle

[25] À la page 43, suite à la revue des travaux de Fischbein en lien avec le concept de modèles, nous indiquons d'autres exemples de modèles vus à la fois comme représentations internes et externes.

[26] Les notions d'abstrait et de concret sont difficiles à distinguer. À ce propos Freudenthal (1991) indique que la différence entre les deux est une question de familiarité. En effet, le mathématicien est tellement habitué à manipuler certains objets mathématiques (par exemple la fonction quadratique) que ces derniers finissent par devenir concrets pour lui alors que l'étudiant qui les aborde pour la première fois dans son cursus les conçoit comme très abstraits.

abstrait du mouvement accéléré dans la mesure où la connaissance de l'accélération permet de déterminer la distance parcourue par un corps dans un intervalle de temps donné. Pour Fischbein (1987) la solution obtenue dans le système abstrait est valide pour le phénomène concret correspondant et comme telle est un outil essentiel de prévision d'événements liés au phénomène concret.

Par opposition au modèle abstrait, un modèle intuitif est essentiellement de nature sensorielle et peut être perçu, représenté, manipulé comme toute autre réalité concrète. Par exemple, pour représenter des grandeurs vectorielles comme les forces, des segments fléchés sont utilisés. Par conséquent, un modèle intuitif n'est pas nécessairement une expression directe d'une certaine réalité. Selon Fischbein, bien souvent, un modèle intuitif est basé sur une interprétation abstraite de cette réalité (le vecteur force renvoie au concept de force qui est une certaine interprétation des réalités physiques).

Une deuxième dichotomie que propose Fischbein est celle entre modèle analogique et modèle paradigmatique. Un modèle est analogique dans la mesure où il présente plusieurs similitudes avec la situation de départ, même si le modèle et l'original appartiennent à des systèmes conceptuels distincts. Par exemple, la notion de courbe continue est un modèle analogique géométrique pour le concept de fonction continue et, l'interprétation géométrique des nombres complexes est un modèle analogique pour ces nombres que les mathématiciens pendant longtemps qualifiaient de "complexes" ou d'"imaginaires". Enfin, un dernier exemple de modèle analogique est le modèle de l'égalité mathématique conçue par les élèves comme un processus avec un input et un output [27]. Par contre dans le cas des modèles

[27] Fischbein cite le travail de Kieran (1981) sur le sens que les élèves donnent à l'égalité mathématique. C'est parce que les élèves conçoivent l'égalité comme mettant en jeu un input (avant le signe d'égalité) et un output (après le signe d'égalité), qu'ils ont du mal à admettre l'égalité 10=3+7 ou l'égalité 3+7=6+4. Donc le modèle analogique non réversible de l'input-output est à l'origine de certaines des difficultés des élèves avec le concept d'égalité mathématique (la symétrie de l'égalité en particulier, l'acceptation de l'égalité comme équivalence centrale en algèbre).

paradigmatiques, le modèle est un cas particulier considéré comme représentatif d'une classe plus globale. Pour montrer la différence entre la notion de paradigme et celle plus abstraite de classe, Fischbein recourt au terme *eau*. Ce dernier représente chez certains enfants seulement un modèle paradigmatique pour les *liquides*, en ce sens que l'eau est le liquide qui leur est le plus familier, le plus représentatif[28]. Un modèle paradigmatique est donc une sous-catégorie tacitement utilisée par un sujet comme représentative de toute la catégorie en question. Le paradigme définit alors pour le sujet, intuitivement, la catégorie ou classe d'objets considérée. Fischbein (1987) rappelle que la plupart des concepts mathématiques sont définis sur la base de modèles paradigmatiques et ces derniers induisent des généralisations tacites qui peuvent à l'occasion se révéler inappropriées.

Une dernière variété de modèles que Fischbein (1987) considère ce sont les modèles phénoménologiques ou *p-prims*[29] qu'il emprunte à DiSessa (1983a et 1983b). Un p-prim est une «théorie» qui explique ou justifie, pour un individu donné, une classe entière de phénomènes. Selon Fischbein (1987), à la différence des modèles paradigmatiques qui ont une fonction définitoire, les modèles phénoménologiques sont explicatifs. Fischbein donne l'exemple suivant : à la question de savoir pourquoi un objet lâché tombe, un élève peut répondre que c'est dû à la lourdeur. Dans la conception de cet élève, l'argument de la «lourdeur» est une propriété intrinsèque des objets qui peut expliquer pourquoi ceux-ci tombent ou pourquoi un objet lourd tombe plus vite qu'un plus léger, etc. Il s'agit donc d'une «notion primitive» comme celle de «taille», de «raideur», etc. Un modèle phénoménologique est alors une sorte de théorie « pratique » qui facilite l'interprétation conceptuelle d'un certain ordre de phénomène, théorie qui peut se révéler être une intuition géniale, mais qui parfois représente un obstacle à une compréhension appropriée du phénomène à l'étude.

---

[28] Un exemple cette fois-ci mathématique de modèle paradigmatique : la tangente à un cercle est pour beaucoup d'élèves un modèle paradigmatique du concept de tangente à une courbe.
[29] Pour « phenomenological primitives ».

En somme, une riche caractérisation des modèles se dégage des travaux de Fischbein (1987) qui nous aide à voir que l'élève face à un problème, dans le processus de construction de connaissances, peut avoir recours à différents types de modèles. Ces modèles vont être mobilisés de façon explicite ou implicite par les élèves. Ils peuvent prendre différentes formes : des représentations externes (diagrammes, schémas, symboles...) ou internes (modèles intuitifs, paradigmatiques ou analogiques, p-prims...). À travers cette catégorisation de Fischbein (1987), nous retrouvons l'idée de modèle implicite chez Brousseau[30] (1998) ou la notion de théorème-en-acte chez Vergnaud[31] (1994). Cette dernière va toutefois beaucoup plus loin en précisant différents types de modèles pouvant être construits par les élèves. Par ailleurs, signalons que la conceptualisation de Fischbein englobe deux perspectives sur l'utilisation des modèles : nous qualifierons la première perspective de «scientifique» (voir section 2.2.2.1 avec Bélair, 2004) dans la mesure où les modèles y apparaissent comme des construits résultant d'une activité spécialisée ou scientifique, et la deuxième (qu'on retrouve chez Fischbein, 1987) nous la qualifierons de «commune» en ce sens qu'elle permet de voir les modèles comme le produit d'une activité commune, comme celle par exemple associée à la formation ou au développement de concepts par l'élève. Fischbein (1987) aide donc à clarifier les caractéristiques et fonctions de différents modèles dans la construction de connaissances chez l'élève, des modèles susceptibles d'intervenir dans l'activité de modélisation par les élèves sur laquelle nous reviendrons plus loin.

---

[30] Brousseau indique que lorsque la situation est bien choisie (une situation d'action qui pose problème à l'élève et dont la solution est la connaissance à enseigner, mais aussi une situation qui fournit une rétroaction à l'élève), une dialectique s'établit entre la situation et l'élève qui peut alors s'en construire un modèle implicite. Le modèle implicite est créé lors de la première phase de la théorie des situations appelée la phase d'action, les trois autres étant les phases de formulation, de validation et d'institutionnalisation.

[31] Dans la théorie des champs conceptuels de Vergnaud un théorème en acte est une procédure ou règle que l'élève utilise dans une classe de situations, sans pouvoir toujours les expliciter ou justifier. Les théorèmes en acte ont un champ de validité en dehors duquel ils produisent des solutions erronées.

Une autre perspective sur l'utilisation des modèles dans l'apprentissage et leur caractérisation est offerte par la RME. Un des principes sous-jacent à la perspective promue par la RME est l'importance d'une *réinvention guidée* des mathématiques par les élèves, avec l'objectif de les amener à voir les connaissances qu'ils acquièrent comme leurs propres connaissances et en regard desquelles ils ont une certaine responsabilité (Gravemeijer, 1999). C'est le lieu de préciser que dans la RME il s'agit moins de motiver les élèves en leur proposant des situations issues de la vie de tous les jours que de partir de leur activité mathématique informelle dans laquelle ils se donnent spontanément des modèles pour résoudre les situations qui leur sont proposées, puis de les amener progressivement à faire évoluer ces modèles dits *émergeants* (Gravemeijer, 1999) vers des modèles plus *généraux*. Ainsi, selon Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) qui s'inscrit dans la perspective de la RME comme nous l'avons indiqué précédemment, une des fonctions des modèles dans l'apprentissage est de servir de pont entre un niveau informel où les élèves inventent des stratégies et un niveau plus formel de l'activité mathématique où les modèles sont généralisables. Pour cela, les modèles doivent vérifier au moins deux caractéristiques importantes. D'une part, ils doivent avoir un ancrage dans des contextes réalistes (au sens défini précédemment) et d'autre part, être suffisamment flexibles pour pouvoir être réinvestis dans des situations plus générales ou complexes. Dans ce sens Streefland (1991; 1993) parle du passage du «model of» (les modèles spontanés) au «model for» (les modèles généraux) pour exprimer le fait qu'au début un modèle est créé en lien avec une situation donnée et que plus tard, il peut être généralisé à d'autres situations et devient alors un modèle qui peut être utilisé dans des situations reliées à la situation de départ ou dans de nouvelles situations et peut aussi servir d'outil dans le raisonnement mathématique. Il importe donc pour aider les élèves à progresser entre ces deux types de modèles que les situations qui leur sont proposées puissent être facilement schématisées et généralisables (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

On remarquera que Fischbein (1987), dans le même ordre d'idée que Streefland, parle d'une évolution vers un modèle autonome, ce dernier ayant l'avantage de permettre à un sujet de s'appuyer uniquement sur le modèle pour résoudre différents problèmes en lien avec le problème de départ. Cependant, toujours selon Fischbein, le risque est grand de se laisser «enfermer» par un modèle donné dans le processus même de raisonnement et de tirer à partir des propriétés du modèle des conclusions abusives sur la situation de départ. À titre d'illustration, Fischbein donne l'exemple du modèle intuitif du «point» (une petite «tache» ou un petit «point» sur une feuille) qui nous aide à opérer mentalement avec le concept abstrait de «point». Le modèle intuitif de «point» permet de comprendre aisément une proposition telle «deux points déterminent une droite», mais peut suggérer une interprétation inappropriée du type «plus un segment est grand, plus il a de points[32]». Comme le souligne Fischbein, la représentation utilisée pour un point peut avoir une couleur, une grandeur, une forme mais aucune de ces propriétés ne s'applique au concept formel de segment de droite.

Enfin, pour Dupin (1995) et Gascón (1995), une autre fonction importante d'un modèle est de servir de moyen dans la construction de connaissances sur et à propos d'un problème, d'un phénomène ou d'une situation, mathématique ou non. Ce point sera davantage compris dans la suite de ce travail, lorsque nous exposerons la perspective de Gascón sur la modélisation mathématique. Dans la section suivante, nous nous penchons sur le processus de modélisation que nous avons entrevu dans ce qui précède à travers les différents sens, caractéristiques et fonctions des modèles.

[32] En mathématiques, sur l'ensemble des nombres réels R, les segments $[\;;2]$ et $[\;;8]$ ont le même nombre d'éléments. Une telle propriété, qui se démontre formellement, va à l'encontre des modèles intuitifs de beaucoup d'élèves.

### *2.2.2 Le processus de modélisation*

#### 2.2.2.1 Définition et caractéristiques de la modélisation

Plusieurs recherches en didactique des mathématiques estiment qu'il est important d'offrir aux élèves des opportunités de s'engager dans des activités mathématiques de modélisation qui aident à développer une compréhension plus conceptuelle des mathématiques (Blum et Niss, 1991; Schoenfeld, 1985; 1992). C'est aussi la perspective reprise par le programme actuel de mathématiques au secondaire (MELS, 2003) où la modélisation occupe une place importante en lien avec la résolution de situations-problèmes (compétence 1) ou avec le raisonnement mathématique (compétence 2).

Cependant, nombre de cours et de manuels de mathématiques du secondaire, si l'on en croit certains auteurs, privilégient davantage le travail sur les modèles que sur le processus de modélisation (Burkhardt, 1984; Grenier et Payan, 1998). Dans le cadre de ces cours ou dans ces manuels, les élèves ont le plus souvent à apprendre et à utiliser des modèles, plutôt qu'à *créer*/ construire des modèles (Burkhardt, 1984; Grenier et Payan, 1998). La situation n'est pas différente en combinatoire où dans l'apprentissage comme dans l'enseignement l'accent pour l'essentiel est mis sur les modèles et non sur le processus de modélisation (Grenier et Payan, 1998). Notre approche dans cette recherche est différente dans la mesure où nous privilégions dans l'exploitation en classe de problèmes combinatoires la construction par les élèves de modèles, et donc un processus de modélisation leur permettant de résoudre des problèmes combinatoires, de développer un raisonnement combinatoire et surtout de donner plus de sens aux modèles combinatoires en jeu. Dans ce qui suit, nous définissons et donnons les caractéristiques essentielles du processus de modélisation.

Selon Burkhardt (1981), De Lange (1987) et d'autres, la modélisation comporte une étape de *formulation* complétée par une étape de *validation*[33]. Pour Janvier (1996), la phase de formulation est cruciale et débouche sur la création du modèle par exemple une expression symbolique, un graphique, un diagramme, une table de valeurs résultant d'une simulation sur ordinateur. Pendant la phase de formulation, une situation ou un phénomène est étudié afin de déterminer quelques liens fondamentaux liant les variables caractéristiques du phénomène à étudier (Janvier, 1996). Ces liens découlent souvent d'observations, de mesures, d'hypothèses formulées à propos du phénomène à modéliser ou tout simplement d'un examen réfléchi de la situation à l'étude. La phase de validation quant à elle consiste selon Janvier (1996) à tester la validité du modèle par un retour à la réalité que le modèle est censé représenter afin de préciser au besoin les limites ou le domaine de généralisation du modèle, de raffiner les hypothèses avancées dans la première étape de formulation.

La modélisation apparaît donc comme un processus qui comprend au moins deux phases : 1) durant une phase de formulation, la création d'un modèle sur la base de conjectures ou d'hypothèses et 2) la mise à l'épreuve du modèle durant une phase de validation (Burkhardt, 1981; De Lange, 1987; Janvier, 1996). Dans les écrits (Berry et Davis, 1996; Dossey, McCrone, Giordano et Weir, 2002; Bélair, 2004; Maaβ, 2005) nous trouvons quelques diagrammes (figures 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4) qui illustrent, chacun à leur façon, les phases de formulation et de validation.

---

[33] Ces deux phases du processus de modélisation rappellent deux des trois phases qui caractérisent le processus de mathématisation dans la théorie des situations de Brousseau (1986). Ces trois phases sont la dialectique de l'action, la dialectique de formulation et celle de la validation. La dialectique de formulation renvoie aux échanges écrits et oraux entre élèves à propos d'une situation et qui permettent d'expliciter les modèles implicites construits lors de la dialectique de l'action. Les modèles explicites obtenus sont alors formulés à l'aide de signes et de règles communes, connues ou nouvelles. Dans la dialectique de la validation, l'élève doit convaincre quelqu'un d'autre que le modèle qu'il a construit est valide.

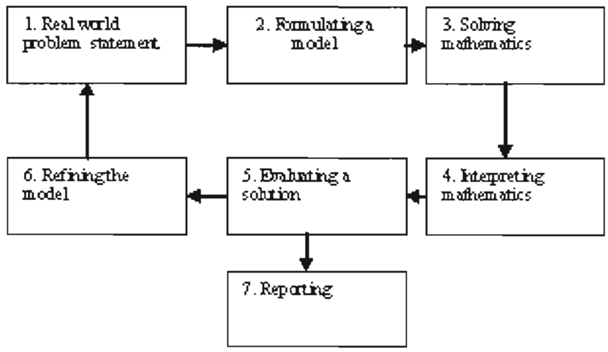



**Figure 2.1 Le processus de modélisation selon Berry et Davies (1996)**

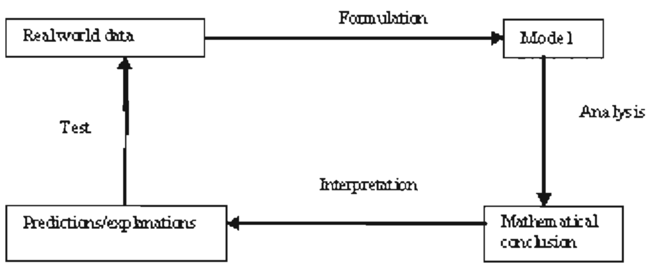



**Figure 2.2 Le processus de modélisation selon Dossey et al. (2002)**

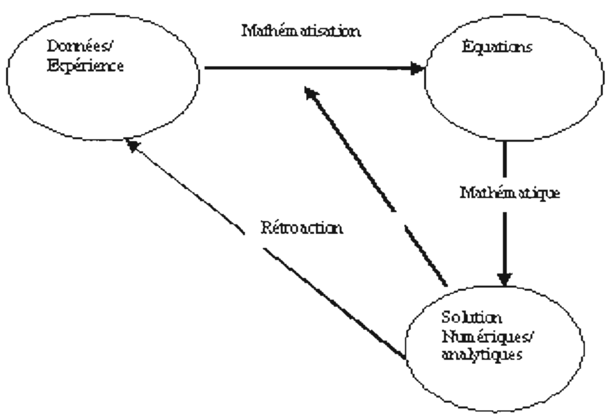
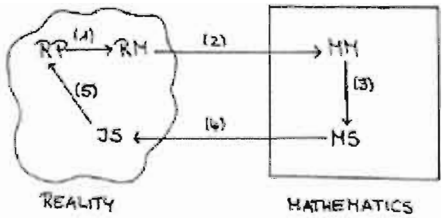



**Figure 2.3 Le processus de modélisation selon Bélair (2004)**




| | |
|---|---|
| Explanation | |
| RP: Real world problem | (1) Simplifying, structuring, idealizing |
| RM: Real model | (2) Mathematizing |
| MM: Mathematical Model | (3) Working within mathematics |
| MS: Mathematical Solution | (4) Interpreting |
| IS: Interpreted solution | (5) Validating |

**Figure 2.4 Le processus de modélisation selon Maaβ (2005)**

Alors que la figure 2.3 illustre le processus de modélisation scientifique tel qu'il apparaît à un mathématicien[34], de l'intérieur de sa pratique professionnelle de mathématicien, les figures 2.1, 2.2 et 2.4 illustrent la perspective de didacticiens des mathématiques qui s'intéressent au développement de la modélisation dans l'enseignement. Sur chacune des figures, le processus de modélisation apparaît comme une boucle pouvant être répétée autant que nécessaire. Alors que les deux premières figures 2.1 et 2.2 sont relativement classiques (séquencées, presque linéaires), les figures 2.3 et 2.4 reflètent des perspectives particulières sur la modélisation. Dans le cas de Bélair (figure 2.3), l'enjeu est la modélisation de systèmes biologiques complexes et la difficulté de la modélisation est surtout dans la dérivation d'un modèle, ce dernier devant être validé par une confrontation avec les données expérimentales. Enfin, soulignons que les deux perspectives précédentes, complémentaires, se distinguent surtout dans leur centre d'intérêt, des variations peuvent être envisagées à l'intérieur d'une même perspective sur la modélisation. Par exemple, dans la perspective didactique, certains didacticiens s'intéressent à la modélisation telle qu'elle apparaît dans la pratique mathématique de mathématiciens (Grenier et Payan, 1998, 2003), d'autres s'intéressent aux élèves et au développement de ce processus de modélisation (Maaβ, 2005; Gravemeijer, 2007). Certains didacticiens comme Grenier et Payan (1998; 2003) s'intéressent davantage aux

[34] Jacques Bélair est professeur de mathématiques à l'Université de Montréal et à l'Université McGill.

conditions et situations[35] permettant de faire vivre aux élèves la modélisation telle qu'elle apparaît à des mathématiciens. Dans notre cas, comme on le verra dans la suite de ce travail, nous nous intéressons davantage à des problèmes mathématiques dans lesquels, à la différence des didacticiens associés à la RME, l'accent est moins mis sur le caractère « réel » de ceux-ci[36].

Quant à Maaβ (figure 2.4), sa perspective sur la modélisation est fortement inspirée par la "Realistic Mathematics Education" (RME) où on parle de *modélisation émergente* («emergent modelling»). Gravemeijer (2007) rappelle que le concept de modélisation émergente est apparu comme une réponse à la problématique du recours fréquent aux «modèles didactiques», c'est-à-dire ces matériaux pour la manipulation ou ces supports visuels utilisés pour rendre plus accessibles aux élèves des concepts mathématiques abstraits, en quelque sorte pour rendre plus «concrètes» des notions

---

[35] Grenier et Payan ont mis au point des « situations recherches » pour la classe (du primaire à l'université) qui sont des situations s'inspirant des problèmes de la recherche mathématique (ou plus globalement s'inscrivant dans une problématique professionnelle). Surtout, ces « situations recherche » ont pour but de permettre aux élèves de construire ce qu'ils appellent des « savoirs transversaux (c'est-à-dire des savoirs intervenant dans de nombreux domaines scientifiques), savoirs qui fonctionnent et se construisent dans des processus tels la modélisation (ou l'argumentation, l'induction, etc.). Dans de telles situations (dans le cas de Grenier et Payan des situations la plupart du temps puisées dans le domaine des mathématiques discrètes), les élèves sont mis en position de chercheur (ils résolvent des problèmes, élaborent de vraies questions) et, c'est la conviction des auteurs, sont mieux préparés aux difficiles transitions institutionnelles (primaire-secondaire, secondaire-université).

[36] Dans une excellente revue des perspectives actuelles sur la modélisation, Kaiser et Sriraman (2006) classifient celles-ci en six approches : la « realistic or applied modelling » (avec les travaux de Burkhardt ; Kaiser, etc.) qui s'intéresse à la résolution/compréhension de « real world problems », au développement de compétences de modélisation ; la « contextual modelling » (avec les travaux de Doerr ; Lesh ; Sriraman ; etc.) qui aborde la résolution de problèmes dans une perspective mettant plus l'accent sur les modèles créés, leurs réorganisations de plus en plus complexes ; la « educational modelling » (avec les travaux de Blum ; Galbraith ; Maaβ ;etc.) dont l'intérêt porte sur la structuration et le développement des processus d'apprentissage, mais aussi l'introduction des concepts, leur développement ; la « socio-critical modelling » (avec un auteur comme Barbosa) qui s'intéresse à une compréhension critique du monde environnant ; la « epistemological or theoretical modelling » (avec des auteurs comme Gascon) dont l'objet est le développement de théories ; enfin, la « cognitive modelling » (avec des auteurs comme Blum ; Borromeo Ferri ) dont l'objet principal est l'analyse de divers processus de modélisation en lien avec différents types de situations de modélisation. À la lumière de cette revue, notre perspective dans cette thèse emprunte à la fois à l'approche contextuelle (contextual modelling), à l'approche éducative (educational modelling) et à l'approche épistémologique (epistemological modelling).

mathématiques jugées trop abstraites. Gravemeijer (2007) souligne que le problème avec ces modèles didactiques est qu'ils ne véhiculent pas aux élèves les significations mathématiques qu'ils sont censés «incarner», d'où les erreurs d'interprétation des élèves. Il s'agit donc, avec la modélisation émergente, de surmonter un tel état de fait par une approche centrée sur le processus dynamique de symbolisation et de modélisation au terme duquel les modèles crées par les élèves peuvent fonctionner comme des modèles didactiques et surtout mieux remplir les finalités poursuivies par ce type de modèles. Dans la RME, la modélisation est vue comme une activité des élèves, un processus de création de modèles en lien avec des situations qu'ils réorganisent progressivement, ces situations ainsi que les modèles les représentant évoluant ensemble durant l'activité de modélisation (Gravemeijer, 2007).

Pour revenir aux phases du processus de modélisation, nous dirons qu'il s'agit, dans la première phase de formulation, de transformer en modèle mathématique une situation mathématique ou non (c'est-à-dire, issue du monde réel), ou encore une expérience contrôlée. À la lumière des figures précédentes, cette phase de formulation (Burkhardt, 1981; De Lange, 1987; Janvier, 1996) se révèle complexe et comporte plusieurs étapes intermédiaires dont le décodage du problème (du phénomène ou de la situation), la sélection des caractéristiques ou variables essentielles devant être prises en compte. À ce propos, rappelons la notion de *modèle réel* défini comme un modèle intermédiaire (non mathématisé) entre la situation de départ et le modèle mathématique de cette situation (Blum et al., 2002; Maaβ, 2005) et qui dépend des connaissances, intérêts et choix du modéliste (l'élève, le scientifique, etc.). Selon Bélair (2004), le moment de la phase de formulation le plus difficile, le plus sous-estimé et le plus imprévisible est la mathématisation. La mathématisation permet, lorsque cela est possible, de transformer le modèle réel en modèle mathématique (une ou plusieurs équations, un graphique mathématique, etc.), en exprimant en termes mathématiques les objets, données, relations, conditions du modèle réel. La figure 2.3 de Bélair indique que la mathématisation est une étape sur laquelle il est possible de revenir à la lumière de la solution obtenue après le traitement mathématique du modèle mathématique. C'est le lieu de souligner la confusion souvent rencontrée entre modélisation et mathématisation, cette dernière n'étant en fait qu'une étape, certes cruciale, du processus de modélisation. Dans la suite, nous reviendrons sur l'étape centrale de la mathématisation et préciserons le sens qu'elle revêt pour nous dans l'enseignement des mathématiques.

Afin d'éprouver et de raffiner au besoin le modèle mathématique obtenu, Bélair (2004) estime qu'il est nécessaire de confronter entre eux la situation et les données de départ, le modèle mathématique et les solutions obtenues après le traitement mathématique du modèle. Selon Blum et al. (2002), mais aussi Bélair (2004), plusieurs boucles de rétroactions sont nécessaires dans la phase de validation. Les figures précédentes du processus de modélisation renvoient à un autre niveau important de validation : celle de l'interprétation donnée aux solutions mathématiques dérivées du modèle par un retour à la situation ou aux données de départ (figure 2.4). Ce qui est jeu avec l'interprétation, ce sont les explications données ou les prédictions faites et qu'il faut en définitive sanctionner ou valider.

Galbraith (1999) considère deux formes de modélisation mathématique : la *modélisation structurée* et la *modélisation ouverte*. La modélisation structurée est un compromis entre situation d'application et situation de modélisation en ce sens qu'elle occulte quelques uns des défis de la formulation de modèles, mais maintient les liens entre les données réelles et les mathématiques utilisées. Dit autrement, dans la modélisation structurée, les mathématiques nécessaires à la formulation du modèle sont plus ou moins suggérées par le contexte, les données de la situation. Par contre, dans la modélisation ouverte, la phase de formulation représente un véritable défi en ce sens que la situation de départ est tout sauf une situation d'application. Il revient alors au modéliste de trouver une structure mathématique appropriée à la situation formulée en termes réels sans références explicites dans son énoncé à de quelconques aspects mathématiques (Brown, 2002).

Certaines des étapes du processus de modélisation font penser au processus de résolution de problèmes. Dans ce qui suit, nous essayons avec Gascón (1995) de voir les liens éventuels entre la modélisation et la résolution de problèmes. Gascón (1995) considère la modélisation mathématique comme une façon possible d'approcher la résolution de problèmes[37] dans l'apprentissage des mathématiques. En rupture avec les paradigmes classiques et le modernisme (note 8), la résolution de problème s'inscrit selon Gascón (1995) dans une activité plus large, celle de modélisation mathématique et qu'il caractérise par les quatre étapes suivantes : 1) formuler des conjectures, des questions sur une situation problématique donnée; 2) délimiter le système sous-jacent à la situation problématique et élaborer un modèle mathématique du système ainsi défini[38]; 3) traiter, travailler mathématiquement le modèle et interpréter les résultats obtenus dans le système modélisé; et enfin 4) énoncer au besoin de nouveaux problèmes que le modèle construit permet d'aborder : de tels problèmes peuvent ne pas s'interpréter en termes du système modélisé. Dans cette

[37] Pour établir les rapports entre la modélisation et la résolution de problèmes (RP), Gascón (1995) présente ce qu'il appelle des formes idéalisées d'interprétation de la RP, formes souvent entremêlées dans les pratiques réelles d'enseignement. Pour le «théoricisme», la RP est une simple application de connaissances. Dans cette perspective, les concepts théoriques sont l'aspect essentiel, la RP étant un aspect secondaire, une mise en application de ceux-ci. Par réaction au théoricisme, le «technicisme» considère que la RP consiste en la résolution de problèmes algorithmiques. Dans le technicisme l'insistance est mise sur les techniques algorithmiques de RP. Gascón (1995) désigne le théoricisme et le technicisme comme des paradigmes classiques, par opposition au «modernisme», la troisième perspective sur la RP qu'il présente, qui envisage la RP comme une activité d'exploration libre, créative de problèmes non triviaux souvent isolés ou décontextualisés. Gascón (1995) estime que ces trois perspectives sont «réductionnistes » en ce sens qu'elles promeuvent l'une des dimensions de l'activité mathématique au détriment des autres. Une dernière perspective sur la RP est le «procédurisme», approche promue par Polya (1957) et qui privilégie les heuristiques de résolution de problèmes. Les problèmes sont regroupés en classes et la RP est une activité guidée par un système de règles heuristiques. Il s'agit donc dans le procédurisme d'aider les élèves à utiliser des systèmes structurés de techniques, les connaissances conceptuelles s'acquérant par la R.P.

[38] À cette étape, selon Gascón, les questions précédemment posées sans grande précision sont reformulées et converties en problèmes mathématiques à l'aide d'un langage et de techniques appropriés.

perspective particulière sur la résolution de problèmes, l'accent est mis sur l'acquisition ou la construction de connaissances à propos des systèmes (mathématiques ou extra mathématiques) modélisés. Les modèles dans l'activité mathématique ne sont ni le point de départ, ni la finalité, mais des moyens dans la construction de connaissances. En outre, Gascón (1995) souligne que les problèmes qui apparaissent dans la quatrième étape du processus de modélisation ouvrent la voie à un champ de problèmes, des problèmes qui surgissent au fur et à mesure du processus et qui ne forment jamais une classe à priori déterminée de problèmes comme avec le procédurisme (note 37). Gascón[39] (1995) considère la modélisation mathématique comme une forme d'interprétation de la résolution de problème qui corrige d'autres formes comme le théoricisme et le modernisme. Dans la même perspective, selon Lesh et Harel (2003), la résolution de problèmes est alors un processus au terme duquel l'important est moins les solutions produites que les modèles construits. Les modèles générés apparaissent comme des connaissances construites en lien avec le système à modéliser. Cette approche de la modélisation est intéressante pour l'apprentissage/enseignement dans la mesure où la modélisation est envisagée comme un processus à la fois de construction de connaissance et de résolution de problèmes.

Dans la section qui suit, nous abordons la modélisation dans l'apprentissage/enseignement des mathématiques.

---

[39] Gascón inscrit sa perspective sur la modélisation mathématique dans l'approche anthropologique de Chevallard (1996). Il utilise surtout la notion de «technique» qui dans cette approche renvoie, dans une institution donnée, aux manières de faire une tâche ou un type de tâche, manières non réductibles à un algorithme. Selon Gascón, le développement interne de techniques peut faire émerger des champs de problèmes qui s'étudient par l'utilisation et surtout la production de nouvelles techniques. L'évolution des champs de problèmes crée le besoin théorique nouveau de créer des théories mathématiques afin de rendre compte du travail réalisé.

2.2.2.2 La modélisation dans l'apprentissage/enseignement des mathématiques

Pour ce qui est de l'intégration de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques, la perspective de Treffers (1987) est éclairante surtout pour la dimension de mathématisation qui est une étape importance de ce processus. Treffers (1987) introduit ainsi deux types de mathématisation: une mathématisation *horizontale* (MH) et une autre *verticale* (MV). Dans la mathématisation horizontale des outils mathématiques sont mobilisés et utilisés pour structurer et résoudre une situation de la vie quotidienne. Par contre, la mathématisation verticale se joue à un niveau purement mathématique. Adoptant la classification de Treffers, Freudenthal (1991) définit la mathématisation horizontale comme le passage du monde réel au monde des symboles et la mathématisation verticale comme un mouvement circonscrit au seul monde des symboles. Ces deux formes de mathématisation sont selon Freudenthal (1991) d'égale importance et devraient être prises en compte dans toute activité mathématique. Treffers (1987) estime que ce qui distingue la RME d'autres approches en didactique des mathématiques c'est l'accent mis simultanément sur ces deux formes de mathématisation. Dans une approche "empiriciste", selon Treffers (1987), l'insistance est sur la mathématisation horizontale, alors qu'une approche "structuraliste" se confine dans la mathématisation verticale (Treffers, 1987). Le sens que prend le processus de modélisation dans la RME est une mathématisation progressive qui permet d'aller d'une mathématisation horizontale (de la situation de départ au modèle mathématique) à la mathématisation verticale (le traitement mathématique du modèle, la généralisation du modèle, la validation du modèle).

Précisant la notion de mathématisation progressive, Freudenthal (1991) indique la progression suivante : $MH \to MV \to MH$ : de la situation concrète vers les symboles qui à la longue deviennent plus concrets. Les modèles mathématiques facilitent donc, comme nous l'annoncions au point II.1.2, le passage vers la mathématisation verticale, le point de départ étant la mathématisation horizontale, c'est-à-dire l'analyse, la structuration et la transformation de la situation à l'étude en un modèle mathématique et ce en fonction des moyens «naturels» ou «spontanés», «informels» des élèves. En effet, pour l'apprentissage de la modélisation, plutôt que d'enseigner une série rigide de règles et de stratégies, les novices que sont les élèves devraient pouvoir recourir librement aux stratégies qui pour eux sont disponibles et dont les possibilités de généralisation se négocient dans la classe avec les pairs ou avec l'enseignant.

C'est à travers les interactions dans la classe et la perception par l'enseignant des caractéristiques importantes de la modélisation mathématique que se négocie une *culture de la modélisation* (Tanner et Jones, 1994). Par culture de modélisation Tanner et Jones renvoient à la négociation dans la classe d'attitudes facilitant un travail axé sur la modélisation. Aussi, ils mettent l'accent sur l'importance pour les élèves dans le développement de la modélisation d'acquérir ces habiletés métacognitives que démontrent les « modélistes experts» (*expert modellers*), telles savoir planifier, contrôler, évaluer. Selon Tanner et Jones (1994), le rôle de l'enseignant est central dans la négociation et le maintient de cette culture de modélisation. Pour notre part, nous ajouterons à la suite de Tanner et Jones (1994), que pour s'engager dans une activité véritable de modélisation, les élèves doivent en cerner les enjeux (entre autres la production et la validation de construits provisoires), mais surtout s'entendre sur quelques règles de fonctionnement qui facilitent le remue-méninge initial, l'expression de conjectures, le recours libre mais justifié à différentes représentations, la délibération, la validation par les pairs. À ce propos, les éléments de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), surtout la notion de "situation de validation", permettent de mieux organiser cette phase de validation dans l'enseignement[40]. Sur cet aspect de la validation, Cobb, Perlwitz et Underwood

[40] On peut aussi penser à la dialectique de la formulation, dans la phase de formulation des modèles.

(1994) parlent d'une «communauté de validation» entre les élèves et l'enseignant, le rôle de l'enseignant étant de socialiser les élèves à cette culture de la modélisation, mais aussi de pouvoir observer les productions d'élèves, de s'en construire une sorte de carte conceptuelle de manière à en tirer partie lors des retours (Bauersfeld, 1994).

En outre, comme le souligne Dupin (1995), la mise en place d'un processus de modélisation dans l'enseignement des mathématiques, surtout dans le cas de situations de modélisation insérées au milieu de moments plus "traditionnels" d'enseignement, pose le problème du contrat didactique qui risque de subir des modifications majeures voire d'être rompu[41] (changement brusque dans le mode de fonctionnement en classe, attentes différentes, etc.). En effet, une dynamique d'intégration de la modélisation suppose plus de temps de recherche et de communication autour des modèles construits, et un écueil éventuel est de voir surgir dans la classe lors de la phase de validation un rejet important de certaines solutions individuelles (Dupin, 1995). Que retenir dans une activité de modélisation? Le modèle? Le processus? Quoi évaluer dans une activité de modélisation mathématique? Selon Dupin (1995), le risque est grand de voir un recours à des modes d'évaluation stéréotypés qui ne testent pas la capacité à développer une démarche de modélisation. Il est à craindre que les élèves comme dans le cas de l'expérimentation que relate Dupin (1995, p. 256) comprennent à travers les évaluations et les exercices qui leur sont proposés que ce qu'il faut apprendre en définitive ce sont les modèles vus.

Une autre question cruciale que soulève Dupin (1995) est la dévolution[42] du problème dans une activité de modélisation qui risque d'être fictive si l'élève ne

---

[41] Le contrat didactique est un ensemble de règles pour l'essentiel implicites qui déterminent les attentes réciproques entre l'enseignant et ses élèves. Le contrat se manifeste surtout lorsqu'il est transgressé et le paradoxe est que pour qu'il y ait apprentissage le contrat doit être rompu ou subir des ajustements. En quelque sorte, les apprentissages ne reposent pas sur un bon fonctionnement du contrat ! Lorsque le contrat fonctionne, c'est comme si aucun partenaire de la situation didactique ne veut prendre le risque de provoquer un conflit qui viendrait perturber les certitudes établies.

[42] La dévolution est un des concepts importants de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998). Il y a dévolution d'une situation d'enseignement ou d'un problème lorsque l'enseignant

s'approprie pas le problème (qui doit être ouvert, mais en même temps accessible pour que les élèves puissent s'y engager). Pour conclure cette section, nous dirons que travailler dans une perspective d'enseignement de la modélisation mathématique renvoie à un processus graduel qui prend appui sur les stratégies informelles des élèves. L'apprentissage de la modélisation mathématique exige une culture spécifique de modélisation et ce afin de faciliter la production et la validation de ces construits provisoires que sont les modèles par les élèves. Une telle culture installe un contrat didactique provisoire qui risque d'être rompu par l'enseignant lors de la phase d'institutionnalisation[43].

Maintenant que la notion de modèle et le processus de modélisation ont été définis, dans ce qui suit nous nous intéressons aux modèles et à la modélisation dans le champ spécifique de la combinatoire.

### *2.2.3 Modèles et modélisation en combinatoire*

#### 2.2.3.1 Modèles combinatoires

Fischbein (1970; 1975; 1987) s'est aussi beaucoup intéressé aux caractéristiques des modèles au sens de représentations externes en combinatoire et probabilités. L'arbre de choix, comme modèle intuitif occupe une grande place dans la réflexion de Fischbein. Selon Fischbein et al. (1970), les arbres de choix peuvent accélérer chez les enfants l'acquisition des opérations combinatoires. Comme modèles intuitifs, les arbres de choix sont pour lui d'un grand apport dans le dénombrement de situations combinatoires simples et surtout, comme représentation

---

parvient à se «décharger» en quelque sorte sur l'élève de l'objectif d'apprentissage. Par le processus de dévolution, l'enseignant rend l'élève responsable de son apprentissage en le plaçant dans une situation ou en le mettant face à un problème qui doit occasionner chez lui une activité non convenue.

[43] Dans les situations d'institutionnalisation, l'enseignant valide les connaissances construites en classe et leur donne le statut de savoirs officiels appartenant au patrimoine mathématique de la classe. L'institutionnalisation ne doit être ni prématurée (au risque de nuire à la construction de sens ou d'entraîner des difficultés d'apprentissage), ni être tardive (au risque de consolider les conceptions inappropriées des élèves).

figurale, ils sont à même de suggérer une sorte de généralité constructive caractéristique du raisonnement récursif. L'arbre de choix est donc pour Fischbein un exemple de modèle explicite qu'il convient de fournir aux élèves pour les aider à comprendre plus vite les arrangements, permutations et combinaisons, mais aussi pour faciliter la résolution de problèmes simples de dénombrement. L'arbre de choix est un cas particulier de graphes qui eux sont l'objet d'étude d'un domaine important des mathématiques, la théorie des graphes. Les arbres de choix sont en effet des graphes non orientés et sans boucles qui dans certains problèmes combinatoires facilitent l'énumération et aident à comprendre le principe multiplicatif qui permet de dénombrer les branches terminales d'un arbre. Un exemple permet d'illustrer ce qui précède :

> **Exemple de problème** tiré de Glaymann et Vargas (1975)
> *De combien de façons peut-on placer quatre personnes autour d'une table?*

Deux questions sont importantes pour la résolution de ce problème : faut-il distinguer les places? Faut-il distinguer entre le voisin de gauche et celui de droite? Pour résoudre entièrement le problème donné, suivant que l'on réponde par oui ou non à l'une des deux questions précédentes, on sera amené à envisager quatre problèmes différents. L'arbre de choix suivant (figure 2.5) donne une idée de la solution dans le cas où la réponse à chacune des questions ci-dessus est oui. Cet arbre de choix illustre le principe multiplicatif[44] qui permet de dénombrer le nombre de branches terminales.

---

[44] Pour la définition du principe multiplicatif, se référer à la page 66.

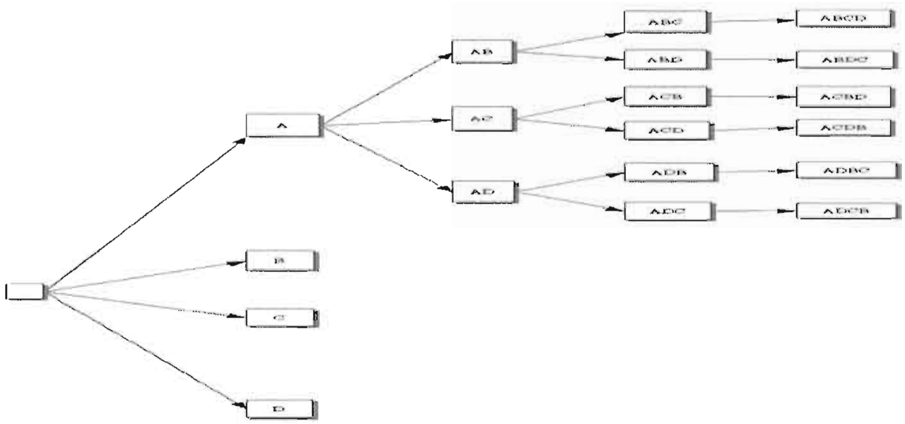



**Figure 2.5 Différentes façons de placer 4 personnes nommées ici A, B, C, D autour d'une table**

Sur cet arbre, chacune des 4 branches principales se ramifie en 3 branches secondaires, chacune de celles-ci se ramifie en 2 branches tertiaires et, finalement, chacune de celles-ci donne une branche terminale : soit au total $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilités dans le cas où on dispose quatre personnes autour d'un table en distinguant à la fois les places et le voisin de droite de celui de gauche. Comme on le voit, sur ce cas parmi les 4 qui permettent de résoudre le problème ci-dessus, l'arbre de choix s'avère un outil de dénombrement efficace mais encore faut-il en comprendre la syntaxe. En effet, les arbres ne sont pas tous pareils, certains sont réguliers comme sur la figure 2.5 alors que d'autres sont irréguliers (toutes les branches d'un même niveau ne se ramifient pas en un même nombre de branches terminales). Comme l'indique Fischbein (1987), il est important que les élèves comprennent les quelques règles de construction de l'arbre de choix et qu'à chaque étape de la génération de l'arbre qu'ils saisissent le sens de l'image obtenue. Ils doivent aussi pouvoir interpréter l'arbre final obtenu en termes de configuration combinatoire.

Grenier et Payan (1998) estiment pour leur part, en partant de la place de cette représentation dans l'enseignement des mathématiques au secondaire en France, que l'arbre de choix est un objet naturalisé, c'est-à-dire un objet qui va de soi et dont on ne trouve aucune définition dans les programmes et manuels des classes inférieures à celles de la première ou de la terminale où on y recourt abondamment. Sans remettre en cause l'importance de l'arbre de choix, soulignons avec Grenier et Payan (1998) que «le comptage direct sur un arbre n'est efficace que pour de petits dénombrements : construire un arbre binaire de profondeur *n*, pour *n*=7 seulement est déjà très coûteux.» (p. 66). Avant d'aborder d'autres types de graphes, revenons rapidement à l'exemple du problème précédent pour indiquer comment le résoudre entièrement.

Pour résoudre entièrement celui-ci, suivant que l'on réponde par oui ou non à l'une des deux questions précédentes (voir page 59), on sera amené à envisager quatre problèmes différents. Le premier cas ayant été vu, les trois autres se résolvent en faisant intervenir un autre principe important en dénombrement : le principe du berger[45] encore appelé principe de la division. La solution complète est 24+12+6+3 = 45 façons différentes de disposer quatre personnes autour d'une table[46]. La solution finale fait enfin intervenir un autre principe de dénombrement, le principe de la somme[47].

À coté des arbres de choix, les *chemins* et *réseaux* sont d'autres variétés de graphes utiles dans le dénombrement de certaines situations combinatoires, comme dans les problèmes de détermination de trajets reliant plusieurs points ou localités, tels l'exemple suivant :

---

[45] Pour la définition du principe du berger, se référer à la page 66.

[46] Étudions chacun des trois cas restants. Si nous distinguons les places mais non le voisin de gauche de celui de droite, nous avons d'après le principe du berger 24/2= 12 possibilités. Si nous ne distinguons pas les places mais seulement les positions relatives, il y a en utilisant le principe du berger 24/4= 6 dispositions. Enfin, si nous ne faisons aucune distinction, 3 possibilités puisque à l'opposé de A se trouve B ou C ou D (en appliquant le principe du berger, il faut diviser 24 par 4 puis par 2).

[47] C'est le principe de la somme qui permet de trouver le nombre de façons de placer 4 personnes autour d'une table en additionnant les nombres obtenus pour chacun des cas exclusifs que nous avons étudié. Pour la définition du principe multiplicatif, se référer à la page 66.

**Exemple tiré de Varga et Dumont** (1973) :
Combien y a-t-il de façons différentes de lire, sur la figure ci-dessous, le nom de la ville de Lorient? (tu dois toujours lire verticalement ou horizontalement, et de gauche à droite ou de haut en bas).

En symbolisant sur la figure 2.6 les sens de lecture autorisés (de gauche à droite et de haut en bas), nous obtenons le réseau de la figure 2.7 qui permet de dénombrer les différentes façons de lire la ville de Lorient en partant de L. En effet, il suffit d'écrire, à côté de chaque point de ce réseau, le nombre de chemins possibles pour accéder à T à partir de L. Il y a 20 façons différentes de parvenir à la lettre T à partir de L et donc 20 façons de lire le nom de la ville de Lorient.

| | | | |
|---|---|---|---|
| L | O | R | I |
| O | R | I | E |
| R | I | E | N |
| I | I | N | T |

**Figure 2.6 La ville de Lorient**

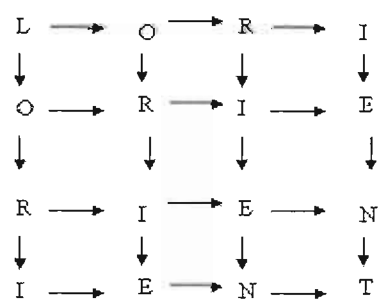



**Figure 2.7 Réseau de «Lorient»**

Enfin, d'autres représentations ou symbolisations des situations combinatoires existent, telles les *suites* de chiffres ou *nombres* et les *suites* de lettres ou *mots*, par exemple dans la situation suivante :

**Exemple tiré de Glaymann et Varga (1975) :**
Dans le quadrillage ci-dessous, on place un pion dans la case de départ et on veut se rendre à la case X. Les seuls déplacements autorisés sont des déplacements d'une case vers la droite ou d'une case vers le haut. Combien y a-t-il de chemins allant de la case de départ à la case X? Comment peut-on être certain d'obtenir tous les chemins possibles? Justifier votre réponse.

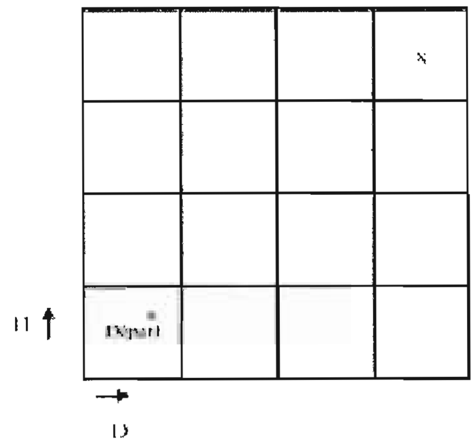



**Figure 2.8 Déplacement d'un pion sur un quadrillage**

En codant par D un déplacement vers la droite et par H un déplacement vers le haut, chaque chemin sur le damier peut être symbolisé par un mot, par exemple DDDHHH, HDDHHD, etc. Pour chaque déplacement, le pion effectue 3 déplacements à droite et 3 déplacements vers le haut. Le problème revient donc à trouver tous les mots de six lettres qu'on peut écrire avec trois D et trois H. Soit au total 20 chemins possibles pour aller de la case de départ à la case X.

Jusqu'ici, nous avons parlé des modèles combinatoires au sens de représentations externes permettant une certaine organisation des données. D'autres types de modèles combinatoires au sens de modèles conceptuels existent, ce sont les opérations combinatoires classiques d'arrangements, de permutations et de combinaisons, les configurations combinatoires de sélection, distribution et partition qui se dégagent de la systématisation de Dubois (1984), mais aussi les principes combinatoires de la somme, de la multiplication, du berger. Dans ce qui suit, nous abordons ces différents modèles conceptuels combinatoires.

Étant donné un ensemble fini de *m* objets, on distingue deux types d'arrangements, avec ou sans répétitions. On appelle arrangement (avec répétition) de ces *m* objets pris *n* à *n*, tout groupement ordonné de *n* objets choisis parmi les *m* objets en prenant en compte les répétitions possibles d'un même objet (par exemple, dans un ensemble formé par les lettres A et B, un arrangement possible avec répétition des lettres A et B prises *3 à 3 est AAA*). Tout groupement ordonné de *n* objets choisis parmi les *m* objets, sans répétition d'un même objet est appelé arrangement sans répétition de ces *m* objets pris *n* à *n*. *Un modèle simple pour illustrer la notion d'arrangement est celui des mots : en effet, un mot est une suite de lettres qui peuvent se répéter ou non.* Dans une permutation, on considère tous les objets de l'ensemble, ce qui n'est pas forcément le cas avec les arrangements. Les permutations apparaissent donc comme des cas particuliers d'arrangements. *Par exemple, on peut s'intéresser à tous les mots de 5 lettres (ayant un sens ou non); on peut former avec toutes les lettres du nom BARRY des noms tels que : RYBAR, RABYR, etc. Il y a au total 60 mots qui sont les différentes permutations de l'ensemble des lettres du nom BARRY.*

Quant aux combinaisons, comme pour les arrangements, on distingue les combinaisons avec ou sans répétitions. On appelle combinaison sans répétition de *m* objets pris *n* à *n*, tout groupement non ordonné de *n* objets choisis parmi les *m* objets, sans aucune répétition d'un même objet. On appelle combinaison avec répétition de ces *m* objets pris *n* à *n*, tout groupement non ordonné de *n* objets choisis parmi les *m* objets, avec répétition d'un même objet. Une combinaison est donc une sorte de «tas». *Par exemple, les différents binômes de travail que peuvent former les élèves d'un groupe de 10 personnes sont autant de combinaisons possibles.* Voilà pour ce qui est des opérations combinatoires classiques. Dans ce qui suit, nous définissons les modèles de sélection, distribution et partition, au sens de Dubois (1984).

Le modèle de *sélection* renvoie à la notion d'échantillonnage ou de tirage dans une population donnée comme dans l'exemple suivant : Dans une boîte, il y a quatre jetons numérotés 2, 4, 7, 9. On choisit un jeton et on marque son numéro. Ensuite, on remet le jeton dans la boîte. On répète la procédure jusqu'à ce que l'on obtienne un nombre de trois chiffres. Par exemple, on peut obtenir le nombre 222. Combien de nombres différents de trois chiffres peut-on ainsi obtenir? (Fischbein et Gazit, 1988) Cet exemple, dans lequel il est question de faire un tirage de jetons dans une boîte, est un *problème de sélection*. Le modèle de distribution renvoie intuitivement à la notion de rangement d'objets dans des cases et est relié à la notion mathématique d'*application*, comme dans l'exemple suivant : supposons que l'on ait trois lettres identiques et que l'on veuille les mettre dans quatre enveloppes de couleurs différentes: une jaune, une bleue, une rouge et une verte. Il est seulement possible d'introduire une lettre dans chaque enveloppe. Par exemple, on peut introduire une lettre dans l'enveloppe jaune, une autre dans l'enveloppe bleue et la dernière dans l'enveloppe verte. De combien de façons peut-on placer ces trois lettres dans les quatre enveloppes? (Roa, 2000). Cet exemple, qui renvoie à une situation de rangement ou distribution de lettres dans des enveloppes, est un *problème de distribution.*

Quant au modèle de *partition*, il renvoie à une situation de partage et est relié à la notion mathématique de partition (ou division d'un ensemble en sous-ensembles deux à deux disjoints et qui recouvrent l'ensemble), comme dans l'exemple suivant : Un garçon a quatre voitures de couleurs différentes (noir, orange, blanc et vert) et il décide de partager les voitures entre ses amis Fernando, Luis et Teresa. Par exemple, il peut donner toutes les voitures à Luis. De combien de façons différentes peut-il partager les voitures ? (Roa, 2000). Cet exemple qui évoque une situation de partage, relève du *modèle de partition*. Maintenant que les modèles de sélection, distribution et partition ont été définis, nous allons faire la même chose avec les principes combinatoires que sont le *principe multiplicatif*, le *principe de la somme* (ou de l'addition) et enfin le *principe* dit *du berger*.

Le principe multiplicatif s'énonce comme suit : si une action (ou une opération) nécessite pour sa réalisation qu'on effectue deux autres actions indépendantes et combinées: le nombre de façons de réaliser une telle action est égal au produit du nombre de façons de réaliser la première action multiplié par le nombre de façons de réaliser la seconde action. Le principe multiplicatif énoncé ci-dessus dans le cas de deux actions se généralise évidemment à une action dont la réalisation finale met en jeu plus de deux actions. Quant au principe de la somme, il s'énonce comme suit : Si deux actions A et B sont indépendantes, et s'il y a $m$ façons de réaliser la première A et $n$ façons de réaliser la deuxième B, alors il y a $m+n$ façons de réaliser l'une ou l'autre de ces deux actions. Le principe de la somme peut être généralisé en considérant plus de deux actions indépendantes dont on connaît pour chacune le nombre de façons de la réaliser. Enfin, le dernier principe combinatoire que nous définissons dans ce travail est celui dit du berger. Ce principe peut être illustré par la métaphore suivante : un berger comptait très vite ses moutons. Un jour, un paysan lui demanda comment il faisait. Il répondit : *«Je compte les pattes et je divise par quatre!»*. Au-delà de l'histoire, le principe du berger permet de tenir compte des répétions et de dénombrer des combinaisons à partir des arrangements.

Dans ce qui précède et qui nous a permis de définir les opérations, configurations et principes combinatoires, nous retrouvons plusieurs des modèles standards vus dans l'enseignement de la combinatoire. Que retenir de cette section consacrée aux modèles combinatoires?

En résumé (voir la figure suivante), lorsque nous parlons de modèles combinatoires, nous référons à deux sortes de modèles, les représentations externes (tels les arbres de choix, graphes et réseaux) et les modèles conceptuels (tels les opérations, principes et configurations combinatoires). Ces modèles peuvent servir de balises dans la construction de situations d'enseignement visant le développement de la modélisation. En effet, pour chacun de ces modèles standards, il est possible de concevoir une famille de situations de modélisation donnant l'opportunité aux élèves de créer des modèles «spontanés» qu'il peuvent complexifier après plusieurs cycles de modélisation, ce qui les amènera dans leurs mots à énoncer les caractéristiques des modèles combinatoires standards.

**Tableau 2.1 Quelques modèles combinatoires standards**

| **Les modèles combinatoires standards** |
|---|
| ▪ Diverses représentations externes : arbres de choix, graphes, réseaux, listes/suites de mots, nombres, etc.<br>▪ Des opérations combinatoires : arrangements, combinaisons, avec ou sans répétitions<br>▪ Configurations combinatoires de sélection, distribution et partition (Dubois, 1984)<br>▪ Des principes combinatoires : principes de la somme et de la multiplication, principe du berger. |

Dans ce qui suit, nous traiterons de la création de modèles combinatoires, c'est-à-dire du processus de modélisation en lien avec des situations combinatoires.

2.2.3.2 Le processus de modélisation en combinatoire

Le point de départ de la modélisation en combinatoire est une situation ou un problème de dénombrement[48] «concret»[49] ou issu de la vie de tous les jours. Un des

---

[48] Nous avons restreint les problèmes combinatoires à des problèmes de dénombrement, car dès le début de ce travail nous avons précisé que nous nous intéressons à l'analyse combinatoire, encore appelée dénombrement. Un autre choix aurait pu être de considérer des situations combinatoires à optimiser, etc.

défis pour l'enseignant ou le chercheur est de présenter aux élèves cette situation d'une façon qui permette le développement de la modélisation sollicitée (structurée ou ouverte) ou le type de mathématisation souhaitée (horizontale ou verticale). Il s'agit donc de situations, de problèmes, voire de jeux impliquant un dénombrement systématique, semi-structurés ou ouverts, stimulants pour les élèves à qui la latitude est donnée de trouver les stratégies, représentations, symbolisations appropriées pour les résoudre et au besoin généraliser les modèles obtenus ou les solutions dérivées de ces modèles. De sorte qu'en laissant les élèves explorer les situations, problèmes ou jeux qui leurs sont proposés, ils ont ainsi la possibilité de rentrer dans une réelle problématique de modélisation en combinatoire (Grenier et Payan, 1998). Par là nous entendons, dans la perspective de Grenier et Payan, engager les élèves dans des problèmes ou situations de dénombrement dans lesquels il ne s'agit pas uniquement d'appliquer des formules de comptage mais plutôt de comprendre et structurer la situation de départ, conjecturer, trouver un modèle mathématique plausible de la situation, dénombrer à l'intérieur d'un tel modèle toutes les possibilités, vérifier les résultats obtenus, généraliser au besoin le modèle construit, les méthodes ou formules de dénombrement obtenus. À ce propos, Grenier et Payan (1998) soulignent que dans l'enseignement, à tout le moins en France, le travail de modélisation est relativement absent quoique figurant au programme. Leur analyse pointe le fait que la situation à modéliser est souvent vue comme «un exercice d'application, le but étant de faire fonctionner correctement le modèle auquel elle est associée et non de construire un modèle permettant de lui donner un sens. Le plus souvent d'ailleurs, on se place

[49] Comme le soulignent Grenier et Payan (1998), puisque les problèmes et exercices de dénombrement souvent proposés dans les manuels sont plus concrets (c'est-à-dire à contextes moins mathématiques) que dans les autres chapitres, ils sont alors moins modélisés et on pourrait s'attendre à ce qu'ils soient l'occasion d'un travail de modélisation. Ce qui pour eux n'est hélas pas le cas dans l'enseignement en France ! L'intérêt des problèmes non modélisés mathématiquement selon Grenier et Payan (1998) est qu'ils permettent aux élèves de considérer leur sens en dehors du champ mathématique. Ils sont donc (ces problèmes concrets en dénombrement et plus généralement en mathématiques discrètes) une occasion hors contrat didactique usuel d'assurer chez les élèves une dévolution du problème.

d'emblée dans le modèle, sauf lorsque le problème a été «habillé» et replacé dans une situation concrète.» (p. 86)

Ce point nous semble important et leur travail pointe vers une alternative intéressante à considérer pour l'enseignement ou l'exploitation en classe de problèmes combinatoires, consistant à mettre l'accent sur le processus même de modélisation et non sur l'utilisation aveugle de modèles combinatoires, telles les formules classiques de dénombrement. Selon Grenier et Payan (1998), «les formules de comptage données ne sont pas rattachées à des modèles[50] de situations, mais à des énoncés et à un vocabulaire précis, qui doivent servir de système de reconnaissance» (p. 64). Une approche authentique de la modélisation en combinatoire doit donc sensibiliser les élèves au travail exigeant mais fascinant qui permet d'identifier des configurations et d'établir des formules de comptage au départ de situations ou de problèmes concrets ou à contexte mathématique, de généraliser les situations de dénombrement qui leur sont présentées et d'étendre les formules subséquentes de dénombrement. La modélisation en combinatoire peut permettre aux élèves de développer les notions d'ordre, de répétition, de récurrence qui sont déterminantes dans l'établissement des formules classiques de dénombrement, d'aider les élèves à comprendre les principes de la multiplication, du berger, de la somme. La modélisation de situations de dénombrement permet donc, au-delà d'une initiation à la modélisation mathématique, une introduction au dénombrement qui joue un rôle important dans l'apprentissage des mathématiques, en particulier celui des probabilités auxquelles le dénombrement est si souvent associé dans les programmes d'études comme celui du MELS (2003).

Une étape de la modélisation en combinatoire qui mérite qu'on s'y attarde est celle de la mathématisation. Les travaux de Dubois (1984) fournissent un bel exemple

---

[50] Pour eux, le modèle d'*urne* est presque le modèle de référence dans les chapitres de dénombrement de plusieurs manuels scolaires en France. Le modèle de l'urne renvoie à ce que Dubois (1984) désigne par le modèle de sélection.

de mathématisation verticale dans laquelle les concepts ensemblistes fondamentaux d'application, de produit cartésien, de relation d'ordre, de relation d'équivalence, d'ensemble quotient, etc.[51], sont appliqués aux concepts de la combinatoire. La systématique des configurations combinatoires élémentaires à laquelle Dubois (1984) arrive est certes un effort louable pour mieux fonder ce domaine, mais le type de mathématisation proposée nous semble trop complexe pour le secondaire, et même le collégial, et nous nous interrogeons sur sa possible exploitation didactique dans le contexte de la réforme actuelle où l'approche ensembliste n'est pas privilégiée (MELS, 2003). Dans la perspective d'une modélisation émergente introduite précédemment (Gravemeijer, 2007), elle n'est pas non plus pour nous nécessairement pertinente, les modèles mathématiques ici ciblés pouvant s'avérer fort éloignés des modèles spontanés construits par les élèves. Assurément les concepts combinatoires, comme le soulignent Glaymann et Varga (1975), mais aussi Dubois (1984) se prêtent aisément au langage des ensembles, mais ne risque-t-on pas par le type de mathématisation qu'expose Dubois, en dépit de ses dénégations, de justement rigidifier l'enseignement de la combinatoire au secondaire, voire au collégial? Pour le premier cycle du secondaire à tout le moins, nous estimons que la perspective de Dubois n'est pas nécessaire si le but poursuivi est tant d'initier les élèves à la modélisation et éventuellement de les introduire à quelques notions et principes de base en combinatoire. Dans cette optique, l'important est que les élèves fassent l'expérience du passage de situations ou de problèmes de dénombrement à des représentations qui permettent de rendre compte d'un certain processus de dénombrement. On l'aura compris, nous reprenons là à notre compte la définition que Freudenthal (1991) donne à la mathématisation horizontale : le passage du monde réel au monde des symboles. À ce propos, la perspective de la RME est instructive de par la place centrale qu'elle donne dans l'apprentissage de la modélisation mathématique à la mathématisation horizontale, la plus importante pour nous au

[51] Il s'agit là de concepts algébriques dont nous faisons l'économie de leur définition.

premier cycle du secondaire, sans toutefois freiner la progression vers la mathématisation verticale. La mathématisation horizontale dans le processus de modélisation combinatoire se situe à ce moment crucial où les élèves après avoir décodé la situation de dénombrement, la représentent à leur façon (les modèles spontanés des élèves sont ici encouragés) ou au moyen de représentations figurales standard tel l'arbre de choix dont le recours est privilégié dans le nouveau programme (MELS, 2003). Sans conteste l'arbre de choix à la fois comme modèle intuitif et outil de dénombrement est non négligeable dans un dispositif guidé d'initiation à la modélisation via l'exploration de situations de dénombrement, mais il n'est pas le seul modèle possible. En dépit de l'importance didactique des arbres de choix (Fischbein, 1975; MELS, 2003; etc.[52]), nous pensons que l'enseignement de la modélisation doit en effet permettre aux élèves de recourir librement à d'autres modèles figuraux, conventionnels ou non (des tableaux à plusieurs entrées, circuits, des mots, toutes sortes de codages ou symbolisations[53], etc.). Dans le cas de la combinatoire, la nature des problèmes (concrets, exigeant peu de prérequis mathématiques, exploitables à différents niveaux scolaires) explique peut-être l'importance du registre graphique[54] (Duval, 1993) surtout à l'étape des conjectures lors de la phase de formulation du processus de modélisation.

Précédemment, nous nous sommes surtout attardé sur la phase de formulation du processus de modélisation. Une autre composante importante de ce processus, nous l'avons vu antérieurement, a trait à la validation. Que dire de celle-ci dans le cadre du processus de modélisation en combinatoire? Tout d'abord, tous les aspects

---

[52] C'est aussi le choix fait dans le nouveau manuel de mathématiques de première année du secondaire, *Perspective*, rédigé par Sylvio Gay et al. (2005).

[53] Voir à ce propos dans la recherche longitudinale de Maher et ses collaborateurs (Maher et Martino, 1998), le cas de l'élève Brandon de quatrième année du primaire (grade 4) qui réinvente la notation binaire (0 ou 1) pour exprimer qu'une pizza contient ou non une certaine garniture. On peut parler à ce propos de symbolisation ad hoc mais significative.

[54] Dans sa théorie des registres de représentation, Duval considère plusieurs types de registres : graphique, algébrique, numérique, symbolique, formel, etc. Très visuel, le registre graphique, en dépit de ses limites, permet de conjecturer, de chercher. Couplé à d'autres registres, tels les registres symboliques et formels, il permet d'aller plus loin par exemple dans la preuve.

de la validation soulevés précédemment restent pertinents, soit l'importance de ce que Tanner et Jones (1994) désignent par une « culture de modélisation », c'est-à-dire un ensemble de règles de fonctionnement négociées, partagées et facilitant, entre autres, la validation par les pairs. En effet, nous appuyant sur Cobb, Perlwitz et Underwood (1994) qui parlent de «communauté de validation», nous considérons que les élèves sont des pairs qui se valident les uns les autres, se complètent au besoin. Le défi pour les élèves est alors de confronter leurs modèles sans s'affronter, par exemple, en témoignant d'une capacité à valoriser tout modèle exposé en classe, même quand il est loin de mener à la bonne réponse.

Pour conclure sur la modélisation combinatoire, soulignons qu'à travers le développement de celle-ci se joue un apprentissage important, celui du raisonnement inductif, un aspect de la compétence 2 « déployer un raisonnement mathématique » (MELS, 2003). En effet, les possibles tentatives des élèves pour généraliser et dégager des régularités au départ des modèles particuliers auxquels ils aboutissent dans un premier temps s'inscrivent dans ce sens. Aussi, la modélisation combinatoire a ceci d'important qu'elle permet de travailler en combinatoire ce qui se travaille plus difficilement avec des problèmes de probabilités où la dimension dénombrement est souvent algorithmisée pour les fins de la détermination des chances de réalisation d'événements aléatoires donnés. De sorte que la combinatoire, un aspect des Probabilités et Statistiques, apparaît comme un des trois domaines d'apprentissage du nouveau programme (MELS, 2003) permettant de mieux travailler la modélisation au premier cycle du secondaire.

Nous voilà donc au terme de cette partie qui nous aura permis de préciser la notion de modèle et de comprendre le processus de modélisation, de manière générale et plus spécifiquement en combinatoire. Dans le point suivant, nous indiquons ce que nous en retenons pour le développement du processus de modélisation et l'exploitation avec les élèves de problèmes combinatoires. Nous précisons aussi quelques balises qui nous guideront dans le choix de situations de dénombrement susceptibles de contribuer au développement de la modélisation au premier cycle du secondaire.

### *2.2.4 Cadre de référence du chercheur issu de l'analyse précédente : quelques balises se dégageant de ce qui précède*

Tout au long de l'analyse précédente, nous avons mis en évidence différentes perspectives sur l'utilisation des modèles dans l'enseignement et le processus de modélisation en mathématiques. Notre positionnement vis à vis ces différentes perspectives s'est peu à peu précisé, transparaissant au fil du texte. Nous en reprenons ici les principaux éléments.

Tout d'abord, plutôt que d'encourager le seul recours à des modèles définis a priori (approche mettant l'accent sur l'enseignement de modèles aux élèves), nous privilégions dans l'apprentissage/enseignement des mathématiques le développement du processus de modélisation par les élèves qui permette à ces derniers de construire des modèles donnant sens aux situations à modéliser (Blum et Niss, 1991; Grenier et Payan, 1998). Le processus cyclique de modélisation comporte deux phases importantes inter-reliées : une première phase de formulation au cours de laquelle les élèves analysent, structurent et transforment la situation à l'étude en un modèle mathématique et ce en fonction de leurs moyens «naturels», «spontanés», «informels». Ces modèles doivent ensuite être validés dans une seconde phase dite de validation. Au besoin, plusieurs cycles de modélisation sont nécessaires pour permettre aux élèves de raffiner, généraliser complexifier leurs modèles «émergeants» (Gravemeijer, 1999). Les modèles mathématiques créés (des schémas, des listes, etc.) sont d'abord ceux des élèves en lien avec la situation à modéliser et dans la suite peuvent être généralisés. Treffers (1987) permet de voir que le processus de modélisation apparaît comme une mathématisation progressive permettant de passer d'une mathématisation horizontale (niveau informel) à une mathématisation verticale (niveau formel).

En outre, une véritable activité de modélisation dans la classe exige une culture de modélisation dans la mesure où les élèves doivent s'entendre sur quelques règles de fonctionnement qui facilitent le remue-méninge initial, l'expression de conjectures, le recours libre mais justifié à différentes représentations, la délibération autour des situations mises de l'avant, la communication de ces solutions, la validation des modèles par les pairs.

Il importe également pour mettre les élèves dans une réelle problématique de modélisation (Grenier et Payan, 1998) que les situations qui leur sont proposées soient des problèmes[55] (MEQ, 1988) et non de simples exercices d'application[56] (MEQ, 1988). L'analyse précédente nous permet d'indiquer quelques balises importantes eu égard au type des situations de dénombrement à proposer aux élèves si on veut les engager dans une véritable activité de modélisation.

Il s'agit de situations :

---

[55] Dans cette thèse, nous considérons des problèmes de dénombrement au départ du développement du processus de modélisation et non des situations-problèmes, ce qui justifie que nous nous sommes appuyé sur les programmes de 1988 du MÉQ pour la définition d'un problème. Ainsi, dans le guide pédagogique du primaire sur la résolution de problèmes (fascicule K, MEQ, 1988), nous trouvons cette définition d'un problème : «pour un élève ou un groupe d'élèves, un problème en mathématiques est *une situation où* : *il tente de répondre à une question posée ou d'accomplir une tâche déterminée*, à la lumière de son expérience, ainsi que des informations qui sont fournies explicitement ou non ; *il lui faut réellement chercher* pour trouver un moyen de répondre à cette question ou accomplir cette tâche ; *il doit faire appel à des mathématiques ou à des habiletés intellectuelles fréquemment utilisées en mathématiques* pour y arriver.» (p. 11). On remarque que le terme «situation où» indique qu'un problème renvoie, par sa nature même, à une certaine représentation que les élèves sont obligés de se faire de la situation qui leur est présentée.

[56] Le même fascicule (MEQ, 1988) différencie clairement un problème et un exercice en mathématiques. Face à ce qui constitue pour les élèves un exercice, ils voient spontanément comment s'y prendre pour le résoudre, alors que devant un problème ils doivent réellement chercher et «parfois même être créatifs et ingénieux pour le résoudre» (p. 18). Les exercices visent à fixer ou à renforcer des connaissances ou des habiletés. La résolution en mathématiques requiert l'application de méthodes, règles, formules, définitions, propriétés vues par les élèves en classe. On distingue plusieurs types d'exercices : exercices d'application immédiate (court terme), exercices d'application différée (moyen terme) et exercices d'entretien (long terme) (MEQ, 1988, p. 19).

- formulées en termes réels, au sens de la RME, sans références explicites dans leur énoncé à de quelconques aspects mathématiques;
- des situations qui ne sont pas des exercices d'application;
- des «jeux» [57] combinatoires, des problèmes «ouverts» [58] voire des «situations de recherche»[59].

De plus, ces situations doivent:

- Pouvoir être facilement schématisées (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003);
- Permettre le recours à une variété de représentations externes;
- Être des situations dans lesquelles les élèves voient qu'il y a une pertinence à passer à un dénombrement systématique et;
- Si possible, pouvoir être généralisées (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Voilà cinq balises qui, à notre sens, permettent au-delà de la culture de modélisation à installer dans la classe, le choix de situations permettant d'engager les élèves dans ce qu'avec Grenier et Payan (1998) nous appelons une réelle problématique de modélisation.

La figure 2.9 résume les éléments importants du cadre de référence du chercheur susceptible d'être mobilisé lors de l'élaboration avec un enseignant de scénarios d'enseignement en dénombrement visant le développement de la modélisation en secondaire 1.

---

[57] Il s'agit de problèmes mathématiques récréatifs, d'énigmes mathématiques.

[58] Arsac, Germain et Mante (1991) définissent un problème ouvert comme: 1-un problème dont l'énoncé est court et n'induit ni la méthode, ni la solution (solution qui ne doit pas se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats ou notions vus en classe) ; 2-le problème doit être dans un domaine familier aux élèves afin de permettre à ces derniers de s'engager dans des essais, des conjectures, des contre-exemples, etc. Pour eux, l'objectif premier d'un problème ouvert, contrairement à une situation-problème, n'est pas l'introduction d'un nouveau concept ou d'une nouvelle notion mathématique.

[59] Grenier et Payan (2007) parlent de situations de recherche, c'est-à-dire des situations s'inscrivant dans des problématiques de recherche professionnelle (proches de questions non résolues) qui permettent aux élèves l'apprentissage de «savoirs transversaux» (tel expérimenter, faire des conjectures, modéliser, définir, prouver, etc.) nécessaires pour faire «véritablement» des mathématiques. Dans de telles situations: la question initiale est facile d'accès ; des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques ; plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles ; une question résolue renvoie très souvent à une nouvelle question, en ce sens la situation n'a pas de fin.

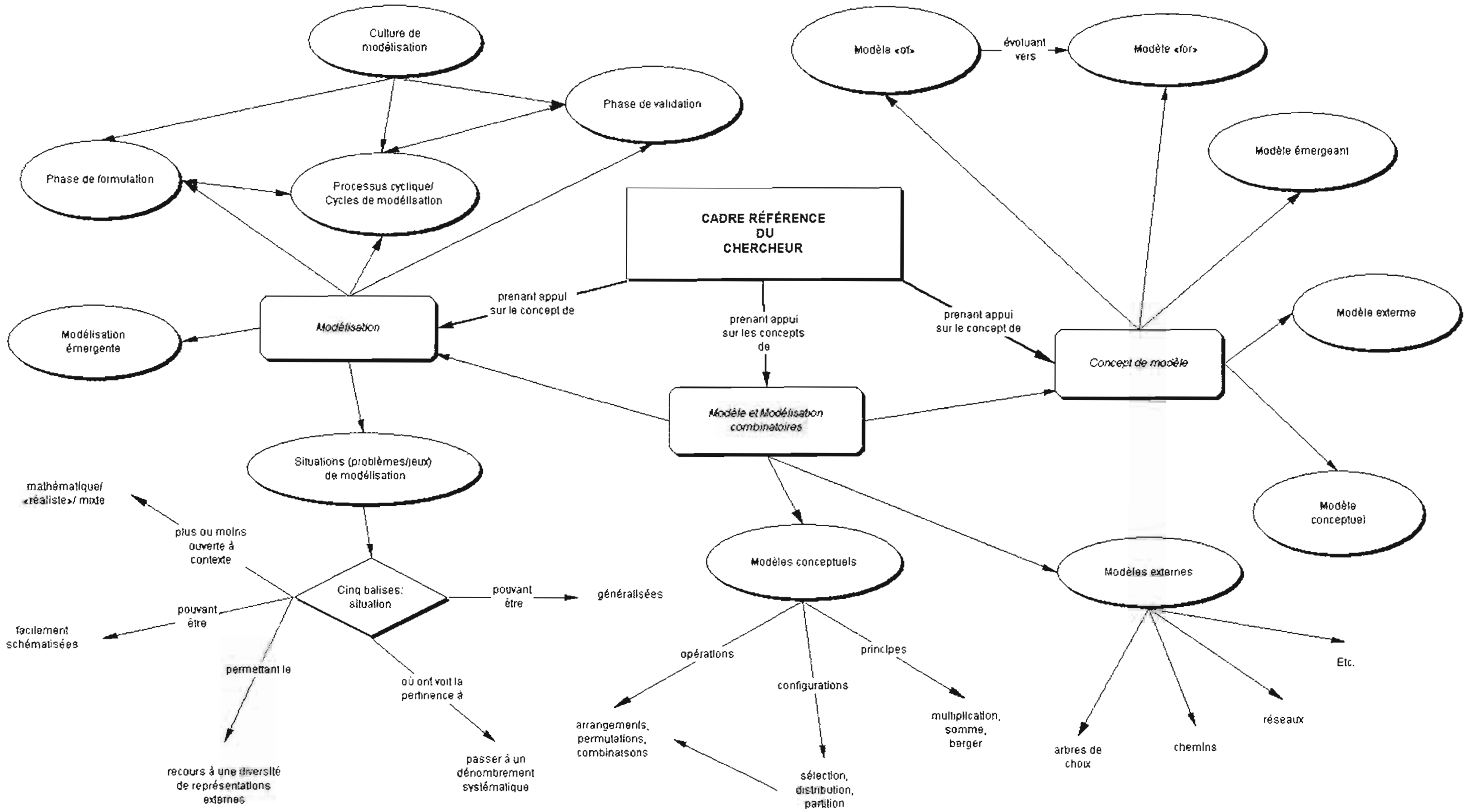



**Figure 2.9 Éléments clés susceptibles de guider le chercheur dans la construction conjointe**

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous aborderons les concepts de didactique praticienne (Martinand, 1992) et de savoirs (d'expérience) des enseignants. Ces concepts, pour nous, permettent de saisir le cadre de référence construit en contexte par l'enseignant et d'entrevoir les ressources qu'il est susceptible de mobiliser dans l'élaboration avec le chercheur de situations d'enseignement visant le développement de la modélisation chez les élèves.

## 2.3 Quelques concepts pour comprendre le cadre de référence susceptible de guider l'enseignant dans cette co-construction

Nous avons vu précédemment, avec la notion de modèle et le processus de modélisation en combinatoire, des composantes importantes du cadre de référence du chercheur, ce à quoi il est susceptible de puiser pour fonder la construction des situations d'enseignement. Nous retrouvons là ce que Martinand (1992) nomme la didactique de recherche, ou la didactique prospective, celle à laquelle puise le chercheur pour avancer sur des pistes d'intervention en enseignement des mathématiques fécondes sur le plan des apprentissages. Au croisement du travail avec les enseignants, une autre didactique risque également d'être mobilisée sur laquelle nous revenons maintenant.

### *2.3.1 Le concept de didactique praticienne*

Le concept de didactique praticienne est emprunté à Martinand (1992). En amorce à un processus de théorisation cherchant à rendre compte des différentes didactiques en présence dans la supervision des stages de formation où interviennent plusieurs acteurs (superviseur universitaire, enseignant en exercice, inspecteur dans le cas de la France) ces concepts, que Martinand ne développera cependant pas par la suite, nous apparaissent porteurs pour notre propos. En effet, au cœur de l'interaction chercheur-enseignants dans la construction de scénarios d'enseignement, différentes didactiques risquent fort de se rencontrer comme nous le montrent bien les travaux de recherche menés par Couture (2002). Nous essayerons donc d'élaborer davantage ce concept en nous appuyant pour cela sur d'autres auteurs. Selon Martinand (1992), la didactique praticienne est «celle des stages d'immersion, d'observation, de responsabilité. Elle s'incarne dans les maîtres-formateurs (les enseignants en exercice qui accueillent les stagiaires dans leur classe et les accompagnent)» (p. 146). La didactique praticienne est pour Martinand une des trois orientations complémentaires dans la formation des enseignants, les deux autres étant la didactique *normative* (qui s'incarne dans les formateurs-inspecteurs, associés au respect des contraintes institutionnelles, tels les programmes et évaluations et souvent chargés d'évaluer la pratique de l'enseignant en classe) et la didactique *critique et prospective*[60] (qui s'incarne dans les formateurs-innovateurs, et qui dans notre cas s'incarne davantage dans les formateurs-chercheurs).

D'après ce qui précède, la didactique praticienne renvoie à la pratique enseignante à laquelle les enseignants en formation accèdent à travers les stages d'enseignement et les maîtres-formateurs qui les accueillent dans leur classe, les supervisent, et qui sont dans ce cas des enseignants expérimentés. Elle renvoie donc au *savoir-enseigner* qui est explicité par ces maîtres-formateurs au cours de la supervision, de l'accompagnement du stagiaire en classe, de son suivi. Mais que sait-on de ce savoir enseigner? L'explicitation de celui-ci pourrait nous permettre à cette étape de clarifier davantage le concept de didactique praticienne non approfondi par Martinand.

Le savoir-enseigner est tout d'abord pour nous un savoir-agir. Cette notion de savoir-agir est empruntée à Schön (1983) qui l'associe à un savoir-dans-l'action. Giddens (1987) nous aide à voir qu'une grande part de ce savoir « loge » dans ce

---

[60] Ici en fait, dans le projet, vont sans doute être en interaction une didactique praticienne et une didactique de recherche que Martinand associe à une didactique critique et prospective.

qu'il appelle la «conscience pratique». En effet, Giddens (1987) distingue deux types de conscience : la conscience discursive correspondant à ce que l'acteur est capable de dire ou d'exprimer verbalement à propos de son action quand on lui demande de le faire, et la conscience pratique correspondant à celle que l'acteur manifeste dans son action, mais qui ne lui permet pas de discourir sur cette action. Dans le même ordre d'idée, Schön (1983, 1987) estime que les praticiens manifestent une forme de réflexion-en-action qui pour l'essentiel est implicite, une réflexion à l'œuvre lorsque les acteurs sont aux prises dans leurs pratiques avec des situations indéterminées, instables ou inédites.

En plus d'être un savoir-agir, le savoir-enseigner est aussi un savoir *situé* (Bednarz, 2001). Le terme «situé» est emprunté à la théorie de l'action située (Suchman, 1987) selon laquelle toute action, tout acte est conçu dans l'ancrage d'une situation en dehors de laquelle il n'aurait pas la même signification. Le terme «situé» signifie donc que l'activité humaine prend son sens à l'intérieur d'une situation et du contexte dans lequel elle se déroule. Une telle perspective sur la cognition rompt avec une vision traditionnelle qui envisage les processus cognitifs uniquement à l'intérieur de la personne, plutôt elle conçoit ces processus à la fois intérieurs et extérieurs aux personnes dans une situation donnée. Dit autrement, la cognition est dans les artéfacts culturels (comme l'affirme aussi les perspectives de la cognition distribuée), dans les personnes qui composent une situation, bref dans les ressources qui structurent cette situation. Pour revenir au savoir-enseigner, dire que celui-ci est un savoir situé signifie pour nous qu'il se construit en contexte, par exemple en classe là où l'enseignant compose avec un groupe d'élèves donné, s'adapte à des rythmes d'apprentissage différents, invente des réponses lorsque la dynamique des échanges l'oblige à sortir du script de sa planification.

Enfin, une autre caractéristique importante du savoir-enseigner est qu'il mobilise des « ressources structurantes » qui forment pour l'acteur un terrain d'opportunités situées. Lave (1988) propose le concept de ressources structurantes pour souligner, dans sa perspective située, l'importance du contexte dans le traitement des situations. En situation, dans diverses activités, les individus mobilisent des ressources de différents ordres qui structurent ces activités ainsi que les personnes qui s'y déploient. Ces ressources pour l'acteur se retrouvent au carrefour de multiples réalités et sont de différentes sortes : l'activité et la situation elles-mêmes, mais également les artéfacts, la culture ainsi que les croyances de l'acteur, ses connaissances, les échanges avec des pairs plus ou expérimentés, etc. À propos des enseignants, Bednarz, Desgagné et Diallo (2001, p. 203), indiquent que les ressources structurantes renvoient chez ces derniers à leur répertoire de connaissances et sont constituées, entre autres, de connaissances mathématiques, de connaissances à propos du contexte immédiat de la classe, des connaissances didactiques «pratiques» à propos des apprentissages et des situations d'apprentissage, des connaissances à propos du contexte socioéconomique plus large de l'école ou des contraintes qui balisent leur action au quotidien. En somme, le savoir-enseigner puise aux artéfacts, aux personnes (collègues, élèves), aux connaissances, à un ensemble de ressources (au sens de Lave, 1988) qui structurent les situations d'enseignement. La notion de ressource structurante permet donc de situer ailleurs que dans le cerveau la capacité cognitive de l'acteur, une capacité qui s'étend, se renforce en puisant aux ressources que fournissent l'environnement ainsi que les agents qui s'y déploient et qui constamment redéfinissent, récréent la situation[61].

---

[61] Une précision importante s'impose ici quant à la notion de ressource structurante. Bien que celui-ci n'ait été employé jusqu'ici que pour parler des praticiens enseignants, on ne saurait coller ce concept aux seuls enseignants. Ce concept repris de Lave est associé aux ressources que mobilise l'acteur en contexte/en situation de pratique. La notion de ressources structurantes s'applique donc à toute situation de pratique en contexte. Ainsi, Bednarz et ses collaborateurs (Bednarz et al., 2001) reprennent ce concept pour analyser les ressources mobilisées dans la construction conjointe de situations d'enseignement; Traoré (2007) pour analyser les ressources que des paysans illettrés mobilisent dans des activités quotidiennes telles le comptage et la vente de mangues; Barette (2008) le reprend également pour analyser les ressources mobilisées par les adultes en contexte et cerner le processus d'apprentissage informel en milieu de travail. Dans cette optique, on pourrait fort bien imaginer l'utilité de ce concept pour rendre compte de ce qui est mobilisé par un chercheur en action (par exemple, dans un laboratoire).

Avec ce concept de didactique praticienne Martinand (1992) soulève la problématique de l'impossibilité d'un apprentissage du métier d'enseignant à travers uniquement la formation théorique assurée par les chercheurs didacticiens et les consignes ou recommandations énoncées aux enseignants par les représentants de l'institution scolaire (conseillers pédagogiques, inspecteurs d'enseignement, etc.). La compétence à enseigner se développe aussi *dans* et *par* la pratique. C'est cela qui explique que certains enseignants novices au contact des réalités de l'enseignement ont le sentiment d'avoir perdu leur temps dans certains cours universitaires. L'expérience d'enseignement est donc importante et c'est par elle que les enseignants inventent des façons d'être et de faire, construisent les *savoirs d'expérience* qu'il leur faut pour toujours mieux enseigner. Dans ce qui suit, nous clarifions rapidement ce concept de «savoirs d'expérience» qui caractérise à notre sens le «maître-formateur», un enseignant expert chez qui, de l'avis même de Martinand, s'incarne la didactique praticienne.

### *2.3.2 Le concept de savoirs d'expérience*

Les savoirs d'expérience sont des savoirs professionnels individuels, construits en contexte afin d'apporter des réponses ajustées aux situations auxquelles les enseignants sont confrontés dans leurs pratiques (Tardif et al., 1991). Il s'agit de savoirs construits dans l'action, de l'intérieur des situations et qui permettent aux enseignants de composer avec les multiples facettes de l'enseignement. Les savoirs d'expérience sont donc des savoirs incorporés dans la pratique (Cochran-Smith et Latte, 1999), des savoirs professionnels encapsulés dans des pratiques (Schön, 1983), en somme des savoirs produits *par* la pratique et *dans* la pratique. Ce qui se laisse voir à travers les savoirs d'expérience des enseignants, ce sont leurs cadres de référence construits en contexte et à partir desquels ils orientent et contrôlent leur agir (Schön, 1983).

Les travaux de Schön sur le praticien réflexif permettent de comprendre que le savoir-enseigner est un *savoir pratique* que l'enseignant construit dans l'action, lorsqu'il est aux prises avec les contraintes ou situations problématiques de sa pratique. Dans les situations indéterminées, instables ou inédites de sa pratique, la réflexion du praticien pour Schön (1983) s'apparente au processus de résolution de problèmes et le savoir pratique qui en résulte est fait de toutes ces «intuitions», «inventions» qui ont permis de résoudre des problèmes et qui viennent ainsi élargir son «répertoire d'action». Dans la section suivante nous nous attardons sur un autre concept, celui de routine, qui permet de cerner un pan important de la didactique praticienne, celle qui permet la conduite de la classe et la réalisation des apprentissages.

### *2.3.3 Le concept de routines*

Certaines études portant sur l'analyse de pratiques d'enseignants expérimentés soulignent l'importance des routines de classe (Leinhardt, 1987; Leinhardt, Putnam, Stein et Baxter, 1991; Schoenfeld, 2000). Dans ce qui suit, nous tentons de clarifier ce concept de routines. Selon Giddens (1987) les routines seraient psychologiquement liées au besoin chez les humains de réduire les sources inconscientes d'angoisse. Ainsi, dans l'accomplissement de leurs routines, les agents entretiennent un sentiment de sécurité, une certaine confiance. Aussi, Berger et Luckmann (1986) parlent-ils d'une tendance chez les individus à «habitualiser» les actions répétées sous la forme de routines qui permettent de relâcher la tension accumulée résultant des conduites non-dirigées et donc leur procurent un relief psychologique, les libèrent du poids de certaines décisions en rétrécissant les choix à faire. Ainsi, avec les routines, beaucoup d'actions deviennent possibles avec un faible niveau d'attention, ouvrant la voie aux innovations qui exigent un plus grand niveau d'attention. Aussi, les routines permettent-elles une certaine prévisibilité dans les interactions humaines dans la mesure où elles introduisent une répartition des rôles de sorte que certaines actions ne sont plus une source d'étonnement ou de danger (Berger et Luckmann, 1986).

Quant à la notion de routine de classe, elle permet de fonctionner selon certains plans tout le temps (Desgagné, 1994). De la sorte, selon Desgagné (1994), les élèves voient venir, savent où ils s'en vont, savent ce que l'on va faire en classe, ne critiquent pas facilement ce que l'enseignant propose de faire. La routine donne donc un encadrement aux activités et fournit aux élèves une certaine sécurité. Un second éclairage sur le concept de routine de classe nous est apporté par la perspective développée par Leinhardt et al. (1987). Ces derniers définissent les routines de classe comme des comportements sociaux préétablis permettant aux étudiants et aux enseignants d'atteindre des objectifs partagés, tels faire un problème au tableau, poser des questions, etc. Les routines servent de support à plusieurs activités et permettent aux apprentissages de se réaliser d'une façon ciblée, prévisible et fluide (rejoignant sur ce point Berger et Lukmann, 1986). Sur un plan cognitif, les routines libèrent à la fois les enseignants et les étudiants en automatisant certains aspects du processus de traitement des tâches qui pourraient contrarier les enseignants et les étudiants si les problèmes que de tels aspects permettent de résoudre devaient chaque fois être résolus de nouveau.

Selon Leinhardt et al. (1987), pour que les routines s'installent, elles doivent être enseignées et pratiquées. Dans cette optique, Leinhardt et al. (1987) utilisent la métaphore du chorégraphe, le rôle de l'enseignant étant de sélectionner les éléments devant être combinés et répétés avec la participation des étudiants. Leinhardt et al. (1987) indiquent que les enseignants peuvent au besoin combiner plusieurs routines pour arriver à des routines plus complexes. Ces auteurs distinguent trois catégories de routines : des *routines de gestion de classe* pour la conduite de la classe («management routines»), des *routines d'appui* pour la conduite des leçons («support routines») et des *routines d'échanges* pour les communications en classe («exchanges routines»). Ci-dessous quelques extraits pour préciser la catégorisation des auteurs (Leinhardt[62], 1987, p. 143-144) :

> Les routines de gestion fournissent à la classe une sorte de superstructure à l'intérieur de laquelle l'environnement social ainsi que les comportements sont clairement définis et familiers. Un problème au niveau des routines de gestion de classe entraîne un sentiment de désordre ou d'absence de discipline. On remarquera que dans les classes « ouvertes » le besoin de « routiniser » de telles routines est moins grand que dans les autres classes. Ainsi, les enseignants des classes dites ouvertes peuvent seulement fixer aux élèves des objectifs et leur laisser la liberté de décider des conduites particulières à avoir, certainement en raison du fait qu'ils ont moins de mouvements de classe. Quand de tels mouvements s'imposent ou lorsqu'il faut organiser la prise de notes, des consignes plus précises sont alors introduites.
>
> Les routines d'appui définissent et précisent les comportements et actions nécessaires pour que l'apprentissage-enseignement puisse se *dérouler*[63]. Comme exemples, on peut citer la remise et le ramassage de travaux d'élèves; l'aide aux élèves lorsqu'ils doivent apprêter leur matériel (livres, stylos, crayons); l'indication du lieu de déroulement d'une action en classe (au tableau, sur le pupitre de l'élève, sur le bureau de l'enseignant); la localisation de pages et de lignes dans un texte. Un dysfonctionnement au niveau des routines d'appui conduit au sentiment que l'enseignant n'est pas bien préparé, que les élèves rencontrent des difficultés ou donnent du fil à retordre à l'enseignant. Un problème avec les routines d'appui débouche aussi sur une perte de temps.
>
> Les routines d'échange spécifient les interactions permettant à l'enseignement-apprentissage de se *produire*[64]. Elles sont surtout des contacts entre les enseignants et les élèves. Plus précisément, les types de communication privilégiés entre enseignants et élèves sont prédéfinis et dépendent des activités exploitées. Comme exemples, on peut citer les modes d'échanges en grand groupe, les modalités de contrôle par l'enseignant du travail des élèves, de retour sur ces travaux. Un problème au niveau des routines d'échange conduit au sentiment que les enseignants monologuent, les étudiants ne suivant pas (ne répondant pas) ou l'inverse. Pour utiliser notre

---

[62] Traduction libre.
[63] C'est nous qui soulignons.
[64] C'est nous qui soulignons. On remarquera la nuance subtile entre « se dérouler » (pour les routines de gestion de classe) et « se produire », nuance difficile à faire dans le texte original entre « to take place » (que nous avons traduit par se dérouler) et « to occur » (que nous avons traduit par se produire). La nuance que nous avons perçue l'est surtout dans les exemples donnés pour ces deux catégories de routines.

> métaphore pour l'enseignement, le premier type de routines jette le décor, le deuxième type donne les mesures à danser et le dernier type de routines indique le *pas de deux* [65]

Comme le résume si bien la dernière phrase du dernier extrait, en retournant à la métaphore du chorégraphe, le premier type de routines donne les grandes lignes, le second type les mesures à danser et le troisième, le *pas de deux*.

Dans leur étude, Leinhardt et al. (1987) arrivent à la conclusion que les routines de gestion de classe et d'appui sont plus susceptibles d'apparaître lors des transitions d'activités (les enseignants d'expérience recourant à une vaste gamme de routines dans ces moments critiques) alors que les routines d'échange sont plus présentes dans les activités dirigées et lors des exposés. Aussi, montrent-ils que chez les enseignants qu'ils ont étudiés, les plus expérimentés introduisent la plupart de leurs routines en début d'année et y recourent régulièrement. Ils ajoutent qu'il est remarquable de constater la rapidité avec laquelle les élèves assimilent les routines. Leinhardt et al. (1987) affirment que les routines facilitent certes un enseignement efficace, mais n'en assurent pas le succès. Et d'ajouter, si tout dans l'activité d'enseignement n'était que routines, il y aurait une inefficacité à la fois dans le nombre important de routines nécessaires pour enseigner et le temps requis pour les enseigner. Les enseignants expérimentés, indiquent-ils, semblent avoir développé à la fois une liste raisonnable de routines qui doivent être introduites en début d'année et une approche appropriée pour y initier les élèves.

Dans le point suivant, nous abordons la notion de rationalité qui permet de voir que dans la réflexion dans l'action comme dans la réflexion sur l'action, les enseignants mobilisent un cadre de référence, sont guidés par une certaine rationalité.

---

[65] En français dans le texte.

### *2.3.4 Le concept de rationalité*

La notion de rationalité est abondamment utilisée en philosophie, économie et dans les sciences sociales (Boudon, 2003). Plus précisément, tout un courant de l'analyse sociologique de l'action remontant à Max Weber (1864-1920) a recours à la notion de rationalité (Déchaux, 2002). Un tel intérêt pour le concept de rationalité est dû au fait que les sciences sociales qui ont pour fonction d'*expliquer* les comportements et croyances humaines, surtout quand elles paraissent *irrationnelles*, ne peuvent se passer d'une théorie de la rationalité. Comme entrée pour clarifier ce concept à première vue insaisissable, rappelons, avec Boudon (2003), que le substantif *rationalité* repose sur l'expression *avoir des raisons de*, de sorte que par rationalité de l'acteur nous pouvons entrevoir les raisons qui inspirent son comportement, sa conduite. Partant de là, Boudon distingue différentes raisons qui animent les acteurs :

> *C'est dans certains cas et dans certains cas seulement* que les raisons qui les animent sont de caractère *conséquentialistes* (ils font X parce que les conséquences de X sont bonnes, *selon eux*); de caractère *égoïste* (ils font X parce que les conséquences de X sont, selon eux, bonnes *pour eux*); ou qu'elles prennent la forme d'un *calcul coût-avantage* (ils font X parce que les conséquences de X pour eux sont meilleures que celles de toutes les autres solutions qu'ils sont capables de concevoir) (...) dans d'autres cas, les raisons de l'acteur sont de caractère *cognitif* (comme lorsqu'il accepte une théorie qui ne le concerne pas dans ses intérêts, mais qui lui paraît juste) ou *axiologique* (comme lorsqu'il approuve une action qui ne le concerne pas dans ses intérêt, mais qui obéit à des principes qu'il approuve). (Boudon, 2003, p. 50)

Ainsi, tout comportement ou toute croyance est le fruit de raisons, l'acteur devant être considéré comme ayant de *bonnes* raisons de faire ce qu'il fait ou de croire ce qu'il croit (Boudon, 2003). Ces raisons déterminent différents types de rationalités. Une *rationalité instrumentale* ou *conséquentialiste* (lorsque les raisons qui inspirent l'acteur sont de caractère conséquentialiste, égoïste ou prennent la forme d'un calcul coût-avantage), une *rationalité cognitive* (lorsque les raisons considérées par l'acteur sont les plus vraies, dans la mesure de ses moyens), et une *rationalité* *axiologique* (lorsque les raisons qui guident l'acteur sont fondés sur des valeurs) (Boudon, 2003). La rationalité cognitive englobe mais ne se réduit pas à la rationalité axiologique qui en est un cas particulier, dit autrement la rationalité axiologique est une application au *prescriptif* de la rationalité cognitive qui vise le «vrai», en particulier les croyances vraies (le mot croyance est pris ici comme le substantif couvrant l'ensemble des énoncés incluant le verbe croire : «croire que 2 et 2 font 4», «croire en dieu», «croire à l'efficacité d'un test», etc.) (Boudon, 2003). La rationalité cognitive correspond dans la théorie de la rationalité chez Weber (1971) à la *rationalité théorique* où l'acteur social vise une certaine maîtrise de la réalité par l'élaboration de concepts abstraits toujours plus précis.

Weber considère un autre type de rationalité, la *rationalité pratique* où l'acteur social vise une maîtrise de la réalité par l'utilisation de moyens toujours plus adéquats. La rationalité pratique chez Weber repose sur l'idée que l'acteur social fonctionne partant d'un mode d'action finalisé et elle s'articule selon trois dimensions distinctes : une rationalité des choix, des moyens et des valeurs. La rationalité des choix est dans la liberté du choix des finalités à poursuivre et des moyens à élaborer pour les atteindre. Pour distinguer la rationalité des choix de celle des moyens, on peut imaginer que dans la rationalité des choix l'acteur social est centré, dans sa délibération, sur son choix des moyens en fonction de son choix de finalités, alors que dans la rationalité des moyens, on peut l'imaginer centré uniquement sur l'utilisation de moyens qu'il n'a pas à choisir (Desgagné, 1994). Weber associe cette rationalité des moyens à la rationalité technique, soit une rationalité où l'acteur se représente un ensemble de règles autorisant un agir susceptible d'être reproduit en toute sûreté. La rationalité des moyens est de l'ordre d'un impératif de la nécessité, alors que la rationalité des valeurs est de l'ordre d'un impératif de la conviction. En somme, la rationalité pratique se décline en une rationalité des choix et des moyens (nous retrouvons à travers ces deux rationalités ce que Boudon désigne par la rationalité instrumentale) et une rationalité des valeurs (ou rationalité axiologique pour reprendre la terminologie boudonnienne). En outre, les rationalités instrumentale et axiologique se combinent dans la rationalité pratique, la rationalité axiologique étant une application au prescriptif de la rationalité cognitive ou théorique.

Enfin, soulignons la notion d'agir stratégique chez Habermas qui prend appui sur celle de rationalité pratique chez Weber. Dans l'agir stratégique, selon Habermas, il y a une attitude globale orienté vers le succès. Ce qui est inhérent à l'acte stratégique, c'est qu'il vise le succès auprès d'auditeurs qui peuvent réagir en fonction d'assurer eux-mêmes leur propre succès. On comprend sans peine, au vu de tout ce que nous avons développé précédemment, que l'agir stratégique renvoie surtout à une rationalité pratique que la conception de Weber nous permet de nuancer en une rationalité des choix, des moyens et des valeurs. Nous ne l'avons pas dit, mais le savoir-agir stratégique peut sans peine être vu comme le savoir que manifeste l'acteur dans l'agir stratégique, un agir finalisé, tourné vers le succès dans un environnement contingent. Comme l'indique Desgagné (1994), par exemple chez un enseignant, le savoir-agir stratégique s'articule dans un rapport de fins à moyens et prévoit la réaction d'interlocuteurs-élèves qui eux aussi agissent en fonction d'atteindre leurs propres finalités. Ce savoir-agir stratégique, s'articule également en deux dimensions, l'une avouée, l'autre dissimulée. Ainsi, avec le savoir-agir normatif, toujours en restant sur l'exemple de l'acteur enseignant, ce dernier cherche ouvertement à établir des normes à respecter avec des élèves qu'il se représente comme un groupe à gérer, alors qu'avec le savoir-agir dramaturgique, l'enseignant, de façon plus dissimulatoire, cherche à projeter une image de lui à des élèves qu'il se représente comme un groupe à séduire.

Ce qui précède nous a permis d'expliciter quelques concepts porteurs pour entrer dans l'analyse de ce qui risque d'être mobilisé par l'enseignant dans la coconstruction de situations d'enseignement. Pour conclure, nous dirons d'abord qu'un tel travail conjoint convoque sa didactique praticienne constitué d'un savoir-agir situé, mobilisant un ensemble de ressources (des ressources structurantes au sens de Lave) et guidé par une rationalité pour l'essentiel pratique. On notera l'importance des routines sur lesquelles s'appuie l'enseignant dans sa pratique et ce pour encadrer quelque peu les activités d'apprentissage. La figure 2.10 résume les concepts clés susceptibles de venir éclairer l'analyse de la contribution de l'enseignant.

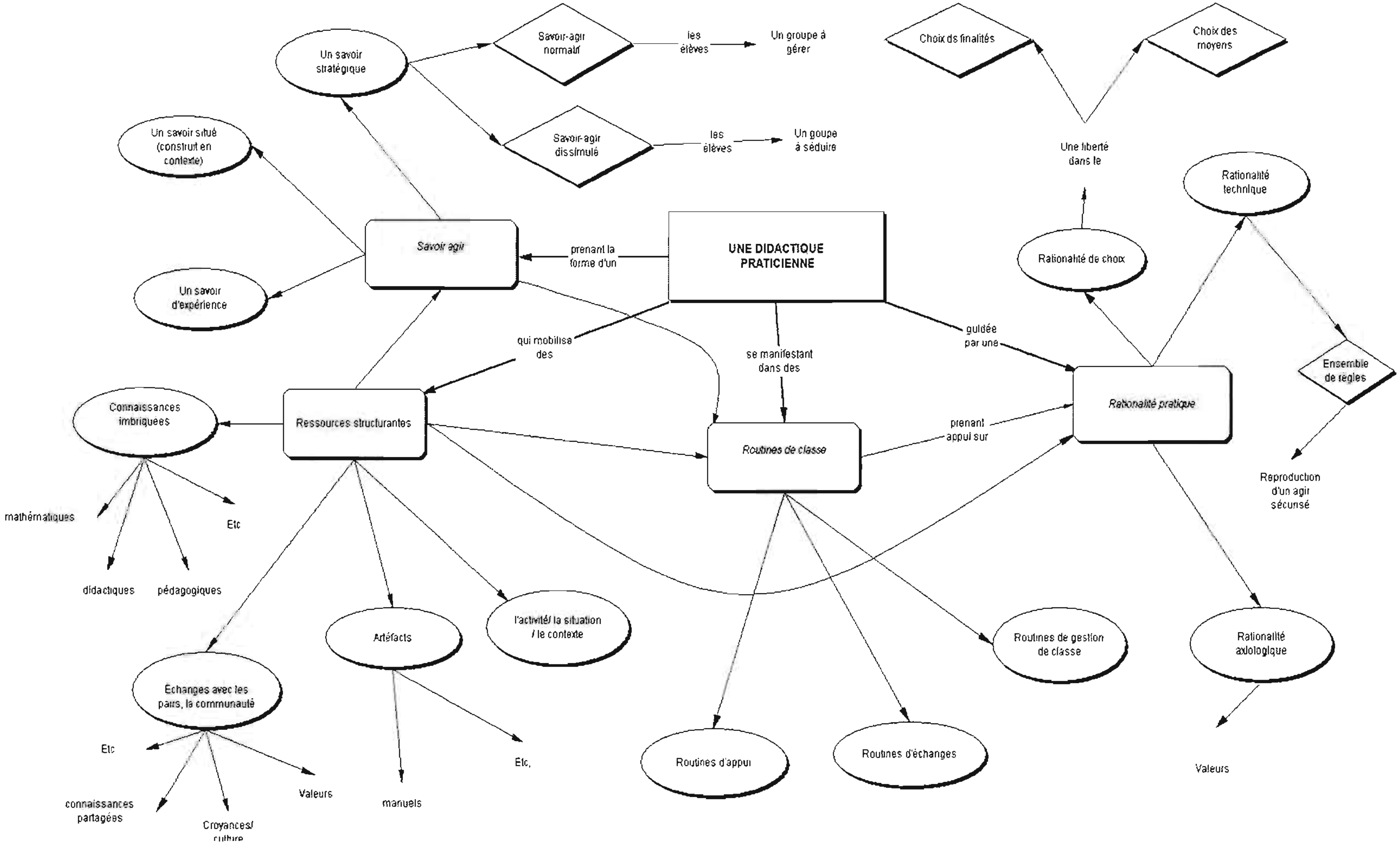



**Figure 2.10 Éléments clés susceptibles de guider l'enseignant dans la contribution conjointe**

À la lumière de ce qui précède, nous pouvons reformuler notre objectif global et indiquer nos questions de recherche.

## 2.4 Objectif revisité et questions de recherche

### *2.4.1 Objectif global de la recherche*

Rappelons que cette recherche est centrée sur l'élaboration, en collaboration avec des enseignants, de situations d'enseignement en dénombrement visant le développement de la modélisation chez les élèves. Notre objectif principal, formulé (à la fin du chapitre 1) en termes des contributions que l'enseignant et le chercheur sont susceptibles d'apporter dans cette construction conjointe, peut maintenant être précisé à la lumière du cadre théorique. Ce dernier nous a en effet permis de préciser sur un plan théorique la nature possible de ces contributions (modèle, modélisation, connaissances mathématiques, connaissances didactiques, artéfacts, savoir-agir, routines, rationalité). Notre recherche vise ainsi à documenter les ressources structurantes que l'enseignant et le chercheur mobilisent dans une telle co-construction, et par là les cadres de référence auxquels puisent la didactique de recherche et la didactique praticienne à l'œuvre dans cette construction conjointe. Nous empruntons ici au concept de ressources défini précédemment (Lave, 1991) et qui est au cœur de la didactique praticienne et de la didactique de recherche.

### *2.4.2 Questions spécifiques de recherche*

Nos questions spécifiques de recherche s'énoncent comme suit : quel éclairage (au sens des ressources structurantes et des cadres de référence mobilisés) enseignant et chercheur amènent-ils sur :

1) les problèmes de dénombrement élaborés ensemble et qui s'inscrivent dans le développement du processus de modélisation?
2) le processus de modélisation par les élèves en lien avec ces problèmes et leur exploitation?

3) l'enseignement visant le développement de ce processus?

Dans le chapitre suivant consacré à la méthodologie utilisée dans cette recherche collaborative, nous présentons la démarche de recherche négociée avec un enseignant de mathématique et qui a débouché sur l'élaboration et l'expérimentation de deux scénarios d'enseignement visant le développement de la modélisation en secondaire 1.

# CHAPITRE III

# CADRE MÉTHODOLOGIQUE

Dans ce chapitre, nous indiquons d'abord pourquoi nous avons choisi de mener une recherche collaborative et ce que nous entendons par ce type de recherche. Ensuite, nous présentons la démarche de recherche dans laquelle nous avons été impliqué, comment, avec quels moyens s'est faite cette recherche. Nous terminons ce chapitre par un retour sur les principaux critères de scientificité de la recherche qualitative et montrons comment ils ont été pris en compte dans cette recherche.

## 3.1 Orientation méthodologique globale

Pour l'essentiel, les recherches didactiques sur la combinatoire orientées vers la conception de séquences ou de situations d'enseignement ont ceci de commun qu'elles s'appuient dans leur élaboration surtout sur les perspectives des chercheurs. Ces séquences ou situations sont élaborées par les seuls chercheurs pour les apprentissages potentiels qu'elles favorisent chez les élèves (Varga et Dumont, 1973; Glaymann et Varga, 1975) et en tenant compte de variables didactiques[66] isolées par eux (Batanero, Godino et Navarro-Pelayo, 1994, 1997; Fischbein et Gazit, 1988). Même si les enseignants sont présents dans certaines de ces recherches, par exemple de par leurs suggestions sur la compréhension et le degré de difficulté des problèmes proposés aux élèves (Batanero et al., 1997), leur rôle est surtout vu par les chercheurs en aval, une fois que ces derniers ont élaboré les séquences et situations que les enseignants ont ensuite la latitude d'exploiter, d'adapter. Ici, comme dans plusieurs recherches de type ingénierie didactique, se pose la question de la viabilité de ces

[66] Entre autres variables mises en évidence, rappelons celle que Batanero et al. (1997) appellent le *modèle combinatoire implicite de l'énoncé*, soit le modèle de sélection, distribution et partition.

séquences ou situations dans la pratique des enseignants dont les perspectives sur les situations élaborées ne sont pas vraiment prises en compte.

Et pourtant, comme l'indiquent Bednarz et al. (2001), les enseignants disposent sur les situations d'enseignement de ressources interprétatives[67] plus ou moins structurées mais éclairées qui aident le chercheur à comprendre le devenir de ces situations dans la pratique. Au-delà de la contribution des enseignants à la mise au point de séquences viables, leur éclairage est également essentiel au développement des connaissances liées à la pratique enseignante (Desgagné et al., 2001). Comme nous l'indiquions dans le chapitre précédent, dans l'optique d'un développement du processus de modélisation par les élèves, il importe d'installer dans la classe une culture de la modélisation (Tanner et Jones, 1994). Or, les enseignants ont une idée de ce que veut dire modéliser (Kyeleve et Williams, 1996 ; Brown, 2002), même si au premier cycle du secondaire ils ne parlent pas forcément de modélisation mais sont aux prises avec la résolution de problèmes ou de situations-problèmes où ce processus de modélisation est implicitement présent. Cette perspective des enseignants sur la modélisation, plus ou moins explicite, est pour nous à prendre nécessairement en compte si l'on veut développer la modélisation, en l'occurrence si on veut installer une véritable culture de modélisation dans la classe. En effet, comme nous l'indiquions dans le chapitre 1, pour ce qui est de la construction de situations d'enseignement, nous privilégions une approche intégrant les perspectives des enseignants qui ont sur leur pratique une compréhension agissante qui éclaire sur la viabilité des situations qu'on leur propose (Bednarz, Poirier, Desgagné et Couture, 2001).

Notre recherche se situe ainsi parmi les recherches dites *participatives* qui ont en commun de faire de la recherche *avec* plutôt que *sur* les enseignants à qui elles

---

[67] Cette notion de « ressource interprétatives », issue de l'analyse émergente des ressources structurantes, sera définie plus précisément plus loin, au chapitre 4.

reconnaissent une «compétence d'acteur en contexte» (Desgagné et al., 2001). Des acteurs qui construisent toujours quelque chose à propos des situations dans lesquelles ils sont engagés et qui y manifestent un certain jugement, un «contrôle réflexif» dira Giddens (1987).

Dans les recherches sur l'enseignement de la combinatoire, le constat d'éloignement des situations élaborées par les seuls chercheurs en dehors de la prise en compte des conditions réelles de pratique nous a amené à nous situer davantage en faveur d'une recherche collaborative, un type particulier de recherche participative en éducation. La perspective que nous adoptons se situe plus dans une perspective de rapprochement entre enseignants et chercheur pour construire un savoir prenant en compte les perspectives des enseignants dans la conception même des situations.

La position du chercheur dans ce type de recherche est celle d'un médiateur qui doit refléter ce que Desgagné (1998) citant Dubet (1994) appelle une double «vraisemblance». Cette double vraisemblance[68] marque chacune des étapes de la recherche collaborative, étapes dites de *co-situation*, *co-opération* et *co-production* au cours desquelles chercheur et enseignant co-construisent des connaissances à propos d'aspects négociés du «savoir enseigner». Mais, qu'entendons-nous par co-situation, co-opération et co-production?

La première étape dans la recherche collaborative est la co-situation qui renvoie à l'esprit collaboratif qui imprègne l'élaboration de la problématique. Il s'agit donc avec la co-situation pour le chercheur de définir un projet de recherche qui rencontre ses préoccupations et celles de l'enseignant, ce qui est tout un défi, surtout lorsque le projet prend appui au départ sur les préoccupations du chercheur. L'enjeu principal à cette étape est la négociation avec les enseignants ayant à prendre part à

---

[68] Nous renvoyons le lecteur aux pages 107 et 114 qui permettent de comprendre comment se traduit la double vraisemblance aux étapes de co-situation, co-opération et co-production dans une recherche collaborative.

cette recherche, dès les premières rencontres de travail, du projet de recherche. La co-situation signifie donc que les aspects travaillés doivent être pertinents pour les enseignants et le chercheur. La deuxième étape dans la recherche collaborative est la coopération qui renvoie à l'esprit collaboratif qui imprègne la démarche de collecte de données. Dans la recherche collaborative la co-opération est le moment où se construit le matériau à analyser à partir des rencontres réflexives aménagées[69]. Bien plus qu'un travail de collecte de données, la co-opération comporte également une amorce d'analyse des données qui se fait concomitamment à la collecte. Le défi principal dans la co-opération est dans l'aménagement de la recherche, c'est-à-dire dans la manière dont on va travailler l'objet sur lequel on veut travailler en tenant compte des contraintes de fonctionnement de l'enseignant et de sorte que cet aménagement donne une voix à l'enseignant et permette une co-construction. La dernière étape dans la recherche collaborative est la co-production qui renvoie à l'esprit collaboratif qui imprègne la démarche d'analyse et de mise en forme des résultats[70]. Pour le chercheur le défi principal de la co-production est qu'il doit aussi dans l'analyse des données, autant que possible, refléter la perspective ou la voie de l'enseignant.

Dans la section suivante, nous revenons sur les différentes étapes de la recherche collaborative et montrons comment elles se sont actualisées dans notre recherche.

---

[69] Dans la recherche collaborative, l'élaboration conjointe des situations d'apprentissage est un moment important de la co-opération. Il constitue le matériau central de la collecte de données.

[70] Notons que dans la recherche collaborative comme la nôtre, à l'étape de la co-production, les produits de la recherche prennent à la fois la forme d'un savoir didactique autour de l'élaboration, la réalisation de situations de modélisation en combinatoire (On est ici sur l'analyse du processus de co-construction et les contributions), et de situations co-construites entre enseignant et chercheur. Une centration sur ce deuxième aspect aurait apparenté davantage cette étude à une recherche-développement.

## 3.2 La démarche de recherche

### *3.2.1 La co-situation ou comment la recherche a débuté*

Comme nous l'avons indiqué précédemment, pour ce qui est de la co-situation, nous avions dès cette étape à penser à notre projet de recherche de sorte qu'il y ait pour les enseignants à solliciter une pertinence à s'y engager. Dans cette optique, nous avons produit un document de présentation du projet (appendice A), une sorte de résumé de la recherche dans lequel les enseignants pourraient voir pour eux la pertinence de travailler le processus de modélisation chez des élèves du premier cycle du secondaire et ce au moyen de problèmes de dénombrement. Le document de présentation du projet de recherche indique que nous avons choisi une entrée pour cela en référence au programme de mathématiques par la compétence à résoudre des situations-problèmes (la compétence 1)[71] en prenant bien soin de montrer que le processus de modélisation pouvait rejoindre plusieurs des composantes de cette compétence (voir à ce propos le tableau 3.1 qui est éloquent) et d'indiquer des retombées possibles pour les enseignants qui voudraient participer à cette recherche telles : enrichir leur banque de problèmes pour travailler la compétence 1; ouvrir sur des interventions possibles favorisant le développement de cette compétence chez les élèves.

**Tableau 3.1 Composantes de la compétence 1 et étapes du processus de modélisation**

| Composantes de la compétence résoudre une situation-problème (MELS, 2003, p. 240) | Étapes du processus de modélisation Maaβ (2005) |
|---|---|
| Décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique, | Définir un *modèle réel* : en simplifiant, structurant, idéalisant la situation de départ |
| Représenter la situation-problème par un modèle mathématique, | Transformer le modèle réel en un *modèle mathématique* : par mathématisation |
| Élaborer une solution mathématique, | Traiter mathématiquement le modèle |

[71] Au moment où la recherche a été conduite, la compétence à résoudre des problèmes était une préoccupation des enseignants.

| Composantes de la compétence résoudre une situation-problème (MELS, 2003, p. 240) | Étapes du processus de modélisation Maaβ (2005) |
|---|---|
| Partager l'information relative à la situation-problème et à la solution proposée | Interpréter les résultats obtenus à partir du modèle mathématique |
| Valider la solution | Valider le modèle construit à la lumière des solutions obtenus et de la mathématisation. |

Rétrospectivement, le défi initial majeur auquel nous avons été confronté à l'étape de co-situation était de penser à une présentation de notre projet de recherche qui rencontre l'intérêt des enseignants en mathématiques au premier cycle, dans un langage qui leur parle et à travers un scénario de recherche «ouvert» qui laissait de la place à des ajustements suite aux discussions avec les enseignants contactés. Ainsi, dans les contacts avec les enseignants, nous avons insisté sur le fait que le scénario de recherche que nous présentions était ouvert au sens où nous étions disposé pour le développement du processus de modélisation à insérer des contenus du programme ciblés par l'enseignant (par exemple de travailler le développement de la modélisation en lien avec des problèmes en arithmétique, algèbre, géométrie), même si nous avons défendu notre penchant pour l'exploitation de problèmes combinatoires auxquels nous trouvons plusieurs qualités. Rappelons que dans le chapitre 1 nous avons montré que la combinatoire comme domaine mathématique offre un terreau fertile pour le développement de la modélisation d'autant plus qu'au Québec, au premier cycle du secondaire, elle n'est pas un objet explicite d'enseignement, les élèves n'ayant donc pas dans la résolution de tels problèmes à appliquer des modèles. Aussi, nous soulignions un autre intérêt des problèmes élémentaires de combinatoire qui n'exigent presque aucun prérequis notionnel de la part des élèves (Kapur, 1970) et sont très peu mathématisés (Grenier et Payan, 1998). Enfin, il importe de noter que les problèmes de dénombrement s'insèrent bien dans la partie du programme du premier cycle du secondaire faisant travailler le sens du nombre et des opérations, ou encore la partie probabilité.

Une fois le document de présentation du projet rédigé, nous avons donc cherché à rejoindre des enseignants du premier cycle (première ou deuxième année du secondaire) de quelques écoles de la région de Montréal. Le choix de ce cycle d'enseignement s'explique par le fait que le nouveau programme de mathématiques y était en cours d'implantation. Les enseignants y sont donc plus susceptibles d'être intéressés par un tel questionnement, un tel sujet. Ces enseignants devaient s'engager sur une base volontaire et surtout, être intéressés par la résolution de problèmes en mathématique. Enfin, nous avons retenu de travailler avec un seul enseignant sur une telle recherche collaborative. Le choix de travailler avec un seul enseignant plutôt que plusieurs se justifie surtout par la complexité (en termes de négociations du projet commun, d'aménagement de ce dernier en respectant les contraintes des participants, d'instrumentation de la recherche, d'engagement de la part des participants) et le caractère ouvert d'une recherche collaborative qui exige de la part du chercheur, lorsqu'elle implique plus d'un enseignant, une grande expérience de recherche ainsi qu'une longue fréquentation voire une très bonne connaissance des milieux scolaires, ce qui pour nous n'est évidement pas le cas.

Toutefois, comme on verra dans la suite de ce travail, même avec un enseignant, pour ce type de recherche, la démarche doit être souple et les rencontres réflexives prévues demandent beaucoup d'attention de la part du chercheur qui en même temps qu'il est très impliqué dans la co-construction doit documenter le processus à l'œuvre, expliciter les ressources mises à contribution de part et d'autre. En plus, dans cette recherche l'idée est plus de voir la richesse d'une démarche d'élaboration conjointe d'une intervention informée par les perspectives du chercheur et de l'enseignant que de généraliser une telle démarche. En ce sens, nous nous rapprochons plus de la méthodologie de l'étude de cas simple (Stake, 1995), l'important pour nous étant l'étude en profondeur du processus de coconstruction avec un enseignant pour en saisir la singularité et la richesse en termes d'éclairages respectifs, voire de regards croisés sur des situations d'enseignement visant le développement du processus de modélisation chez des élèves du premier cycle du secondaire.

Dès le premier contact, un enseignant de secondaire 1 d'une école de la région de Montréal a manifesté son désir de mener avec nous cette recherche qui l'intéressait, surtout en lien avec le développement de la compétence 1. Nous avons porté notre choix sur lui d'autant plus qu'il comptait une dizaine d'années d'expérience au secondaire et semblait avoir une relation privilégiée aux élèves de secondaire 1[72], ce qui sera confirmé par la suite. Nous avons donc convenu avec lui à la fin juin 2006[73], au début des vacances scolaires au secondaire, de travailler ensemble la prochaine année scolaire à l'élaboration et à l'expérimentation de scénarios d'enseignement visant le développement de la modélisation au secondaire 1.

### *3.2.2 La co-opération ou la collecte des données*

À l'étape de la co-opération, chercheur et enseignant doivent s'entendre sur le mode de fonctionnement qu'ils voudraient explicitement mettre en place. La co-opération est une étape cruciale dans la mesure où elle est le moment où se construit le matériau à analyser à partir des rencontres réflexives aménagées. De façon générale, dans cette recherche les rencontres réflexives ont consisté en une alternance entre construction de situations, expérimentation en classe et retour sur cette

---

[72] Avant cette rencontre avec l'enseignant, nous avons eu un riche échange téléphonique avec lui au cours duquel il affirmait qu'il avait une approche très humaine des mathématiques. À notre première rencontre, il précisera qu'il voulait dire par là qu'il encourageait beaucoup les élèves, qu'il essayait de les mettre à l'aise, et qu'il les aimait!

[73] La première rencontre avec l'enseignant a eu lieu exactement le 26 juin 2006 et a duré près d'une heure. Déjà à cette rencontre, l'enseignant indiquait les étapes dans l'année qu'il considérait comme les plus propices pour notre travail conjoint, soit les 2$^{e}$ et 3$^{e}$ étapes, car selon lui à la première étape en secondaire 1 les élèves sont en phase d'adaptation à leur nouveau environnement et ne travaillent pas bien en équipes, et à la dernière étape les élèves ont tendance selon lui à se protéger les uns et les autres. Pour notre part, nous avons profité de cette rencontre pour solliciter une entrevue avec l'enseignant avant que ne débute les rencontres de travail et le sensibiliser à certaines des exigences de la collecte des données à venir : l'enregistrement des rencontres, la possibilité de filmer des séances de classe et l'obligation d'avoir les autorisations des parents d'élèves. Sur toutes ces questions nous sommes entendus, ce qui augurait d'une fructueuse collaboration.

expérimentation. Dans ce qui suit, nous décrivons les deux étapes principales de notre collecte de données, puis élaborons sur chacun des instruments de collecte de données utilisés. Toutefois, nous tenons à préciser que c'est à la suite de l'entrevue préalable à la recherche que nous avons eue avec l'enseignant (entrevue sur laquelle nous revenons à la fin de cette section car elle constitue un matériau complémentaire) qu'il a été convenu d'élaborer ensemble deux scénarios d'enseignement visant le développement de la modélisation en secondaire 1 et qui seront expérimentés dans deux classes à la deuxième et à la quatrième étape de l'année.

#### 3.2.2.2 Étape 1 : Autour de l'élaboration d'un premier scénario

Trois rencontres réflexives étalées sur la période allant d'octobre à novembre ont été nécessaires pour arriver à un premier scénario. Lors de ces rencontres réflexives les discussions avec l'enseignant ont porté sur l'analyse des problèmes à exploiter, l'anticipation de la résolution par les élèves de ces problèmes, les modifications éventuelles à apporter à ces problèmes, l'approche de l'animation en classe autour de ces problèmes et la planification plus précise du scénario. Pour amorcer l'élaboration du scénario 1, 5 problèmes ont été proposés par le chercheur (appendice C1) à la première rencontre. Cette première rencontre est analysée en détails dans le chapitre 4. Ensuite, deux autres rencontres ont suivi pour permettre au chercheur d'intégrer les observations et propositions de l'enseignant, valider auprès de lui différents aspects discutés, ce qui nous a permis d'aboutir à un premier scénario (voir l'annexe C4 pour les problèmes effectivement exploités en classe avec les élèves).

C'est le lieu de souligner un aménagement inattendu survenu après la première rencontre réflexive d'élaboration du scénario. Après celle-ci nous avions convenu, parce que la prochaine rencontre était trop rapprochée, de continuer d'échanger par courriels sur les problèmes. C'est en relisant notre journal de bord dans lequel nous avions gardé des traces de tous les courriels échangés avec l'enseignant que nous nous sommes rendu compte qu'une bonne partie de l'activité réflexive s'était faite sur un mode virtuel. La virtualité s'est donc invitée dans notre collecte de données, surtout elle nous aidait à mieux préparer nos rencontres de travail qui se déroulaient en fin de journée au début de la recherche et, a ceci de singulier qu'elle a quelque peu changé le script de cette recherche. Nous n'avions nulle part entrevu ce mode de fonctionnement durant la collecte. Ce n'était pas tout simplement dans notre script!

Une fois ce scénario disponible, il a été expérimenté sur une durée de trois semaines, en 3 périodes de 1h18 mn chacune, dans deux des quatre classes de l'enseignant[74]. Un autre aménagement inattendu que nous devons souligner est «le récit de l'expérimentation commenté» d'abord par le chercheur puis par l'enseignant. En effet, par hasard, nous nous étions rendu compte que l'enseignant s'intéressait aux notes que nous prenions en classe, il nous questionnait là-dessus. Nous avons eu l'idée de lui envoyer, là encore par courriels, le récit complet de l'expérimentation que nous composions au fur et à et mesure à l'aide de ces notes et lui avons proposé, sur une suggestion heureuse de notre comité, d'annoter si possible ce récit. Il s'est prêté au jeu, ce qui nous a permis de disposer de données riches rendant compte de nos regards croisés lors de l'animation de ce scénario[75] (voir l'appendice C8 pour avoir une idée des récits commentés). Ce premier récit commenté est analysé dans le chapitre 4.

Enfin, une rencontre bilan de 1h 30 mn a eu lieu le 19 décembre 2006, quelques semaine après l'expérimentation du premier scénario (voir l'appendice C9

---

[74] Pour ce qui est du critère de choix de ces deux groupes, nous avions fait notre celui de l'enseignant qui tenait à ce que l'expérimentation se fasse dans un groupe «fort» et un autre groupe «moins fort», académiquement parlant. Quant à la constitution des équipes dans chaque classe, c'est l'enseignant qui s'est occupé de la formation des binômes.

[75] Il y a à méditer sur tous ces «inattendus» du terrain qui demandent une certaine ingéniosité ou à défaut, un très bon encadrement de la part des comités de recherche. Dans la recherche en train de se faire, j'y étais un peu préparé par mon équipe de recherche, une des compétences du chercheur est de pouvoir s'adapter à ces événements qui se jouent de nos scénarios de recherche.

pour ce qui est du canevas utilisé). À cette rencontre, avec l'enseignant nous sommes revenus sur quelques productions d'élèves mais aussi sur le déroulement global de l'expérimentation. Ce retour a aussi été l'occasion pour nous deux d'amorcer la réflexion sur l'élaboration du second scénario que nous décrivons dans ce qui suit.

#### 3.2.2.3 Étape 2 : Autour de l'élaboration du deuxième scénario

L'élaboration du deuxième scénario et le retour sur celui-ci a nécessité moins de rencontres (au total deux), la relation que nous avons tissée avec l'enseignant ainsi que les nombreux courriels échangés[76] sur les problèmes du scénario entre les deux seules rencontres que nous avons eues aidant.

La rencontre réflexive d'élaboration du scénario 2 a eu lieu six mois après, le 29 avril et a duré 1h 38 mn, sur le même mode que les rencontres précédentes ayant permis l'élaboration du scénario 1. En appendice (C5, C6 et C7) nous présentons les trois versions successives du scénario 2 élaborées ensemble, la dernière étant celle qui a été effectivement exploitée dans les mêmes groupes[77]. L'expérimentation du scénario 2 s'est étalée sur 3 semaines de suite durant le mois de mai, à raison de 4 périodes pour chacun des deux groupes. Là aussi, un deuxième récit d'expérimentation a été rédigé et commenté par le chercheur puis par l'enseignant; ce récit fait l'objet d'une analyse détaillée au chapitre suivant. Enfin, une rencontre bilan a eu lieu après l'expérimentation, d'abord autour du scénario 2 puis nous avons

---

[76] Par exemple, nos échanges ont porté sur une proposition d'atelier sur la thématique de « l'exploitation des problèmes de dénombrement pour développer la compétence 1 en secondaire 1 » dans le cadre du colloque du Groupe des Responsables en Mathématiques au Secondaire qui a eu lieu en juin 2007 à Trois-Rivières (colloque auquel nous avons effectivement pris part en co-animant cet atelier qui avait été retenu par les organisateurs), ou encore nous avons discuté de l'élaboration du scénario 2, l'enseignant ayant émis le souhait d'exploiter des problèmes débouchant sur les « suites numériques », un contenu mathématique qu'il devait aborder à la quatrième étape.

[77] Pour la constitution des équipes lors de l'expérimentation du scénario 2, l'enseignant tenait cette fois-ci que les groupes soient formés au hasard, le but poursuivi étant d'amener les élèves à développer la capacité à travailler avec n'importe quel co-équipier.

procédé à un retour global sur les deux scénarios (voir l'appendice C10 pour ce qui est du canevas utilisé lors du bilan final).

3.2.2.1 Complément : une entrevue semi-structurée préalable

Comme complément, une entrevue préalable avec l'enseignant a été conduite bien avant aux étapes que nous avons présentées précédemment. Cette entrevue préalable avec l'enseignant était une entrevue semi-dirigée (Savoie-Zajc, 1997) et avait pour objectif de nous aider à expliciter les balises de travail principales de l'enseignant en vue du projet conjoint d'élaboration de scénarios d'enseignement visant le développement de la modélisation au premier cycle du secondaire. En effet, dans cette recherche on connaît le cadre de référence du chercheur qui sera à l'œuvre dans la construction (chap. 2), mais on connaît mal a priori celui de l'enseignant, d'où l'importance de cette entrevue. La première partie du chapitre 4 est consacrée à l'analyse de cette entrevue préalable qui a eu lieu le 05 octobre 2007 et a duré 1h 10mn (voir l'appendice B1 pour ce qui est du canevas de cette entrevue).

Dans ce qui suit, nous élaborons davantage sur les instruments de collecte de données, qui prennent place à l'intérieur de cette démarche.

3.2.2.4 Instrumentation de la recherche

**Des rencontres réflexives**

Pour chacune des rencontres de travail que nous avons eus avec l'enseignant, il y avait une activité réflexive[78] à installer, entendue comme une activité où en se

78 Dans la recherche collaborative, l'idée d'activité réflexive empruntée à l'ethnométhodologie est centrale au plan méthodologique. La réflexivité renvoie aux activités aménagées et familières aux membres (dans notre cas, aux enseignants), dans lesquelles ils décrivent, questionnent leurs pratiques, et construisent ainsi le sens, de ce qu'ils sont occupés à faire dans un «bricolage permanent» (Coulon, 1993, p. 28). Le chercheur collaboratif doit donc créer une activité réflexive qui s'inscrit dans les pratiques des enseignants et à travers lesquels les enseignants livrent leurs codes de pratiques qui sont

penchant sur la problématique du développement du processus de modélisation l'enseignant et le chercheur explicitent le ressources voire les cadres de référence qu'ils mobilisent dans cette co-construction (Desgagné, 2001). Dans cette recherche nous avions deux types de rencontres réflexives : des rencontres de construction des scénarios (voir les appendices C2 à C7 pour avoir une idée des problèmes discutés et des scénarios élaborés) et des rencontres de retour, le matériau utilisé lors de ceux-ci étant constitué des notes du chercheur et des observations des deux sur ce qui s'est passé lors de l'expérimentation en classe, par exemple à partir des traces des productions d'élèves (voir les appendices B1, C9 et C10 pour avoir une idée des canevas utilisés lors de ces retours). Toutes ces rencontres réflexives ont été enregistrées et transcrites.

**Le journal de bord du chercheur...et les récits commentés**

Le journal de bord du chercheur est une sorte de «mémoire vive» de la recherche (Savoie-Zajc, 1996) qui permet au chercheur de rester réflexif pendant la recherche en y inscrivant des impressions et réflexions et de se souvenir des événements, quels qu'ils soient. Dans notre journal de bord, nous avons consigné comme le suggèrent Deslauriers (1991) et Savoie-Zajc (1996), des notes de trois ordres : des notes descriptives (sur les lieux de la recherche, les acteurs, les événements et activités), des notes théoriques (les questions qui émergent et les réponses ou explications apportées, les liens avec des aspects de notre cadre théorique, des réflexions de toutes sortes) et enfin des notes méthodologiques (les problèmes rencontrés, les modifications apportées au devis de recherche et les critères des choix qui ont été faits, les réaménagements éventuels de canevas d'entrevue). Dans notre cas, nous soulignons la présence dans notre journal de bord des traces des nombreux courriels échangés avec l'enseignant et qui nous ont permis non seulement de prendre conscience d'une activité réflexive virtuelle à l'œuvre, mais aussi de

des savoirs pratiques encapsulés dans des routines (Leinhardt et Greeno, 1986), renvoient à une certaine didactique praticienne.

composer ce que nous avons appelé des « récits commentés » qui se sont avérés être un matériau précieux eu égard aux éclairages à documenter de part et d'autre.

**Une entrevue semi-structurée préalable**

Comme nous l'avons indiqué dans ce qui précède, une entrevue semi-structurée a été conduite avant que débute le travail conjoint d'élaboration et d'expérimentation des scénarios. Pour ce qui est des entrevues nous pouvons distinguer plusieurs types : entrevue structurée, semi-structurée, libre (Boutin, 2000), d'explicitation (Vermersch, 2000), etc. Comme outil de collecte de données l'entrevue semi-dirigée (Savoie-Zajc, 1997) se situe quelque part entre le questionnaire (entrevue structurée) et la conversation (entrevue libre) (Van der Maren, 1995). L'entrevue semi-structurée exige pour être bien conduite que le chercheur élabore avec soin un canevas d'entrevue (Wengraf, 2001). Dans cette recherche, le choix de l'entrevue semi-structurée se justifie par le fait qu'elle nous apparaît un compromis raisonnable entre une entrevue structurée qui suppose la connaissance des catégories qui sous-tendent le cadre de référence de l'enseignant (de par les questions fermées qu'elle pose), ce qui n'était pas ici le cas, et une entrevue libre sans référence à aucune catégorie. Cette entrevue semi-dirigée a donc été conduite avec un protocole construit selon certaines thématiques, guidées par les notions d'expérience (visant à dégager le savoir d'expérience de l'enseignant) et d'épistémologie professionnelle (visant à dégager sa rationalité sous-jacente à sa pratique d'enseignant), de pratique effective d'enseignement, de rapport aux élèves et à leur apprentissage des mathématiques, des éléments qui nous permettent de mieux comprendre sa didactique praticienne) (voir l'appendice B1 pour plus de détails sur ces thématiques).

Dans la section suivante, nous aborderons la co-production, soit l'étape d'analyse des données dans cette recherche.

### *3.2.3 La co-production ou comment s'est faite l'analyse des données de la recherche*

La coproduction dans le modèle de la recherche collaborative est l'étape de l'analyse des données issues de l'interaction entre chercheurs et praticiens et, de production du savoir visé, savoir qui doit refléter les préoccupations des chercheurs et des praticiens ainsi que les mondes qu'ils représentent. Pour le chercheur collaboratif, à cette étape, un des défis tenaces est de faire entendre la voix des praticiens et d'harmoniser leurs voix avec sa voix dans la production de ce savoir (Desgagné, 2007). Il y a un critère de double vraisemblance qui doit guider le chercheur collaboratif à cette étape-ci (mais aussi aux étapes précédentes) et qui se décline en un critère de–«double fécondité des résultats», c'est-à-dire des résultats que le chercheur doit présenter de sorte qu'ils intègrent les catégories des enseignants et qu'ils soient crédibles pour les deux communautés en jeu.

Dans le processus de l'analyse, en recherche collaborative, il importe que le chercheur se place dans un premier temps dans une posture restitutive qui l'oblige à rendre compte des perspectives des praticiens et ce, autant que possible, dans leurs termes, leurs vocables à eux (Demazière et Dubar, 1997). Seulement après pourra-t-il procéder à un retrait critique, se placer dans une posture analytique qui l'autorise à interpréter les points de vue des praticiens. Dans cette recherche nous avons procédé à une analyse de contenu des différents verbatims inspirée de la théorisation ancrée (Glaser et Strauss, 1967). Dans les lignes qui suivent nous présentons cette méthodologie d'analyse et le sens particulier qu'elle revêt pour nous.

La théorisation ancrée comme méthodologie a été au départ développée en collaboration par Barney Glaser et Anselm Strauss, deux sociologues issus respectivement des universités de Chicago et de Columbia aux États-Unis[79]. Dans

---

79 Alors que Glaser a été profondément marqué par les perspectives interactionnistes et le pragmatisme, Strauss lui a été beaucoup influencé par les travaux de Paul Lazarsfeld professeur à l'université de Columbia et considéré comme un des précurseurs les plus innovateurs de ce qu'il est

l'approche par théorisation ancrée on recourt à un ensemble de procédures de codage et d'analyse qui permettent de façon inductive de développer une théorie ancrée à propos d'un phénomène. Ces procédures sont le *codage ouvert* (open coding), le *codage axial* (axial coding) et le *codage sélectif* (selective coding). Ces procédures permettent de codifier le matériau à analyser (dans notre cas les différents verbatims et les deux récits commentés) et par la suite d'organiser les données ainsi codifiées. Dans la théorisation ancrée, la codification est une étape importante du processus d'analyse des données et elle exige du chercheur de faire constamment des comparaisons et de se poser des questions : ces deux aspects en sont des piliers et aident à donner aux concepts issus d'une théorisation ancrée, leur précision et spécificité (Strauss et Corbin, 1990).

Le codage ouvert est le processus qui permet de partitionner voire de fractionner les données, de les étudier, comparer, conceptualiser et regrouper en catégories. Une première étape consiste à repérer et à nommer des thèmes qui sont une sorte de classement, mais qui émergent du matériau. À ce stade, une précaution est de la plus grande importance pour le chercheur. Il doit rester près de ce que Glaser et Strauss (1967) appellent le substantif, c'est-à-dire tenir compte le plus fidèlement possible des termes, des mots utilisés par les acteurs, éviter tous ces glissements qui l'amènent, dès fois à son insu, à privilégier des dénominations qui reflètent son cadre à lui et qui l'éloignent peu ou prou des données à analyser. Dans la perspective d'une théorisation ancrée, on évitera de plaquer sur les données, et ce à quelque étape de l'analyse, une grille prédéterminée. Toutefois, sans que cela constitue une grille construite et à appliquer aux données, dans le codage ouvert le chercheur part déjà

convenu maintenant d'appeler la recherche qualitative. Les cadres de référence respectifs de Glaser et Strauss ont donc, comme on l'imagine, fortement teinté leur collaboration et l'approche qu'ils ont contribué à mettre au point et qui aujourd'hui est utilisée par des chercheurs de tous les horizons. Plusieurs ouvrages exposent, précisent ou développent la perspective ou la conceptualisation des auteurs : *The discovery of grounded theory* (Glaser et Strauss, 1967), *Theoretical sensivity* (1978), *Basics of qualitative research* (Strauss et Corbin, 1990) et *Grounded theory in practice* (Strauss et Corbin, 1997). Pour notre part, nous nous sommes référés à ces ouvrages, mais aussi à la synthèse éclairante que Desgagné (1994) offre dans sa thèse de l'analyse par théorisation ancrée.

avec un projet théorique précis, ce projet c'est l'objet de recherche construit dans la problématique (Desgagné, 1994) et qui l'amène à être à l'affût de ces thèmes mêmes qui éclairent son objet. Tout ceci pour dire que le rôle du chercheur n'est pas passif dans le repérage et l'organisation des thèmes, il puise d'une certaine façon, explicitement ou implicitement aux concepts qui lui ont servi à construire la problématique à propos de son objet et de sa question de recherche (Desgagné, 1994), certes dans une moindre mesure que dans le codage axial et dans le codage sélectif que nous abordons dans la suite.

Dans le codage axial, il s'agit de faire des liens entre les différents thèmes, voir comment ces thèmes s'articulent, se hiérarchisent entre eux et en tirer une certaine organisation axiale. Ici, nous parlons d'abord des liens implicites déjà présents dans le discours des acteurs. Le processus de mise en relation des thèmes (ou *dimensionalizing*) débouche sur des catégories et ce processus, comme dans le cas du codage ouvert, n'échappe pas au projet théorique du chercheur, le chercheur prenant plus de place à cette étape de l'analyse. Ses catégories propres commencent à dialoguer un peu plus avec les thèmes issus du matériau, mais aussi les catégories émergentes interagissent avec les thèmes mis en évidence lors du codage ouvert. Pour construire les axes le chercheur fait plus que dans le codage ouvert interagir le formel (ses désignations) avec le substantif (les désignations des acteurs), il va puiser plus dans ses propres concepts, mais des concepts qui permettent à l'organisation interne ancrée dans les données de s'incarner (Desgagné, 1994).

Dans le codage sélectif, en partant des thèmes et catégories retenus, le chercheur tente de donner un sens à l'organisation que ces thèmes et catégories construisent en rapport à son objet de recherche[80]. Là également, le chercheur prend

[80] Ici, et même bien avant dans les codages ouvert et axial, le recours à des mémos théorique peut faciliter ce travail de mise en relation. Avec les mémos, l'idée est de s'arrêter sur certaines catégories, voir comment certains écrits les éclairent, puis de revenir aux données et de mentionner les idées, intuitions, liens avec d'autres catégories, avenues ou hypothèses à explorer qui apparaissent au chercheur, et ceci dans une forme qui laisse de la place à la fois à une liberté de réflexion et d'écriture

plus de place que dans le codage axial, son cadre de référence est plus présent, et le défi dans l'organisation qu'il tente est à la fois de ne pas faire dire aux acteurs ce qu'ils ne disent pas, d'utiliser les mots et expressions qu'utilisent les acteurs. Il s'agit donc pour le chercheur, avec le codage sélectif, d'arriver à une organisation de sens qu'il construit à partir des données analysées. Le codage sélectif ressemble à bien des égards au codage axial, mais se situe à un niveau d'analyse plus élevé et abstrait. Ici, le défi est surtout d'intégrer les différentes catégories pour construire une théorie ancrée ou émergente que (Desgagné, 1994) définit comme «la conceptualisation que le chercheur construit à partir de l'organisation de sens qu'il dégage des données analysées» (p. 84).

Dans cette recherche le codage a été fait, mis à part les récits commentés, à l'aide du logiciel Atlas-Ti (4.1). Ce logiciel a surtout aidé lors du codage ouvert, la suite du codage (axial et sélectif) s'étant fait à l'aide de mémos théoriques comme nous l'avons indiqué précédemment et, par révision par notre comité de recherche des catégories générées.

En somme, l'important dans une telle théorisation est que l'analyse soit itérative et qu'elle ne porte pas sur un corpus constitué d'un coup. Dans la recherche collaborative la théorisation ancrée prend le sens particulier d'un dialogue qui s'établit, de la part du chercheur qui mène le travail, entre les catégories de sens du praticien et celles du chercheur (Desgagné, 1998). Ainsi, retraçant sa recherche collaborative sur le parrainage, Desgagné (1998) affirme que la "théorie ancrée" lui semblait appropriée pour retracer une certaine cohérence derrière le discours des mentors et que :

> le travail d'analyse dans la "théorie ancrée" n'est jamais rien d'autre qu'un dialogue qui s'établit, de la part du chercheur qui mène le travail, entre les catégories de sens des praticiens issues de leur discours en situation de

---

(il n'est pas important de trop s'attarder sur la forme, la correction grammaticale) : on est plus sur le mode du remue-méninges. Il s'agit donc, avec les mémos, d'une étape intermédiaire incontournable dans la théorisation ancrée qui prépare l'interprétation finale des données (Glaser, 1987).

> parrainage à propos de la discipline de classe, et les catégories de sens des théoriciens-chercheurs issus, entre autres, des études déjà réalisées sur le savoir pratique des enseignants et sur la discipline de classe, études qui permettent de rendre disponibles un certain nombre de concepts susceptibles d'éclairer l'analyse. (p. 93)

Desgagné avance donc la notion de *concepts disponibles* pour évoquer tous ces concepts qui se situent dans le champ théorique de l'objet et qui peuvent aider à donner une cohérence au discours du mentor, mais comme il le précise de tels concepts passent dans l'usage qu'en fait le chercheur obligatoirement par un processus de reconstruction de sens, à défaut de quoi on retomberait dans les catégories prédéterminées que rejettent les tenants de la théorisation ancrée[81]. La notion de «concepts disponibles» nous apparaît une manière intéressante d'intégrer les critiques faites à la théorisation ancrée. Ces critiques (Berthier, 1996), tout en saluant le projet de refuser une démarche de théorisation toujours "applicationniste", soulignent l'imposture qui consiste à croire à la génération spontanée de la théorie et à faire l'impasse sur les schémas perceptifs du chercheur. Il s'agit d'éviter de tomber dans une certaine naïveté qui consiste à croire que les données parlent d'elles-mêmes.

À la lumière du cadre théorique de cette recherche, quelques concepts se révèlent potentiellement riches pour éclairer les ressources structurantes (concept central/ voir section 2.3.1) mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans cette coconstruction. Tout d'abord, il y a les concepts de *modèle* (les modèles émergents ou spontanés des élèves), de *modélisation* (les phases de formulation et de validation), les notions de *mathématisation horizontale et de modélisation émergente* (en lien avec l'approche retenue pour initier à la modélisation), de *culture de modélisation* (en rapport avec la gestion des activités de modélisation dans la classe). D'autres concepts porteurs pour l'analyse sont ceux de *routines* (voir section 2.3.3), *rationalité* (voir section 2.3.4). D'autres nous le verrons par la suite vont de fait s'avérer des

---

[81] Rappelons qu'à l'origine le projet de Glaser et Strauss avec la théorisation ancrée était de prôner un « retour » aux données par le refus de convoquer tout azimut dans l'explication des phénomènes sociaux des catégories prédéterminés qui dans biens des cas sont inadéquats.

concepts théoriques porteurs, nous y reviendrons lors du chapitre 4. Le tableau 3.2 résume nos questions de recherche, les instruments de collecte des données qui permettent de répondre à chacune de ces questions et quelques concepts disponibles pour l'analyse par théorisation ancrée.

**Tableau 3.2 Sommaire des questions de recherche, instruments de collecte et concepts à cette étape porteurs pour l'analyse**

<table>
<tr><th colspan="2">Questions de recherche</th><th>Instruments de collecte de données</th><th>Théorisation ancrée : concepts disponibles</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Quel éclairage chercheur et enseignant amènent-ils sur</td><td>• les problèmes à la base du processus de modélisation<br>• les scénarios élaborés autour de ces problèmes?</td><td>• entrevue individuelle semi-structurée (explicitant le cadre de référence de l'enseignant)<br>• rencontres réflexives de construction de problèmes et de scénarios d'enseignement (explicitant ce qui est mobilisé de part et d'autre dans ces choix, cette co-construction)<br>• journal de bord du chercheur (explicitant, entre autres, le cadre de référence du chercheur)</td><td rowspan="3">• Ressources structurantes<br>• modèle et modélisation émergent(e)<br>• mathématisation horizontale<br>• culture de modélisation<br>• routines<br>• -rationalité ...</td></tr>
<tr><td>le processus de modélisation par les élèves?</td><td rowspan="2">• rencontres réflexives d'anticipation de la résolution par les élèves et de retour sur les séances en classe à partir des notes d'observation, des traces de productions d'élèves (explicitant l'analyse a postériori de ce qui s'en dégage, l'interprétation de part et d'autre)<br>• journal de bord du chercheur (notes d'observation, réflexion) et récits commentés</td></tr>
<tr><td>l'enseignement en classe visant le développement de ce processus de modélisation?</td></tr>
</table>

Pour finir ce chapitre, nous revenons sur certains des critères de rigueur et de validité en recherche qualitative et montrons de quelles façons ils ont été pris en compte dans cette recherche collaborative.

## 3.3 Des critères de rigueur et de validité dans cette recherche collaborative

Deux des critères que nous considérons ici sont ceux à l'aune desquels la plupart des chercheurs se réclamant des méthodologies en recherche qualitative évaluent la rigueur et la validité de leurs recherches, même si dans l'application de ces critères des nuances (voir de vraies différences) plus ou moins grandes existent. Il s'agit des critères de validité interne renvoyant surtout à la justesse des résultats, les critères de fiabilité qui renvoient à la reproductibilité de ces mêmes résultats (Laperrière, 1997)[82].

En lien avec la validité interne, nous avons tenté autant que possible d'être transparent dans notre démarche, d'être cohérent avec l'approche privilégiée dans l'élaboration des scénarios qui se voulait une rupture avec d'autres approches en didactique des mathématiques dans lesquelles les perspectives des enseignants ne sont pas vraiment prises en compte. Ce souci d'intégrer la perspective de l'enseignant justifie la nécessité de l'entrevue préalable qui nous a permis d'expliciter le cadre sous-jacent à la pratique de l'enseignant et qui se reflète dans les ressources mobilisées par ce dernier (voir la première partie du chapitre 4 consacrée à l'analyse de cette entrevue préalable). De plus, une relation privilégiée s'est heureusement établie avec l'enseignant à qui nous nous sommes totalement ouvert sur la démarche de recherche dans laquelle nous l'impliquions et qui s'est prêté au jeu en acceptant de rendre visible pour nous sa pratique et de donner son point de vue pendant et après la recherche[83]. Nous noterons différentes triangulations utilisées dans cette recherche. Tout d'abord, nous avons eu recours à diverses sources de données (verbatims des rencontres réflexives et des rencontres bilan, récits commentés par le chercheur et l'enseignant, journal de bord) qui permettent de reconstruire le processus de d'élaboration conjointe des scénarios d'enseignement visant le développement de la modélisation en secondaire 1.

---

[82] Il y a aussi les critères de validité externe qui visent à la généralisation, la représentativité des résultats.

[83] Pendant la recherche à travers les « débriefings » informels que nous avions après chaque période d'expérimentation, durant les rencontres réflexives ou avec les récits qu'il annotait ; après la recherche en contribuant à préparer et co-animer un atelier destiné à des enseignants, en validant notre analyse de l'entrevue préalable dans laquelle il a affirmé de reconnaître complètement.

Quant aux critères de fiabilité elles sont inscrites dans le dispositif même de cette recherche dans laquelle notre souci tout au long du processus était de croiser notre perspective avec celle de l'enseignant[84], l'enjeu dans cette recherche ayant été, comme nous l'indiquions dans le cadre théorique, de faire rencontrer le sens que nous construisons avec celui de l'enseignant à propos des problèmes choisis à la base du processus de modélisation, des scénarios d'enseignement élaborés autour de ces problèmes, du processus de modélisation par les élèves[85] et d'un enseignement visant le développement de ce processus de modélisation.

Au-delà des critères de validité interne/externe et de fiabilité, mentionnons un critère de double vraisemblance qui s'applique aux trois étapes d'une recherche collaborative. À l'étape de la co-situation, la double vraisemblance renvoie au critère de «double pertinence sociale» qui se traduit par la définition par le chercheur d'un projet d'investigation qui rencontre les préoccupations de deux communautés (une communauté de praticiens pour les enseignants et une communauté de recherche). À l'étape de la co-opération, le critère de double vraisemblance se décline en un critère de «double rigueur méthodologique» qui se traduit par l'élaboration par le chercheur d'une approche de questionnement pratique qui est en même temps un dispositif de collecte de données. À la dernière étape dans la recherche collaborative, la co-production, le critère de double vraisemblance se décline en un critère de «double fécondité des résultats» se traduisant pour le chercheur par la présentation de résultats intégrant les catégories des enseignants et des chercheurs et qui soient crédibles pour les deux communautés. Le compte rendu que nous avons fait dans ce chapitre de la

---

[84] Mais aussi les perspectives du chercheur avec d'autres chercheurs, notamment notre comité de recherche auprès de qui nous validions notre codage ainsi que les catégories qui émergeaient de nos différentes analyses et interprétations.

[85] Les rencontres s'appuient sur les productions des élèves, qui forment en quelque sorte un outil de travail dans les rencontres entre l'enseignant et le chercheur. Ces productions ne sont toutefois pas des données dans cette recherche. Notre étude ne porte en effet pas sur l'apprentissage des élèves, mais bien sur les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans le regard qu'ils portent sur ces productions.

co-situation et de la co-production montre à la fois une double pertinence de ce projet de recherche ainsi qu'une double rigueur méthodologique qui transparaît dans le dispositif de collecte de données installé qui a permis à l'enseignant, entre autres, de questionner son approche de la résolution de problèmes, d'élargir sa perspective sur la modélisation (sur ces deux aspects, voir les chapitres 4 et 5 qui en parlent). Quant à la double fécondité des résultats, elle est manifeste dans la présentation et l'interprétation faites des résultats de cette recherche qui portent précisément sur les ressources, catégories mobilisées par l'enseignant et nous-même dans l'élaboration des scénarios.

Enfin, mentionnons les précautions éthiques prises avant et pendant la recherche. Dans un premier temps, nous avons formulé une demande d'approbation déontologique liée à notre recherche et nous sommes engagé à nous conformer à ces règles auprès de la direction de notre programme d'études qui nous a, à cet effet, autorisé à la poursuivre. Dans un deuxième temps, une fois que nous avons eu l'accord de l'enseignant avec qui cette recherche devait être menée, après l'avoir informé de celle-ci, des conditions, de la confidentialité des données, et après avoir obtenu son acceptation, nous avons informé les parents de la participation de leurs enfants à cette recherche collaborative, leur consentement pour l'enregistrement des séances en classe étant nécessaire. À cette fin, nous avons apprêté une lettre de consentement (voir annexe B2) qui a été proposée à l'enseignant après l'entrevue préalable et dans laquelle nous nous engagions auprès des parents à veiller à ce que les activités expérimentées ne pénalisent aucunement leurs enfants dans les apprentissages prévus et à préserver la confidentialité des données collectées. L'enseignant a accepté la formulation de cette lettre qui a été distribuée dans les deux classes concernées par la recherche. Tous les parents d'élèves ont donné l'autorisation à leurs enfants de participer à notre recherche, sauf un qui n'autorisait pas qu'on filme son enfant lors de la réalisation en classe d'activités l'impliquant. Pendant la recherche, nous avons respecté tous nos engagements et, dans le cas particulier de l'élève dont les parents avaient donné leur approbation pour la participation sous réserve qu'il ne soit pas filmé, nous nous sommes arrangé pour que celui-ci ne soit jamais dans le champ de la caméra. Précisons que les enregistrements vidéo ne sont pas des données analysées dans cette recherche (au même titre que les productions des élèves) et avaient essentiellement pour fonction de nous aider à retracer le plus fidèlement possible dans notre journal de bord la dynamique des plénières, surtout lors des journées où la prise de notes s'avérait périlleuse car nous avions à intervenir dans les deux classes.

Le chapitre suivant analyse les contributions respectives du chercheur et de l'enseignant dans le projet conjoint d'élaboration de scénarios d'enseignement visant le développement de la modélisation[86] en secondaire 1. Nous y tenterons dans un premier temps de voir ce qui ressort de l'entrevue préalable avec l'enseignant de manière à mieux comprendre la pratique de ce dernier et ce qui le guide. À cette étape de la recherche, lorsque nous avons amorcé l'analyse des données, nous en savions en effet beaucoup sur notre cadre de référence susceptible d'intervenir dans la coconstruction des scénarios d'enseignement (telle notre perspective sur les modèles et le processus de modélisation), mais peu sur le cadre de référence de l'enseignant susceptible d'intervenir dans cette coconstruction. L'analyse de cette entrevue vise à nous éclairer davantage sur cet aspect. Ensuite, nous nous penchons sur l'élaboration des scénarios 1 et 2 ainsi que sur le retour conjoint sur ces scénarios après expérimentation afin de montrer les ressources mobilisées de part et d'autre.

[86] Autour de la résolution de problèmes de dénombrement.

# CHAPITRE IV

# PRÉSENTATION ET ANALYSE DES DONNÉES

Dans ce chapitre, nous analysons dans un premier temps l'entrevue avec l'enseignant. Une entrevue réalisée, rappelons-le, avant que les rencontres d'élaboration conjointe des situations d'enseignement ne débutent (voir section 4.1). Ensuite, nous nous penchons tour à tour sur : l'analyse des rencontres réflexives portant sur l'élaboration des scénarios 1 et 2 (sections 4.2 et 4.3); l'analyse des récits commentés des expérimentations réalisés pour les deux scénarios par l'enseignant et le chercheur (sections 4.4 et 4.5) et l'analyse des rencontres réflexives portant sur les retours (les bilans) sur les scénarios 1 et 2 (sections 4.6 et 4.7). On remarquera qu'une telle structuration du chapitre ne suit pas l'ordre chronologique de la recherche (un choix présentant des limites, puisqu'il ne permet pas de rendre compte de l'évolution au cours du temps). Il privilégie une analyse des ressources et des cadres de référence mobilisés par l'enseignant et le chercheur, selon la «tâche/l'activité» qui les occupe[87]. En procédant de la sorte, il nous est possible d'aller plus en profondeur dans l'analyse (sur les ressources mobilisés dans ce type d'activité) et ainsi, de rester plus près de nos questions de recherche qui portent, rappelons-le, sur les ressources et cadres susceptibles d'être mobilisés par l'enseignant et le chercheur en lien avec : 1) les problèmes de dénombrement élaborés ensemble et qui s'inscrivent dans le développement de la modélisation; 2) le processus de modélisation par les élèves en lien avec ces problèmes et leur exploitation; 3) l'enseignement visant le développement de la modélisation.

---

[87] Nous avons eu au début du traitement des données à faire un choix. Il aurait été possible de suivre l'ordre chronologique de la recherche, mais nous avons davantage opté pour ce deuxième choix, en y allant par type d'activité (celles sur lesquelles travaillent chercheurs et enseignants).

## 4.1 La pratique de l'enseignant et son cadre de référence sous-jacent

Dans cette première section, nous précisons les catégories émergentes issues de l'analyse du verbatim de l'entrevue. Nous présentons d'abord les codes qui ont émergé du codage ouvert du matériau. Avec ce premier niveau de codage, nous avons essentiellement associé une idée aux divers segments de verbatims[88] tirés des transcriptions de l'entrevue. Ces codes sont des mots ou expressions, proches du sens immédiat et premier des données, et qui utilisent souvent le même langage que l'enseignant. Ce premier travail de codage des données brutes s'est alors poursuivi avec la recherche de relations entre les codes et leur regroupement en catégories, puis par la recherche de relations entre ces catégories et leur regroupement en catégories plus larges. Pour montrer la structure émergente, chacune des catégories sera définie et présentée de façon détaillée, en précisant l'importance de chacune en termes de nombre de codes (qu'elle recouvre) et de nombre de citations qui lui sont rattachés dans le codage. Pour les catégories plus générales, celles-ci seront dégagées à la fin du processus (pour l'ensemble des composantes de la pratique ici reprises : gestion de classe, enseignement des mathématiques, pratique plus large) et ce qui précède sera complété par une schématisation à la fin de cette section qui montrera les liens entre les catégories, sous-catégories et codes qui les composent.

Pour nous aider dans le repérage des codes et des catégories, nous avons pu dégager trois thématiques qui permettent de recouvrer le propos de l'enseignant lors de cette entrevue. Une de ces thématiques porte sur l'enseignant et sa relation aux élèves ainsi que sa gestion de classe ; une autre thématique touche à la pratique d'enseignement des mathématiques de l'enseignant et, une dernière porte sur sa pratique plus large. Dans ce qui

---

[88] Selon le cas, un segment de verbatim peut être une ou plusieurs lignes, un ou plusieurs paragraphes du verbatim. Un segment de verbatim repéré sur la base d'une même idée, d'une même unité de sens. Celle-ci pouvant être plus ou moins développée par l'enseignant, cela explique la longueur variable des segments. Comme nous le verrons par la suite, cette dernière sera indiquée entre parenthèses.

suit et en lien avec les thématiques susmentionnées nous présentons les catégories que nous avons générées.

### *4.1.1 À propos de la relation aux élèves et de la gestion de classe*

En lien avec cette première thématique, cinq catégories conceptuelles se dégagent de l'analyse, regroupant des codes issus du codage ouvert :

- des principes guidant l'enseignant dans sa gestion de classe ;
- des valeurs sous-jacentes à sa relation avec les élèves ;
- des savoirs d'expérience mobilisés dans sa gestion de classe ;
- des manières de faire sur lesquelles s'appuie cette gestion de classe;
- des routines supportant sa gestion de classe.

Dans ce qui suit, nous présentons et définissons chacune de ces cinq catégories.

#### 4.1.1.1 Des principes guidant l'enseignant dans sa gestion de classe (6, 6)[89]

Au nombre des principes que l'enseignant explicite dans l'entrevue, une majorité touche à sa relation aux élèves et à sa gestion de classe, les deux étant fortement imbriquées comme nous le verrons par la suite.

Un premier principe est identifié autour de l'*importance du respect*[90] *{1}*[91] : *la première chose à laquelle je crois, ma valeur, je leur dis, puis ça tu pourras leur demander,*

---

[89] Pour montrer l'importance relative d'une catégorie, nous utiliserons cette notation, soit un couple de nombres, afin d'indiquer qu'un certain nombre de codes (le premier nombre dans la parenthèse) est rattaché à un certain nombre de segments de verbatim (le second nombre dans la parenthèse). Ainsi, le couple (6,6) signifie que pour cette catégorie des principes guidant l'enseignant dans sa gestion de classe il y a 6 codes rattachés à 6 segments de verbatim.

[90] Dans ce chapitre, sauf indication contraire, nous utilisons l'italique à l'intérieur du texte pour renvoyer le lecteur aux mots, expressions utilisés par l'enseignant. Aussi, pour la désignation des codes, nous avons tenu à utiliser autant que possible les termes de l'enseignant et pour cette raison, les italiques s'appliquent également aux noms des codes (mis en relief dans le texte par un souligné).

[91] Le nombre entre accolades désigne le nombre d'occurrences du code mis en évidence par un souligné. Quoique ce nombre donne une idée de l'importance d'un code, toutefois une seule occurrence d'un code,

*en mon absence, ils vont dire, moi c'est le respect (304 :305)*[92]. Il s'agit là, d'un principe central, en début d'année surtout.

Pour cet enseignant, dans sa relation aux élèves, un autre principe mise sur l'*importance de faire jouer aux élèves le jeu de l'école avec plaisir {1} :*

> *En première année, il y a pas personne qui sautait sur son bureau, j'étais très solide, mais c'est dans la manière d'aller chercher les élèves, de les séduire (il insiste sur le mot), puis vraiment de...qu'ils jouent le jeu de l'école avec plaisir (191 :193).*

D'où pour lui, l'*importance de s'intéresser aux élèves {1}*, un autre principe, car dira-t-il, *si tu ne t'intéresses pas aux élèves, ils ne s'intéresseront pas à toi (247 :248)*, dit autrement l'intérêt doit être réciproque.

Autre principe, l'*importance de faire voir aux élèves leur place dans la classe {1}*, *faut qu'ils sachent, faut qu'ils voient c'est quoi leur place dans la classe (246 :247)*, dira-t-il, et à l'occasion, un autre principe a trait à l'*importance d'encourager les élèves {1}, de* souligner leurs bons coups, car estime-t-il, *on ne peut pas se tanner d'avoir de bons commentaires (289 :289).*

Enfin, un dernier principe affirme l'*importance de démontrer une certaine confiance aux élèves en début d'année {1}*, car, *plus tu vas leur montrer que tu es confiant de passer une belle année, plus ils vont dire avec lui là, on sent que ça va bien aller ! (329 :330).*

---

comme dans la plupart des codes exposés ici, ne signifie pas nécessairement sa marginalité. En effet, il importe aussi de prendre en compte l'étendue du segment de verbatim associé. Nous tenons donc à préciser au lecteur que nous utilisons cet indice quantitatif pour donner simplement une idée de l'importance relative d'un code à l'intérieur d'une catégorie, sans tomber dans le travers quantitativiste qui conduirait sur cette unique base à conclure à l'importance ou à la marginalité d'un code (cette précision s'applique à tous les indices quantitatifs que nous utilisons dans cette thèse). Il faut aussi tenir en compte le sens que recouvre un code (voire une catégorie), ce qu'il éclaire au regard du phénomène étudié et en cela, nous réaffirmons notre ancrage dans la recherche qualitative interprétative.

[92] Cette notation renvoie à l'étendue des lignes associées à un extrait, lignes ayant été générées par le logiciel Atlas-Ti (version 4.1) que nous avons utilisé pour la codification. Par exemple, ici, l'extrait débute à la ligne 304 et se termine à la ligne 305 du verbatim.

Cette première catégorie regroupe des codes correspondant à ce que nous avons désigné par les principes que l'enseignant se donne pour les aspects liés à sa relation aux élèves ainsi qu'à sa gestion de classe. Plus généralement, nous entendons par principes les raisons qui à la fois fondent et guident l'enseignant en lien avec certains aspects de sa pratique. Le concept de principe revêt donc une double signification : d'une part ce qui commence, et d'autre part ce qui guide. Aussi, on peut sans peine concevoir que pour un enseignant, les principes qui fondent des aspects donnés de sa pratique s'inscrivent dans une durée leur conférant une validité. En effet, les enseignants avec l'expérience en arrivent à miser sur des règles qui leur paraissent les plus adaptées et qui rendent intelligibles divers aspects de leurs interventions. De la sorte, certains principes fonctionnent comme une sorte de «mise initiale» sur laquelle un enseignant sait compter pour arriver à certaines fins. D'où la dimension stratégique de certains principes.

Avec cette catégorie, il s'agit pour l'essentiel de principes visant à légitimer les élèves dans la classe (importance du respect, de faire voir aux élèves leur place dans la classe), à permettre le processus de leur «socialisation» dans la classe (importance de faire jouer aux élèves le jeu de l'école avec plaisir) sous la responsabilité d'un enseignant qui se veut attentionné, disponible, encourageant, confiant (importance de s'intéresser aux élèves, de les encourager, de leur démontrer une certaine confiance en début d'année). Quant au respect, il s'agit ici d'un principe central qui fonctionne, à notre sens, comme une mise initiale et qui oriente globalement sa relation aux élèves et sa gestion de classe.

4.1.1.2 Des valeurs sous-jacentes à sa relation avec les élèves (2, 2)

Cette deuxième catégorie regroupe ce que nous désignons par les valeurs de l'enseignant. Eu égard à sa relation avec les élèves et à sa gestion de classe, l'enseignant dit être guidé par un certain humanisme qui l'amène à <u>*privilégier le côté humain*</u> *{1}* : *je pense que le côté humain je l'ai toujours eu. Je l'ai plus, je sais plus comment m'en servir*

*(206 :207)*. Une valeur qui l'anime donc depuis ses débuts dans la profession enseignante et qui a pris plus de place dans sa pratique.

Aussi l'enseignant dit être mu par *la passion de communiquer avec les élèves {1} : moi j'ai une passion pour communiquer avec les élèves quand je suis avec eux. Moi, c'est ma passion (510 :512)*. Une passion qui déteint dans sa pratique en classe et qui l'amène à vouloir rendre les élèves compétents à communiquer comme nous le verrons plus loin.

Avec cette catégorie, nous sommes sur la composante plus personnelle de sa pratique. En effet, les valeurs de chaque enseignant renvoient à la fois aux références et préférences qui orientent la conduite de son projet d'enseignement. À travers un tel projet le définissant personnellement et professionnellement, l'enseignant indique ses aspirations et croyances profondes, les essentiels qu'il privilégie. Donc, les valeurs de l'enseignant à l'instar des principes le guidant nous éclairent sur les éléments qui l'inspirent au plan de sa relation avec les élèves, une relation sous-tendue par un certain humanisme et une passion pour la communication avec les élèves.

4.1.1.3 Des savoirs d'expérience mobilisés dans sa gestion de classe (2, 6)

Il ressort également de l'analyse du verbatim de l'entrevue, chez l'enseignant, *une capacité d'observation dans l'action {1}* qui s'est développée avec le temps. Ainsi, comparant ses cours actuels à ceux qu'il donnait à ses débuts, l'enseignant explicitera : *je vois plein de choses que je ne voyais pas (197 :198)*, dit autrement, il manifeste une plus grande attention qu'auparavant aux élèves puisqu'alors il *ne voyait* pas quand les élèves *n'écoutaient pas (195 :196)*.

Aussi, avec l'expérience, l'enseignant a développé *une connaissance des élèves de secondaire 1 {4}* :

> *Je sais plus ce que c'est qu'un élève de secondaire 1 maintenant (213 :214). Ils ont besoin de ça en 1, faut qu'ils sachent, qu'ils voient c'est quoi leur place dans la*

> *classe (246 :247). Les secondaire 1, ils ont besoin de beaucoup, beaucoup de répétitions du mot (227 :228). Par rapport à, je laisse les mathématiques, c'est des élèves qui sont curieux puis très participatifs. Secondaire 1 là, c'est quand tu vas arriver, ils vont vouloir te montrer qu'ils sont bons là, tout ça là, ha oui (861 :864).*

Avec cette catégorie des savoirs d'expérience nous sommes à la fois sur une certaine capacité d'observation développée dans l'action par l'enseignant, et sur sa connaissance des élèves de secondaire 1 qui selon le cas touche à la gestion de classe ou à l'apprentissage/enseignement. Les savoirs d'expérience sont les savoirs que les acteurs, en contexte, construisent pour apporter des réponses ajustées aux situations auxquelles ils sont confrontés dans leurs pratiques. Il s'agit de savoirs construits par les praticiens dans l'action, de l'intérieur des situations et qui leur permettent de composer avec les multiples facettes de leurs réalités. Pour l'essentiel, ces savoirs sont tacites ou implicites (Schön, 1983, 1991). Les savoirs d'expérience renvoient au cadre de référence que le praticien s'est construit, entre autres lorsqu'il est confronté à des situations «problématiques», et à partir duquel il oriente et contrôle son agir (Schön, 1983 ; Desgagné, 1998). Pour les enseignants, un tel cadre est fait, entre autres, de connaissances, de savoirs d'action, de croyances, de conceptions, d'intentions, de procédures, etc., afin de rendre possibles certains apprentissages.

#### 4.1.1.4 Des manières de faire sur lesquelles s'appuie cette gestion de classe (5, 7)

Toujours, sur sa relation aux élèves et sa gestion de classe, l'enseignant explicite des manières de faire, telle <u>*savoir le plus rapidement possible les noms des élèves*</u> *{2} :*

> *Moi j'essaie de trouver les noms, de savoir leur noms le plus rapidement possible, puis de, ne pas trop leur démontrer pour pas qu'ils…tu sais je ne veux pas être leur ami non plus (273 :274). Ils savent qu'ils peuvent niaiser avec moi, mais qu'il y a des moments il faut que ça roule, que ça soit sérieux (275:276) ;* l'important étant donc de maintenir une ambiance détendue et studieuse.

À l'occasion, une manière de faire de l'enseignant consiste à <u>*moduler la voix pour avoir l'attention des élèves*</u> *{1} : les surprendre, de parler fort, on dirait que… oups ils reviennent, ensuite il va rire ! Ça je ne le faisais pas ! (223 :224).*

Enfin, avec les manières de faire suivantes, l'enseignant indique comment il s'y prend pour séduire, charmer les élèves :

> *Charmer en s'intéressant à un élève {2} qui ne suit pas* ou qui perturbe, au besoin le taquiner *plutôt que de lui mettre un miroir là-dessus (238 :238),* une approche qui permet d'intéresser de tels élèves à son cours, selon l'enseignant, puisque *en m'intéressant à lui, là maintenant il s'intéresse à mon cours, parce que j'ai pris de la signification pour lui. Ça, c'est ça charmer (240 :242) ;*
>
> *Séduire par l'humour {1}* :
> *La séduction (...) c'est plus d'y aller avec humour avec des élèves de secondaire 1. Que c'est normal qu'il y ait des cours qu'ils se lèvent, puis qu'ils s'attaquent avec des règles, tout ça. Donc, plutôt que de tout de suite être coercitif avec eux, puis de dire hey arrête, tu y vas avec l'humour ! Là c'est rendu un réflexe (217 :221) ;*
>
> *Séduire en répétant les exemples humoristiques {1},* car précise-t-il, *rien qu'un gag eux autres, y a en trois qui vont en rire. Si tu répètes le même gag, ha là le lendemain là, ça va être 6 qui vont en rire, après ça, ça va être 12, c'est exponentiel ! (228 :230).*

Dans cette catégorie, nous avons regroupé des manières de faire de l'enseignant, certaines s'étant développées avec l'expérience comme il l'indique lui-même. Ces manières de faire nous renseignent sur la façon dont il s'y prend avec les élèves pour installer un certain climat dans la classe, pour se familiariser sans excès avec les élèves, attirer leur attention, les séduire ou les charmer. Ces manières de faire nous indiquent que l'enseignant se représente d'une certaine façon les élèves comme un groupe à séduire.

#### 4.1.1.5 Des routines supportant sa gestion de classe (4, 5)

Dans cette dernière catégorie, nous avons regroupé d'autres manières de faire de l'enseignant qui, à la différence des précédentes, sont récurrentes, concernent tous les élèves. Il y recoure surtout en début d'année et y habitue les élèves, telle *faire de bons commentaires aux élèves {1}*, leur dire qu'il est fier d'eux, *ça peut gêner, mais à la longue* *si tu le fais avec tous les élèves de la classe, ils vont se dire cette approche là, c'est normal. On s'y attend (289 :291).*

L'enseignant dit aussi, en début d'année, <u>*ne parler aux élèves d'aucune notion*</u> *{1}, en secondaire 1, moi, le premier cours il y a aucune notion (300 :301).* Également, il dit <u>*parler du respect aux élèves en début d'année*</u> *{1} :*

> *Là je leur donne des exemples, parce que la première année que je leur disais ça ils ne comprenaient pas, fait que je leur dis ne pas couper la parole, ne pas traiter quelqu'un de cave, quand quelqu'un donne une mauvaise réponse tu ne ris pas de lui, quand quelqu'un s'exprime en classe il y a personne qui rit de lui. Là ils comprennent ! Fait que là je dis, moi envers vous, fait que je ne peux pas rire de toi devant la classe, je ne peux pas te manquer de respect comme ça en disant que tu n'as pas donné une bonne réponse, je peux te répondre strictement, mais je ne peux pas te dévaloriser. Finalement je leur dit, vous envers moi, je vais faire des erreurs cette année, c'est normal. Ça ils acceptent ça, là ils savent quelle sorte de prof je suis (306 :315).*

Comme on le voit dans l'extrait précédent, l'enseignant essaie d'installer dans la classe en début d'année un certain type d'échanges avec et entre les élèves, des échanges qui doivent en tout temps être empreints de respect.

Une dernière manière de faire consiste à <u>*faire respecter deux minutes de silence à chaque début de période*</u> *{1}*. Comme il l'indique, *bon temps, mauvais temps, c'est un 2 minutes de silence. Ils le savent (316 :317).* Advenant que des élèves ne se conforment pas à cette disposition, pour y remédier l'enseignant indique, *je leur dis il faut que vous soyez calme pour mon cours, puis je travaille mieux comme ça. Par respect à mon égard, vous me donnez ça. Ils sont habitués, même à la 4$^{e}$ période ils savent, ça leur fait du bien (318 :321).*

Puisque les manières de faire que nous avons exposées précédemment sont récurrentes, voire stabilisées, nous les avons regroupées sous la catégorie de routines de classe (voir le chapitre 2 pour ce concept disponible qui nous apparaît dans ce cas porteur pour l'analyse).

Maintenant, passons à la seconde thématique qui nous a servi dans le repérage des catégories, soit la pratique d'enseignement des mathématiques de l'enseignant.

### *4.1.2 Sur sa pratique d'enseignement des mathématiques*

À l'exception de la catégorie des valeurs, les quatre autres catégories conceptuelles précédentes sont reprises ici, mais elles s'enrichissent de nouveaux codes issus du codage ouvert. Par ailleurs, une nouvelle catégorie s'ajoute, soit les buts visés par l'enseignant dans sa pratique d'enseignement des mathématiques. Dans ce qui suit, nous revenons sur les quatre catégories précédentes (principes, savoirs d'expérience, manières de faire et routines) et présentons la nouvelle catégorie.

#### 4.1.2.1 Des principes guidant sa pratique d'enseignement des mathématiques (5, 7)

*Un principe de parcimonie pour bien ancrer certaines choses {1}* guide l'enseignant dans son enseignement, *trois choses...parce que plus que trois choses, heu...c'est trop ! Trois choses ils vont s'en souvenir, ils vont s'en souvenir toute l'année! (302 :304)*, il s'agit donc de veiller à ne pas donner aux élèves trop d'informations à la fois pour qu'ils puissent bien s'en rappeler.

Un autre principe important pour lui, dans son approche du cours, c'est de *construire avec les élèves {2}, je construis sur ce qu'ils disent, puis je structure (402 :406), pour l'instant, je suis dans ce trip là, je suis dans le trip de dire bon je construis avec eux (408 :409).*

Autre principe auquel croit beaucoup l'enseignant c'est l'*importance de faire sentir aux élèves une disponibilité totale {1} :*

> *Quand un élève ne comprend pas dans un devoir, je l'explique tout de suite pour qu'il comprenne que je suis disponible. C'est très important en début d'année de leur faire sentir que tu es disponible au bout (473 :475).*

Un autre principe dans sa pratique d'enseignement mise sur l'*importance de faire sentir aux élèves qu'ils peuvent s'exprimer {1}, c'est très important en début d'année de leur faire sentir (...) qu'ils peuvent s'exprimer. Donc, moi quand il ya plein de mains levées, là je peux dire que mon début de saison est bon, parce là ils ne sont pas gênés en classe, ils ne sont pas gênés avec moi (474 :478).*

Un dernier principe valorise l'*importance de l'organisation {2}* :

> *La première affaire,* parlant de ce qu'il regarde quand il reçoit une copie d'élève, *je vais regarder comment qu'il structure son travail, s'il a fait un dessin, qu'est-ce qu'il a écrit sur sa feuille, je vais regarder ça (714 :716).* Et l'enseignant d'exemplifier, *tu sais comme le dernier problème dans le dernier examen, il était discriminatoire, c'est là que j'ai pu voir ceux qui étaient capables de structurer, donc c'est là que je vais voir comment qu'il organise ses informations. C'est ça que je vais regarder le plus, l'organisation (720 :723).*

Les principes présentés ici élargissent la catégorie des principes vue au 4.1.1.1. En effet, à travers ce qui précède, nous voyons que l'enseignant privilégie une approche en classe partant des élèves, manifeste une ouverture à leur participation, l'expression étant encouragée, se soucie que les élèves comprennent, valorise la dimension organisation dans les démarches des élèves. Ces principes nous éclairent sur ce qui fonde et guide l'enseignant dans son approche du cours de mathématiques ainsi que lors de la correction de devoirs. Il est à noter que l'enseignant insiste sur l'importance de ces principes en début d'année surtout, un moment stratégique pour indiquer aux élèves les choses qui lui tiennent à cœur dans sa pratique d'enseignement des mathématiques. Ces principes représentent un acquis important pour le travail sur la modélisation qui pourra se situer dans une continuité avec ceux-ci.

4.1.2.2 Des buts visés par son enseignement (2, 5)

L'enseignant explicite aussi des buts qu'il poursuit dans son enseignement. Un de ces buts est d'*amener les élèves à l'efficacité {1}* dans la résolution de problèmes :

*Je leur dis, qu'est-ce qui était plus efficace? Moi ce n'est pas n'importe... l'efficacité c'est un mot qui revient souvent, qu'est-ce qui est plus efficace. Oui! (563 :564).*

Dans la résolution de problèmes, l'enseignant vise également à *rendre les élèves compétents à bien communiquer* *{4}* :

*J'essaie beaucoup, beaucoup de les rendre compétents à bien communiquer (342 :343), je les initie à la communication durant la première étape, beaucoup, (346 :347), je les fais beaucoup, beaucoup parler! (398 :398), parce qu'il y a en qui vont trouver la réponse mais qui ne sont pas capables de communiquer (377 :378).*

Un but d'autant plus important pour l'enseignant qui, rappelons-le, dit avoir une passion pour communiquer avec les élèves. Avec cette catégorie des buts, l'enseignant nous indique ce qu'il privilégie sur le plan des apprentissages, ce qu'il cible chez les élèves dans la résolution de problèmes, soit de les amener à être efficaces et capables de bien communiquer leurs solutions. Là aussi, en lien avec l'expérimentation à venir sur la modélisation, ces principes sont d'une grande importance, par exemple lors des plénières reposant sur la qualité de la communication, des échanges entre les élèves.

4.1.2.3 Des savoirs d'expérience mobilisés dans cet enseignement (8, 8)

Dans les quatre codes suivant, l'enseignant nous parle de sa connaissance des difficultés des élèves de secondaire 1.

*Une difficulté avec les fractions {1}*
*C'est des nombres qui ne sont pas évidents. Moi, je dirai qu'en secondaire 1, bon il y a les fractions, c'est ça qui ressort le plus (842 :843).*

*Une difficulté avec les problèmes complexes {1}*
*Résoudre des problèmes de niveau élevé c'est très difficile pour eux (843 :844).*

*Une difficulté dans la compréhension des problèmes {1}*
*Ils ne comprennent pas les mots, c'est beaucoup de texte, ce n'est pas évident pour eux. La barrière langagière de lire, ça ils ne trouvent pas ça évident (844 :845).*

*Une difficulté de réinvestissement de savoirs dans des problèmes {1}*

*Heu…puis, problème écrit c'est ça qui est différent, parce que dans le fond on fait la révision du primaire, mais dans la résolution de problèmes écrits, c'est là qu'on, quand on transfère, c'est là que…comme savoir c'est quoi une base d'un exposant, puis d'une puissance, mais quand on dit bon, ben on l'applique, oups là, ça flanche (844 :849).*

Aussi, l'enseignant nous parle de sa connaissance des forces de certains élèves de secondaire 1.

*<u>Une débrouillardise en mathématique</u> {1}*
*Au niveau mathématique… je trouve qu'ils sont assez débrouillards là (853 :854);*

*<u>Une force en géométrie</u> {1}*
*En géométrie ils sont très bons. Ils aiment faire des dessins, puis tout ça, ils aiment (865 :866).*

*<u>Une force à communiquer</u> {1}*
*Il y a en qui sont bons pour communiquer, qui vont employer les bons mots (857 :858).*

*<u>Une force dans les méthodes de travail</u> {1}*
*Puis (il y a en) qui vont déjà avoir les bonnes méthodes de travail, il y a en qui vont tout de suite ouvrir leur manuel, tu leur as pas dit, puis ils peuvent te devancer et dire critères de divisibilité, tu sais ils savent ce que tu écris. Tu sais (857 :861).*

Pour l'essentiel, d'après ce qui précède, quatre forces caractérisent certains élèves de secondaire : une débrouillardise en mathématique, une force en géométrie qu'ils affectionnent, une certaine capacité à bien communiquer et déjà la disposition de bonnes méthodes de travail. De sorte qu'en indiquant sa connaissance des élèves, leurs forces et faiblesses, il va plus loin que précédemment dans le portrait qu'il dresse des élèves de secondaire 1.

4.1.2.4 Des manières de faire explicitées à propos de cet enseignement (3, 4)

En énonçant certains principes, l'enseignant exemplifie et à l'occasion nous livre des manières de faire. Une de celles-ci consiste dans son approche du cours à *<u>construire sur ce que disent les élèves puis structurer</u> {1} :*

> *Par exemple quand j'ai commencé à traiter de l'exponentiation, je n'ai pas dit «sortez vos cahiers de notes», «ok les exposants c'est...», non! Qu'est-ce que j'ai fais, j'ai dit l'exponentiation c'est quoi, ok c'est ça... là ils m'alimentent, ils m'alimentent, ils m'alimentent! Je construis sur ce qu'ils disent, puis je structure (402 :406).*

Ensuite, après que les élèves l'aient alimenté, la façon de s'y prendre avec la prise de notes consiste à *renvoyer les élèves à leur manuel /pour les notes, la théorie* *{1}* :

> *Je leur dis ok, ouvrez votre manuel, c'est la même chose que dans votre manuel, puis vous l'étudierez là. Moi, pour l'instant, je suis dans ce trip là, je suis dans le trip de dire bon je construis avec eux, puis ils peuvent le lire, c'est dans leur manuel, c'est tout expliqué, il ya des pages de théorie (407 :410).*

Cependant, l'enseignant nuance son propos pour dire qu'il y a *une diversification dans les manières de gérer les prises de notes* *{2}*, qu'il ne renvoie pas tout le temps les élèves au manuel pour celle-ci :

> *Je leur dis, peut-être prenez tout ça en note, ou je leur dis ok, ouvrez votre... puis vous l'étudierez là (407 :408). Des fois ça dépend, si j'ai le temps je vais leur dire bon prenez le en note, d'autres fois je leur dis, ben on l'a marqué ici, allez voir ça dans votre manuel (413 :415).*

Sur les notes de cours, l'enseignant estime *qu'à un moment donné, les notes c'est plus, par exemple prendre en note c'est plus quand j'ai corrigé le beau problème aujourd'hui, ça, ce sont des notes de cours, comment trouver la solution de ce problème là (415 :417).*

Les codes qui s'ajoutent ici à cette catégorie des manières de faire de l'enseignant portent ainsi sur les diverses façons d'assumer, de prendre en charge le processus d'institutionnalisation.

4.1.2.5 Des routines explicitées à propos de cet enseignement (2, 2)

Pour le contrôle des devoirs, une manière de faire récurrente de l'enseignant consiste à toujours *imposer aux élèves le silence lors du contrôle de devoir* *{1}, quand je* *contrôle les devoirs, je circule dans les rangs, il ne faut pas que ça parle (321 :322).* Les élèves doivent donc toujours garder un moment le silence pour lui permettre de jeter un coup d'œil sur leurs travaux.

Une autre manière de faire régulière chez l'enseignant consiste lors de la correction de devoirs à *corriger systématiquement le devoir et répondre à toutes les questions {1}, je crois beaucoup à la correction de devoir, par exemple je vais prendre 15mn par cours, je corrige le devoir systématiquement, puis je réponds à toutes les questions. (398 :401).*

Nous avons donc là deux routines d'appui aux apprentissages, en reprenant la typologie de Leinhardt et al. (1978), des routines qui portent sur le contrôle et la correction de devoirs.

Passons enfin à la dernière des trois thématiques nous ayant servi à repérer les catégories lors de l'analyse de l'entrevue préalable.

### *4.1.3 Sur sa pratique plus large*

Trois nouvelles catégories permettent de classer des aspects de ce que nous avons appelé la pratique plus large de l'enseignant , qui aborde ici des questions qui transcendent sa pratique immédiate, soit les ressources auxquelles il puise ainsi que certaines de ses prises de positions.

4.1.3.1 Des artéfacts/le recours au groupe dans sa pratique (3, 4)

Tout d'abord, l'enseignant considère *le manuel comme une ressource pour aller chercher de beaux problèmes {1}*:

> *Dans mon usage de mon temps, ça m'aide beaucoup, beaucoup, ça me donne plein de trucs. Je n'ai pas le temps pour la fin de semaine pour pondre des problèmes, pour aller chercher de beaux problèmes, il y a en là dedans. Ils m'en proposent des problèmes qui sont complexes, fait que moi je les utilise (623 : 627).*

Pour ce qui est donc du choix des problèmes à proposer aux élèves, l'enseignant se sert du manuel qui contient des problèmes de toutes sortes, dont ce qu'il appelle *des beaux problèmes, des problèmes qui vont un tout petit peu plus loin ( c'est pas rien que des connaissances déclaratives, nous dira t-il) (546 :547).* Enfin, rappelons également que l'enseignant considère *le manuel comme ressource pour les notes de cours {1},* renvoyant à l'occasion les élèves au manuel pour ces dernières : *d'autres fois je leur dis,.. on l'a marqué ici, allez voir ça dans votre manuel (414 :415).*

L'enseignant considère également *les autres professeurs comme une ressource pour lui d'apprentissages sur le plan pédagogique {1} :*

> *La collégialité avec les autres professeurs, m'a beaucoup fourni au niveau pédagogique, ça a changé beaucoup ma pédagogie. J'ai beaucoup, beaucoup appris au niveau de la gestion de classe par exemple avec monsieur ZZZ qui est un collègue ici, ... que je vois travailler (187 :189).*

Le concept de ressources structurantes emprunté à Lave (1998) permet d'éclairer sur la diversité de ressources sur lesquelles l'enseignant prend appui dans sa pratique et qui structurent cette pratique (voir le chapitre 2 pour ce qui est de la notion de ressource structurante).

#### 4.1.3.2 Des prises de position sur différentes composantes de sa pratique (5, 10)

À différents endroits du verbatim, l'enseignant prend position soit sur les manuels, soit sur la place de l'ordinateur dans son enseignement ou sur la pertinence de certaines approches pédagogiques, soit sur ce qui peut paraître des contraintes dans sa pratique. Ainsi, on peut noter *un positionnement par rapport à l'utilisation du manuel {1} :*

> *Je trouve qu'il y a un débat très snob de la part des professeurs de mathématiques qui jugent beaucoup les manuels, qui vont dire, ha moi je n'enseigne pas le manuel, les manuels c'est n'importe quoi.... Je trouve qu'ils ont raison, il y a des choses avec lesquelles je suis parfaitement d'accord, mais moi dans mon usage de mon temps, ça m'aide beaucoup, beaucoup, ça me donne plein de trucs. Je n'ai pas le temps la fin de semaine pour pondre des problèmes, pour aller chercher de beaux*

*problèmes, il ya en là dedans. Ils m'en proposent... fait que moi je les utilise (619 :627)*

Et l'enseignant d'ajouter, *je ne suis pas un didacticien moi (502 :502), je ne suis pas quelqu'un qui aime créer des problèmes (506 :506).* Dans ses propos transparaît une représentation qu'il se fait du didacticien (et par lui, du chercheur dans cette recherche) dont le rôle pour lui est de concevoir des problèmes, ce qui n'est pas son cas.

Également l'enseignant décline *un positionnement par rapport à l'intégration de l'ordinateur* *{1} :*

*Je n'ai pas assez de support ici pour faire ça. Les ordinateurs, il ya seulement six ordinateurs...il y avait des problèmes, quelqu'un qui travaille à la maison avec Windows XP sur son ordinateur, ce n'était pas compatible, c'était l'enfer ! Ça me prenait trop d'énergie, puis j'arrivais au milieu d'octobre, je n'avais plus de jus (598 :602).*

Eu égard à l'intégration de l'ordinateur dans sa pratique d'enseignement des mathématiques, l'enseignant souligne donc la difficulté de gérer les projets utilisant l'ordinateur, entre autres à cause de l'hétérogénéité des systèmes d'exploitation utilisés par les élèves, mais aussi à cause du manque de support dans son école pour ce type d'approche, d'où son choix en définitive de ne pas utiliser l'ordinateur dans son enseignement.

Une autre position de l'enseignant porte sur *l'apprentissage coopératif et ses limites* *{2} :*

*L'apprentissage coopératif (...) quand j'entends parler de ça, je sais c'est quoi.. j'en ai fait depuis le début de l'année... mais je ne l'utilise pas à chaque semaine, je trouve que ça a ses limites (96 :99)... je pense qu'il y a certains thèmes qui se prêtent mieux à ça, puis il y a certaines activités... que je juge que ça ne sera pas efficace (...) on n'est pas au niveau du raisonnement mathématique, je vais trop perdre de matériel, de déplacements, d'échanges, trop de pertes au niveau social (107 :111).*

L'enseignant souligne donc les limites d'une approche pédagogique comme l'apprentissage coopératif qui ne convient pas à certains thèmes et pose quelques difficultés dans la gestion en classe.

Aussi, l'enseignant nous indique sa position *sur l'utilisation du matériel monté avec des collègues {3}*, qui l'amène à constater qu'il n'est pas à l'aise avec certaines choses et à ne pas les retenir dans son enseignement.

> *Durant les quatre ans, on a monté pas mal de matériel, puis je dirai que cet été j'ai fait un bilan de ces 4 ans, il ya des choses que je vais continuer à faire, puis il y a des choses que je ne continuerai pas à faire (136 :139). Là j'ai dit, bon après 4 ans j'ai assez de recul pour dire que ça je ne suis pas à l'aise avec, je n'aime pas ça, en quelque sorte tu ne crois pas en ça.... (143 :146). Ce n'est pas avec tout le monde que ça fonctionne... (150 :151).*

Enfin, l'enseignant précise sa posture professionnelle, qui l'amène à *prendre les contraintes comme un levier {1}* :

> *Moi, ma décision c'était de prendre Perspectives (il réfère à un manuel) pour des raisons que je t'ai expliquées, le département a décidé de prendre Panoramaths. J'ai dit très bien, moi je vais m'en servir, un peu comme à l'université. Moi à l'université, il ya des cours, les gens disaient ça ne sert à rien, moi je suis allé chercher à quoi ça servait pour moi (662 :665).*

Ainsi, l'enseignant affiche-t-il une attitude positive qui lui fait voir le bon côté des choses, considérer ce qui est bon pour lui, dans une contrainte donnée.

Cette catégorie des prises de position nous renseigne sur certains des choix que l'enseignant a été amené à faire et qui répondent à sa façon d'envisager sa pratique. Transparaît également dans les codes regroupés sous cette catégorie une posture réflexive qui dessine une marge de manœuvre lui permettant de faire les choses auxquelles il croit, ce avec quoi il est à l'aise.

Dans la section suivante, nous reviendrons sur les catégories précédentes pour voir les liens qu'elles entretiennent entre elles afin de dégager des catégories conceptuelles plus larges.

### *4.1.4 Retour sur les différentes catégories issues de l'analyse de l'entrevue préalable*

Au total, huit catégories plus larges ont émergé de ce deuxième niveau de codage. La figure 4.1 à la page suivante résume ces différentes catégories et les codes qu'elles recouvrent.

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, des *principes*, *des valeurs et des buts* guident l'enseignant dans au moins deux composantes de sa pratique, soit sa relation aux élèves et sa gestion de classe ainsi que sa pratique d'enseignement des mathématiques. Aussi, nous avons vu qu'en lien avec différentes composantes de sa pratique, l'enseignant expose des *prises de position*, voire affiche une certaine posture professionnelle. Cette pratique s'exprime aussi à travers des *manières de faire* et des *routines* dans l'action de la classe, s'appuyant en cela sur des artéfacts/le rôle des autres et des *savoirs d'expérience*. Nous reviendrons maintenant sur ces catégories, à la lumière de certains concepts théoriques disponibles qui nous permettent à cette étape d'aller plus loin.

Dans son enseignement, l'enseignant mobilise *des savoirs d'expérience* (connaissance des élèves de secondaire 1, incluant sa connaissance des forces et faiblesses de ces derniers en mathématiques, leur relation à cette discipline, mais aussi une capacité d'observation dans l'action qui l'amène à être plus attentif dans sa classe, à voir ce qu'il ne voyait pas au début de sa carrière). Aussi, l'enseignant prend appui sur des *artéfacts* que sont le manuel et sur le *groupe de pratique* (les collègues).

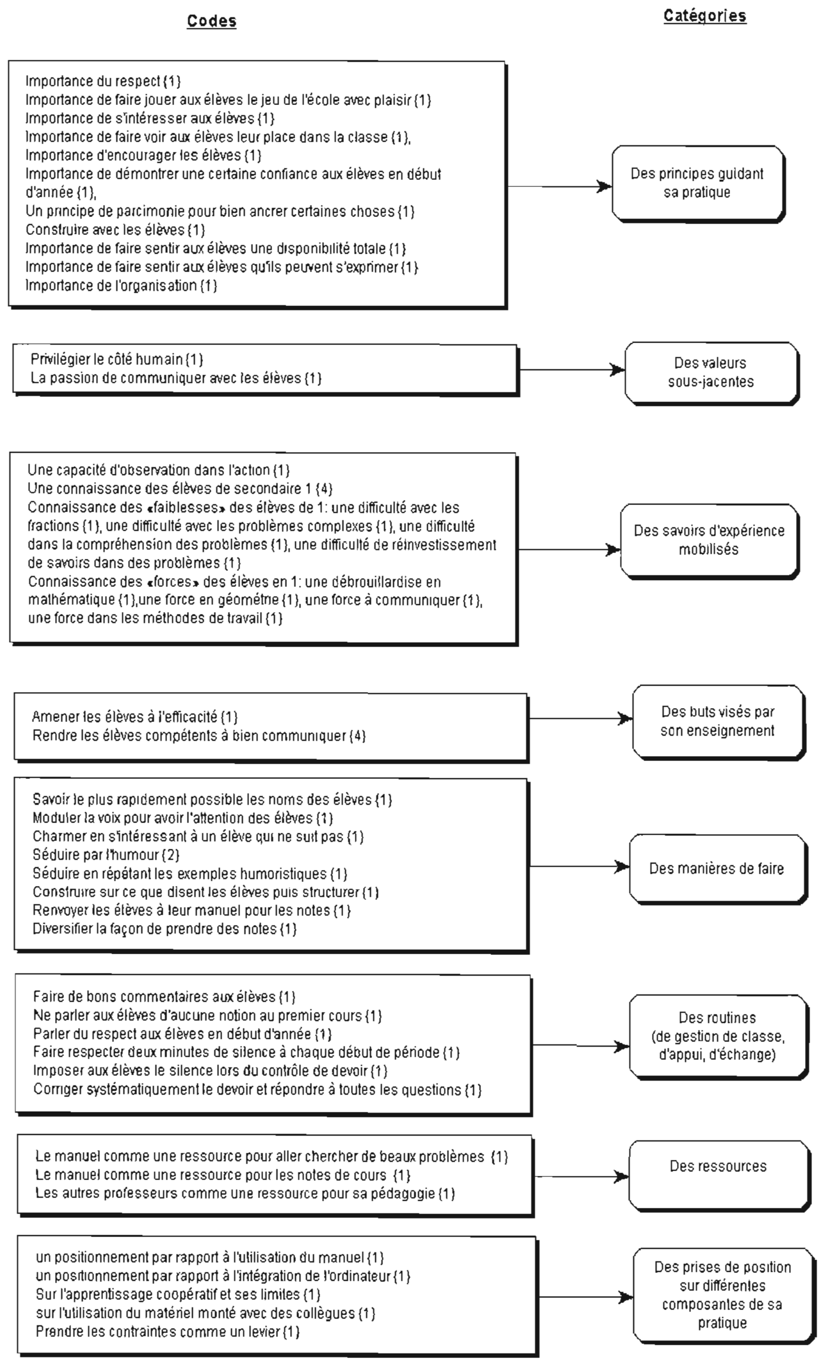



**Figure 4.1 Codes et catégories issus du codage du verbatim de l'entrevue préalable**

Quant aux manières de faire de l'enseignant, certaines constituant des routines en ce sens qu'elles sont récurrentes, elles renvoient à *une pratique-en-action*, catégorie plus large que nous retiendrons en lien avec sa relation aux élèves, sa gestion de classe, sa pratique d'enseignement des mathématiques. Une pratique-en-action qui mobilise des ressources de différentes sortes : des artéfacts avec les manuels, des savoirs d'expérience élaborés au fil du temps, le recours aux autres (les collègues) auprès de qui l'enseignant dit avoir beaucoup appris pour ce qui est de sa pédagogie. Il s'agit là de ressources diverses mobilisées dans sa pratique qui viennent en retour structurer cette même pratique, pour reprendre le concept de ressource structurante que nous avons défini précédemment. Pour caractériser davantage cette pratique-en-action de l'enseignant, au-delà des manières de faire et routines, le concept de savoir-agir stratégique nous apparaît porteur pour l'analyse. Attardons-nous un instant sur ce concept important de savoir-agir stratégique.

La notion de savoir-agir est empruntée à Schön qui l'associe à un savoir-dans-action. Le savoir-agir stratégique peut être vu comme le savoir que manifeste l'acteur dans l'agir stratégique, une notion due à Habermas (1987). Selon Habermas (1987), la caractéristique essentielle de l'agir stratégique, c'est que cet agir vise, est orienté vers le succès auprès d'auditeurs qui peuvent réagir en fonction d'assurer eux-mêmes leur propre succès. Comme l'indique Desgagné (1994), prenant l'exemple d'un enseignant en situation de classe (correspondant à une situation stratégique), son savoir-agir stratégique s'articule dans un rapport de fins à moyens et prévoit la réaction d'interlocuteurs-élèves qui eux aussi agissent en fonction d'atteindre leurs propres finalités. Ce savoir-agir stratégique, s'articule également en deux dimensions, l'une avouée, l'autre «dissimulée». Ainsi, avec le *savoir-agir normatif*, toujours en restant sur l'exemple de l'acteur enseignant, ce dernier cherche ouvertement à établir des normes à respecter avec des élèves qu'il se représente comme un groupe à gérer, alors qu'avec le *savoir-agir dramaturgique*, l'enseignant, de façon plus dissimulatoire, cherche à projeter une image de lui à des élèves qu'il se représente comme un groupe à séduire.

Au vu de ce qui précède, certaines des manières de faire de l'enseignant renvoient à un savoir-agir stratégique à la fois normatif et dramaturgique pour reprendre la distinction que propose Desgagné (1994) prenant appui sur Habermas (1987), un savoir-agir stratégique qui l'amène ouvertement à se représenter les élèves comme un groupe à gérer (d'où son insistance par exemple sur l'importance du respect, du silence en début de cours ou lors du contrôle de devoirs) et de façon dissimulée à vouloir projeter une image de lui-même à des élèves qu'il se représente comme un public à séduire ou à charmer, ce que l'on retrouve dans ce qu'il nous explicite par exemple à travers charmer en s'intéressant à un élève qui ne suit pas, séduire par l'humour, séduire en répétant les exemples humoristiques.

En arrière plan de cette pratique, les catégories principes, valeurs, buts ainsi que les prises de position de l'enseignant renvoient, à notre sens, à une certaine *rationalité sous-jacente* de l'enseignant qui fonde sa pratique. Empruntant au concept de rationalité que nous avons développé précédemment (voir le cadre théorique) et qui ici nous apparaît un «concept théorique disponible» porteur pour l'analyse, nous retiendrons donc la catégorie de *rationalité de l'acteur* comme catégorie plus large englobant ces quatre catégories. À notre sens la rationalité caractérisant l'enseignant est une rationalité de type pratique, dans ses composantes instrumentale et axiologique. Rappelons que par principes nous entendions les raisons qui fondent les conduites des enseignants, l'expérience de ces derniers conférant une certaine validité à quelques principes qui avec le temps en viennent à fonctionner comme des «mises initiales» assurant un enseignement efficace. Nous insistions sur le moment stratégique choisi par l'enseignant, soit en début de l'année, pour actualiser dans sa classe la plupart de ses principes.

Pour ce qui est des valeurs de l'enseignant, elles se distinguent de ces principes en ce qu'elles indiquent plus que des références, mais également des préférences lourdes dans son enseignement, telle privilégier le côté humain. Également, nous avions mis dans la catégorie des valeurs la passion pour la communication qui guide l'enseignant, faute de mieux, pour garder cette dimension passionnelle qui est déterminante dans la compréhension des conduites. Ainsi exposés, les principes, valeurs, et de façon plus évidente les buts et prises de positions de l'enseignant relèvent tantôt d'une rationalité instrumentale car renvoyant à des résultats espérés (comme rendre les élèves compétents à communiquer), ou tantôt d'une rationalité axiologique car laissant transparaître des convictions fortes (comme l'importance de valoriser le côté humain, le respect), des préférences (se servir du manuel) et une passion (communiquer avec les élèves). Le tout, dans l'optique d'un enseignement réussi. Voilà pourquoi, sur la base de toutes ces raisons, nous qualifierons volontiers de rationalité pratique, la rationalité guidant notre enseignant dans sa pratique.

La figure 4.2 résume les catégories principales qui nous avons retenues suite à l'analyse de l'entrevue préalable, catégories avec lesquelles nous espérons en définitive avoir éclairé le lecteur sur la pratique de l'enseignant et le cadre de référence sous-jacent qui le guide.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous penchons sur l'analyse des ressources structurantes mises à contribution par l'enseignant et le chercheur dans l'élaboration et le retour sur deux scénarios d'enseignement visant le développement de la modélisation en secondaire 1. À l'occasion, nous prendrons appui sur des éléments issus de l'analyse précédente pour montrer les liens qu'entretiennent les ressources mobilisée par l'enseignant avec son cadre de référence.

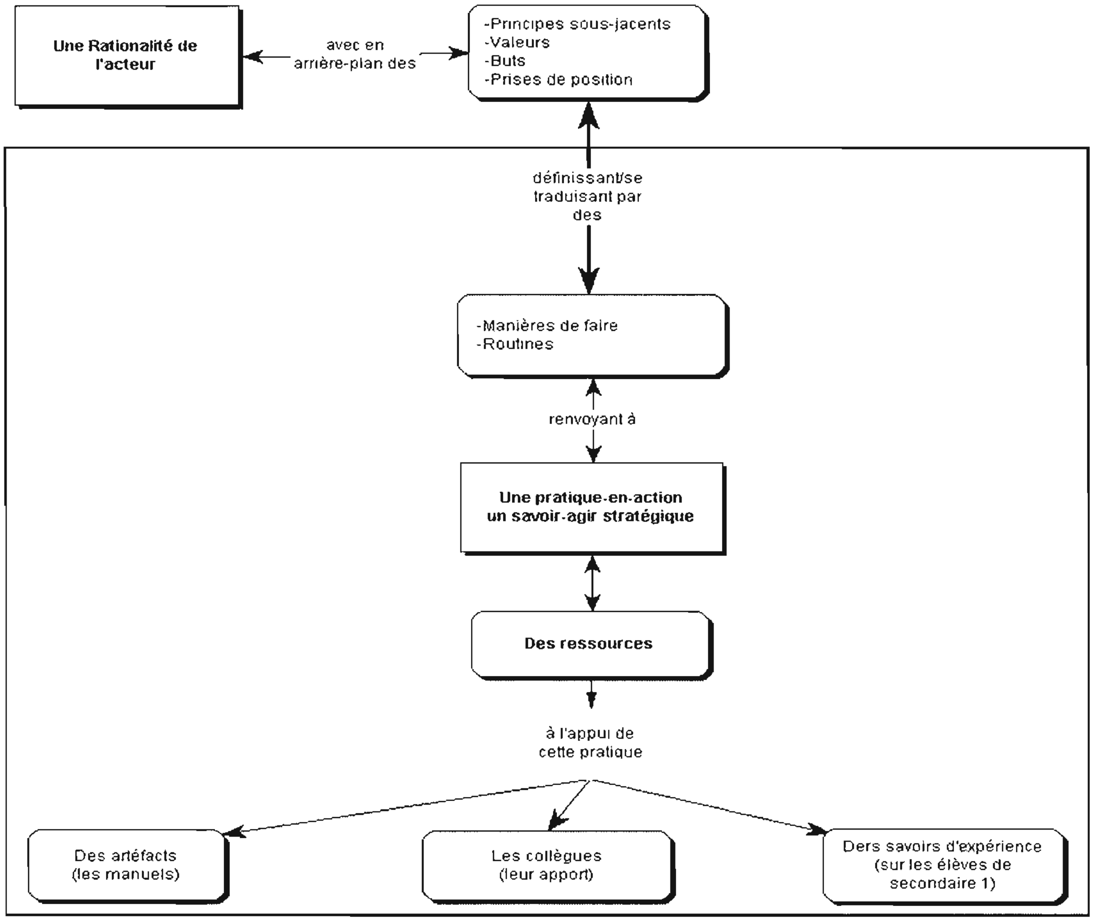



**Figure 4.2 Catégories principales issues de l'analyse de l'entrevue préalable**

## 4.2 Analyse de la rencontre réflexive portant sur l'élaboration du premier scénario

Dans cette deuxième partie nous proposons une analyse de la rencontre réflexive portant sur l'élaboration d'un premier scénario visant le développement de la modélisation[93]. Pour situer cette rencontre, rappelons qu'elle suit l'entrevue préalable que

[93] Durée: 1h21mn 3s; date: 18 octobre 2006.

nous avons analysée précédemment[94] et une seconde rencontre d'information[95] autour de cinq problèmes de dénombrement (voir appendice C1 pour ces problèmes qui ont été abordées lors de la rencontre réflexive). La rencontre que nous analysons ici comporte deux moments importants : un premier au cours duquel l'enseignant et le chercheur se penchent sur les problèmes proposés[96], les résolvent, les analysent puis essaient d'anticiper comment les élèves pourraient les résoudre; un second où les deux passent à l'exploitation anticipée de ces problèmes[97], se penchant tour à tour sur l'aménagement des problèmes, l'animation en classe avec les élèves autour de ces problèmes, puis la planification plus précise du scénario. Pour chacune de ces étapes, nous essayons de dégager, des catégories de sens et prenant appui sur ces catégories, d'identifier les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans cette élaboration conjointe du scénario (nous reprenons ici le concept de ressource structurante emprunté à Lave, des ressources structurantes de la construction conjointe et provenant du chercheur et de l'enseignant).

### *4.2.1 Autour des problèmes de dénombrement discutés lors de la rencontre*

#### 4.2.1.1 La résolution des problèmes de dénombrement

Deux catégories se dégagent de l'analyse de cette étape au cours de laquelle l'enseignant et le chercheur résolvent ensemble les problèmes. Comme nous le verrons

---

[94] Durée: 1h9mn 16s; date: 05 octobre 2006.
[95] Durée : 44mn ; date : 12 octobre 2006.
[96] Lignes : 1 à 546, puis de 614 à 1352.
[97] Lignes : 546 à 614, 1352 à 1600 et 1670 à 1874. Signalons que cette numérotation des lignes est générée par le logiciel ATLAS ti avec lequel nous avons travaillé pour la codification d'une bonne partie du matériau de cette recherche, à l'exception des «récits annotés par le chercheur et commenté après par l'enseignant» qui eux, ont été codés à la main pour des raisons de commodité. De plus, cette répartition peut donner l'impression d'une progression linéaire menant de la résolution par le chercheur et l'enseignant des problèmes à leur aménagement. Il n'en est rien, les intervalles donnés sont indicatifs, ils signifient surtout qu'à l'intérieur des bornes mentionnées, on retrouve pour l'essentiel un travail conjoint portant par exemple sur l'aménagement, entre les lignes 1670 à 1874.

dans ce qui suit, ces catégories permettent dans ce cas surtout de caractériser le discours du chercheur.

4.2.1.1.1 Des modèles explicités par le chercheur (3, 7)

Cette première catégorie renvoie aux modèles sous-jacents aux problèmes, et que le chercheur va expliciter lors de la résolution[98]. À l'occasion l'enseignant, nous le verrons plus loin, va se positionner sur la pertinence d'un de ces modèles.

> <u>*Un premier modèle explicité : Les arrangements avec ou sans répétitions*</u> *{1}*
> *YYY : Ici, (le chercheur réfère aux deux premiers problèmes de l'appendice C1) ... ce sont des arrangements comme ont le voit, avec ou sans répétitions, donc en termes de modèles là...j'ai voulu faire ressortir tout ce qui est là. Il y a d'abord le modèle des arrangements avec ou sans répétitions. (74:77)*

> <u>*Un deuxième modèle : Le modèle des mots*</u> *{2}* (central pour le chercheur dans le problème du quadrillage)
> *YYY : Parce que le modèle qui m'importe ici là, moi c'est le modèle de mots. (226:227). Alors, je disais là (poursuivant), «la question ouverte qu'obtient-t-on dans le cas d'un quadrillage quelconque est une étape cruciale dans la modélisation en jeu ici, elle permet aux élèves de faire le point sur le modèle ici sous-jacent aux chemins sur le quadrillage, c'est-à-dire le modèle de mots.... Les dimensions du quadrillage déterminent la longueur du mot et par conséquent le nombre de déplacements à droite et en haut» (548:553)*

En fait, le modèle des «mots» est celui des arrangements avec ou sans répétitions et, il permet de modéliser les différents chemins sur le quadrillage.

> <u>*Différents principes de dénombrement explicités*</u> *{4}* (référant au problème des codes et voyelles, 2e problème de l'appendice C1)
> *YYY :...surtout le principe multiplicatif...qui fait que...on ne fait que multiplier les possibilités à chaque...c'est un principe qui est beaucoup utilisé dans beaucoup de problèmes de dénombrement élémentaire, le principe multiplicatif ou de multiplication. (77:80)*

Le chercheur attire l'attention sur le fait que le principe multiplicatif est un principe très utilisé en dénombrement. On remarquera que le chercheur ne définit pas cependant ici

[98] Lors de cette phase de résolutions conjointe des problèmes, nous verrons plus loin que le chercheur occupe une grande place.

clairement le principe multiplicatif. Un autre principe combinatoire est mis en évidence, le principe de l'addition également utilisé en algèbre et qui s'applique au problème de la table (problème 5, appendice C1). Un principe qu'on prend la peine de bien définir.

*YYY : Alors, ici il y a un principe élémentaire de combinatoire, le principe de l'addition, sur des cas exclusifs. Ce n'est pas juste en combinatoire, ça s'applique à beaucoup de choses, c'est comme avec les ensembles. Si j'ai 4 cas exclusifs, le nombre total de cas je l'obtiens en additionnant les nombres pour chaque sous-cas. (829:833)*

Un autre principe combinatoire est explicité, le principe dit du berger ou de la division.

*YYY : Mais, ... ici il y a un principe qui est simple là, c'est le principe du berger. C'est-à-dire c'est le principe qui permet de tenir compte des répétitions. Un berger qui comptait toutes les pattes, puis divisait par 4 là (l'enseignant acquiesce). Il comptait très vite ses moutons, puis un jour un paysan lui demanda comment tu fais pour compter tes moutons?*[99] *(967:971)*

Dans l'extrait suivant, l'enseignant dit ce qu'il pense d'un des modèles précédent explicité par le chercheur.

*XXX*[100] *: moi, je compte les pattes je trouvais ça niaiseux un peu (rires ensemble). Je sais que c'est toujours la même chose*
*YYY : tu préfères compter d'abord les têtes.*
*XXX : mais, oui ! C'est bien plus simple. (973:982)*

Ainsi, le principe du berger, tel qu'énoncé, ne lui paraît pas pertinent en contexte.

Les modèles sous-jacents aux problèmes qu'explicite le chercheur sont tous des modèles combinatoires. Ces modèles (voir à ce propos la partie du cadre théorique sur modèles et modélisation combinatoire), selon le cas, sont des représentations externes (arbres de choix) ou des modèles conceptuels (opérations et principes combinatoires) et ils renvoient au cadre de référence du chercheur sur la combinatoire. Le chercheur occupe par

---

[99] Le chercheur a ici recours à une métaphore pour expliquer le principe de berger, ce qui ne veut pas dire qu'il réduit celui-ci à cet énoncé.

[100] Pour préserver l'anonymat de l'enseignant, nous référons à lui dans les extraits qui l'exigent par le code XXX, le chercheur lui est désigné par le code YYY.

ailleurs un certain positionnement de savoir (nous reviendrons sur cet aspect des positions de savoirs plus loin, au point 4.2.3.1) : il explicite ces modèles qu'il prend pour acquis, et qui ont guidé pour lui son choix des problèmes. L'enseignant quant à lui, peu présent à cette étape[101], se place dans un rapport critique à un des modèles proposés en regard de sa viabilité en contexte.

4.2.1.1.2 Des stratégies de résolution des problèmes explicitées par le chercheur (2,7)

Cette catégorie[102] indique les stratégies de dénombrement que propose (là encore essentiellement) le chercheur[103] pour résoudre les problèmes proposés.

> *Une première stratégie de résolution explicitée : avec l'arbre/ des choix didactiques explicités {6}* (en lien avec les 3 premiers problèmes à l'appendice C1)
> *YYY : Alors, je disais que, sur chacun de ces exemples, ça peut se faire par un arbre... ça aussi ça peut être une bonne façon de faire passer le principe multiplicatif, c'est de le faire sur un arbre et puis de montrer qu'ici il faut multiplier, pour avoir le nombre de branches terminales... il faut à chaque niveau multiplier les nombres qu'on obtient. (84:88) YYY : l'avantage de cet arbre ci, tu vois, c'est que contrairement à beaucoup d'arbres, ce n'est pas un arbre régulier, c'est-à-dire que chaque fois on n'a pas le même nombre... (152:158)... tu vois, alors des fois ça peut-être un apprentissage important parce que souvent les arbres qu'on donne, souvent ce sont des arbres réguliers. (163:164)*

Le chercheur mobilise à nouveau son cadre théorique, ses connaissances didactiques sur la combinatoire. Ainsi, il attire l'attention de l'enseignant sur différents types d'arbres, les arbres réguliers et les arbres non réguliers, puis fait le lien entre ces arbres et le principe multiplicatif qui s'illustre bien à l'aide d'un arbre régulier. Le chercheur explicite des choix didactiques, soit de travailler avec les élèves non seulement les arbres réguliers qui sont très utilisés dans l'enseignement et présents dans plusieurs manuels, mais également les arbres

---

[101] Ce qui ne veut nullement dire qu'il n'intervient pas. On verra plus loin les balises qu'il sera amené à formuler dans le choix des problèmes et de leur reformulation.
[102] Nous ne reprenons, ci-dessous, que quelques exemples de segments de verbatim illustrant cette catégorie.
[103] Ponctuellement à cette étape de la rencontre, le chercheur est plus présent, mais l'anticipation des stratégies de résolution n'est pas uniquement l'affaire du chercheur comme nous le verrons par la suite.

non réguliers moins présents. Enfin, il se prononce sur l'intérêt de ces arbres comme stratégie facilitant certains dénombrements.

> *Une deuxième stratégie identifiée : décomposition en différents chemins intermédiaires (sur un quadrillage) {1}*
> *YYY : voilà. là, sur le quadrillage, c'est juste si je veux me rendre là.., j'ai mis C, A, B , si je veux aller au point C, alors je regarde un peu les façons de me rendre au point A, puis les façons de me rendre au point B, et si je veux regarder toutes les façons de me rendre au point C, parce que je peux faire ça, je passe par là ou je passe par là, tu vois donc il y a comme une escale ici, là et là, donc chercher le nombre de façons de se rendre au point C c'est en fait chercher toutes les façons de se rendre au point A, et puis les façons de se rendre au point B... Si je connais le nombre de façons de me rendre au point A, puis le nombre de façons de me rendre au B, je connais presque le nombre de façons de me rendre à C. (262:273)*

Est exposé dans l'extrait précédent une stratégie qui consiste à remarquer que le nombre de façons d'aller à une case est la somme des nombres de façons de se rendre aux cases immédiatement à gauche et au dessous. Même si la méthode a l'air simple, elle prend appui, sur les connaissances du chercheur sur les graphes et les réseaux, deux autres modèles utilisés en combinatoire.

En prenant appui sur ces catégories de sens issues de l'analyse, nous avons cherché à caractériser les ressources mobilisées de part et d'autre dans la résolution des problèmes de dénombrement. Lorsque enseignant et chercheur travaillent sur ces problèmes (rappelons-le, des problèmes qui au départ ont été proposés par le chercheur), chacun s'engage dans cette résolution de manière différente : pour le chercheur, il s'agit de faire valoir leur intérêt auprès de l'enseignant sur le plan de la combinatoire et de son apprentissage, pour l'enseignant, qui se place ici davantage en observateur de ce qu'avance le chercheur, il s'agit peut-être avant tout de se les réapproprier. L'analyse qui précède permet de mettre en évidence les ressources mobilisées de part et d'autre, telles qu'elles se dégagent de l'analyse de cette partie du verbatim portant sur la résolution des problèmes de dénombrement.

**Tableau 4.1 Ressources mobilisées lors de la résolution des problèmes du scénario 1**

| Par le chercheur | Par l'enseignant |
|---|---|
| • **Mobilisation de connaissances didactiques sur différents types de modèles combinatoires** : arrangement avec ou sans répétitions ; modèle des mots» ; arbre de choix réguliers et non réguliers ; principes multiplicatif, d'addition, du berger ; <br> • **Des choix didactiques (explicités)** : Donner du sens au principe multiplicatif avec le support des arbres réguliers ; voir l'importance de l'utilisation des arbres non réguliers ; dénombrer au moyen d'arbres de choix pour appuyer une organisation/systématisation du dénombrement | • **Importance de la viabilité des modèles : viabilité d'un modèle questionnée** / pertinence en contexte du principe dit du berger (en lien avec le problème de la table) |

4.2.1.2 Autour de l'analyse des problèmes de dénombrement (4, 9)

En marge de la résolution des problèmes dans laquelle le chercheur occupe beaucoup de place, comme nous l'avons vu avec ce qui précède, l'enseignant et le chercheur se prononcent aussi sur les problèmes qu'ils analysent sous l'angle de leur complexité et des différences entre eux. Différentes entrées dans cette analyse émergent du codage du verbatim de cette partie de la rencontre :

> <u>Une entrée par les élèves dans la comparaison des problèmes</u> *{2}* (l'enseignant parlant du problème du quadrillage et de celui du taxi)
> *XXX : tu vois, ce à quoi je pense, le contexte de ce problème là, qu'est-ce qui est intéressant, c'est qu'on déplace des pions qui sont au centre, ça fait qu'on fait nos lignes dans le milieu, tandis qu'ici ce sont des intersections. (742:744). ...je l'aime comme ça le modèle, on peut écrire des chiffres à l'intérieur. (748:750)*

Dans ce qui précède, l'enseignant compare le problème du taxi à celui du quadrillage et note une différence entre les deux dans le mode de déplacement, qui dans le cas du problème du taxi se fait le long des cases, ce qu'il désigne par les intersections, alors que dans l'autre, le pion se déplace à l'intérieur des cases. *Ainsi, il voit un certain intérêt* *dans le problème du quadrillage en lien avec la possibilité pour les élèves d'écrire à l'intérieur des cases.*

> Une entrée par les variables dans une analyse de la complexité des problèmes *{4} :*
> (plusieurs variables vont être explicitées par le chercheur au cours des échanges)
> *YYY : mais, ça je me disais ce problème là s'il fallait le faire, il faudrait le faire peut-être plus tard.... Parce qu'il est assez complexe, je l'ai vu faire là, mais...j'ai l'impression que l'autre est plus abordable.... parce qu'ici il y a d'autres paramètres là, des plus courts, des plus... Ça complique les choses. (733:740)*

Le chercheur explicite ici une première variable qui fait du problème du taxi un problème complexe, soit le fait qu'on demande aux élèves de dire s'il y a des chemins plus courts parmi tous les chemins possibles.

> *YYY :...parce que quand ils se déplacent à l'intérieur, c'est un autre paramètre, mais ça il faut peut-être que je regarde ça de plus près. (752:753)*

Là, le chercheur se fait l'écho de l'enseignant et considère que la différence dans les types de déplacement entre les 2 problèmes est probablement une autre variable à considérer de plus près.

> *YYY : c'est trop ouvert là (comme problème, à propos du problème de la table) (1287:1287)*

L'ouverture peut-être une autre variable à considérer.

> *YYY : Mais, maintenant la question c'est, est-ce que ce n'est pas trop complexe de leur donner un quadrillage quelconque (561:563)*

Le chercheur se demande si on n'introduit pas une complexité avec la question du passage à un quadrillage quelconque (pour forcer le passage à la généralisation).

Ainsi, en analysant les problèmes du taxi, du quadrillage et de la table, le chercheur met en évidence plusieurs variables susceptibles d'influencer : identifier les chemins les plus courts parmi un ensemble de chemins possibles (problème du taxi), types de représentations/déplacements (problème du quadrillage et du taxi), passage à un quadrillage quelconque, caractère ouvert du problème (la table). Ces différentes variables traduisent une certaine complexité des problèmes.

*Une entrée par les implicites/ exigences pour les élèves dans l'analyse d'un problème* *{2}*
*XXX : on sous-entend que ça puis ça, ça mesure la même chose là. (670:670)*

L'enseignant voit dans l'énoncé du problème du taxi qu'on sous-entend une égalité de la longueur des chemins menant à un des points de ramassage indiqués sur le quadrillage. Il est donc sur les implicites de ce problème.

*XXX : Parce qu'il y a beaucoup, beaucoup de structures là-dedans, je pense. (1326:1327)*

L'enseignant à propos du problème de la table, estime que le travail de structuration est important dans ce problème, qui va être exigeant pour les élèves.

*Un recentrage sur l'objectif poursuivi/l'idée derrière* *{1}*
*YYY : Alors maintenant (il réfère au problème du quadrillage), tu vois la question qui suit, qui est de dire comment ils sont sûrs, comment ils peuvent être certains d'avoir tous les chemins là, alors ça peut peut-être les pousser à systématiser ou bien à avoir un peu une trace de ce qu'ils font (109 :112)*

Le chercheur est ici sur une analyse de l'énoncé, il attire l'attention sur le fait que l'une des questions du problème du quadrillage force les élèves à systématiser, à laisser des traces de leur démarche, remettant à l'avant plan des éléments importants visés pour lui en termes d'apprentissages via ces problèmes.

Le tableau suivant résume les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans le travail conjoint d'analyse des problèmes de dénombrement.

**Tableau 4.2 Ressources mobilisées lors de l'analyse des problèmes du scénario 1**

| Par le chercheur | Par l'enseignant |
|---|---|
| **Une entrée dans l'analyse par les variables** du problème, expliquant leur complexité | **Une entrée dans l'analyse par les élèves/ en termes des exigences** pour les élèves (structuration exigée, implicites à décoder) |
| **Une entrée par l'idée derrière certains énoncés** (intention sous-jacente, ce que cherche à rejoindre une question) | **Une entrée par les élèves/ en termes du potentiel**: possibilité de garder des traces (taxi versus quadrillage) |

4.2.1.3 La résolution anticipée de ces problèmes par les élèves

Quatre catégories permettent de regrouper les différents éléments qui ressortent de l'analyse de cette partie du verbatim de la rencontre au cours de laquelle le chercheur et l'enseignant entrevoient comment les élèves pourraient s'y prendre pour aborder les problèmes: des prérequis identifiés pour pouvoir aborder ces problèmes ; un enseignement de connaissances préalables ciblé ; des résolutions anticipées par les élèves ; l'idée en arrière de cette résolution précisée (avec des intérêts de différents ordres).

4.2.1.3.1 Des prérequis identifiés pour pouvoir aborder ces problèmes (1, 3)

> *<u>L'arbre comme prérequis pour les élèves</u> {3}*
> *YYY : Mais ça aussi, comme tu dis là, ça suppose qu'ils sachent utiliser les arbres de choix. (203:204)...ça maintenant ça dépend comme on début ...ici, peut-être non, mais peut-être au début ...parce que l'idée quand on va faire un scénario, pour ne pas trop aussi les dépouiller, ou les désarmer, je pense peut-être qu'il y a de petites choses qu'il faut qu'ils sachent (210:213)... Moi c'est ça qui est plus essentiel de suggérer juste l'arbre qui est comme un moyen... Donc, pour moi il n'y a pas de problème à leur donner l'arbre comme tel (231:233).*

Les extraits regroupés montrent que pour le chercheur les arbres de choix constituent un prérequis pour les élèves, un outil de résolution qu'on peut leur suggérer et qui leur permet de ne pas se sentir sans moyens dans la résolution de problèmes de dénombrement.

4.2.1.3.2 Un enseignement de connaissances préalables ciblé (2, 3)

L'enseignant indique ce qui devrait être là avant que l'expérimentation ne débute, les connaissances préalables nécessaires.

> <u>Un enseignement préalable de l'arbre de choix</u> *{2}*
> *XXX: moi je vais avoir suggéré ça, l'arbre de choix, ils vont avoir vu ce modèle là. (206:207).. mais, je tiens à dire qu'avant qu'on ne parte ça, ils vont avoir vu le schéma en arbre, ils vont avoir vu la théorie. (1773:1774)*

L'enseignant indique ici, en écho au chercheur, qu'il aura introduit l'arbre avant que le scénario ne soit expérimenté. Si les arbres sont un prérequis, ils doivent alors être enseignés.

> <u>Une introduction préalable de la symbolisation</u> *{1}*
> *XXX : mais, je pense que même quand je vais enseigner les arbres de facteurs, je vais beaucoup insister sur...le fait de marquer les lettres, par exemple si je fais avec la pièce de monnaie 2 fois, mon pile et face, pile face, pile face, je vais leur dire tu as (P, P), (P, F)....: oui, faut que je fasse ça... (498:505)*

Qui plus est, il se propose au-delà d'introduire en classe les arbres de choix, de préparer les élèves à la symbolisation avec des lettres, de manière à organiser systématiquement les données. Il explicite, croyons-nous, un autre préalable pour les élèves, la capacité de symboliser, en les entraînant avec des exemples de base.

4.2.1.3.3 Des résolutions par les élèves (8, 12)

À travers les codes regroupés sous cette catégorie, le chercheur entrevoit des stratégies, une symbolisation, une justification possibles chez les élèves alors que l'enseignant se prononce sur la plausibilité de ces stratégies et anticipe des difficultés chez les élèves.

> <u>Une stratégie par essais et erreurs</u> *{2}* (en référence au problème du quadrillage)
> *YYY : Alors, ce que je vois d'abord qu'ils peuvent faire, c'est par essais et erreurs. (101:102) ils peuvent...c'est assez fastidieux, mais ils peuvent le faire. Alors, ici moi je l'ai dimensionné pour qu'il soit un peu fastidieux, mais on peut le mettre plus petit, par exemple on aurait pu le mettre 3*4 ou 3*3 pour rendre ça moins fastidieux (l'enseignant acquiesce. (106:109)*

Procéder par essais et erreurs, une stratégie certes coûteuse mais à la portée de tous les élèves pour le chercheur. Une stratégie qu'on peut contrer en jouant sur les dimensions du quadrillage.

> Une stratégie de recours à l'arbre *{4}* (en référence aux problèmes du quadrillage puis de la table)
> *YYY : ça aussi, s'ils le font en arbre, ils peuvent le voir là. (152:152)*
> *Ce qui se passe ici, ils peuvent le faire autrement, avec des arbres (372:372)*
> *YYY : mais, ils peuvent aussi le faire avec un arbre là. Un arbre, c'est prendre... (876:876)*
> *YYY : c'est ça. Ils peuvent le faire aussi par les arbres. Alors, ici je l'ai fait juste, il n'est pas beau là, mais je l'ai repris. (906:907)*

Le chercheur revient sur les arbres de choix, pour lui à la portée des élèves. Comme on le voit ici, le cadre de référence du chercheur mobilisé à travers ces interventions (4.1.3.1 et 4.1.3.3) est fortement marqué par les arbres de choix.

> *Un repérage de régularités* *{1}* (en référence au problème du quadrillage)
> *YYY : Après ça maintenant, c'est là où on peut avoir des solutions plus élaborées. Ici quand ils regardent, certains peuvent rapidement voir que quand on se déplace de là à là, chaque fois tu vois, les mouvements vers la droite là, il y a en 1, 2, 3... Donc, en fait pour aller de là à là, c'est comme balayer, faire un balayage 3 à droite, 3 en haut, donc tu vois un chemin qui est là comme ça, c'est comme une suite de D et de H. (112 :117)*

Dans cet extrait, le chercheur sous-entend que certaines stratégies sont plus élaborées, en l'occurrence lorsque les élèves parviennent à repérer des régularités.

> *Un passage à la symbolisation* *{1}* (toujours en référence au problème du quadrillage)
> *YYY : Ici, si on leur suggère une symbolisation avec des D et H, ou bien eux-mêmes ils vont le voir. Peut-être qu'ils peuvent arriver à voir qu'en fait, la chose qui revient, c'est que dans tous les chemins, c'est que chaque chemin est une suite de droite et de haut. (117 :120)*

Le chercheur envisage que les élèves puissent passer à la symbolisation après avoir repéré une certaine régularité dans le cas du problème du quadrillage. Il suggère une symbolisation qui permet aux élèves de passer de leurs modèles spontanés au modèle standard des mots.

*De la portée pour les élèves de la schématisation/symbolisation utilisée par le chercheur {1}*
*XXX : parce que toi pour la modélisation, parce que faire des tables, comme ça, tu sais un élève qui va penser à faire ça, la schématiser comme ça, je ne pense pas qu'ils vont...j'ai hâte de voir, j'ai hâte de voir, je n'aimerais pas le mettre sous la dent. (1350:1352)*

Pour l'enseignant, le chercheur a recours à un type de schématisation qui n'est pas à la portée des élèves, les élèves risquent de ne pas y penser.

*Une ouverture à une symbolisation autre venant des élèves {1}*
*YYY : là ça veut dire qu'ils ont aussi la liberté de symboliser différemment, peut-être qu'il y a en qui vont mettre P comme personne, hein tu vois. (889:890)*

Faisant écho à l'enseignant, le chercheur se ravise, comprenant que sa symbolisation n'est pas évidente pour les élèves, il indique une alternative plus réaliste, soit de laisser les élèves symboliser librement, ce qui rejoint plus son propos sur la modélisation par les élèves. L'enseignant force donc le chercheur à un recadrage qui l'amène à se recentrer sur les élèves dans cet exercice d'anticipation dont le point de mire est la modélisation par les élèves.

*Anticipation d'un type de justification {1}*
*YYY : Parce que des fois, il y a en qui vont faire comme ça, pour prouver que c'est 20, ils regardent tous les cas possibles, puis ils disent que pour ce cas particulier c'est ça. Ça aussi, c'est un peu au niveau de la justification, comment ils font. Il y a en qui peuvent procéder comme ça. (535:539)*

Un type de justification est anticipé par le chercheur, qui dérive d'une stratégie exposée dans les lignes qui précèdent permettant de proche en proche de dénombrer tous les chemins possibles, en particulier les chemins qui nous intéressent dans ce problème.

*De la difficulté à s'organiser chez les élèves {1}*
*XXX : Mais, ce que je veux te dire, c'est qu'il y a en qui vont avoir de la misère beaucoup à se...à se structurer. (1325:1326)*

Dans la foulée de la réserve émise précédemment, l'enseignant indique au chercheur la difficulté à structurer qu'il anticipe chez les élèves.

À travers les codes regroupés dans cette catégorie, le chercheur précise ce qui l'intéresse dans la résolution anticipée par les élèves des problèmes examinés, les aspects qu'il cherche à documenter et qu'il entrevoit également, comme nous le verrons maintenant.

4.2.1.3.4 L'idée en arrière de cette résolution : des intérêts de différents ordres (3, 3)

> <u>*Un intérêt pour les modèles des élèves et le processus de modélisation (significations, repérage de régularités, représentations, symbolisations)*</u> *{1}*
> *YYY : c'est ça. Mais, l'idée maintenant c'est, en fait quand on regarde comme tel le modèle qu'ils travaillent, l'idée c'est plus de voir où est-ce qu'eux ils peuvent aller. L'idée ce n'est vraiment pas qu'ils fassent exactement ça, comme on ferait ça au cégep (l'enseignant acquiesce), il faut qu'on soit sérieux. Mais, l'idée c'est de voir un peu quand ils travaillent sur ça, qu'est-ce qu'ils dégagent comme régularité, tout ce qu'ils attachent là eux-mêmes soit comme symbolisations, représentations, significations de tous ces trajets. (485:491)*

Le chercheur ramène sur la modélisation par les élèves, un processus qui prend appui sur leurs stratégies informelles, leur permet d'arriver à des modèles spontanés qui ne sont pas les modèles standards exhibés par le chercheur.

> <u>*Un intérêt pour le processus de généralisation par les élèves*</u> *{1}*
> *YYY : Ce que je veux dire, c'est que, tu vois, on ne peut pas aller trop loin, donc l'idée est de voir comment eux ils généralisent à plusieurs quadrillages. Est-ce qu'ils vont penser à juste dégager la régularité, dire qu'en fait par exemple si on a un quadrillage 4*4, on aura tels déplacements, qu'il faut faire tel nombre de mouvements en haut ou à droite. Le plus loin possible où ils peuvent aller. (557:561)*

Le chercheur indique son intérêt pour les types de généralisation déployés par les élèves, jusqu'où ils peuvent aller.

> <u>*Un intérêt pour les justifications des élèves*</u> *{1}*
> *YYY : Oui. L'idée c'est de voir un peu le degré de sophistication des justifications (543:544)*

Le chercheur décline aussi son intérêt pour les justifications des élèves, jusqu'où ils peuvent aller.

Le tableau suivant résume les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur à propos de la résolution anticipée par les élèves.

**Tableau 4.3 Ressources mobilisées dans la résolution anticipée des problèmes du scénario 1**

| Par le chercheur | Par l'enseignant |
|---|---|
| • **L'idée derrière:** un intérêt pour les modèles, stratégies, justifications des élèves ; le passage à un modèle plus général<br>• **Des résolutions anticipées par les élèves (stratégies, symbolisation, justification)** : stratégie par essais et erreurs, recours à l'arbre, repérage de régularités, passage à la symbolisation (ouverture à une symbolisation venant des élèves) ; anticipation d'un type de justification<br>• **Des prérequis identifiés** : l'arbre de choix (dont on indique le rôle sans qu'il soit essentiel) | • **Des difficultés anticipées des élèves :** à s'organiser, à symboliser (questionnement sur la pertinence de certaines schématisations du chercheur)<br>• **Un enseignement de connaissances préalable** : arbres de choix, introduction de la symbolisation |

### *4.2.2 L'aménagement du scénario d'enseignement autour de ces problèmes*

Dans cette deuxième section, nous analysons le travail d'aménagement du scénario. Trois aspects après analyse ont été mis en évidence eu égard à cet aménagement du scénario: l'aménagement des problèmes, l'animation en classe puis la planification plus précise du scénario. Dans ce qui suit, nous tenterons de dégager des catégories pour chacun de ces aspects.

#### 4.2.2.1 L'aménagement des problèmes

Pour ce qui est de cet aménagement, nous avons pu dégager trois catégories, soit des balises (sortes de principes sur lesquels on va s'appuyer), une connaissance des élèves et des propositions d'aménagement de part et d'autre.

4.2.2.1.1 Des balises pour délimiter, orienter l'aménagement des problèmes (2, 2)

Cette catégorie renvoie à des principes importants qui vont guider le travail d'aménagement des problèmes.

> *Un compromis entre problèmes intéressants et défi raisonnable pour les élèves {1}*
> *YYY : L'idée comme tu dis là, c'est un bon compromis entre un problème intéressant mais quelque chose aussi, comme tu dis, un défi raisonnable pour eux autres là. (1569:1571)*

Le chercheur énonce ici une des balises importantes du travail conjoint d'aménagement des problèmes qui doit permettre d'arriver à des problèmes intéressants et qui ne sont pas trop difficiles pour les élèves.

> *Le souci d'un équilibre entre ouverture (pas trop de balises) et faisabilité pour les élèves (balises pour que ce soit le plus facile possible) {1}*
> *XXX : Parce que le professeur, il va toujours mettre le plus de balises pour que ce soit, tu sais comme le plus facile possible pour qu'ils arrivent, mais des fois ce n'est pas bon trop de balises tu comprends. Des fois, il faut les laisser aller, ça ne compte pas ça là, là (j'acquiesce). Mais, je pense que d'un autre côté, c'est que là c'est toujours, j'essaie de soupeser, de dire là je pense qu'il n'y a pas assez de balises, je ne veux pas trop en mettre. (1592:1597)*

À côté de son insistance à suggérer de mettre plus de balises au problème de la table pour guider les élèves à bien saisir les 4 cas qu'il faut envisager dans la résolution du problème de la table (comme on le constatera plus loin à travers certaines des suggestions d'aménagement de l'enseignant), l'enseignant explicite un dilemme tenace chez les enseignants qui sont souvent portés à trop guider les élèves alors que des fois il ne le faudrait pas. Il s'agit donc, pour l'enseignant et le chercheur, dans le travail conjoint d'aménagement, d'arriver à un équilibre, un compromis entre ouverture et faisabilité pour les élèves.

4.2.2.1.2 Une connaissance des élèves qui va orienter l'aménagement des problèmes (3, 4)

Nous retrouvons là une catégorie qui nous indique la connaissance des élèves qu'a l'enseignant, connaissance qui l'oriente dans le travail conjoint d'aménagement des problèmes.

> *Difficulté avec la notion de variable {2}*
> *XXX : oui. Non, non ! Ils n'auront pas la notion de, heu...indéterminé par indéterminé, c'est un concept qui est dur à leur faire comprendre, beaucoup, beaucoup! (595:596)*
> *XXX : c'est toujours la même chose, 3x+1, ils vont mettre 3x+1 ça donne quoi? J'ai beau leur dire x est une variable, eux la notion que x peut varier, il y en a qui ne comprennent pas. Eux autres, une variable, ils ont entendu leurs parents en parler, c'est un mot au même titre que saute une bouteille. Une variable c'est une lettre, ou une variable varie, c'est toi qui détermine c'est quoi, ça ils ne voient pas. Oui. Bah, ça c'est mon feeling. (600:605)*

L'enseignant, prenant appui sur sa connaissance des élèves qui en général ont de la difficulté avec la notion de variable, émet des réserves sur l'idée de faire travailler les élèves sur un quadrillage quelconque.

> *Non familiarité avec l'algèbre (passage à un quadrillage quelconque questionné) {1}*
> *XXX : la dimension n*n, non je ne pense pas. Cela suppose qu'ils sont un tout petit peu à l'aise avec l'algèbre là. (569:570)*

Pour l'enseignant, il n'est pas indiqué de faire travailler les élèves sur un quadrillage quelconque (même carré!), car cela suppose que les élèves s'y connaissent, sont un peu familiers avec l'algèbre.

> *Exagérer les nombres pour décourager le tâtonnement {1}*
> *XXX : ça pourrait être bon de, des fois qu'est-ce que je prends moi en secondaire 1, c'est, j'exagère des nombres. (581:584)*

Comme cela est explicite dans l'extrait précédent, l'enseignant puise dans son expérience de l'enseignement auprès des élèves de secondaire chez qui on peut contrer la stratégie par essais et erreurs en utilisant de grands nombres.

4.2.2.1.3 Des propositions d'aménagement des problèmes (10, 18)

Cette catégorie regroupe les propositions concrètes, les suggestions de mise en situation du chercheur et de l'enseignant et ce en lien surtout avec le problème du quadrillage et celui de la table.

> <u>*Changer la forme du quadrillage pour forcer la généralisation*</u> *{2}*
> *YYY : puisque celui-là est carré, juste un quadrillage rectangulaire, leur donner un autre quadrillage quelconque, leur laisser... (572:573)*
> *YYY : parce que moi j'avais juste mis un quadrillage rectangulaire là, tu vois celui-là est carré quoi. Rectangulaire, c'est-à-dire voir s'ils peuvent l'étendre juste en prenant peut-être le cas 4*3 ou 5*3, tu vois. (577:579)*

Dans le cas de ce problème, le chercheur insiste sur la dernière question qui porte sur le cas d'un quadrillage rectangulaire différent du quadrillage carré de départ (4*4). IL mise beaucoup sur cette question qui pourrait permettre aux élèves de dégager le modèle sous-jacent de «mot» advenant qu'ils veulent généraliser, envisager ce qui se passe avec les chemins peu importe le quadrillage. Une question exigeante pour les élèves, mais qui permet d'entrevoir les stratégies limites des élèves. Une chose est cependant à préciser : dans l'énoncé on parle de quadrillage rectangulaire, mais dans son propos le chercheur parle plutôt de quadrillage quelconque. Ceci justifie la réaction de l'enseignant dans les extraits qui suivent.

> <u>*Suggestion d'un quadrillage grand*</u> *{2}*
> *XXX : ou leur suggérer peut-être un quadrillage beaucoup plus grand (575:575)*
> *XXX : ça pourrait être bon de, des fois qu'est-ce que je prends moi en secondaire 1, c'est, j'exagère des nombres. Donc, si tu prends un quadrillage de 10 par 10, il y a en qui vont dire tabarnouche, toutes les possibilités ! Là, ça va les décourager à tâtonner. Mais, n par n, ils ne comprendront pas je pense, moi je pense. (581:584)*

L'enseignant propose plutôt d'exagérer les dimensions du quadrillage, de proposer aux élèves un quadrillage grand, sachant que cela en secondaire 1 permet de décourager le tâtonnement.

> <u>*Limite de l'arbre de choix dans le cas d'un grand quadrillage*</u> *{1}*
> *YYY : c'est juste que, avec l'arbre de choix ils peuvent le faire pour des cas plus grands, mais il ne faut pas aller trop loin. Moi, j'aurai suggéré les laisser faire quoi,*

*peut-être à la limite leur fixer ça. Là, ça c'est 4*4, leur demander pour 4*3 ou 5*4. Mais, n*n ce n'est pas l'objectif ! (586:589)*

Le chercheur, prenant compte de sa connaissance des arbres, met en garde l'enseignant sur le fait que quand le quadrillage est grand, l'arbre de choix est un outil fastidieux pour dénombrer. Là aussi, le chercheur puise à son cadre de référence sur la combinatoire qui lui permet d'opposer à une piste basée sur une connaissance des élèves une «certaine» expertise sur la combinatoire. Le chercheur de revenir à sa proposition de faire travailler les élèves sur un quadrillage rectangulaire donné, l'objectif n'étant pas de les faire travailler sur un quadrillage quelconque, fût-il carré ou rectangulaire.

*Non nécessité d'artifices (problème du quadrillage) {2}*
*XXX : la mise en situation, ça c'est sûr et certain qu'il y a toujours moyen de mettre ça dans un contexte, genre mettre des coins de rue, des maisons, mais sans le mettre trop. On peut le mettre assez froid le contexte du problème. (609:611)*
*Ça fait que, je pense que ça ne sert à rien de trop mettre d'artifices! (619:620)*

Réagissant à une requête de contextualisation plus parlante du problème du quadrillage, l'enseignant estime que pour celui-là l'habillage du problème peut se passer d'artifices, que le problème tel qu'il est formulé, même assez froid, ne pose pas problème.

*Suggestion de balises claires pour guider les élèves {3} (problème de la table)*
*XXX : Je ne sais pas si tu veux leur mettre plus de balises. (1353:1353)*
*XXX : moi, je pense que, oui, je pense que pour ce problème là, ce serait plus intéressant qu'on mette peut-être une balise claire ! Puis, ensuite qu'ils puissent trouver les cas. Ça, ça serait bon. Le problème c'est de trouver les cas. Je pense que la question est très large, ils ne pourront pas comparer entre eux. Il y a en qui vont dire, bon, ben moi je le fais, on distingue ou ne distingue pas, ils vont comparer et vont dire, hey tu as trouvé moins de cas que nous autre, nous autre on en a plein, toi tu n'as pas le bon... (1372:1377)*
*XXX : je pense qu'il faut plus les guider. (1412:1412)*

Avec le problème de la table, l'enseignant insiste beaucoup sur la nécessité de mettre plus de balises dans l'aménagement, des balises claires qui aident les élèves à saisir les différents cas à envisager ici et surtout de pouvoir échanger entre eux. L'objection porte ici sur la possibilité, puisque la question est très large, que les élèves arrivent à des compréhensions différentes de la question qui ne leur permettraient même pas d'échanger sur une base commune.

> <u>*Une structuration en sous-questions pour guider les élèves, mais pas trop !*</u> *{2}*
> *YYY : Mais, ici on aurait pu restructurer le problème comme en étapes là. Ça fait moins situation-problème tout court, avec une question là, mais ça fait comme un problème là en 4 étapes (1308:1310)*
> *YYY : parce que je pensais à l'idée de le fractionner là, des sous-questions qui les orientent un peu là mais pas trop, tu vois. De voir un peu, sur certains cas comment ils font là. (1418:1420)*

Le chercheur consent à guider les élèves, au besoin en reformulant le problème avec des sous-questions, mais il insiste sur le fait qu'il ne faut pas trop les guider, l'intérêt pour lui est de voir comment ils se débrouillent avec certains cas. On voit ici une tension, entre un souci pour l'enseignant de guider les élèves pour qu'ils puissent trouver les cas et comparer entre eux et le souci pour le chercheur de les guider, mais de noter comment ils se débrouillent avec certains cas.

> <u>*Un souci de guider les élèves pour qu'ils modélisent mieux*</u> *{1}*
> *XXX : ils vont mieux modéliser je pense, si tu fais ça. (1588:1588)*

Argument supplémentaire pour l'enseignant, les guider permet aux élèves non seulement de retrouver les 4 cas en jeu dans ce problème, de comparer entre eux, mais de modéliser mieux ! Ici, il rejoint l'objet du chercheur, la modélisation.

> <u>*Un souci d'être clair pour que les élèves comprennent bien la situation*</u> *{2}*
> *XXX : Je suis en train de réfléchir à la mise en situation qui pourrait faire que les élèves comprennent bien qu'on distingue à la fois les places et le voisin de gauche et de droite. C'est qu'ils te comprennent bien là, ça là. Pour nous c'est clair là, mais tu sais, qu'est-ce que ça veut dire distinguer? (1527:1530)*
> *XXX : Le problème est clair, c'est de le rendre clair pour les élèves. (1555:1555)*

Dans les deux extraits précédents, l'enseignant exprime son souci de rendre le problème clair pour les élèves. Pour cela, il reprend à son compte des éléments explicités dans la solution du chercheur et se demande comment les intégrer dans la mise en situation.

> <u>*Idée d'une consigne claire mais ouverte*</u> *{1}*
> *XXX : c'est toujours bon de peut-être proposer, de dire il y a quelqu'un qui affirme 16, est-ce que c'est bon, est-ce que ce n'est pas bon? Ça, c'est intéressant. Moi,*

*peut-être que je laisserai ouvert, rien que des consignes claires, combien y a-t-il de possibilités, sans suggérer une réponse. (1502:1505)*

L'enseignant précise son idée de consigne claire, il ne s'agit surtout pas de suggérer une réponse aux élèves, mais de leur donner l'opportunité de débattre de leurs réponses, par exemple en mettant en scène un tel débat lors de l'aménagement : se prononcer sur une solution fictive.

*<u>Suggestion d'un énoncé qui implique les élèves</u> {2}*
*XXX : bon, moi je pense que les suggestions que je te ferai c'est, les 4 personnes dans le problème, donne des prénoms, Paul, Luc, gnangnan, gnangnan...*
*YYY : quelque chose de moins impersonnel, hein?*
*XXX : oui, rajouter un contexte, rajouter un contexte ça va être bon. (1534:1539)*
*XXX : en haut c'est le président, genre, ok le président s'assoit ici (j'acquiesce), le vice ici, le secrétaire. En mettant ça, en mettant Paul, Luc, YYY, mets-nous dans le problème (rires de moi, j'acquiesce), ok, ça ils vont aimer ça, ils vont aimer ça parce que là on est dedans. (1560:1563)*

L'enseignant va plus loin dans la mise en situation, le chercheur ayant déjà proposé une deuxième version du problème de la table (appendice C1) dans laquelle les 4 personnes autour de la table sont les 4 enfants de Delphine et l'un d'eux, Adrien déclare que la réponse est 16. Il suggère de donner les 4 noms des personnes autour de la table, de mettre nos noms parmi les 4, ce qui amuserait les élèves, les impliquerait davantage dans la résolution du problème. Le tableau 4.4 résume les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'aménagement des problèmes.

**Tableau 4.4 Ressources mobilisées dans l'aménagement des problèmes du scénario 1**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Des principes explicités qui vont guider l'aménagement :** un souci de ne pas mettre trop d'indices en lien avec le processus de modélisation | **Des principes explicités qui vont guider l'aménagement :** un souci de mettre des indices clairs pour que les élèves comprennent bien la situation |
| **Des connaissances didactiques sur la combinatoire :** limite du dénombrement avec des arbres de choix | **Un savoir d'expérience de nature didactique (en lien avec l'apprentissage de certains contenus):** une connaissance des élèves et de leur apprentissage de savoirs mathématiques (non familiarité des élèves avec l'algèbre, difficulté avec la notion de variable) |
| **Une intention :** forcer une généralisation par les élèves pour dégager le modèle sous-jacent | **Une intention :** contrer la stratégie essais et erreurs pour aller vers quelque chose de plus systématique<br>**Un souci d'être clair** (compréhension des problèmes) |
| **Des modalités précisées :**<br>Varier la forme du quadrillage<br>Structuration en sous-questions | **Des modalités précisées :**<br>Des stratégies d'enseignement qui ont fait leur preuve (pour décourager le tâtonnement, la stratégie essai erreur)<br>Recourir à un grand quadrillage<br>Une consigne claire mais ouverte<br>Un énoncé qui implique les élèves<br>Non nécessité d'artifices |

4.2.2.2 L'animation en classe avec les élèves autour des problèmes

Quatre catégories ressortent ici, soit, des finalités poursuivies, des habiletés préalables, des modalités pour l'animation du scénario et une connaissance des élèves.

4.2.2.2.1 Des finalités poursuivies (4, 9)

Des éléments importants pour chacun sont explicités dans ce qu'on vise dans l'animation en classe avec les élèves autour des problèmes.

*Un recentrage sur le processus de modélisation avec ses différentes composantes {5}*
*YYY : Mais, tu vois, ce qui m'importe ici, moi quand je regarde ça du point de vue de la modélisation, il y a deux choses qui m'intéressent. (1355:1357)*

*YYY : c'est plus la première étape où eux ils essaient de comprendre, de voir quelle compréhension ils ont du problème Ici, dans ce cas là, quels cas eux ils sont amenés spontanément à distinguer (l'enseignant acquiesce), tu vois. (1361:1363)*
*YYY : Même pour les cas qu'ils prennent là, parce que l'idée de la modélisation, ce n'est pas tellement la solution qui importe, mais c'est plus le cheminement vers la solution. (1363:1365)*
*YYY : L'idée d'y aller avec quelque chose puis de valider avec l'autre là. (1365:1366)*
*YYY : Peut-être que quand ils vont valider ensemble, en groupes, ils vont voir un cas que d'autres groupes n'ont pas vu, tu vois, si on met ensemble, l'idée un peu de communauté de validation, comme tout à l'heure toi et moi, ils vont voir 2 cas, un autre groupe va voir un 3e cas, donc en tenir compte, tu vois, et puis au finish (1366:1370)*

Le chercheur recentre sur son objet, il précise les étapes qui l'intéressent dans le processus de modélisation, soit la formulation par les élèves de leurs modèles et leur validation en équipes. Il insiste sur le fait que dans la modélisation l'accent n'est pas sur les solutions, mais sur le processus. Dans le cas du problème de la table il explicite mieux ici pourquoi même quand les élèves n'arrivent pas aux mêmes cas en équipes, ceci n'est pas grave car cela complète. L'objectif pour lui c'est d'arriver à tous les modèles en définitive, peu importe que certaines équipes n'arrivent pas à saisir tous les 4 cas. L'idée donc est de travailler à faire fonctionner la classe comme une communauté de validation dans laquelle les élèves sont des pairs qui se valident les uns les autres, se complètent au besoin et arriver à faire le tour du problème. C'est donc son cadre théorique sur la modélisation que le chercheur mobilise pour tenter d'orienter l'animation du scénario.

*<u>Faire débattre les élèves</u> {2}*
*YYY : je trouve que le plus important c'est, quand ils vont travailler ensemble puis un moment on va leur laisser la possibilité de dire ce qu'ils ont et puis de justifier un peu là. Pour moi, c'est déjà un moment où eux-mêmes ils partagent les modèles qu'ils ont, ils valident entre eux, et puis il y a quelque chose qui est là et qu'ils sortent quoi. (1846:1849)*

Il est question du débat, de la verbalisation lors du retour, une verbalisation qui fait expliciter, partager et proposer à l'appréciation des autres les modèles auxquels ils arrivent.

La communication apparaît bien importante pour toutes ces raisons. Et les modèles dont parle le chercheur ici, ce sont les modèles des élèves, leurs modèles spontanés.

*YYY : Moi, ce qui importe c'est ça, qu'ils viennent avec des cas et puis qu'ils confrontent, puis à la fin qu'ils arrivent à quelque chose. (1396:1398)*

Le chercheur précise ce qui l'importe lors du retour sur les solutions, soit la confrontation des modèles, des stratégies, des réponses, une discussion qui permet d'aller plus loin, d'arriver à des choses plus élaborées.

*Un retour sur les modèles combinatoires, ce que les élèves devraient en retenir {1}*
*YYY : Pour ce qui est de ce qu'ils peuvent retenir, je me disais qu'il est bon aussi de savoir ce que les élèves au final retiennent de ça. Ici, je vois un travail sur les arbres, un travail sur le principe multiplicatif, et puis un modèle ici sous-jacent qui est le modèle de mot. (1472:1475)*

Le chercheur se place ici du point de vue de l'institutionnalisation, il indique globalement les modèles que les élèves peuvent retenir. Il s'agit des modèles combinatoires explicités plus loin dont deux pour le chercheur sont en jeu dans la modélisation par les élèves : le modèle de «mot» (problème du quadrillage) et le principe du berger (problème de la table). Les autres étant ici comme des outils, des «modèles-outils» les avons-nous appelés (des modèles didactiques, dirait Gravemeijer, 2007) que le chercheur voudrait qu'on ajoute à la «boîte à outils» des élèves : les arbres de choix et le principe multiplicatif.

*Ce que les élèves devraient retenir des modèles : l'efficacité de ces modèles {1}*
*XXX : parce que c'est important qu'il y ait une finalité. Il faut qu'on leur dise, bon, ben...Parce que, c'est en corrigeant qu'on va leur, c'est sûr qu'on va leur suggérer des modèles, mais après ça il va falloir leur montrer l'efficacité des modèles. (1841:1843)*

L'enseignant estime pour sa part qu'on ne peut pas échapper à leur suggérer des modèles lors de la correction et il importe pour lui de leur montrer l'efficacité des modèles. Encore une fois, une référence à l'efficacité, une finalité très importante pour lui : il s'agit pour les élèves de montrer qu'ils peuvent être efficaces dans la résolution de problèmes, et dans la correction des problèmes, un moment qu'il privilégie dans sa pratique (voir section 4.1), il s'agit aussi de montrer aux élèves l'efficacité des modèles trouvés.

4.2.2.2.2 Une continuité avec le travail préalable

Avec cette catégorie, l'enseignant en lien avec ce qu'avance le chercheur sur le processus de modélisation, indique une continuité avec le travail préalable fait en classe et qui portait sur les beaux problèmes.

> Continuité avec le travail préalable en classe sur les beaux problèmes *{2}*
> *XXX : mais, j'ai déjà amorcé ça un tout petit peu depuis le début de l'année, c'est avec les beaux problèmes. Parce que le premier, ils l'ont fait en équipes, ensuite ils échangeaient. Le deuxième, ils l'ont fait seuls ensuite ils échangeaient, combien tu as fait, ha tu as fait ça! C'est déjà quelque chose... (1851:1854)*
> *XXX : oui. Je vais en faire un troisième. Quand ils vont faire ça, ils n'auront pas de choc, ils n'auront pas de choc ! (1858:1859)*

Et l'enseignant par rapport à la finalité de faire débattre les élèves d'indiquer au chercheur que la poursuite d'un tel but est dans la continuité d'un travail amorcé en classe avec les beaux problèmes, en équipes ou seuls, où les élèves étaient invités à échanger.

4.2.2.2.3 Des modalités pour le retour sur les problèmes et leur résolution (par les élèves) (5, 8)

Avec cette catégorie, l'enseignant et le chercheur sont sur les modalités pratiques de retour, le rôle du chercheur dans l'animation en classe, comment se fera le retour sur les solutions.

> Des rôles différents en classe *{1}*
> *XXX : ok, mais, je pense que ce qui va être important c'est la dynamique lorsque tu vas rentrer en classe. Je ne sais pas si tu veux être un observateur, est-ce que tu veux être observateur et guide?*
> *YYY : je pourrai être un guide, mais pas au même niveau que toi là, mais je pourrai interagir.*
> *XXX : ok. Oui, effectivement. (235:242)*

L'enseignant ici interpelle le chercheur sur les rôles il entend jouer dans l'animation en classe : veut-il juste observer ou envisage-t-il de s'impliquer plus activement ? Le chercheur est alors forcé de préciser son rôle, il voit son rôle différent de celui de l'enseignant, il est bien disposé à participer à l'animation mais dans une moindre mesure que l'enseignant.

> *<u>Importance pour l'enseignant que le chercheur s'implique vis-à-vis des élèves</u> {2}*
> *YYY : comme je l'ai fait un tout petit peu, il y a en qui m'ont dit c'est quoi...*
> *XXX : oui, c'est bon, c'est correct, moi je trouve ça le fun qu'ils te posent des questions. (244:247)*
> *XXX : je ne sais pas si tu comprends ce que je veux dire. Si à un moment donné tu te promènes, tu pourras dire, ok il faut que je vous parle, là tu peux faire un message, ça, il faut que tu te sentes bien à l'aise de faire ça.*
> *YYY : d'accord. Mais, là on pourra convenir, s'il le faut je te le dis, et puis on...*
> *XXX : oui. C'est beau. (252:258)*

L'enseignant voit d'un bon œil que le chercheur s'implique vis-à-vis des élèves, pour cela il lui fait de la place dans sa classe, le met à l'aise, l'invite au besoin à orienter dans un sens ou un autre les élèves. Ce qu'accepte l'enseignant en ajoutant toutefois, qu'il l'avisera au besoin, conviendra avec lui.

> *<u>Une ouverture à un mode de fonctionnement souhaité par le chercheur : un retour différé</u> {1}*
> *XXX : mais, je sais que toi tu disais, comme on met une période pour un problème...tu sais on peut en travailler un puis oups on laisse de côté, on en travaille un autre, je suis ouvert aussi à ça là moi. (1749:1751)*

Un autre propos d'ouverture de la part de l'enseignant, le chercheur ayant à un autre moment parlé de l'importance de différer le retour lors de la résolution d'une série de problèmes, histoire de laisser mûrir et surtout de ne pas biaiser le reste de la résolution dès qu'on revient de façon approfondie sur un problème en mettant en évidence des stratégies, des modèles, etc.

> *<u>Une interpellation sur le retour sur les solutions et sur le mode de correction : différents enjeux explicités</u> {3}*
> *XXX : ok. Qu'est-ce qui serait bien, je ne sais pas dans le scénario, quand est-ce que tu veux qu'on fasse la correction de tout ça ? T'aimes-tu mieux que, par exemple à la fin de la première période on donne les solutions ou on ne donne pas de solutions pour pas qu'ils modifient, tu sais je ne sais pas, ou bien on attend la fin des 3 périodes pour donner les solutions. (1816:1820)*

Une interpellation sur les moments où se fait le retour sur les solutions (corrigé), entre les périodes ou à la fin de l'expérimentation.

*XXX : Mais, toi t'aimes-tu mieux ramasser les copies, puis ça soit vraiment comme ils ramassent les copies, je les ai toutes, ok voici la réponse, voici comment on résout ça! (1831:1833)*

Une interpellation aussi sur le mode du retour, s'agit-il d'indiquer aux élèves comment on résout les problèmes et les réponses en définitive. Là encore, l'enseignant veut concrètement savoir comment faire avec les élèves.

*YYY : non. Peut-être que pour la première partie avec les problèmes d'introduction on pourrait donner les solutions à la fin, il faudrait peut-être choisir les problèmes en conséquence. (1822:1824)*

Le chercheur montre sa préférence pour une correction graduelle, à la fin des 3 moments de retour prévus, la correction des problèmes d'introduction pouvant se faire intégralement à la différence de celle des deux autres problèmes (le quadrillage et la table) avec lesquels des indices peuvent être suffisants ! On voit ici que le souci avec l'approche de la correction pour les 2 derniers est d'éviter autant que possible d'indiquer aux élèves des démarches, des modèles qu'ils pourraient reproduire dans la résolution suivante.

*<u>Sensibilité du chercheur à la rupture provoquée avec le mode de fonctionnement habituel de l'enseignant</u> {1}*
*YYY : Mais, peut-être que pour les deux autres, celui-là on pourrait donner peut-être une idée de solution vers la fin, mais ils ne sont pas habitués à ça, ils sont habitués à avoir la solution. Je me disais qu'il faut faire ça à l'intérieur, puis on corrige à la fin, ou bien on donne quelques indices puis la prochaine séance on fait vraiment... (1824:1828)*

Dans cet extrait, le chercheur reconnaît le fait que l'approche qu'il privilégie pour la correction des problèmes constitue une rupture avec le mode de fonctionnement habituel, la routine de l'enseignant.

4.2.2.2.4 Une connaissance des élèves mobilisée dans l'aménagement en classe (2, 2)

*<u>Indication d'un levier pour impliquer les élèves dans l'expérimentation</u> {1}*

*XXX : oui, le fait que tu sois en classe, qu'il y ait un cahier, ça, ça ne les insécurisera pas, parce que je vais bien leur vendre que là, vous êtes en train de faire une expérience intéressante. Ça fait qu'ils vont dire, ha ok ! Là je vais dire, vont devez montrer que vous êtes capables d'être efficaces. (il claque des doigts) Ils vont vouloir te prouver qu'ils sont bons. (615:619)*

L'enseignant puise encore à nouveau dans une certaine connaissance des élèves pour indiquer le levier qu'il compte activer pour impliquer les élèves dans l'expérimentation. Il s'agit de signifier aux élèves qu'ils vivent une expérience intéressante dans laquelle il s'agit de monter qu'ils sont efficaces, qu'ils sont bons! En somme, il l leur indique un défi à relever !

*<u>Une prise en compte du fonctionnement des élèves en équipe {1}</u>*
*XXX : oui, parce que si on les fait travailler en équipes, moi par expérience j'ai vu que s'il y a une seule personne qui écrit dans le document, les autres vont être portés à le regarder faire. Rien que le problème, celui-là, s'il n'y a qu'un élève, il va faire tous les cas, puis les autres ils n'auront pas la même feuille (1436:1439)*

L'enseignant, par expérience, attire l'attention du chercheur sur le fait que dans le travail en équipes que ce dernier lui a suggéré, il y a le risque que seule une personne s'implique dans la tâche, celle qui écrit dans le document, les autres adoptant une position attentiste. Il puise ici donc à son savoir d'expérience et indique implicitement au chercheur un dysfonctionnement à surveiller dans le travail en équipe et à corriger. Par exemple, mais là nous extrapolons, en veillant à une répartition des tâches et une redistribution si possible de cette répartition quand les élèves changent de problèmes. Le tableau suivant résume les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur sur l'animation en classe autour des problèmes.

**Tableau 4.5 Ressources mobilisées dans l'animation en classe avec les élèves autour des problèmes du scénario 1**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Des intentions explicitées :**<br>• Recentrage sur les étapes du processus de modélisation (formulation de modèles par les élèves, faire débattre, validation, communauté de validation) ;<br>• Retour, ce que les élèves doivent en retenir : sur les modèles et le processus de modélisation<br><br>**Des modalités précisées :**<br>• Une correction graduelle ; dans certains cas, donner uniquement des indices de solutions | **Des intentions explicitées**<br>• Retour, ce que les élèves doivent en retenir, l'efficacité des modèles<br>**Un savoir d'expérience de nature pédagogique**<br>• Une connaissance des élèves (leur fonctionnement en équipe, comment les impliquer,)<br>**Des modalités précisées :**<br>• Continuité avec un travail déjà fait sur les beaux problèmes. |

4.2.2.3 La planification plus précise du scénario

Dans cette étape finale est abordée la planification concrète du scénario. Ici, nous n'avons pas pu dégager de catégories conceptuelles comme telles, nous somme resté au codage ouvert qui est suffisant pour donner une idée de la planification entreprise.

<u>*Suggestion d'un agencement du scénario en trois étapes*</u> *{1}*
*YYY : en fait... mon idée de scénario c'est juste comment on va agencer les différentes activités, quelles vont être les situations introductives? Un peu, on les a ici, puis quelles vont être les situations intermédiaires, puis la situation finale. (1678:1680)*

Le chercheur avance l'idée d'un scénario en 3 étapes : 1) des situations introductives; 2) des situations intermédiaires; 3) une situation finale.

<u>*Suggestion de situations introductives simples*</u> *{2}*
*YYY : ce sont des situations qui sont simples, elles se font vite. (1743:1743)*
*YYY : elles se font vite là (1747:1747)*

Des situations introductives simples, qui ne doivent pas poser de défi aux élèves.

<u>*Suggestion de situations introductives pour asseoir les arbres de choix et le principe multiplicatif et outiller les élèves*</u> *{3}*

*YYY : L'idée c'est d'avoir de petites situations introductives qui permettent d'asseoir le principe multiplicatif, de réviser un tout petit peu les arbres, s'il le faut un arbre régulier puis un arbre non régulier, puis qu'ils comprennent un peu comment ça fonctionne. Minimalement avec ça je pense après qu'ils peuvent explorer autre chose. (218:222)*
*YYY : pour asseoir au moins le principe multiplicatif... (1718:1718)*
*YYY : Je vois mieux comme ça le scénario. Une première période à expérimenter autour de situations d'introduction, pour asseoir, pour travailler un peu les arbres, pour travailler le principe multiplicatif, juste pour les outiller un tout petit peu pour qu'ils puissent... (1768:1771)*

Des situations introductives autour du principe multiplicatif et des arbres de choix, ceci pour outiller minimalement les élèves à explorer les problèmes restants du scénario.

*Suggestion de situations introductives prises dans le manuel et dans ce qui est proposé {2}*
*XXX : faudrait un autre problème de base. (1716:1716)*
*XXX : c'est ça, mais tu peux toujours en prendre un du, en tout cas...*
*YYY : du livre?*
*XXX : vas-y, en tout cas!*
*YYY : mais, c'est aussi cela l'idée, de voir dans le livre.*
*XXX : oui!*
*YYY : quelque chose...*
*XXX : mais, tu en avais ressorti là.*
*YYY : oui, c'est ça, j'en avais.*
*XXX : moi je peux ne pas les faire, puis les faire lors de la première période, ceux que tu m'as envoyé en courriel là, le numéro 6, tout ça, on pourrait les mettre là (j'acquiesce).*
*YYY : parce que ceux-là sont importants aussi, ça permet de...*
*XXX : ok, non c'est ça ! Fait qu'on mélange, le premier cours on inclura 3 ou 4. (1720:1741)*

L'enseignant avance l'idée de tenir compte des problèmes du manuel, d'arriver à un mélange de ces problèmes et de ceux que le chercheur propose. Cette préoccupation était déjà là, avant cette rencontre comme l'illustrent les extraits suivants tirés de notre journal de bord.

Résumant le déroulement de la rencontre d'information précédant cette rencontre réflexive, le chercheur ajoute :

*YYY : Il (l'enseignant) se soucie de la façon et du moment choisis pour introduire les situations. Mandat m'a été donné de regarder le chapitre probabilité et de voir quels exercices seraient une bonne «entrée en matière» pour les premières situations et donc le premier scénario que nous allons expérimenter.*

Nous avons donc là une donnée complémentaire qui appuie le souci de l'enseignant de tenir compte du manuel dans le choix des situations introductives pour le scénario. Dans l'extrait suivant, le chercheur indique dans un courriel envoyé à l'enseignant, avant la rencontre réflexive, les éléments qui ressortent de son analyse du manuel :

*YYY : J'ai passé en revue les problèmes proposés dans la partie «coup d'œil» de l'unité 5.3 (p. 28 à 32) avec en tête ce que nous nous sommes dits la dernière fois, c'est-à-dire voir lesquels de ces problèmes feraient une bonne entrée en matière pour les situations que nous voulons expérimenter. Certains de ces problèmes sont explicitement des problèmes de dénombrement avec des questions du type «combien de possibilités», «quelles sont les possibilités différentes» ? Il s'agit des numéros 6, 7, 8, 11, 13 et 21. (...) Par exemple, la résolution des exercices 6, 7, 8 exige le recours au principe de la multiplication. Aussi, le problème 14 est un bon exercice à l'usage de l'arbre de choix dont il convient de montrer les limites aux élèves. Par ailleurs, il y a des références dans cette partie que j'ai regardée à différents modèles : la grille, l'arbre de choix (p. 14), le réseau (p. 13)...Je te laisse sur ces notes...on s'en reparle demain...*

En somme, avec les différents extraits regroupés sous ce code, nous sommes sur un souci de double-vraisemblance qui amène l'enseignant et le chercheur à planifier le scénario de sorte qu'il intègre des problèmes issus du manuel à côté de ceux proposés par le chercheur, certains issus de la recherche. Le tableau 4.6 résume les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans la planification.

**Tableau 4.6 Ressources mobilisées dans la planification du scénario 1**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| • **Un scénario gradué en termes de 3 étapes** (situations introductives, intermédiaires et finales)<br>• **Des critères de choix des problèmes introductifs :** des problèmes dans lesquels les élèves peuvent s'engager facilement, des problèmes qui permettent d'outiller les élèves avec les arbres ou le principe multiplicatif<br>• **Un principe guidant le choix des problèmes** puiser à la recherche mais aussi aux manuels | • **Des critères de choix des problèmes introductifs :** des problèmes pris dans le manuel qui seraient une bonne entrée en matière; dans le chapitre probabilités<br>• **Un principe guidant le choix des problèmes** Puiser aux problèmes de la recherche, mais aller chercher des problèmes du manuel |

### *4.2.3 Épilogue au scénario 1*

À la suite de la rencontre du 18 octobre 2006, une première version du scénario 1 a été préparée par le chercheur et envoyée par courriel à l'enseignant en prévision d'une rencontre prévue le 11 novembre 2006 pour valider ensemble cette première mouture. Avant cette rencontre du 11 novembre, l'enseignant a envoyé au chercheur une proposition de cahier où les élèves laisseraient des traces de leurs démarches (appendice C3) et, réagissant à cette proposition, le chercheur en a profité pour exposer une réflexion qui lui est venue entre temps, après un examen minutieux de la version du scénario 1 à discuter/valider dans laquelle il est apparu au chercheur qu'il y avait un certain danger a aller trop vite vers des modèles standards tels les arbres de choix ou le principe multiplicatif :

> *«Salut XXX !*
> *Le cahier est beau ! C'est bien parti...oui, il est important d'avoir les traces des démarches dès élèves avec les premiers problèmes...ces traces renseignent sur les premiers modèles qu'ils se donnent spontanément...concernant ta note (commentaire à la page 1 de ton document) demandant s'il faut indiquer aux élèves de faire des schémas, je pense qu'il faut laisser cela ouvert au début...et si cette question nous venait des élèves, on pourrait leur dire d'utiliser le type de représentation qu'ils veulent...schéma, tableau, grille, etc...tout ce qu'ils veulent...la précaution ici, est d'éviter un effet de contrat qui ferait que dès que le maître (ici*

*nous deux) leur suggère une «façon de faire», ils risquent de procéder par la suite tout le temps de la même façon...Qu'en penses-tu ?*

*À propos des premiers problèmes, à bien y réfléchir, je me demande XXX comment faire pour éviter que nos propos ou une certaine emphase sur les arbres de choix ou le principe multiplicatif n'introduisent un biais inutile dans le processus de modélisation que nous voulons mettre en place...*

*Pour moi XXX, l'important dans ce que nous voulons faire c'est de mettre les élèves dans la situation pas juste de résoudre des problèmes mais de rendre compte de leurs démarches, de revisiter leurs solutions, de raffiner leurs solutions, comme tu le soulignes bien dans la première page du cahier de l'élève que tu as préparé...Et il s'agit d'un aspect sur lequel nous cherchons à voir comment on peut le travailler dans la résolution de problèmes...Sur ces petites notes je te laisse et te dis à jeudi dès 15h30 mn.»*

À la rencontre du 11 novembre, l'enseignant et le chercheur sont donc revenus sur la proposition de scénario et ont procédé à de derniers aménagements : 1) le problème de la table a été supprimé, sur proposition du chercheur, car elle s'avérait trop complexe et prendrait trop de temps, trois périodes seulement étant prévues par l'enseignant pour l'expérimentation du premier scénario; 2) au lieu des six situations de départ, le chercheur a aussi proposé une limitation à quatre problèmes introductifs (pour ce qui est des problèmes effectivement exploités lors de l'expérimentation du scénario 1, nous renvoyons le lecteur à l'appendice C4). Pour ce qui est de l'animation du scénario, l'enseignant et le chercheur se sont entendus sur une modalité leur permettant de documenter un effet éventuel de contrat : ainsi, dans un des groupes que l'enseignant considère comme «fort» on ne parlera pas des arbres de choix et du principe multiplicatif, alors qu'avec l'autre groupe jugé «faible» les arbres de choix et le principe multiplicatif seront introduits avant le début de l'expérimentation.

### *4.2.4 Quelle lecture faire de l'analyse de la rencontre réflexive portant sur l'élaboration du premier scénario ?*

Dans les lignes qui précèdent nous avons tenté, au moyen de différents tableaux, de faire l'inventaire des ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans la conception de ce premier scénario. Ces ressources nous éclairent sur la nature du regard porté par le chercheur et celui de l'enseignant sur :

- l'analyse des problèmes de dénombrement examinés (tableaux 4.1 et 4.2)
- le processus de modélisation par les élèves sous l'angle de la résolution anticipée chez les élèves (tableau 4.3)
- l'enseignement visant le développement de ce processus, en termes de l'aménagement apporté aux problèmes et du retour collectif sur la résolution des problèmes par les élèves (tableaux 4.4, 4.5 et 4.6)

Pour aller plus loin à cette étape de l'analyse, nous nous appuierons sur ce que Desgagné (1998) nomme des concepts théoriques disponibles. La construction émergente qui ressort de ce premier niveau de codage nous a en effet conduit à raffiner le concept de ressource structurante emprunté à Lave (1988), à travers les concepts de ressources interprétatives et de ressources d'action, qui viennent en quelque sorte préciser la nature des ressources structurantes mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans cette construction du premier scénario. D'autres concepts seront également utilisés, de manière complémentaire, ceux de sensibilité théorique et de sensibilité pratique, qui permettent de donner un sens à certains des codes mis en évidence.

À ce stade[104], pour éclairer un peu le lecteur, disons que la notion de ressources interprétatives nous est apparue comme un appui théorique fécond pour rendre compte et aider à caractériser les lectures interprétatives de l'enseignant et du chercheur sur les problèmes, les productions anticipées des élèves, etc. Quant à la notion de ressources d'action, elle doit être vue ici comme une élaboration émergente dans la foulée de cet effort de caractérisation des ressources autres que les ressources interprétatives, qui servent d'appui à l'action (aménagement des problèmes, enseignement autour de ces problèmes,

---

[104] Pour ce qui est de la conceptualisation plus complète de la notion de ressources interprétatives nous renvoyons le lecteur à la section 5.1 du chapitre d'interprétation des données, plus précisément à la sous-section 5.1.2.

etc.). Enfin, les concepts de sensibilités théorique et pratique renvoient au positionnement de l'un par rapport à l'autre, à la manière pour le chercheur ou le praticien d'entrer dans une démarche de coconstruction.

#### 4.2.4.1 Une analyse en termes de ressources interprétatives

Une première catégorisation nous permet de parler de «ressources interprétatives» mobilisées de part et d'autre, c'est-à-dire de ressources permettant au chercheur et à l'enseignant de donner un sens, de proposer une certaine lecture des aspects abordés dans ce travail conjoint de conception d'un premier scénario.

La sociologie de l'expérience traite de cette notion de «ressources interprétatives». En effet, elle postule que les acteurs sont capables de connaissance et disposent de ressources interprétatives que le sociologue doit prendre en considération (Dubet, 1994 ; Vrancken et Kuty, 2000). Pour Dubet (1994), la sociologie de l'expérience invite à considérer chaque acteur comme un «intellectuel», un «expert», un acteur capable dans une certaine mesure de maîtriser consciemment son rapport au monde. Toujours selon Dubet (1994), les acteurs sont «largement en mesure d'argumenter, d'opposer une expérience qui n'est pas seulement un morceau de vécu, mais une interprétation pouvant confirmer ou refuser les analyses du chercheur» (p. 238). Les ressources interprétatives dont parle la sociologie de l'expérience sont donc des ressources argumentatives et critiques permettant aux acteurs de prendre position par rapport aux théories proposées par les chercheurs.

Cette notion de ressources interprétatives est quelque peu reprise par Bednarz et al. (2001) qui parlent de la nécessité pour le didacticien d'intégrer les «ressources interprétatives» des enseignants dans la conceptualisation de séquences ou de situations d'enseignement[105]. Dans ce qui suit, nous essayons de mettre en évidence les ressources

[105] Bien sûr, les ressources dont parlent les auteurs (Bednarz et al., 2001) sont plus des «ressources structurantes» du savoir qui se co-construit.

interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors de la conception du premier scénario.

Comme nous l'avons montré dans ce qui précède, l'enseignant prend part à l'analyse des problèmes, et entrevoit leur complexité en termes des exigences pour les élèves qui ont, entre autres, une difficulté à se structurer (tableau 4.2), mais aussi l'enseignant se montre critique face à un des modèles sous-jacent à un des problèmes proposés par le chercheur lors de la rencontre réflexive d'élaboration du premier scénario, soit le principe dit du berger. Le principe du berger lui parait absurde dans la mesure où il énonce une méthode de dénombrement du troupeau d'un berger en y allant avec un décompte des pattes puis en divisant par 4 plutôt qu'en comptant le nombre de têtes.

En lien avec la résolution anticipée chez les élèves (tableau 4.3), l'enseignant s'attend à ce que les élèves aient de la difficulté à s'organiser et, comme précédemment, se montre critique par rapport à une certaine symbolisation utilisée par le chercheur, interpellant ce dernier sur la plausibilité de ses anticipations et le ramenant à entrevoir la résolution vraisemblable des élèves.

Dans l'aménagement des problèmes (tableau 4.4), l'enseignant puise également à ses connaissances didactiques des élèves de secondaire 1 en lien avec l'apprentissage de certains contenus, et attire l'attention du chercheur sur leur non familiarité avec l'algèbre, sur la difficulté qu'ont les élèves avec la notion de variable.

Il est à noter que lors de l'aménagement des problèmes, l'enseignant montre un souci constant pour la compréhension par les élèves des problèmes, ce qui l'amène à s'intéresser à la clarté pour les élèves des énoncés de problèmes, les énoncés pouvant être ouverts mais devant représenter des défis à la portée des élèves (d'où l'importance de guider au besoin les élèves). Enfin, lorsqu'avec le chercheur il aborde l'animation en classe avec les élèves (tableau 4.5), il formule son souhait que les élèves soient édifiés sur l'efficacité des modèles retenus lors du retour. Rappelons que l'efficacité est un aspect important pour l'enseignant qui la valorise dans la résolution de problèmes, comme l'a montré l'analyse de l'entrevue préalable (section 4.1.2.2).

Comme on peut le voir dans ce qui précède, dans la discussion avec le chercheur, l'enseignant ramène souvent aux élèves, se place de leur point de vue, essaie de refléter ce qu'il décode comme pouvant être une difficulté pour eux, ce que les élèves pourraient faire ou non en lien avec les problèmes qui leur seront proposés. Il ramène à cette occasion le chercheur au vraisemblable, réfutant par moment les propositions avancées (exemple du principe du berger ou de la symbolisation). En somme, les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant lors de la conception du premier scénario sont de deux ordres : principalement sa connaissance des élèves de secondaire 1 dans l'apprentissage de certains savoirs mathématiques, ce dont ses élèves sont capables à la lumière de son expérience, mais aussi des principes tels le souci de la clarté des énoncés pour les élèves (pour qu'ils soient compréhensibles par les élèves) dans l'aménagement des problèmes, le souci de l'efficacité des modèles à mettre de l'avant lors du retour en classe sur les solutions.

Par ailleurs, lorsque qu'on s'attarde sur la contribution de l'enseignant à l'analyse des problèmes, au-delà de sa connaissance des élèves, l'enseignant montre qu'il sait identifier des «variables» pouvant influencer la résolution, comme lorsqu'il a souligné en comparant deux problèmes (problème du quadrillage et celui du taxi), une différence dans le mode de déplacement pouvant jouer sur la résolution (tableau 4.2). Ce que nous voulons souligner ici, c'est qu'au-delà de renseigner sur les ressources des élèves (leurs possibilités/difficultés) dans la résolution qu'il anticipe chez eux, l'enseignant dispose aussi de ressources interprétatives lui permettant d'identifier les implicites à décoder pour les élèves (tableau 4.2), les contraintes, les paramètres d'une situation d'apprentissage, rejoignant en cela l'analyse du didacticien, mais dans ses mots à lui.

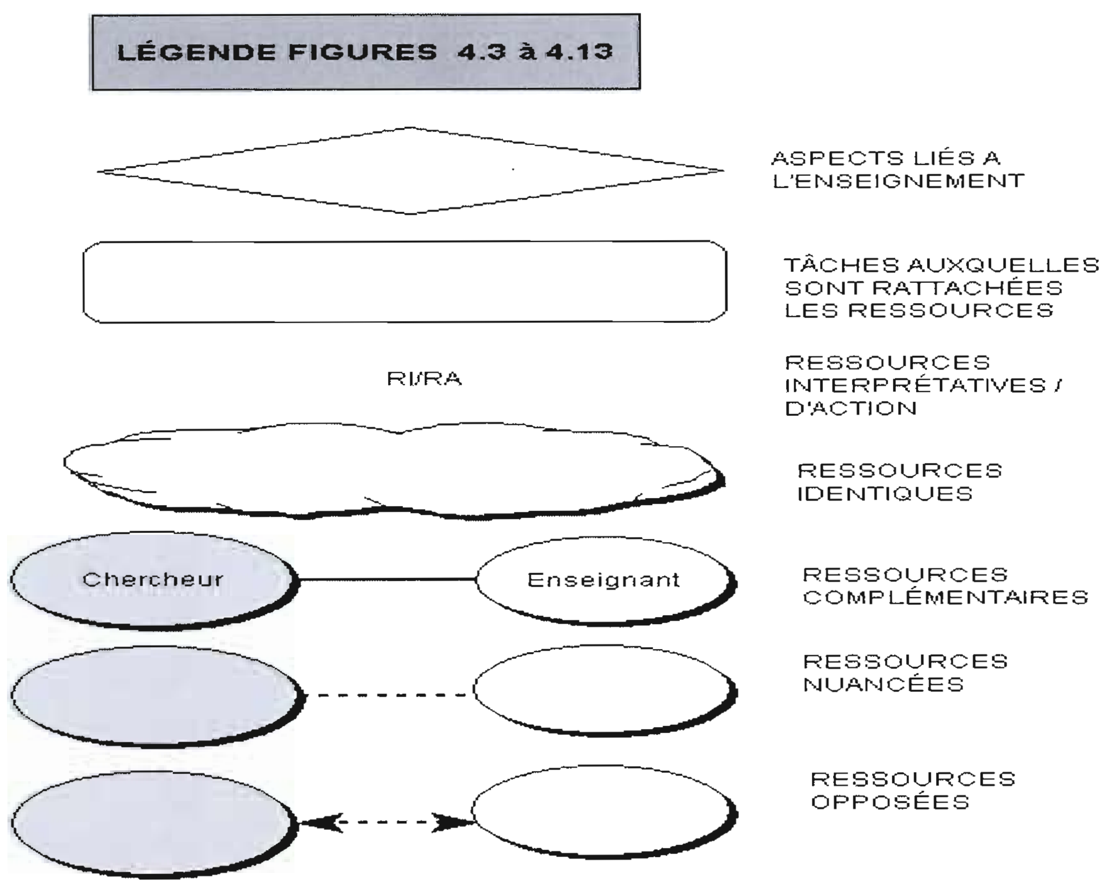
Quant au chercheur, il mobilise dans cette conception diverses ressources interprétatives renvoyant à ses connaissances didactiques (qui incluent une analyse des concepts mathématiques) sur la combinatoire et sur le processus de modélisation. En effet, sa connaissance de différents modèles combinatoires est mobilisée dans le regard qu'il porte sur les problèmes lors de leur résolution (tableau 4.1), le chercheur s'épanchant sur les arbres de choix, les arrangements, les principes d'addition, de la multiplication et du berger. Sa connaissance des modèles combinatoires est également mise à contribution lorsque, anticipant la résolution des élèves, il entrevoit le recours possible à des arbres de choix (tableau 4.3) qu'il considère à un certain moment comme un prérequis pour les élèves. Enfin, en restant toujours sur les connaissances du chercheur puisées au domaine de la combinatoire, ces connaissances sont mobilisées lors du travail conjoint d'aménagement des problèmes lorsqu'il attire l'attention de l'enseignant sur la limite du dénombrement à l'aide des arbres de choix, un tel dénombrement étant très fastidieux dès que la profondeur de l'arbre dépasse 7 niveaux (tableau 4.4).

D'autre part, les connaissances du chercheur sur le processus de modélisation sont aussi mobilisées à plusieurs occasions lors de la rencontre réflexive. D'abord, à travers le regard porté sur les problèmes qu'il propose, le chercheur précise l'idée en arrière des énoncés, en l'occurrence dans le cas du problème du quadrillage le fait que la dernière question vise à pousser les élèves à être systématique, à passer à des modèles plus généraux (tableau 4.2). Ensuite, en lien avec la résolution anticipée par les élèves, le chercheur indique que les aspects qui l'intéressent à travers les stratégies, démarches possibles des élèves sont de l'ordre des modèles qu'ils créent, de leurs façons de justifier ces modèles, de tenter de passer à des modèles plus généraux (tableau 4.3). Un tel intérêt prend appui sur une connaissance des étapes du processus de modélisation, soit les étapes de formulation et de validation. Également, dans l'aménagement des problèmes, c'est-à-dire quand avec l'enseignant ils tentent de modifier, reformuler les problèmes, le chercheur sur la base de sa connaissance du processus de modélisation se positionne en faveur de très peu d'indices dans les énoncés, des énoncés à travers lesquels il vise à amener les élèves à généraliser afin de dégager les modèles sous-jacents aux problèmes (tableau 4.4).

Les connaissances du chercheur sur la modélisation sont aussi mobilisées à travers les intentions, les visées qu'il explicite en lien avec l'animation prévue du scénario (tableau 4.5). Pour les fins de cette animation, le chercheur s'efforce de recentrer les discussions sur les étapes du processus de modélisation, soit la compréhension du problème, l'importance de partager et de valider les modèles à travers les débats entre les élèves qui doivent, dans sa perspective sur le développement du processus de modélisation, constituer une communauté de validation.

Comme on le voit, les ressources interprétatives du chercheur puisent à ses connaissances sur la combinatoire et sur le processus de modélisation. Par ailleurs, lors de l'analyse des problèmes, le chercheur repère différentes «variables didactiques». Ce repérage renvoie alors non pas à ses connaissances sur la combinatoire ou sur le processus de modélisation, mais à ce que nous désignerons par les ressources de l'interprétation didactique, c'est-à-dire à certaines des approches et moyens que se donnent les didacticiens, entre autres les didacticiens des mathématiques, pour arriver à déterminer la complexité relative de certains problèmes.

Pour conclure, au vu des ressources interprétatives mises en évidence dans ce qui précède, nous estimons que des principes guidant l'enseignant (clarté, efficacité) ainsi que sa connaissance des élèves de secondaire 1 (l'amenant à juger du caractère vraisemblable de ce qui est proposé, des difficultés, de l'intérêt), mais aussi les connaissances du chercheur sur la combinatoire et le processus de modélisation, constituent autant de ressources interprétatives. D'autres ressources interprétatives sont aussi mobilisées de part et d'autre dans l'analyse des problèmes par le chercheur, des ressources puisant à l'interprétation didactique, renvoyant par là au travail des didacticiens ; par l'enseignant aussi dans la manière d'approcher l'analyse des problèmes (en mettant en évidence des variables du problème), comme nous l'avons souligné précédemment (lorsque l'enseignant s'adonne à une comparaison des problèmes, mettant en évidence un facteur susceptible d'influencer la résolution). La figure 4.3 résume les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'élaboration de ce premier scénario. Pour les figures 4.3 à 4.13, la légende suivante est utilisée. Dans celle-ci, la couleur grise des formes (le rectangle aux sommets arrondis, l'ellipse, le losange, etc.) utilisée sur ces figures renvoie aux ressources mobilisées par le chercheur et la couleur blanche aux ressources mobilisées par l'enseignant. De plus, lorsque les ressources mobilisées de part et d'autre sont identiques, nous utilisons le «nuage blanc»; quand les ressources se ressemblent beaucoup avec toutefois des nuances, un trait en pointillés relie les formes; lorsque les ressources sont complémentaires un trait plein, sans flèches aux extrêmes, unit les formes; et lorsque les ressources sont opposées, cela est représenté par un trait en pointillés avec des flèches aux deux extrémités.



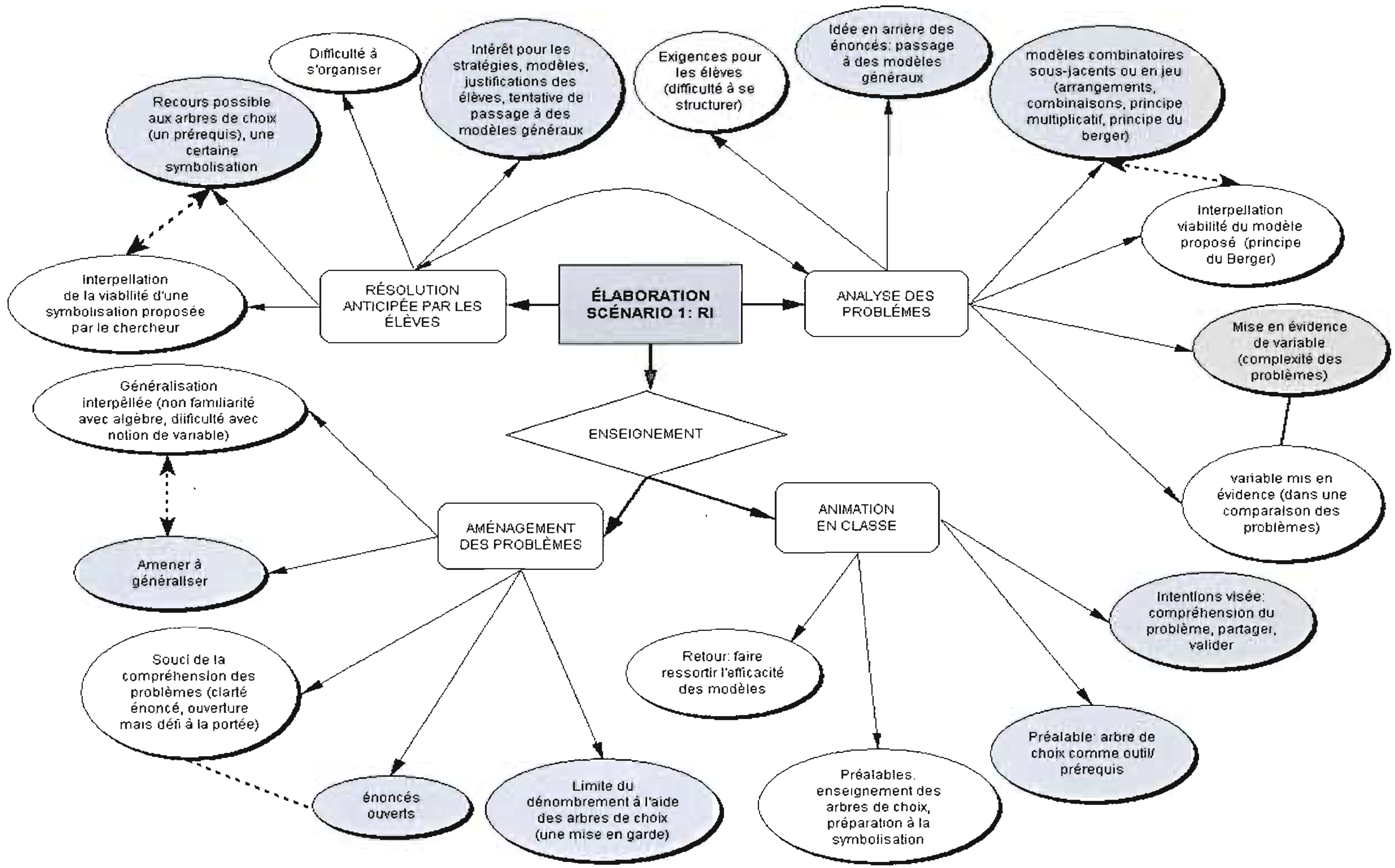



**Figure 4.3 Ressources interprétatives mobilisées lors de l'élaboration du scénario 1**

Dans ce qui suit, nous aborderons une autre catégorie de ressources mobilisées par le chercheur et l'enseignant lors de l'élaboration de ce premier scénario, soit les ressources d'action.

4.2.4.2 Une analyse en termes de ressources d'action

Lors de cette rencontre réflexive, l'enseignant et le chercheur ne sont pas uniquement sur l'interprétation, ils se placent également dans une perspective d'intervention qui les amène à suggérer des manières de faire, à avancer des propositions d'aménagement des problèmes ou d'animation. Il nous semble donc plus approprié dans ce cas de parler de ressources d'action mobilisées de part et d'autre. Dans ce qui suit, nous essayons de mettre en évidence pour l'enseignant et le chercheur les ressources d'action mobilisées lors de la conception de ce premier scénario.

En lien avec la résolution anticipée chez les élèves, en écho aux propos du chercheur sur les arbres de choix comme prérequis, l'enseignant propose d'introduire en classe avant l'expérimentation le modèle des arbres de choix (tableau 4.3). Aussi, propose t-il d'initier les élèves à la symbolisation, la capacité de symboliser lui apparaissant comme un préalable d'où l'importance d'y préparer les élèves. L'enseignant fait également des propositions lors du travail conjoint d'aménagement des problèmes mathématiques à proposer aux élèves (tableau 4.4), soit le recours à un grand quadrillage pour décourager chez les élèves le tâtonnement et les pousser à aller vers quelque chose de plus systématique. Il propose aussi de ne pas s'attarder sur les artifices qui dans certains cas ne sont pas nécessaires (comme dans le cas du problème du quadrillage), de faire en sorte que les énoncés soient compréhensibles pour les élèves (en lien avec le problème de la table) et les impliquent. Quant à l'animation (tableau 4.5), l'enseignant renseigne le chercheur sur la façon dont les élèves fonctionnent en équipes et lui indique un levier permettant de les impliquer en classe, en leur proposant un défi consistant à montrer qu'ils sont bons.

Globalement, les ressources d'action mobilisées par l'enseignant dans l'élaboration de ce premier scénario puisent donc beaucoup à sa connaissance des élèves (importance de les mettre au défi, de les impliquer, leur fonctionnement en équipe) en même temps qu'elles reflètent le souci qu'il a pour les élèves dont il importe de s'assurer de certains préalables pour rendre possible le processus de modélisation (en l'occurrence une capacité à symboliser en lien avec la modélisation), de rendre compréhensible pour eux les problèmes, de trouver un moyen de les engager (les impliquer dans l'énoncé, montrer qu'ils sont bons). Certaines de ces ressources sont des leviers d'action se situant dans le prolongement de certaines des préoccupations du chercheur (tel enseigner les arbres si on les considère comme un prérequis), alors que d'autres traduisent une perspective de l'enseignant qui puise à son expérience en résolution de problèmes : sur la nature des problèmes à proposer aux élèves (à l'occasion ceux-ci peuvent être « décontextualisés », se passer d'artifices), puisent à des stratégies déjà éprouvées en résolution de problèmes (comme décourager le tâtonnement et encourager les élèves à être systématique dans leurs démarches en proposant le recours à de grands quadrillages).

Dans l'aménagement des problèmes (tableau 4.4), prenant appui sur le processus de modélisation et sur une analyse didactique des problèmes, le chercheur suggère de jouer sur les valeurs des variables mises en évidence pour forcer une évolution des stratégies des élèves (comme lorsque qu'il suggère de faire varier la forme du quadrillage dans le problème dit du quadrillage). En lien avec l'animation des problèmes (tableau 5), pour le retour en classe avec les élèves sur leurs solutions, là aussi puisant à sa connaissance du processus de modélisation, le chercheur avance l'idée d'une correction graduelle, de donner simplement des indices aux élèves pour éviter de court-circuiter le processus de modélisation par les élèves, de ne pas leur suggérer des stratégies ou modèles pouvant les influencer dans la résolution. En somme, les ressources d'action mobilisées par le chercheur dans l'élaboration de ce premier scénario prennent appui sur sa connaissance du processus de modélisation, mais aussi ces ressources reposent sur une analyse didactique.

Les ressources d'action du chercheur traduisent son souci de ne pas suggérer aux élèves des modèles ou stratégies pouvant les influencer dans la résolution ou dans les échanges autour de leurs solutions, de faire évoluer les stratégies et modèles des élèves. La figure 4.4 résume les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'élaboration du premier scénario.

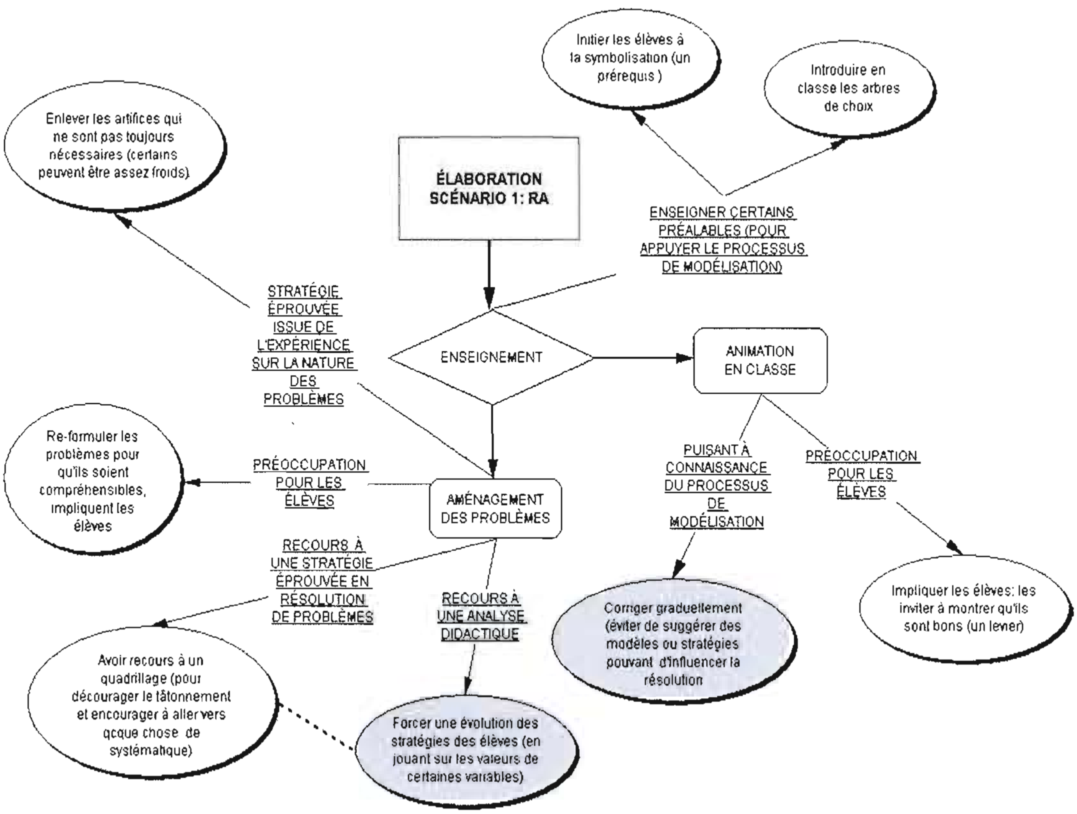



**Figure 4.4 Ressources d'action mobilisées lors de l'élaboration du scénario 1**

Tous les codes dégagés précédemment (sections 4.2.1 et 4.2.2) ne sont pas que de l'ordre de ressources interprétatives et d'action, mais s'y ajoute aussi quelque chose d'un tout autre ordre, soit une manière pour l'enseignant comme pour le chercheur d'entrer dans la co-construction. Dans cette optique, dans ce qui suit, nous proposons une analyse complémentaire en termes de sensibilité théorique et de sensibilité pratique, concepts qui respectivement recoupent dans une certaine mesure l'analyse précédente en termes de ressources interprétatives et de ressources d'action.

4.2.4.3 Une analyse en termes de sensibilités théorique et pratique

Desgagné et Bednarz emploient les notions de sensibilité théorique et de sensibilité pratique pour renvoyer aux postures respectives du chercheur et du praticien leur permettant d'entrer dans une démarche de coconstruction, mais aussi pour souligner les compétences respectives mises à contribution en recherche collaborative (Desgagné, 2001 ; Desgagné et Bednarz, 2005). La sensibilité théorique du chercheur renvoie à un champ conceptuel qu'il mobilise pour investiguer l'objet de questionnement ou pour théoriser l'action de pratique (Desgagné et Bednarz, 2005). Toutefois, cette sensibilité théorique n'est pas la chasse gardée du chercheur (Desgagné et Bednarz, 2005), une certaine sensibilité théorique étant aussi nécessaire au praticien pour qu'il puisse s'engager dans une démarche de coconstruction. Quoique nous n'ayons trouvé aucune définition explicite de la sensibilité théorique du praticien, nous la définirons, par extrapolation, comme cette « disposition » du praticien à «sortir» un peu de sa pratique, à s'intéresser à la recherche, aux perspectives théoriques mises de l'avant par le chercheur.

Quant à la sensibilité pratique du chercheur, celle-ci l'amène à reconnaître les perspectives des praticiens, à se rapprocher de leur communauté professionnelle (Desgagné, 2001; 2007). Pour le praticien, sa sensibilité pratique «renvoie à un champ contextuel, à un ensemble de ressources et contraintes sur lesquelles s'appuie le praticien pour juger de l'action à produire dans la pratique» (Desgagné et Bednarz, 2005, p. 250). Dans ce qui suit, nous proposons une lecture des ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur en termes de ces deux sensibilités.

D'abord pour ce qui est de la sensibilité pratique de l'enseignant renvoyant aux ressources sur lesquelles il s'appuie pour juger de la viabilité du scénario, elle prend la forme dans cette recherche d'un souci constant des élèves : intérêt pour les élèves de certains habillages des problèmes ; une continuité avec ce qu'ils font en classe et donc la préoccupation de tenir compte des problèmes du manuel, de puiser au manuel utilisé par les élèves. L'enseignant se soucie également de la viabilité en contexte des éléments mis de l'avant par le chercheur, comme lorsqu'il questionne la viabilité du principe du berger qui lui paraît très peu sensé. Enfin, la sensibilité pratique de l'enseignant l'amène à se soucier des modalités concrètes de l'animation, et donc à interpeller précisément le chercheur sur l'approche à adopter lors du retour en classe sur les solutions des élèves et le mode de correction lors des plénières.

Quant à la sensibilité théorique de l'enseignant, elle se traduit ici par une ouverture dans le choix des problèmes, des problèmes puisés aussi à la recherche comme ceux que propose le chercheur, mais aussi cette sensibilité se reflète dans une analyse des variables des problèmes, de leurs différences et leurs implicites. L'enseignant fait aussi montre d'ouverture par rapport au mode de fonctionnement souhaité par le chercheur qui ne voudrait pas trop donner de balises aux élèves et qui penche pour un retour différé sur les problèmes. Enfin, la sensibilité théorique de l'enseignant est manifeste à différents moments de la rencontre réflexive, l'enseignant faisant montre d'une grande sensibilité à la recherche, se souciant de ne pas polluer l'expérience, des traces que les élèves leur laisseront, exprimant par là sa crainte que les données ne servent pas au chercheur.

Pour le chercheur, sa sensibilité théorique renvoyant au champ conceptuel qu'il mobilise lors de la conception de ce premier scénario se traduit à travers ses connaissances théoriques sur la combinatoire et sur le processus de modélisation sur lesquelles il se base pour puiser et adapter des problèmes puisés au monde de la recherche (tels les problèmes du quadrillage, du taxi, de la table). La sensibilité théorique du chercheur se traduit aussi dans la résolution anticipée chez les élèves, son cadre de référence sur le processus de modélisation l'invitant à imaginer différentes stratégies et justifications, à être ouvert aux symbolisations venant des élèves, à être ouvert à l'activité mathématique informelle des élèves.

Quant à la sensibilité pratique, elle l'amène à se monter attentif à la rupture qu'il peut provoquer avec le mode de fonctionnement habituel de l'enseignant (dans sa correction/son retour sur les devoirs), mais aussi à se monter ouvert lors du travail d'aménagement des problèmes à une mise en situation plus balisée, comme le souhaite l'enseignant, et à choisir des problèmes puisés au manuel.

Pour conclure sur le jeu des sensibilités théorique et pratique de l'enseignant et du chercheur, nous pouvons parler d'un souci de double vraisemblance de part et d'autre, souci manifeste dans le choix des problèmes à la base de ce premier scénario et leur aménagement, mais aussi dans le mode de fonctionnement prévu en classe, lors de l'animation, l'enseignant et le chercheur penchant pour une approche qui s'inscrit dans la continuité de ce que fait l'enseignant en classe sans pour autant perdre de vue l'objet du chercheur, soit le développement du processus de modélisation.

## 4.3 Analyse de la rencontre réflexive portant sur l'élaboration du deuxième scénario

Dans cette troisième partie, nous analyserons la rencontre réflexive du 29 avril 2007, 6 mois après le premier scénario, portant sur l'élaboration d'un second scénario d'enseignement visant, comme le précédent, le développement de la modélisation en secondaire 1[106]. En préparation de la rencontre que nous analysons ici, le chercheur tenant

---

[106] Durée de la rencontre : 1h 38mn. Bien que cette rencontre portait principalement sur la construction d'un deuxième scénario, l'occasion a été également saisie par l'enseignant et le chercheur pour préparer un atelier conjoint qu'ils devaient animer à la fin du mois de mai au GMRS (groupe des responsables en mathématiques au secondaire), atelier-bilan à travers lequel ils comptaient partager avec des enseignants du secondaire les enseignement tirés de l'expérimentation de deux scénarios d'enseignement visant le développement de la modélisation avec des élèves de niveau secondaire1.

compte de certaines suggestions issues du bilan[107] du premier scénario fait en décembre 2006 avec l'enseignant a préparé pour discussion, puis envoyé par courriel à l'enseignant, deux versions successives d'un scénario exploitant dans un premier temps 4 problèmes et ensuite 3 problèmes (voir les appendices C5 et C6 pour les 2 premières versions du scénario 2 mentionnées). Une analyse mathématique des problèmes a été aussi envoyée à l'enseignant, par le chercheur, avec l'optique d'éclairer l'enseignant sur les aspects plus mathématiques des problèmes de dénombrement proposés.

Ce qui caractérise cette deuxième rencontre réflexive de construction d'un scénario, à la différence de la première, c'est que le chercheur et l'enseignant ne se penchent pas sur la résolution des problèmes à proposer aux élèves (le document d'analyse le faisant dans les détails), mais plutôt concentrent leurs efforts sur l'analyse des problèmes, l'anticipation de la résolution de ces problèmes par les élèves, l'aménagement des problèmes et l'animation en classe autour de ces problèmes. Dans ce qui suit, nous reviendrons sur ces différents aspects et tenterons de dégager des catégories qui nous aideront à éclairer les ressources mobilisées de part et d'autre par l'enseignant et le chercheur dans la construction de ce second et dernier scénario d'enseignement (voir l'appendice C7 pour la version définitive du scénario 2).

### *4.3.1 Autour des problèmes de dénombrement à proposer aux élèves*

#### 4.3.1.1 Analyse des problèmes (9, 13)

Cette catégorie regroupe plusieurs codes qui mettent en évidence divers éléments ressortant de l'analyse des trois problèmes de dénombrement que le chercheur propose à

[107] Entre autres suggestions, il avait été évoqué à cette rencontre bilan l'idée d'exploiter un problème par période pour donner plus de temps de recherche aux élèves et, lors des plénières, consacrer plus de temps aux discussions entre élèves et ce, pour corriger certaines des limites de la première expérimentation de novembre 2006.

l'enseignant pour bâtir le scénario 2. Ainsi, nous avons une analyse en termes de la difficulté des problèmes ; de leur exigence (initiée par le chercheur).

> *De la difficulté à comprendre (pour les élèves) la contrainte (ne pas mettre une même couleur pour 2 blocs côte à côte) dans le problème des tours {1}*
> *YYY : voilà, peu importe là, rouge ou blanc, l'essentiel c'est, parce qu'ici la difficulté que je voyais c'est la consigne, il faudrait surtout que... les blocs de la même couleur ne soient pas côte à côte, si non ça ne marchera pas, ils n'auront pas la suite de Fibonacci. C'est pourquoi dans l'énoncé, par exemple j'ai dit les rouges là, mais ils peuvent décider (l'enseignant acquiesce) (778:782)*

Le chercheur dans cet extrait souligne la difficulté éventuelle du problème des tours, difficulté de l'ordre de la compréhension de la contrainte qui interdit aux élèves, pour les blocs d'une certaine couleur de les mettre côte à côte. De la compréhension appropriée de cette contrainte dépend la finalité de ce problème dans lequel le chercheur et l'enseignant espèrent que les élèves arrivent à la suite de Fibonacci[108]. Le chercheur indique qu'un exemple est suggéré aux élèves qui peuvent tout de même décider de modifier la contrainte en changeant la couleur des blocs sur lesquels porte la restriction.

> *Une complexité dépendant de la grandeur (nombre de blocs) considérée pour les tours {1}*
> *YYY : Quoique j'ai l'impression que ceux qui font avec 6 c'est plus compliqué là, ils ont plus de choses à dénombrer. Tu vois, c'est ça qui me chicane dans la consigne, quand on la fait varier là (la hauteur), j'ai l'impression que c'est plus dur pour certains (730:733)*

Le chercheur estime que si la consigne lors de la résolution consiste à faire travailler les élèves sur des tours de hauteurs différentes, la résolution sera plus ardue pour les élèves travaillant sur les hauteurs plus grandes et ce pour différentes raisons. On énonce ici les facteurs qui font que c'est plus complexe, mais on montre également les avantages du travail sur des nombres plus grands (limites et avantages).

*Exigence de la résolution {1}*

---

[108] L'enseignant souhaitant que ce deuxième scénario prépare un peu le travail qu'il fera après cette expérimentation sur les suites, le choix des problèmes a tenu compte de ce souhait. Mais l'objectif demeure ici de travailler le processus de modélisation, il ne vise pas un travail sur les suites.

*YYY : parce que... même si eux ils font avec 5, d'autres avec 6, ceux qui le font avec 6 c'est plus compliqué, c'est plus long. (755:756)*

Une de ces raisons est que la résolution est plus longue, les cas à considérer par exemple étant plus nombreux.

*<u>Passage à la généralisation plus aisée</u> {2}*
*YYY : Mais j'ai l'impression que par après, peut-être que ceux qui l'ont fait plus dur là, ils récupèrent quelque chose, parce que quand ils vont devoir généraliser, peut-être que c'est... (733:735)*

Dans cet extrait, le chercheur pense que le fait pour certains élèves de travailler sur les tours de hauteur plus grande leur donne un certain avantage comparé aux autres élèves, car ils seraient mieux préparés à passer à la généralisation.

*YYY : (...) ceux qui ont peiné un peu plus là ils vont gagner, ils vont avoir ici ... une économie de temps ici comparé aux autres, donc ça peut se compenser (758:759)*

Une difficulté compensée par une économie de temps pour les élèves ayant travaillé sur les tours de plus grande hauteur, selon le chercheur.

Au-delà de l'analyse de l'exigence des problèmes, de leur difficulté, le chercheur revient aussi sur l'idée en arrière de ceux-ci.

*<u>De l'idée en arrière : faire voir aux élèves la nécessité de généraliser et de valider</u> {1}*
*YYY : oui,..., parce que la question qui est là a pour effet de... de leur faire prendre conscience que dans ce qu'ils ont fait précédemment, ils ont comme vu différents cas. C'est-à-dire que quand on le pose comme tel ... il faut qu'ils voient bien que c'est différents cas. Ça les pousse à dire que, ce que j'ai ici, puisque c'est différent de ça, et différent de ça là, quelque part il y a différents cas, ..., ils voient après la nécessité de généraliser, ils vont dire ha ! Parce que la question qui est là ça a pour effet vraiment de les amener à valider, à justifier un peu en quoi ceci est différent de ça. (490:501)*

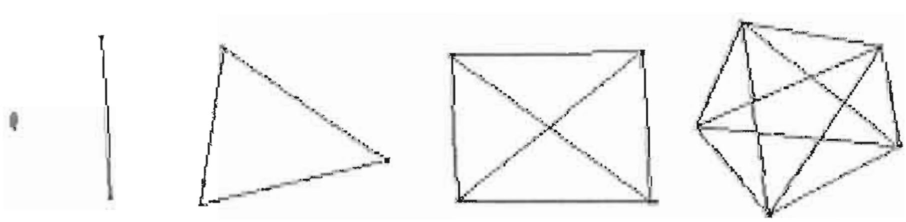
Dans cet extrait le chercheur s'explique sur l'idée en arrière du problème des tours tel que posé, soit d'amener les élèves à discuter et réaliser l'existence de différents cas possibles, et par la suite à généraliser à partir de ces cas. La structure des questions, telle que le chercheur les propose, invite donc les élèves à raisonner de façon inductive, à repérer une régularité à partir de différents cas particuliers.

Enfin, l'analyse des problèmes se réalise aussi en fonction de l'engagement anticipé des élèves, une discussion dans ce cas où l'enseignant est très présent (sous-entendu donné aux élèves).

> *Un questionnement sur l'illustration très suggestive (dans le problème des poignées de mains {2}*
> *XXX : ils utilisent une représentation, tu disais dans le solutionnaire, qu'il était beaucoup suggéré aux élèves, de faire un dessin, c'est beaucoup un modèle.*
> *YYY : c'est ça (125:128)*

L'enseignant se fait l'écho, dans cet extrait, de la remarque du chercheur à l'effet que dans le problème des poignées de mains puisé au manuel, l'illustration est très suggestive. En effet, dans le document auquel l'enseignant fait référence, le chercheur indiquait ` :

> *YYY : l'illustration de ce problème est très suggestive et on voit sans peine qu'il s'agit d'étudier la suite des cas illustrés et de dégager la régularité qui permettrait de prolonger la suite jusqu'au 12$^e$ terme. Mieux, on voit bien que dans chaque cas il s'agit de déterminer les «segments» différents qu'on peut former et qui correspondent à autant de mains échangées. Pour cela, les élèves peuvent penser à symboliser les différentes personnes par des «points» et là-dessus dénombrer tous les segments qu'on peut ainsi former avec 12 points. Bien évidemment, il peut être fastidieux de dessiner 12 points, tracer tous les segments reliant chacun des points et ensuite dénombrer ces segments. Et, il faudrait dans la disposition des points éviter des configurations de «3 points alignés» qui fausseraient les calculs. À cet égard, la disposition idéale est de mettre les points comme autant de sommets d'un polygone à n côtés avec n points comme dans les figures suivantes :*



0 1 3 6 10 ...

Pour l'enseignant, il n'y a en effet pas l'ombre d'un doute que le dessin utilisé par illustrer ce problème suggère un certain modèle aux élèves, par contraste avec d'autres problèmes posés dans le scénario.

*XXX : je trouve qu'ici (réfère à un autre problème) le dessin explique le contexte, mais ne donne pas...*
*YYY : ne donne pas la solution*
*XXX : pas du tout, mais ici (dans le problème des poignées de mains) c'est le contraire. Ici, ça représente le contexte, mais ça...*
*YYY : ça donne des idées de la solution.*
*XXX : ...c'est clair dans ma tête. (217:227)*

L'enseignant appuie ainsi dans l'échange précédent le caractère très évocateur du dessin illustrant ce problème (et qui oriente les élèves), ce dernier expliquant le contexte et donnant des idées de la solution, contrairement aux illustrations proposées (en référence aux autres problèmes) dans le scénario débattu.

Un questionnement sur l'ambigüité de certains énoncés pour les élèves est aussi soulevé.

*<u>Une donnée manquante qui questionne</u> {1}*
*XXX : Mais là, eux autres, ils vont peut-être se dire... parce qu'il y a une inconnue ici, ils vont dire combien il a de marches Jean, c'est sûr qu'ils vont nous le demander, (539:541)*

L'enseignant souligne la présence d'une inconnue dans la façon dont la deuxième question est posée, soit le fait qu'on n'indique pas le nombre de marches de l'escalier chez Jean, qui va provoquer des questions des élèves. Cette analyse en termes de l'intérêt de l'énoncé à ne pas trop suggérer un modèle sera confirmé.

*<u>De l'intérêt des problèmes à proposer aux élèves (en regard des aspects plus ou moins suggérés)</u> {2}*
*XXX : quand ce matin j'ai vu que tu critiquais un peu l'approche qu'ils suggéraient, de faire des dessins, ça montre un tout petit peu, j'ai dit oui effectivement, je l'ai trouvé moins intéressant le problème (sous-jacent le problème des poignées de mains). (142:144)*
*XXX : mais, c'est très, très intéressant ce problème là, parce on ne suggère aucun chiffre!*

*YYY : oui, celui là, oui.*
*XXX : c'est ça la richesse (609:614)*

Les extraits regroupés sous ce code (critique de l'illustration suggestive, versus richesse de ne pas suggérer un chiffre) semblent indiquer un critère que considère l'enseignant pour juger de l'intérêt de problèmes, soit les aspects plus ou moins suggérés dans un énoncé.

*De l'évidence et ambiguïté de la question dans le problème de «Boris» (version 2) {2}*
*YYY : oui. Mais, tu penses que la question est ambiguë, c'est ça...*
*XXX : ...c'est que pour moi c'est tellement évident que s'il ya plus de marches je vais avoir plus de (sous entendu...), c'est évident, je me suis dit voyons,..., je trouve la question...inutile (j'acquiesce), tu comprends (rires de nous deux) (534:539)*
*XXX : excellent, c'est beau, c'est clair, c'est clair! C'est tellement, tellement trivial que moi je me demande que, s'ils ne peuvent pas se poser de questions là (552:554)*

Dans les deux extraits précédents, l'enseignant s'interroge sur l'énoncé de la question dans le problème de «Boris» qu'il trouve évident, trivial...

Le tableau 4.7 résume les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'analyse des problèmes du scénario 2.

**Tableau 4.7 Ressources mobilisées dans l'analyse des problèmes du scénario 2**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Finalité poursuivie dans l'analyse des énoncés des problèmes :**<br>• Idée derrière : faire voir aux élèves la nécessité de généraliser et de valider<br><br>**«Variables» déterminant la complexité/ le potentiel des problèmes:**<br>• leur illustration (frein au processus de modélisation) : une illustration trop suggestive (problème des poignées de main)<br>• la contrainte dans le problème des tours (couleur et position)<br>• la grandeur considérée pour le problème des tours (nombre de blocs) ;<br>• passage à la généralisation plus aisé | **Finalité poursuivie dans l'analyse des énoncés des problèmes :**<br>• clarté pour les élèves : une certaine ambiguïté dans le cas du problème des escaliers<br><br>**Intérêt/limites des problèmes :**<br>• leur illustration (suggère un modèle, donne une idée de solution) : une illustration trop suggestive (problème des poignées de main)<br>• dépendante de ce qu'ils suggèrent (plus ou moins) aux élèves |

4.3.1.2 Résolution anticipée chez les élèves

Deux catégories permettent de regrouper les différents codes qui se dégagent de la résolution anticipée chez les élèves par l'enseignant et le chercheur : des difficultés et des limites en lien avec cette résolution, et différentes résolutions possibles par les élèves.

4.3.1.2.1 Des difficultés et limites anticipées lors de cette résolution (3, 6)

À travers cette catégorie, l'enseignant et le chercheur indiquent les difficultés et limites qu'ils entrevoient pour les élèves en lien avec la résolution à venir des problèmes qui leur seront proposés. On remarquera que le problème dit des poignées de mains n'est pas abordé à travers les codes suivants, ce qui suppose qu'il ne pose pas tant de défi pour les élèves aux yeux de l'enseignant et du chercheur (on l'a vu précédemment en regard de l'illustration trop suggestive).

> *Sur la manipulation : impossibilité d'y aller complètement de façon empirique avec des blocs pour les élèves* *{3}*
> *YYY : De toute façon le travail de généralisation qu'ils doivent faire, ils ne peuvent pas le faire juste avec ce qu'ils ont fait, donc ça peut être un bon début, histoire de jouer avec... (l'enseignant acquiesce). (31:33)*
> *XXX : oui, c'est sûr qu'avec 6 blocs, ils vont s'échanger des blocs. Ha, ils ne pourront pas toutes les faire (les tours) ..., ils ne sont pas capables de faire tous les cas. (904:909)*

Le chercheur indique la fonction de la manipulation dans la résolution du problème, soit de permettre une entrée dans le problème, et souligne une limite de la manipulation qui n'est pas suffisante pour généraliser.

L'enseignant, dans la même lignée que le chercheur, pointe du doigt une limite de la manipulation, les élèves étant dans l'impossibilité, même en échangeant des blocs, de construire systématiquement toutes les tours possibles et donc de répondre aux questions qui leur sont posées. Vouloir énumérer tous les cas possibles au moyen de la manipulation conduirait les élèves à une impasse (limite en termes de blocs disponibles) ou s'avérerait tout simplement fastidieux.

*YYY : je pense que c'est peu probable, surtout avec le temps aussi qui est là, la limite de temps. (908 :909)*

Pour le chercheur le temps est un autre facteur qui contraint les élèves dans la manipulation des blocs, même les plus téméraires, gage t-il, n'auront pas suffisamment de temps pour construire systématiquement toutes les tours possibles.

*Une difficulté à organiser les données pour pouvoir généraliser (dans le problème de «Boris») {1}*
*YYY : Parce qu'une difficulté que je vois ici, c'est un peu le passage de ça à ça, le passage du décompte pour chaque cas, par exemple si c'est un escalier avec 4 marches, à tous les cas possibles, ils sont sur des cas particuliers, mais quand ils vont devoir généraliser, ...il faut voir toutes les façons pour chaque type d'escalier ..., je vois une difficulté dans ça, mais juste une difficulté de l'ordre d'organiser les données (acquiesce). (419:424)*

Le chercheur indique une difficulté de l'ordre de l'organisation des données issues du dénombrement de tous les cas possibles pour différents types d'escaliers. Une autre difficulté est évoquée rapidement, soit de faire le lien entre les différents cas, comme l'illustrent les extraits suivants.

*Une difficulté à faire le lien entre les différents cas dans le problème de «Boris» {2}*
*XXX : parce que l'idée, c'est le lien entre ces chiffres là (j'acquiesce), c'est peut-être là qu'ils vont bloquer je pense*
*YYY : peut-être, oui, c'est ça. (455:458)*
*XXX : L'idée ensuite c'est, admettons qu'ils ne se trompent pas, bon l'autre difficulté c'est, admettons qu'ils se trompent pas dans leurs, à 4 marches combien ça fait de cas différents là, après ça ils vont dire, bon bien là si on veut généraliser à 10, tu sais de toujours additionner les termes précédents, ça c'est...*
*YYY : ce n'est pas évident*
*XXX : c'est un autre lien ça.*
*YYY : oui, c'est quelque chose ici. (470:480)*

L'enseignant et le chercheur sont d'avis que c'est un défi pour les élèves que de faire le lien entre les différents cas dans le problème dit de «Boris» (ou encore appelé «le jeu de Boris»). Advenant que cette difficulté est surmontée, l'enseignant indique une difficulté reliée à la précédente de l'ordre du repérage de la régularité de la suite obtenue, soit (additionner toujours les termes précédents pour obtenir le cas suivant).

4.3.1.2.2 Des résolutions anticipées par les élèves (13, 19)

Avec cette catégorie, l'enseignant et le chercheur sont sur des stratégies, des démarches de résolution qu'ils anticipent chez les élèves. Pour l'essentiel, ils se penchent sur le problème dit de Boris, comme le montrent les extraits suivants, ce qui laisse supposer que les deux entrevoient une plus grande complexité, mais aussi une plus grande richesse en lien avec la résolution de ce problème.

> *<u>Transformation de la contrainte pour se ramener à un cas identique</u> {1}*
> *XXX : pour la question b, quand on dit (il lit la question) «Boris communique son jeu à ami Jean qui a chez lui un escalier différent, donc il y a un nombre différent de marches, à ton avis si on essaie de trouver le nombre de façons différentes de monter l'escalier qu'a Jean, trouverait-on la même chose, explique moi», la question qu'ils vont demander c'est s'il avait 7 marches par exemple, est-ce que ça va être la même chose? (484:488)*

L'enseignant anticipe ici, en lien avec la deuxième question du problème de «Boris», une requête de clarification de la part des élèves qui après avoir traité le cas d'un escalier à 7 marches dans la première question, peuvent vouloir y revenir (la consigne indique clairement que l'escalier chez Jean a un nombre différent de marches).

> *<u>Se donner un cas hypothétique</u> {1}*
> *XXX : moi, je pense ce qu'ils vont dire c'est, ils vont dire, attends un peu (il relit la question), quand on dit trouverait-on la même chose, ça renvoie à la question a) (j'acquiesce), tu es d'accord, c'est comme un hyperlien là, ça s'en va là, là. Mais, moi je pense que ce que les élèves vont dire, ils vont dire bien, c'est sûr que si son escalier a 7 marches ça va être la même chose. (507:511)*

Pour l'enseignant, les élèves vont répondre à un cas hypothétique faisant fi de la consigne de la question b.

> *<u>Différentes réponses possibles ouvrant sur une justification</u> {1}*
> *YYY : ...ils vont dire si c'est 7 marches oui, mais moi je voyais l'argument à contrario, ils vont dire aussi, mais si ce n'est pas 7 marches, ha peut-être ils vont dire on n'aura pas la même chose ou on aura la même chose, ceux qui vont dire on*

*aura la même chose ils vont devoir justifier, tu vois, ceux qui vont dire non, si on a 6 marches par exemple on a tant, il faut qu'ils justifient. Ça, ce serait un moment important en plénière de dire bon, ceux qui pensent que quand il y a en 7, vous trouvez la même chose... (513:519)*

Le chercheur parle d'autre chose, des réponses possibles à la question b, que les élèves devront justifier en plénière.

*<u>Une donnée manquante/requête de clarification par les élèves</u> {1}*
*XXX : c'est sûr qu'ils vont poser des questions sur combien de marches qu'a Jean, sûr, c'est sûr! Ils vont dire, il y a en qui vont penser, ils vont dire si c'est 6 marches ça se peux-tu qu'il ait le même nombre de façons que l'autre qui a 7, je pense qu'il y a en qui vont dire ça (529:532)*

L'enseignant précise sa pensée à travers cet extrait. En effet, pour lui il y a pour les élèves une inconnue portant sur le nombre de marches de l'escalier chez Jean : il est différent de l'escalier chez Boris, mais ils ne savent pas de combien de marches il est fait.

*<u>Une attente de réponse par les élèves</u> {1}*
*YYY : Moi, je me dis, quand on pousse ça, il y a en qui vont dire 7 là, ben si c'est 7, c'est sûr que c'est la même chose.*
*XXX : fait que nous, nous on espère que ce soit un gros non à cette question là, trouverait-on la même chose, c'est non !*
*YYY : mais oui. Si c'est différent, ça devrait être non. (544:550)*

L'enseignant et le chercheur espèrent que les élèves répondent par la négative à la question b.

*<u>Anticipation d'une prise en compte de l'existence de différents cas dans le problème de «Boris»</u> {2}*
*YYY : En fait ici c'est réaliser que quand on prend un cas différent, ..., par exemple avec 6 ou 7 marches ou 8, ils peuvent regarder le cas qui suit, y a en qui vont dire, on va regarder pour 7 ou 8, d'autres vont dire non on a déjà fait pour 7, par exemple regardons pour 6. Ils vont donc réaliser qu'il y a différents cas... (523:527)*
*YYY : moi je prédisais que s'il y a en qui vont dire, j'ai fait pour 7, voyons pour 8, et puis, mais les plus malins me diront non, non, on a fait pour 7, regardons pour 6, c'est clair que c'est différent là, tu vois. Peut-être qu'il y a en qui vont dire non, peu importe ça va être la même chose, tu vois, ça c'est surtout important d'un point de vue des plénières un peu pour voir la différence des cas et puis les liens entre les différents cas. (556:561)*

Dans les deux extraits précédents, le chercheur prédit que les élèves réaliseront qu'il y a différents cas (en lien avec la question b du problème de Boris), qu'ils pourront considérer que le nombre de marches de l'escalier chez Jean est plus petit ou plus grand que 7. Une différence des cas à exploiter en plénières.

> *Une capacité pour certains élèves à bien organiser les données (dans le problème de «Boris») {2}*
> *YYY : parce qu'il y en aura qui sont peut-être bien organisés, ils vont faire un 1e cas, ils vont faire un 2e cas, puis ..., parce qu'ils le font par cas qu'ils regardent, ils peuvent le voir, mais peut-être que ici c'est plus condensé, plus organisé. Ça, ça dépend, il y a en peut-être qui le verraient bien avec une suite de cas,..., ils peuvent faire un 1er cas, puis souligner, encadrer comme ils savent bien le faire, 2ième cas et à la fin encadrer, puis...(448:453)*
> *YYY : ...on ne sait jamais parce que des fois ils sont étonnants hein, ils trouvent...peut-être que, on verra, (480:482)*

Le chercheur gage que certains élèves feront appel spontanément à une certaine organisation des données, qu'ils pourront traiter les différents cas, les organiser à leur façon (en mettant en évidence par des encadrés les cas obtenus) et voir les liens.

Le chercheur parie donc sur la débrouillardise des élèves qui peuvent à l'occasion surprendre.

> *Un recours possible à des arbres de choix par les élèves {1}*
> *XXX : ... j'ai hâte de voir comment ils vont s'y prendre, parce qu'ils vont sûrement vouloir faire des... je pense qu'il y a en qui vont vouloir tout de suite représenter ça par des schémas en arbres. (373 :375)*

Dans cet extrait, l'enseignant entrevoit vaguement, sans le rattacher à un problème en particulier, que les élèves pourraient recourir à des arbres de choix pour résoudre les problèmes.

> *Une symbolisation par les élèves (des montées par les chiffres 1 et 2 dans le problème de «Boris») {1}*
> *YYY : ok, parce que j'ai essayé un peu de m'amuser pour voir, par exemple si je prenais le problème de Boris, comment ils résoudraient le problème? Est-ce qu'ils vont y aller avec un tableau, avec des chiffres ou des lettres? Alors, je me suis dis le fait qu'on dise une ou deux marches, c'est clair que, il est très probable peut-être qu'ils utilisent des chiffres 1 ou 2 (390:394)*

Pour le chercheur l'énoncé même du problème de «Boris» risque d'amener les élèves à une modélisation des montées possibles par les chiffres 1 et 2 utilisés dans la consigne.

*Recours à des dessins de marches de longueur variable (dans le problème de «Boris») {3}*
*XXX : oui, ça c'est ma prédiction. Ils vont dessiner des marches, 4 ou 3, monter 2, 1; 1, 2;(398:401)*
*XXX : oui, puis ils vont y aller par longueur, ça c'est ma prédiction là. (405:405)*
*XXX : ils vont dessiner un escalier de 7 marches, puis ils vont faire des dessins par-dessus, ils vont compter, ils vont essayer de dénombrer, ça c'est clair (j'acquiesce), je pense ! (411:413)*

Dans ces extraits, l'enseignant prédit que les élèves vont modéliser les montées sur les différents escaliers au moyen de dessins.

*Un passage par différents cas peu probable dans le problème de «Boris» {1}*
*XXX :... moi je pense que quand ils vont faire ce problème, ils ne penseront pas, c'est sûr qu'ils vont vouloir résoudre le problème à 7 marches tout de suite en partant, quand la solution c'est de décomposer le problème, c'est de dire s'il y avait une marche combien de cas, 2 marches combien de cas, 3 marches, c'est ça qui est bien, je ne pense pas qu'ils vont penser à faire ça au départ, de calculer pour 1 marche, pour 2 marches. (460:465)*

L'enseignant estime que les élèves, comme entrée dans le problème, ne penseront pas à le décomposer en différents cas (une gradation dans les cas menant à l'ultime cas auquel ils ont à répondre à travers la première question).

*Des attentes explicitées : une manière de faire et non une formule explicite (comme réponse dans le problème de «Boris») {2}*
*YYY : Parce que, ici l'idée ce n'est pas de leur suggérer une formule explicite, c'est-à-dire si c'est 10 là c'est tant. Mais, c'est vraiment de dire si c'est 10, connaissant 9 là puis...*
*XXX : connaissant 8... ok, on va s'attarder sur le processus et non pas la réponse, ..., on ne va pas leur dire donne-moi le chiffre pour 50 marches (j'acquiesce). L'important c'est qu'ils nous répondent...*
*YYY : une manière, une méthode...*
*XXX : dans le fond, une réponse c'est je prendrai le nombre de marches du rang 49, puis du rang 48, je les additionne.*
*YYY : ok, c'est ça, pas un résultat.*

*XXX : ok, c'est clair.(580:599)*
*YYY : oui, parce qu'une formule explicite pour ça c'est compliqué (606:606)*

Dans les extraits précédents, l'enseignant s'assure auprès du chercheur des attentes en lien avec la dernière question de ce problème. Ainsi, les élèves n'ont pas à donner de formule explicite qui n'est pas à leur portée, il sera suffisant qu'ils indiquent, la méthode ou la manière permettant de donner la réponse pour un nombre de marches quelconque, par exemple avec la règle de Fibonacci, comme indiqué dans les extraits suivants.

*<u>Des attentes explicitées : une généralisation (dans le problème de «Boris»)</u> {2}*
*XXX : mais je comprends, tu veux qu'ils généralisent.*
*YYY : oui, oui (521:523)*
*XXX : ok, fait qu'on veut qu'ils généralisent la règle de Fibonacci.*
*YYY : c'est ça, qu'ils généralisent (l'enseignant acquiesce). (617:619)*

On s'attend donc à ce que les élèves soient en mesure de dégager la régularité, par passage à la généralisation.

Le tableau suivant résume les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur sur la résolution anticipée par les élèves des problèmes du scénario 2.

**Tableau 4.8 Ressources mobilisées dans la résolution anticipée par les élèves des problèmes du scénario 2**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Mise en évidence de l'apport et des limites de la manipulation :**<br>• rôle du matériel : permettre une entrée dans le problème<br>• insuffisance de la manipulation pour le passage à la généralisation<br>• impossibilité d'y aller systématiquement de façon empirique avec des blocs pour les élèves<br>• limite dans le temps (restreignant la manipulation possible)<br><br>**Anticipation de difficultés :**<br>• difficulté dans l'organisation des données pour certains<br>• difficulté à faire le lien entre les différents cas | **Mise en évidence de la fonction et des limites de la manipulation :**<br>• impossibilité d'y aller systématiquement de façon empirique avec des blocs pour les élèves<br><br>**Anticipation de difficultés :**<br>• difficulté à faire le lien entre les différents cas<br>• difficulté à bien dénombrer les différents cas |

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Anticipation de l'engagement dans le problème par les élèves :**<br>• différentes réponses possibles ouvrant sur des justifications<br>• une bonne organisation des données par certains élèves<br>• attente de réponses par les élèves (prise en compte de l'existence de différents cas) | **Anticipation de l'engagement dans le problème par les élèves :**<br>• se ramener à un cas identique (transformation de la contrainte)<br>• se donner un cas hypothétique<br>• demande de clarification face à la donnée manquante<br>• un passage par différents cas peu probable |
| **Anticipation de stratégies de résolution :**<br>• une symbolisation par des chiffres (1 et 2) | **Anticipation de stratégies de résolution :**<br>• recours à des arbres, à des dessins (représentations intermédiaires)<br>• attente vis-à-vis d'une formulation d'une réponse au problème par les élèves |
| **Attentes explicitées vis-à-vis :**<br>• le passage à la généralisation<br>• le processus de résolution (arriver à une manière et non une formule explicite) | **Attentes explicitées vis-à-vis :**<br>• le passage à la généralisation |

### *4.3.2 Aménagement du scénario*

4.3.2.1 Aménagement des problèmes

Deux catégories permettent de regrouper les codes qui se dégagent de l'analyse de l'aménagement par l'enseignant et le chercheur des problèmes considérés, il s'agit des balises pour orienter le travail conjoint de reformulation des problèmes, et des propositions d'aménagement de ces problèmes.

4.3.2.1.1 Des balises pour orienter la reformulation des problèmes qui seront donnés aux élèves (5, 6)

Plusieurs principes, critères, guident l'enseignant et le chercheur dans le travail de modification, reformulation, précision, illustration des problèmes : Ainsi, il s'agit de :

*Éviter de suggérer un modèle {1}*

*YYY : tu sais quand j'ai fait la deuxième version ce qui me chicanait c'était ça, c'est que je me disais que c'est vrai les suites, on peut exploiter ces problèmes pour travailler les suites, il y a un prolongement évident vers les suites, mais si on les*

*guide trop, si on va trop vite vers les suites c'est comme si on leur suggérait un modèle quelque part.*
*XXX : oui, je suis tout à fait d'accord avec ce que tu dis, moi c'est clair maintenant ça. (627:634)*

Dans cet échange, le chercheur justifie les modifications apportées à la première version du scénario, car il percevait que dans celle-ci, on passait très vite aux suites, ce qui est encore une démarche très suggestive, peu riche en termes d'un travail visant le développement du processus de modélisation. Une réflexion avec laquelle l'enseignant se dit tout à fait en accord, surtout depuis ce qui s'est passé lors de la première expérimentation qui leur a révélé le danger d'une introduction trop rapide de modèles[109].

*Faire voir la nécessité de la généralisation/la pertinence du passage à la généralisation dans les énoncés {2}*
*YYY : ce que j'ai changé, quand j'ai revu ça à tête reposée, je me suis rendu compte qu'on ne voyait pas la nécessité de généraliser dans l'énoncé, ... Tu vois, on passe de ça à tout de suite trouver une manière de calculer rapidement, je me disais qu'il y avait peut-être une façon meilleure de l'amener pour qu'en contexte ils voient mieux. (81:85)*
*YYY : c'est donc un peu justifier, donc amener la nécessité à généraliser, pour que ce ne soit pas artificiel... (674:675)*

Dans ces deux extraits, le chercheur indique un souci qu'il a eu et qui justifie les corrections apportées aux problèmes discutés ici, soit de mieux amener dans la formulation des problèmes la nécessité de la généralisation.

*Structuration des questions : un format poussant les élèves à répondre à toutes les questions {1}*
*XXX : moi, sincèrement j'ai trouvé que dans le problème en faisant a), b), c), c'est parfait. Ça, je pense que les élèves répondent bien à ça quand c'est avec des lettres, je ne sais pas si je t'en ai parlé, quand tu fais des questions ouvertes avec plusieurs*

109 Rappelons qu'afin de documenter un probable effet de contrat chez les élèves, nous avions convenu dans une des classes d'aborder assez tôt avec les élèves le recours à un modèle (les arbres de choix et le principe multiplicatif), mais pas dans l'autre classe. Ce choix avait été fait avant l'expérimentation du premier scénario, et nous avons pu constater dans la classe où les modèles ont été introduits que les élèves ont abondamment eu recours aux arbres de choix, toutefois ils n'ont pu faire référence ou appliquer convenablement le principe multiplicatif sous-jacent à 4 des 5 problèmes du scénario qui leur ont été proposés.

*points d'interrogation, ce n'est pas séparé ! Mais, ça cette forme là, c'est comme 3 questions, tu aurais pu enlever les a), b), c), mais pour eux autres, ils sont comme conditionnés à ça (j'acquiesce), fait qu'on va être sûr qu'ils vont répondre à toutes les questions. Moi, je les ai trouvés claires là, je ne trouve pas qu'elles les guident trop (382:388)*

Ici, l'enseignant se reconnaît dans un format de questions qui invite les élèves à y répondre. Le chercheur a proposé ce format en tenant compte du bilan de la première expérimentation qui avait révélé que les élèves n'aiment pas répondre à des questions multiples posées l'une à la suite (voir le problème du quadrillage dans le scénario 1), ce que rappelle l'enseignant.

*Privilégier la compréhension des questions (une certaine latitude dans l'utilisation des mots) {1}*
*XXX : puis, tu sais qu'on parle de hauteur puis de blocs, je pense qu'à ce stade ci de l'année là, ils doivent comprendre que c'est synonyme, tu sais on n'est pas obligé d'employer le mot bloc partout (j'acquiesce), l'important c'est qu'ils comprennent la question, après ça on s'en fout là (j'acquiesce). (801:805)*

L'enseignant indique qu'à ce stade il s'agit plus de privilégier la compréhension, une certaine latitude pouvant être prise quant au choix des mots pour peu qu'ils soient synonymes et compréhensibles par les élèves.

*Arriver à un énoncé clair (pour l'enseignant) mais pas trop (pour le chercheur) {1}*
*XXX : ça te tente pas d'écrire il peut monter 1 ou 2 marches à la fois?*
*YYY : c'est trop...*
*XXX : là c'est...*
*YYY : c'est trop dit.*
*XXX : on les prend par la main.*
*YYY : oui.*
*XXX : si on voulait que ce soit clair, c'est ça qu'il faudrait dire.*
*YYY : mais là, c'est quand quelqu'un dit, est-ce qu'on peut marcher 3 marches à la fois, non!*
*XXX : ok.*
*YYY : l'idée c'est ça. (1058:1077)*

On retrouve le difficile équilibre entre le souci de l'enseignant de donner des balises claires aux élèves pour les aider et la réticence du chercheur de trop guider les élèves. L'enseignant semble avoir intégré l'objection du chercheur et là-dessus n'insiste pas pour qu'on clarifie davantage la consigne dans le problème de «Boris». Toutefois, le chercheur accepte l'idée qu'on pourrait clarifier oralement la consigne en classe. Clarification orale au besoin, mais pas de clarification écrite sur ce point, telle semble être la position du chercheur.

4.3.2.1.2 Des propositions d'aménagement des problèmes (8, 15)

Sous cette catégorie, nous avons regroupé les codes qui montrent les propositions d'aménagement de la part de l'enseignant et du chercheur lors de cette rencontre réflexive portant sur la conception d'un second scénario.

> *Enlever l'ambiguïté : préciser l'énoncé du problème des tours (en termes de nombre de blocs plutôt que de hauteur)* *{1}*
> *XXX : dans le fond, la question c'était donc combien de tours de hauteur...heu, il faudrait parler en termes de blocs? Combien de tours de 5 blocs...*
> *YYY : oui, c'est ça, hauteur, quand je dis hauteur, oui c'est le nombre de blocs.*
> *XXX : combien de tours de 6 blocs allez-vous construire, ça serait ça la question?*
> *YYY : oui, de 6 blocs ou de 5 blocs, oui c'est ça, en respectant la consigne qui est là. Hauteur, c'est ça que ça veut dire, le nombre de blocs. On pourrait enlever hauteur, dire combien de tours de 5 blocs (764:773)*

Dans l'échange précédent, l'enseignant tente de faire préciser par le chercheur le sens du terme «hauteur» dans les questions du problème des tours. Il suggère de compléter les questions en utilisant le terme «bloc», ce qu'accepte le chercheur qui va jusqu'à suggérer de substituer le terme «hauteur» à celui de «bloc».

> *Attirer l'attention des élèves sur la contrainte (couleur/position) dans le problème des tours* *{1}*
> *XXX : il manque un point c), puis un attention 2 cubes, tu sais il y a une consigne particulière, attirer leur attention.*
> *YYY : sur la consigne hein !*
> *XXX : que 2 cubes de même couleur ne peuvent pas être consécutifs!*
> *YYY : ok, d'accord, la consigne là, je vais mettre ça ici (je prends en note ses suggestions). Bien mettre en évidence la consigne...*
> *XXX : ben, c'est la restriction!*
> *YYY : Ok, c'est ça, mettre en évidence la contrainte, la restriction... (869:880)*

Dans cet extrait, l'enseignant et le chercheur s'accordent sur la nécessité de mettre bien en évidence dans l'énoncé la restriction, une contrainte particulière pour l'enseignant, une restriction qui va poser des difficultés aux élèves.

> *Une reformulation du problème des tours délimitant clairement des unités différentes {1}*
> *XXX : on pourrait faire question, (une)...mise en contexte, ok (j'acquiesce), ensuite on coupe, regarde, «l'activité consiste à trouver toutes les tours d'une certaine hauteur que l'on peut faire avec 2 couleurs, par exemple rouge et blanche,...point»... «Attention, 2 blocs de même couleur ne peuvent pas être côte à côte, point»... «Question a) combien de tours de 5 blocs on peut faire, question b) de 6 blocs, puis c) ben, ça serait, cette question là qui généralise». Tu comprends l'idée?*
> *YYY : oui, je vois, faire une mise en situation, puis après aller aux questions (791:799)*

Ici, l'enseignant essaie une reformulation de tout le problème, en marquant les différentes unités de ce problème.

> *Mettre en évidence les deux niveaux de la consigne (questions a et b) dans le problème des tours {1}*
> *XXX : il faut absolument dans la consigne qu'on marque un a), puis un b). Je pense que ça va être (j'acquiesce), est-ce que tu comprends ce que je veux dire?*
> *YYY : oui, oui, je vois, pour qu'ils voient les 2 niveaux de...*
> *XXX : exact ! (679:684)*

Une autre intervention de l'enseignant qui rejoint celle de rendre les questions claires pour les élèves. Il suggère de mettre en évidence les deux niveaux de la consigne que propose le chercheur en lien avec le problème des tours.

> *Modifier l'illustration tirée du manuel dans le problème des poignées de mains pour que ce soit moins suggestif {4}*
> *YYY : Parce qu'à un moment même j'ai pensé à dire, ..., on ne peut pas laisser les personnes, effacer les poignées de mains, puis effacer les traits. Je me suis dit que peut-être ça ce serait compliqué, mais bon, parce que tu vois dans le graphique qui est là, si on avait effacé des choses, ce serait peut-être moins suggestif (il acquiesce) (128:132)*

Suite à une analyse du problème des poignées de mains, le chercheur compte tenu du caractère très suggestif de l'illustration de ce dessin suggère de modifier le dessin en gardant les personnes sur le dessin, mais en effaçant les quelques poignées de mains ainsi que les segments en pointillés représentant les autres poignées de mains possibles.

*YYY : Juste les personnes, peut-être, et puis enlever nos pointillés puis nos... (acquiesce). Parce que à un moment j'ai pensé à ça, puis je me suis dit, mais si on ne mettait pas tout ça, hein, ou bien si on enlevait juste ça,... Mais, surtout, ce qui est très suggestif c'est ça, c'est le fait que, tu vois, en pointillés là ont voit vraiment ce qu'il faut... (136:140)*

Il s'agit surtout pour le chercheur d'enlever dans l'illustration, les pointillés qui suggèrent trop qu'il suffit dans chaque cas il suffit de déterminer tous les segments qu'on peut tracer...

*YYY : Ou bien à la limite laisser dans l'illustration juste les personnes... (146:147)*

Toujours en restant dans la perspective d'adapter le dessin, enlever tout sauf les personnes sur le dessin...

*YYY : Peut-être ici, en lieu et place, faire une autre illustration avec soit une foule de personnes... Parce que, un peu comme les autres... il y a au moins une petite illustration. (212:214)*

Une autre alternative pour le chercheur consiste à faire une illustration, avec une foule de personnes, une illustration neutre pour uniformiser, car il apparaîtrait curieux que ce problème ne soit pas illustré comme le sont les deux autres.

*<u>Enlever l'illustration tirée du manuel (dans le problème des poignées de mains) pour permettre le recours à un dessin par les élèves</u> {4}*
*XXX : ben, peut-être que ce serait le fun de le faire sans aucun dessin aussi.*
*YYY : ha oui? (134:136)*
*YYY : mais, on pourrait l'enlever (146:146)*

Idée à laquelle le chercheur n'est pas opposé...

*XXX : moi, je serai pour enlever. (149:149)*

L'enseignant suggère une proposition plus radicale que les propositions de modification avancées précédemment par le chercheur, il s'agit de ne mettre aucune illustration !

L'enseignant réitère son idée d'enlever l'illustration
*XXX : Moi là, peut-être que j'enlèverai le dessin (j'acquiesce), complètement !*
*YYY : complètement, ça peut se faire.*
*XXX : qu'est-ce t'en dis?*
*YYY : oui, ça peut se faire, ça peut se faire.*
*XXX : parce qu'ils vont se lever, ils vont, c'est ce qu'on veut...*
*YYY : oui, ils vont échanger, oui. En tout cas, je trouve le dessin trop suggestif, si on l'enlève c'est vrai qu'il y a plus de richesse......*
*XXX : au mieux, c'est qu'eux-autres, il faut qu'ils fassent le dessin !*
*YYY : oui, on aurait plus les modèles spontanés.*
*XXX : ok, on enlève.*
*YYY : mais, moi je me suis dit un moment peut-être que, c'est encore une affaire de chercheur là...*
*XXX : non, non, écoute moi je trouve ça, avec l'expérience de la première fois, je trouve que c'est plus intéressant de faire ça, oui. (165:189)*

Il y a là un intéressant dialogue dans lequel l'enseignant propose d'enlever tout bonnement le dessin illustrant ce problème, pour le rendre plus riche. Selon lui, le dessin devrait être idéalement fait par les élèves, idée à laquelle souscrit le chercheur pour son potentiel de voir les modèles spontanés.

*Diminuer la valeur de la variable «nombre de personnes» (dans le problème des poignées de mains) {2}*
*YYY : et puis à la limite XXX, si on pense que c'est trop compliqué, on peut peut-être diminuer le nombre de personnes, le faire avec 10 personnes, ou 9, je ne sais pas moi (il acquiesce), et puis après laisser, voir comment ils avancent, tu vois.*
*XXX : oui.*
*YYY : parce qu'on peut changer ce paramètre. (191:197)*
*Le paramètre là, mettre quelque chose comme une dizaine, hein?*
*XXX : d'accord. C'est une bonne idée. (231:235)*

Le chercheur indique une variable dans le problème des poignées de mains sur laquelle on peut jouer pour diminuer la complexité, soit le nombre de personnes dans l'énoncé...une proposition est faite de passer de 12 à 10 ou 9... Idée qu'accepte l'enseignant.

*Intérêt de garder un grand «nombre de personnes» pour contrer la stratégie essais/erreurs {1}*
*YYY : le nombre de cas ici, on avait dit qu'on les faisait peut-être travailler sur 10, une dizaine de personnes,...mais, l'avantage de 12 c'est que ça rend inefficace une*

*certaine stratégie là, mais on peut quand même diminuer, moi je pense que 12 c'est un peu trop, on peut leur dire de faire avec 10. (1009:1013)*

Le chercheur met ici un bémol à sa proposition de diminuer la valeur du paramètre «nombre de personnes», fixé dans l'énoncé existant à 12. En effet, une grande valeur de ce paramètre rendrait inefficace la stratégie essais et erreurs, comme l'avait défendu l'enseignant lors de la construction du premier scénario en lien avec le problème du quadrillage (pour lequel il suggérait d'utiliser de grands nombres).

**Tableau 4.9 Ressources mobilisées dans l'aménagement des problèmes du scénario 2**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Des balises (principes, critères) guidant dans l'aménagement des problèmes :**<br>• un souci d'éviter de suggérer des modèles<br>• amener (dans la formulation de l'énoncé) la nécessité de généraliser<br>• garder des énoncés ouverts | **Des balises (principes, critères) guidant dans l'aménagement des problèmes :**<br>• un souci d'éviter de suggérer des modèles<br>• arriver à des énoncés clairs (compréhensibles par les élèves)<br>• privilégier, au-delà du choix des mots, la compréhension des énoncés |
| **Des modalités suggérées :**<br>• structuration des questions : un format invitant les élèves à répondre à toutes les questions.<br>• jouer sur les valeurs d'une variable (recourir à de grandes valeurs pour contrer la stratégie par essais et erreurs)<br>• modification de l'illustration suggestive (problèmes des poignées de mains) : une illustration neutre | **Des modalités suggérées :**<br>• structuration des questions : un format invitant les élèves à répondre à toutes les questions<br>• suggestion de préciser l'énoncé, attirer l'attention sur la contrainte, délimiter les différentes parties du problème (un souci d'être clair)<br>• enlever l'illustration suggestive (problème des poignées de mains) pour favoriser le recours à un dessin par les élèves |

4.3.2.2 Animation du scénario pendant la résolution par les élèves et pour le retour

Dans cette section, l'enseignant et le chercheur sont sur l'animation en classe avec les élèves autour des problèmes. Deux catégories permettent de rendre compte du travail fait à ce niveau, soit des attentes et buts poursuivis pendant la résolution et le retour sur les problèmes, et, deuxième catégorie, des modalités pour le retour en plénière sur les solutions des élèves.

4.3.2.2.1 Des attentes et des buts pendant la résolution par les élèves (5, 6)

L'enseignant et le chercheur explicitent les attentes et buts qu'ils poursuivent pendant qu'ils animeront le travail des élèves sur les problèmes (phase de recherche) puis le retour sur les problèmes en classe.

Des attentes vis-à-vis du travail des élèves lors de la résolution des problèmes :
*Aller au-delà de la manipulation {1}*
*YYY : ... il faudra qu'on fasse attention à ça... parce qu'ils peuvent perdre leur temps dessus non, il faudrait peut-être un moment qu'on leur dise d'aller plus loin...*
*XXX : oui, je suis d'accord avec ce que tu dis. (34:38)*

L'enseignant et le chercheur s'entendent pour attirer l'attention des élèves sur le fait qu'ils ne doivent pas perdre du temps à jouer avec les blocs. Il faudrait les inviter à aller au-delà de la manipulation qui n'est pas suffisante comme cela a été dit dans la section sur l'analyse des problèmes.

*Répondre à toutes les questions {1}*

*XXX : ça va être très important de dire, lorsqu'on va formuler nos attentes, qu'on veut qu'ils répondent à toutes les questions (j'acquiesce), parce que si je comprends bien, la stratégie c'est de donner un problème par cours.*
*YYY : c'est ça.*
*XXX : donc, là ça va être important beaucoup, beaucoup... de le formuler, cette attente.*
*YYY : si non ils vont oublier, comme on l'a vu avec le problème du quadrillage... (il acquiesce). (199:212)*

L'enseignant souligne une attente qu'il faudrait explicitement formuler aux élèves lors de la résolution des problèmes, soit de répondre à toutes les questions, parce que c'est justement pour leur permettre d'avoir le temps de répondre au maximum de questions que la suggestion avait été faite lors du bilan du scénario 1 d'exploiter dans ce deuxième scénario un problème par cours.

<u>*Moins de requêtes de validation de la part des élèves*</u> *{1}*
*XXX : oui, moi mes attentes... si je peux en verbaliser une autre, moi je m'attends de la part des élèves qu'ils demandent moins est-ce que c'est bon là, comment qu'on appelle ça?*
*YYY : validation!*
*XXX : oui ! J'espère qu'ils vont être moins sur la validation. (1447:1453)*

Une autre attente, plus chère à l'enseignant, est explicitée par ce dernier, soit moins de requêtes de validation auprès de lui et du chercheur de lors de la résolution des problèmes. En quelque sorte, l'enseignant s'attend à ce que les élèves jouent à fond le jeu de l'échange en équipe puis entre équipes.

<u>Des buts poursuivis à travers ce travail de résolution par les élèves :</u>
<u>*Voir l'évolution des élèves entre le premier et le deuxième scénario*</u> *{1}*
*XXX : j'ai vraiment hâte de le faire, parce que là j'ai hâte de comparer leur savoir-être entre la première puis la deuxième, et aussi tout leur processus.*
*YYY : comment ils vont évoluer un peu.*
*XXX : on l'a déjà fait, on ne part pas à zéro, là ils savent qu'il y a une continuité. (44:50)*

L'enseignant montre son intérêt quant l'évolution des élèves en termes de savoir-être.

<u>*Le développement chez les élèves de la capacité à coopérer avec n'importe quel élève*</u> *{2}*
*XXX : Mais, j'avais dit pour les équipes, moi j'ai proposé pour le groupe BB de piger.*
*YYY : piger les équipes, oui, ils ont accepté?*
*XXX : ils ont accepté, on est supposé de faire ça demain, c'est surtout pour faire de la transversale, la compétence transversale, qu'ils soient capables de travailler, de coopérer avec n'importe qui. Puis je le leur ai beaucoup vanté, là il y a des personnes avec qui vous n'avez jamais travaillé cette année (1465:1470)*

Un autre but est poursuivi par l'enseignant, un but plus personnel, soit de développer une des compétences transversales du programme, la capacité à coopérer avec n'importe qui, ce qui l'amène à proposer aux élèves de piger les équipes.

*XXX : je trouve que pour eux aussi le but c'est vraiment la résolution de problèmes, peu importe avec qui tu es, ... c'est l'échange d'idées. Je pense que ça va être plus riche.*

*YYY : oui, il y a des habiletés en même temps qu'ils développent là-dedans.*
*XXX : mais, c'est sûr qu'eux, il y a en pour qui ... c'est une difficulté de plus (résoudre) ... le problème puis il va avoir à négocier avec l'autre personne, mais bon je pense que ça fait partie un tout petit peu de...*
*YYY : c'est un apprentissage. (1497:1508)*

Il s'agit pour les élèves, selon l'enseignant, de savoir résoudre des problèmes peu importe avec qui ils sont amenés à échanger, une compétence transversale à développer mais qui représente un défi supplémentaire pour les élèves qui sont déjà confrontés à la difficulté à résoudre les problèmes. Le chercheur partage le but poursuivi par l'enseignant.

4.3.2.2.2 Différentes modalités suggérées pour l'animation (9, 12)

Ici, l'enseignant et le chercheur avancent des suggestions, des modalités leur permettant de mener a bien l'animation lors de la résolution des problèmes par les élèves et lors des plénières.

*Suggestion d'une manière de faire pour refuser les requêtes éventuelles de validation de la part des élèves (les refuser diplomatiquement dès le début) {1}*
*YYY : bon, on pourra faire comme on avait fait un moment, c'est-à-dire que ça dépend de... l'entrée, si au début ils savent qu'il ne faut pas compter sur XXX pour donner la solution, bon diplomatiquement je veux dire, sans trop les... (1455:1456)*

Le chercheur rappelle une manière d'actualiser une des attentes vis-à-vis des élèves explicitées précédemment par l'enseignant, soit de rejeter dès l'entame de l'expérimentation toutes requêtes éventuelles de validation, comme ils l'avaient fait lors de la première expérimentation. Comme cela, ils sauront à quoi s'en tenir...On est ici sur une mesure d'installation d'une manière de faire (voire une routine) pouvant supporter le travail de résolution par les élèves.

*Une proposition aux élèves de matériel comme support (questionnée) {1}*
*XXX : pour les tours...j'avais une proposition à faire qui est la suivante, on pourrait peut-être amener des blocs*
*YYY : oui, mais il faut du matériel, c'est sûr.*
*XXX : je ne sais pas là, je suis entre l'idée, est-ce que c'est mieux qu'ils le fassent seulement à l'aide de leurs modèles, c'est-à-dire qu'ils dessinent, ... tu sais qu'ils partent vraiment d'une feuille, d'un crayon puis de leurs cerveaux, ou de... parce*

*que je sais que la manipulation c'est une étape importante dans la résolution de problèmes, puis je sais que moi j'en ai des blocs, fait que je ne sais pas...*
*(....)*
*YYY : parce que moi justement, tel que je l'avais dit, j'avais suggéré qu'on leur donne quelques blocs, qu'on ne leur donne pas la possibilité de faire tout avec des blocs, mais qu'on leur en donne juste quelques uns pour qu'ils puissent voir, puis après qu'ils essaient de continuer le travail. ... parce qu'il y a un aspect expérimental dans le jeu, c'est pourquoi je voulais qu'on leur offre quelques blocs. (4:31)*

Dès l'entame de la rencontre réflexive, l'enseignant suggère qu'on offre aux élèves des blocs pour la résolution du problème des tours, d'autant qu'il sait que la manipulation est une étape importante de la résolution de problème. Mais, l'enseignant interpelle le chercheur sur la pertinence de cette manipulation. Pour le chercheur, le problème des tours a un aspect expérimental ce qui justifie la pertinence d'offrir du matériel de manipulation aux élèves, cependant ce matériel doit être en quantité limitée.

*<u>Du matériel pour favoriser l'entrée dans le problème</u> {1}*
*YYY : mais celui-là quand je le faisais là, je le faisais vraiment dans l'optique qu'on leur offre du matériel avec quoi entamer le problème puis après poursuivre. Si tu as des blocs c'est génial. (40:43)*

L'enseignant et le chercheur s'accordent sur l'idée d'offrir des blocs aux élèves pour la résolution du problème des tours, dont le chercheur indique dans cet extrait qu'il l'a construit dans cette optique, pour favoriser une entrée dans le problème.

*<u>Un matériel en quantité limitée (pour contrer une construction de tous les cas)</u> {2}*
*YYY : Je disais des choses sur le matériel, ici l'idée c'est que le matériel ... ne soit pas en suffisance, il ne faut pas qu'ils puissent tout faire avec le matériel, parce qu'il y a en à ce moment qui me donneront des réponses, tu vois. (899:902)*
*YYY : si on en a pas suffisamment, c'est ça qui est bien.*
*XXX : oui, oui, on ne veut pas qu'ils...*
*YYY : sinon ça ne marche pas, et puis ça risque de faire perdre trop de temps, ça gruge trop de temps. (998:1003)*

Le chercheur indique une précaution (voire un principe à considérer) à prendre en offrant des blocs aux élèves, soit d'éviter qu'ils puissent répondre aux questions en construisant tous les cas pour une tour d'une hauteur donnée. Le nombre de blocs ne doit pas être suffisant.

> *Donner une hauteur différente à chaque équipe {1}*
> *YYY : ... faire varier la hauteur des tours d'une équipe à l'autre de manière à justifier par la suite le passage à la généralisation. C'est un peu, faire travailler ce groupe là sur des tours de hauteur 6, ou bien ceux-là sur des tours de hauteur 7. Peut-être qu'il y a en qui vont dire que c'est plus difficile que pour les autres. Mais, c'est d'emblée, comme entrée dans ce problème, de proposer à certains de travailler sur des tours de hauteur 6 par exemple ou 5, et puis à d'autres de hauteur 7 ou 6, tu vois, puis après voir comment on peut...*
> *XXX : je sais ce que tu dis. (697:705)*

Dans cet extrait, le chercheur suggère, comme entrée dans le problème, de faire travailler les groupes sur des tours de hauteurs différentes, et ce pour justifier par la suite le passage à la généralisation.

> *Pertinence de faire varier la hauteur interpelée/rationnel sous-jacent précisé {1}*
> *XXX : je ne suis pas convaincu.*
> *YYY : que c'est, ok.*
> *XXX : pourquoi tu vas leur suggérer des hauteurs?*
> *YYY : en fait, c'est pour qu'ils puissent le faire pour un cas particulier, c'est que je ne voudrai pas laisser ouvert, général d'emblée. Tu vois, parce que je le trouve difficile comme tel (il acquiesce)...*
> *XXX : il faudrait que la moitié de la classe travaille...*
> *YYY : c'est-à-dire qu'ils travaillent sur des cas particuliers, bon vous vous faites avec supposons 5, d'autres avec 6, hein, et puis après maintenant on pose la question. Parce que le fait de l'avoir fait pour un cas là, peut-être ne pas prendre de cas trop compliqués, par exemple on peut convenir un groupe travaille avec 5, d'autres avec 6 (715:730)*

Dans l'échange précédent, l'enseignant interpelle le chercheur sur la pertinence de faire varier la hauteur des tours. Pour le chercheur c'est une façon de ne pas poser la question de façon trop large (la dernière question surtout), donc de faire travailler les élèves d'entrée de jeu sur des cas particuliers différents.

> *Travail par tous sur deux cas différents {1}*
> *XXX : il n'y a rien qui empêche de dire, vos rangées vous autres c'est de hauteur 6, puis vos rangées vous autres c'est de hauteur 5, puis...*

*YYY : à moins qu'au dise à la classe de faire au moins pour deux cas, peut-être, demander à tout le monde de travailler sur deux cas particuliers, on verrait au moins 2 cas différents, hein. Par exemple, combien de tours de hauteurs (suit un moment où je tente plusieurs reformulations avec 2 hauteurs données), je voulais qu'on donne un cas, par exemple des tours de hauteur 5, puis 6 (il acquiesce). Quelque chose de ce genre, peut-être que c'est à reformuler, mais si on disait ça à toute la classe, là ça enlèverait l'aspect de faire travailler une moitié de la classe sur un cas plus simple et une autre moitié sur un cas plus compliqué, tu vois.*
*XXX : tu voudrais que tous les élèves puissent faire les 2 cas, travailler sur les 2 cas?*
*YYY : oui, je me dis que c'est un compromis.*
*XXX : oui, oui. (737:753)*

L'enseignant s'inscrivant dans l'approche proposée par le chercheur consistant à faire varier les hauteurs des tours, propose de faire travailler les deux moitiés de la classe sur deux cas différents. Comme compromis, pour ne pas donner plus de travail à une moitié de la classe, le chercheur propose de faire travailler d'entrée de jeu toute la classe sur 2 cas différents.

*<u>Analyse relative des différentes modalités</u> {1}*
*XXX : ceux qui ont travaillé avec 5, d'autres avec 6, lorsqu'on fait le retour c'est riche parce que les 5 et les 6 ils vont faire des liens entre eux...*
*YYY : ils se parlent.*
*XXX : oui, c'est ça, mais d'un autre côté quand ils travaillent 5 et 6, ben tu sais tout le monde a travaillé, fait qu'il y a des avantages aux 2 méthodes.*
*YYY : ils font plus le lien, ils généralisent plus tu veux dire, que s'ils travaillent de façon séparée?*
*XXX : oui, qu'est-ce que tu en penses, d'après toi, tu penses que s'ils travaillent les deux cas ils vont mieux généraliser ?*
*YYY : oui, en fait il y a 2 choses, du point de la plénière et de la validation, si on veut un échange, c'est plus riche de les faire travailler sur 2 cas différents, tu vois, parce qu'en réalité c'est quoi, ils travaillent sur 2 cas différents puis après tout le monde généralisent, donc en fait dans la dernière question qui est là, ils sont obligés d'aller plus que dans leur cas particulier ...alors que quand tout le monde travaille sur 2 cas particuliers puis après qu'ils essaient de généraliser, ils sont comme au même niveau, tu vois, mais...moi j'aurai tendance à laisser ça comme tel, comme on l'a suggéré (845:867)*

Deux approches possibles sont discutées ici, l'enseignant trouvant un avantage à chacune des approches. Pour l'enseignant et le chercheur, l'avantage de faire travailler les équipes sur des cas différents est de permettre des échanges, des liens, donc une richesse (du point de vue de la plénière), alors que lorsque tous les élèves travaillent sur les deux cas, quand vient le moment de généraliser avec la dernière question, ils sont préparés à passer à la généralisation. Le chercheur indique sa préférence pour cette dernière approche (telle que prévue).

> *Suggestion d'un tableau pour aider les élèves dans l'organisation des données (lorsque la résolution du problème de «Boris» est bien engagée) {3}*
> *YYY : je pense que j'avais mis ça dans les consignes ..., je disais «quand le travail en équipes sur ce problème est bien engagé, suggérer l'idée d'un tableau à 3 colonnes pour aider à organiser les différentes données» (415:419)*
> *YYY : je me disais que peut-être s'ils font plusieurs cas, ... peut-être ne pas le dire trop vite là, mais si jamais y en avait qui ont de la misère, peut-être les aider, leur dire de faire un tableau pour voir. (424:427)*
> *XXX : c'est ça, je pense que quand c'est bien engagé, on va suggérer, c'est une bonne idée, oui, oui. (445:446)*

Dans les deux extraits précédents, le chercheur rappelle une des consignes qu'il propose et consistant à proposer au besoin de l'aide aux élèves, en leur proposant un tableau à trois colonne advenant qu'on remarque que plusieurs ont de la difficulté à organiser leurs données. L'enseignant se montre ouvert à offrir au besoin ce type d'aide.

**Tableau 4.10 Ressources mobilisées dans l'animation en classe avec les élèves autour des problèmes du scénario 2**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Des attentes explicitées :**<br>• inviter les élèves à aller au-delà de la manipulation<br><br>**Des modalités précisées/analysées :**<br>• rejeter diplomatiquement, dès le début, les requêtes de validation des élèves<br>• fournir du matériel pour favoriser l'entrée dans le problème/mais en quantité limitée (contrecarrer la stratégie consistant à vouloir construire toutes les tours)<br>• faire travailler tous les élèves sur des tours de | **Des attentes explicitées :**<br>• inviter les élèves à aller au-delà de la manipulation<br>• inviter les élèves à répondre à toutes les questions<br>• moins de requêtes de validation attendues de la part des élèves<br><br>**Des buts explicités :**<br>• observer/voir l'évolution des élèves entre le 1e et le 2e scénario<br>• développer la capacité chez les élèves à coopérer avec n'importe qui (en équipes) |

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| hauteurs différentes (pour justifier le passage à la généralisation)<br>• faire varier la hauteur d'une équipe à 'autre (plus riche pour la plénière et la validation)<br>• suggestion d'un tableau pour aider au besoin les élèves dans l'organisation des données | **Des modalités précisées/analysées :**<br>• fournir du matériel<br>• faire travailler les équipes sur des tours de hauteurs différentes (approche questionnée puis adoptée) |

4.3.2.3 Planification du scénario

Peu de choses ont été dites lors de la rencontre réflexive quant à la planification plus précise du scénario 2. Certainement à cause du fait que le chercheur pour le scénario 2 a préféré proposer pour discussions non seulement des problèmes mais aussi une séquence à valider.

> *Une proposition de séquence guidée par une idée en arrière : voir si les élèves vont faire des liens {1}*
> *YYY : dans la version qui est là, qui est celle du scénario, je les ai mis dans une séquence où c'est celui-là que je vois comme le premier (il acquiesce), mais c'est discutable. Et puis, je voyais celui-là comme deuxième, comme intermédiaire, puis ce serait intéressant de faire celui-là, puis de voir à la fin s'ils voient des liens entre les, parce que tu vois ça c'est Fibonacci, on commence par Fibonacci quelque part et on termine par Fibonacci, après peut-être voir si eux.. ils voient des liens. (115:120)*

Le chercheur expose la séquence qu'il propose à l'enseignant pour construire le scénario 2, un problème au début et un autre à la fin autour de la suite de Fibonacci, et entre les deux, un problème emprunté au manuel de l'enseignant, le problème dit des poignées de mains.

> *Une suggestion d'enlever du scénario le problème du restaurateur pour des contraintes de temps {2}*
> *YYY : ok. Et puis, le dernier problème je l'ai enlevé, le problème du restaurateur.*
> *XXX : oui, les tables! Quand j'ai vu ton courriel, tu disais que...*
> *YYY : parce que j'avais vu qu'on avait 4 périodes maximum, déjà, et puis celui-là il était intéressant peut-être pour aller plus loin, tu vois, peut-être que si tu as suffisamment de temps, parce que c'est un bon problème... pour montrer qu'on peut aborder l'algèbre d'un autre point de vue. Mais, moi je voyais surtout l'aspect de,*

*s'ils devaient faire des messages et puis valider en classe, un aspect de la modélisation, comment ils modélisent. (249:261)*

Le chercheur explicite dans cet extrait, les raisons qui l'ont poussé d'abord à proposer d'exploiter le problème du restaurateur (comme approfondissement, pour travailler plus la validation un aspect important du processus de modélisation), puis de l'enlever (pour une question surtout de temps).

*<u>Un problème laissé en suspens (le problème du restaurateur)/un défi</u> {1}*
*XXX : ok, moi j'ai une suggestion à faire (j'acquiesce), ... ce problème là on pourrait le donner comme un problème, à un moment, puis on laisse en suspens, puis leur dire que vous avez la semaine pour y penser.*
*(...)*
*YYY : possible. Leur donner ça, puis on leur dit après qu'on leur laisse une semaine pour...*
*XXX : oui. Parce que, advenant le cas qu'il y a des équipes qui aient terminé le problème après 15 minutes ou 20 minutes, tu sais pour garder leur intérêt, je ne sais pas, je pensais ça. (264 :277)*

*<u>Un problème bonus</u> {1}*

*XXX : oui, parce qu'on peut le donner comme bonus, puis dire aux élèves lors de la dernière plénière on y revient, je ne sais pas, je me pose des questions. (283:284)*

Plutôt que de jeter à la poubelle le problème du restaurateur, l'enseignant propose de l'exploiter de deux manières possibles, en le proposant aux élèves comme problème à chercher à la maison en début d'expérimentation ou vers la fin, ou comme moyen de garder l'intérêt des élèves qui auraient fini tôt la résolution d'un des problèmes du scénario.

Toujours, avec l'idée d'exploiter le problème du restaurateur, l'enseignant parle du problème du restaurateur comme d'un problème bonus sur lequel on pourrait revenir lors de la dernière plénière.

*<u>Un problème parallèle pour les élèves qui veulent le faire</u> {1}*
*XXX : ... je le vois plus comme un problème parallèle.*
*YYY : ok. On leur donne ça, puis on laisse mijoter, et puis après on revient dessus.*
*XXX : même qu'à la limite, je ne le présenterai pas à toute la classe. On a un problème, puis je dirai, à un moment donné, bon ceux qui veulent le faire à la maison, je ne sais pas, peut-être qu'ils vont tous nous regarder, puis dire hey là,*

*notre journée est finie, puis on ne veut pas en faire à la maison (rires de moi). Mais, peut-être qu'au contraire, il y a en que ça va intéresser.... (289:295)*

Une autre idée de l'enseignant sur la façon possible d'exploiter le problème du restaurateur, c'est d'utiliser ce dernier comme un problème parallèle, à présenter à des élèves volontaires pour qu'ils le cherchent à la maison.

**Tableau 4.11 Ressources mobilisées dans la planification du scénario 2**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Un scénario structuré autour de 3 problèmes**<br><br>**Balises sous-jacentes :**<br>• une idée en arrière : voir si les élèves vont faire des liens ;<br>• Prise en compte des contraintes de temps | **Choix d'un problème de réserve : le problème du restaurateur**<br><br>**Différentes modalités d'exploitation précisées.**<br>• Un problème en réserve (pour garder l'intérêt de certains élèves, pour la dernière plénière);<br>• Un problème optionnel (à faire à la maison) |

### *4.3.3 Quelle lecture faire de l'analyse de la rencontre réflexive portant sur l'élaboration du deuxième scénario 2?*

Comme avec le premier scénario, nous tenterons dans les lignes qui suivent de procéder à une lecture transversale de la rencontre portant sur l'élaboration du deuxième scénario, par un retour sur les ressources structurantes mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors de cette rencontre. Cette lecture se fera en termes des ressources interprétatives et des ressources d'action convoquées, mais aussi en termes de la sensibilité théorique et de la sensibilité pratique dont témoignent l'enseignant et le chercheur.

#### 4.3.3.1 Une analyse en termes de ressources interprétatives

Dans l'analyse des problèmes proposés par le chercheur, l'enseignant s'attarde sur leurs énoncés qui doivent pour lui être clairs, compréhensibles pour les élèves (tableau 4.7). Pour l'enseignant, pour que les énoncés des problèmes soient compréhensibles, au-delà d'une certaine précaution dans le choix des mots, il importe de permettre aux élèves de percevoir sans ambiguïté dans ces énoncés les informations nécessaires, par exemple en mettant bien en évidence la contrainte (tableau 4.7) dans le problème des tours. La perspective de l'enseignant sur la compréhension peut à cet égard être rapprochée de celle de Descaves (1992) pour qui la compréhension des énoncés mathématiques dépend, entre autres, de la capacité des élèves à repérer et saisir dans ce type de texte les mots informatifs renvoyant aux données essentielles du problème, et aussi les mots injonctifs renvoyant aux questions auxquelles ils doivent répondre, aux tâches à faire. L'analyse de l'enseignant porte sur ces aspects là, les informations et les questions que doivent saisir les élèves pour résoudre les problèmes.

Lors de l'analyse, l'enseignant se prononce aussi sur l'illustration des problèmes et estime qu'il importe, à la lumière de l'expérimentation du premier scénario, que l'illustration soit la moins suggestive possible, pour que ce soit le plus riche pour les élèves. Il est remarquable de noter que l'enseignant juge de l'intérêt des problèmes à l'aune de ce que ceux-ci suggèrent ou non aux élèves : moins on en suggère, mieux c'est, semble-t-il dire. De sorte que, le problème des poignées de mains est jugé moins intéressant à cause de son illustration suggestive, et le problème dit de «Boris» riche pour lui car ne suggérant pas de nombre de marches dans sa dernière question. Un regard nouveau est donc porté par l'enseignant sur l'analyse des problèmes, regard influencé par le travail précédent avec les élèves autour de la modélisation et l'expérimentation du premier scénario[110].

En lien avec la résolution anticipée par les élèves (problème des tours), l'enseignant considère la manipulation comme un aspect important de la résolution de problèmes, mais entrevoit une impossibilité pour les élèves d'y aller systématiquement de façon empirique avec des blocs (tableau 4.8). Au-delà de cette limite dans la manipulation l'enseignant

[110] Comme nous le verrons plus tard à la section 4.4, l'enseignant et le chercheur en viendront à réaliser l'influence sur la résolution des élèves de l'introduction rapide ou de la suggestion de modèles tels les arbres de choix ou le principe multiplicatif.

anticipe, avec le problème de «Boris», une difficulté chez les élèves d'abord dans le dénombrement des différents cas (combien de façons de monter un escalier d'une hauteur donnée) puis une difficulté à faire le lien entre les différents cas. Quant à l'engagement des élèves dans les problèmes, l'enseignant anticipe des requêtes de clarification de leur part, c'est-à-dire entrevoit chez les élèves une difficulté de l'ordre de la compréhension des énoncés, et estime que les élèves ne songeront pas spontanément à passer par différents cas en résolvant le problème de «Boris». Toujours, sur l'anticipation de la résolution par les élèves, l'enseignant parle de modèles tels des dessins ou des arbres de choix, des modèles proches de l'activité spontanée des élèves. L'enseignant reste donc, dans la prédiction des modèles, proche de l'activité vraisemblable des élèves. Aussi, en adhérant à certaines attentes, tel le passage à la généralisation, l'enseignant démontre une certaine appropriation de l'enjeu qui le réunit avec le chercheur, soit le développement du processus de modélisation par les élèves.

Dans l'aménagement des problèmes (tableau 4.9), une double préoccupation guide l'enseignant, soit le souci d'arriver à des énoncés clairs pour les élèves, mais également le souci d'éviter de suggérer des modèles. Enfin, dans l'animation (tableau 4.10), l'enseignant formule des attentes, telles celle que les élèves répondent à toutes les questions, qu'il y ait moins de requêtes de validation de leur part. Par souci de clarté envers les élèves, ces attentes traduisent une certaine perspective chez l'enseignant, soit le fait qu'une fois qu'un problème est bien compris par les élèves, il est alors de leur responsabilité de traiter entièrement chaque tâche et de valider entre eux leurs solutions. Transparaît également dans la façon de l'enseignant d'envisager l'animation un intérêt pour le développement d'une compétence transversale, soit la capacité pour les élèves à coopérer avec n'importe quel autre élève lors de la résolution de problèmes.

Quant au chercheur, lors de l'élaboration de ce second scénario, il mobilise sa connaissance du processus de modélisation dans l'analyse des problèmes (tableau 4.7).

Ainsi, lors de la revue des problèmes, le chercheur se préoccupe de savoir dans quelle mesure les énoncés et illustrations rejoignent certaines finalités en lien avec un travail centré sur le processus de modélisation, telles suggérer le moins possible de modèles, amener les élèves à voir la nécessité de généraliser, éviter que les énoncés soient trop clairs. Dans cet ordre d'idée, le chercheur sera le premier à attirer l'attention de l'enseignant sur le caractère très suggestif de l'illustration du problème des poignées de mains. Aussi, toujours dans l'analyse des problèmes, le chercheur continue à privilégier une analyse didactique, explicitant des variables didactiques en jeu, s'attardant sur la complexité relative des problèmes. Dans ce sens, il reste donc fidèle à sa perspective didactique qui l'amène dans l'analyse des problèmes à porter son intérêt sur différentes entrées possibles pour orienter l'activité des élèves vers la modélisation.

En lien avec la résolution anticipée par les élèves (tableau 4.8), le chercheur dévoile sa perspective sur la manipulation qu'il considère comme une entrée possible pour les élèves dans le problème des tours, mais entrevoit des limites à la manipulation qui n'est pas suffisante pour passer à la généralisation, une manipulation coûteuse en termes de temps. Le chercheur, tout comme l'enseignant, considère qu'il est impossible aux élèves d'y aller systématiquement de façon empirique avec des blocs dans la résolution du problème des tours. Deux difficultés sont anticipées par le chercheur dans la résolution des problèmes du scénario, soit celle d'organiser les données et de faire le lien entre les différents cas, mais il s'agit là de difficultés relatives, le chercheur considérant que certains élèves sont en mesure de prendre compte de l'existence de différents cas et d'arriver à une bonne organisation des données. En amont, c'est-à-dire comme préalable au repérage par les élèves d'une régularité ou à la formulation d'un modèle permettant de résoudre chacun des problèmes, le chercheur entrevoit des forces et faiblesses chez les élèves. Le chercheur prédit ici une symbolisation vraisemblable avec des chiffres (1 ou 2) lors de la résolution du problème de «Boris» et explicite des attentes en termes d'un passage à la généralisation, mais sans aller jusqu'à vouloir que les élèves produisent des modèles trop élaborés, tels une formule explicite de dénombrement dans le cas du problème de «Boris», une formule qui n'est assurément pas à la portée des élèves. On sent ici, chez le chercheur, le délicat équilibre qu'il tente entre des prédictions fortement teintées par sa connaissance du processus de modélisation et le caractère vraisemblable de ces anticipations qui doivent ressembler à ce que peuvent faire des élèves de secondaire 1.

Dans l'aménagement des problèmes (tableau 4.9), le chercheur à travers les balises le guidant témoigne là également de son intérêt pour la modélisation, soit garder une certaine ouverture dans les énoncés, éviter de suggérer aux élèves des modèles et leur faire voir la nécessité de passer à la généralisation. Aussi, toujours en restant sur l'aménagement des problèmes, la perspective didactique du chercheur dont nous avons parlé antérieurement l'amène à jouer encore sur les valeurs de certaines variables, en l'occurrence la variable «nombre de personnes» dans le problème des poignées de main et ce pour contrer la stratégie par essais et erreurs chez les élèves. L'intérêt du chercheur pour le processus de modélisation et sa perspective didactique sont également tacitement présents lors de l'animation envisagée en classe avec les élèves autour de ces problèmes (tableau 4.10).

Pour conclure sur ce point, résumons les ressources interprétatives de différents ordres mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'élaboration du deuxième scénario. Pour ce qui est de l'enseignant, comme lors de la conception du premier scénario, avec ce second scénario il continue de témoigner de la même préoccupation pour les élèves, une connaissance qui a toutefois bougé. Il fait en effet intervenir sa connaissance de ce qui s'est passé, de ce qu'il a vu lors de l'expérimentation du scénario 1 et qui l'amène à porter une attention particulière aux modèles des élèves, mais aussi aux modèles qui peuvent être suggérés aux élèves à travers les illustrations. À ce propos nous pouvons parler d'une évolution par rapport à l'analyse du scénario 1, le regard porté par l'enseignant reflétant une appropriation de l'enjeu qui le réunit avec le chercheur, soit le développement du processus de modélisation par les élèves. Aussi, les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant lors de l'élaboration du scénario montrent une capacité à entrer dans l'analyse des problèmes, dans l'activité mathématique des élèves, l'enseignant dévoilant sa perspective sur la manipulation, sur l'importance pour les élèves de pouvoir faire des liens, de comprendre les énoncés des problèmes. À ce propos, nous avons apparenté sa perspective à celle de Descaves (1992) qui insiste sur l'importance pour les élèves dans la résolution de problèmes de pouvoir repérer les données essentielles ainsi que de saisir le sens des questions, de décoder les tâches à accomplir.

Quant au chercheur, les ressources interprétatives qu'il mobilise dans l'élaboration du deuxième scénario reflètent essentiellement sa perspective sur le processus de modélisation, l'importance pour lui que les illustrations suggèrent le moins possible aux élèves des modèles, que les énoncés soient trop clairs, que les élèves à travers ces énoncés aient la nécessité de généraliser. On remarquera que les connaissances du chercheur puisant au domaine de la combinatoire n'interviennent pas dans l'élaboration de ce deuxième scénario à la différence de ce qui s'est passé avec le premier scénario. Une autre remarque qui s'impose, le chercheur à la lumière de ce qu'il a vu avec l'expérimentation du scénario 1 prend en compte davantage les élèves, par exemple il entrevoit à la fois également une difficulté et une capacité à organiser les données de leur part. Cette plus grande prise en compte des élèves n'est pas juste de l'ordre d'un pari sur la débrouillardise des élèves, mais elle transparaît aussi, comme nous l'avons indiqué précédemment, à travers le caractère vraisemblable de certaines des anticipations du chercheur qui s'efforce d'indiquer des modèles et stratégies ressemblant à ce que peuvent faire des élèves de secondaire 1. À ce propos, nous pouvons donc parler d'une évolution par rapport à l'élaboration du scénario 1. Enfin, les ressources interprétatives mobilisées par le chercheur reflètent sa perspective didactique, le chercheur explicitant des variables influant la résolution, s'attardant sur la complexité relative des problèmes, s'intéressant aux entrées possibles dans les problèmes et à la façon d'orienter l'activité des élèves vers la modélisation. La figure 4.5 résume les différents éléments mentionnés précédemment.

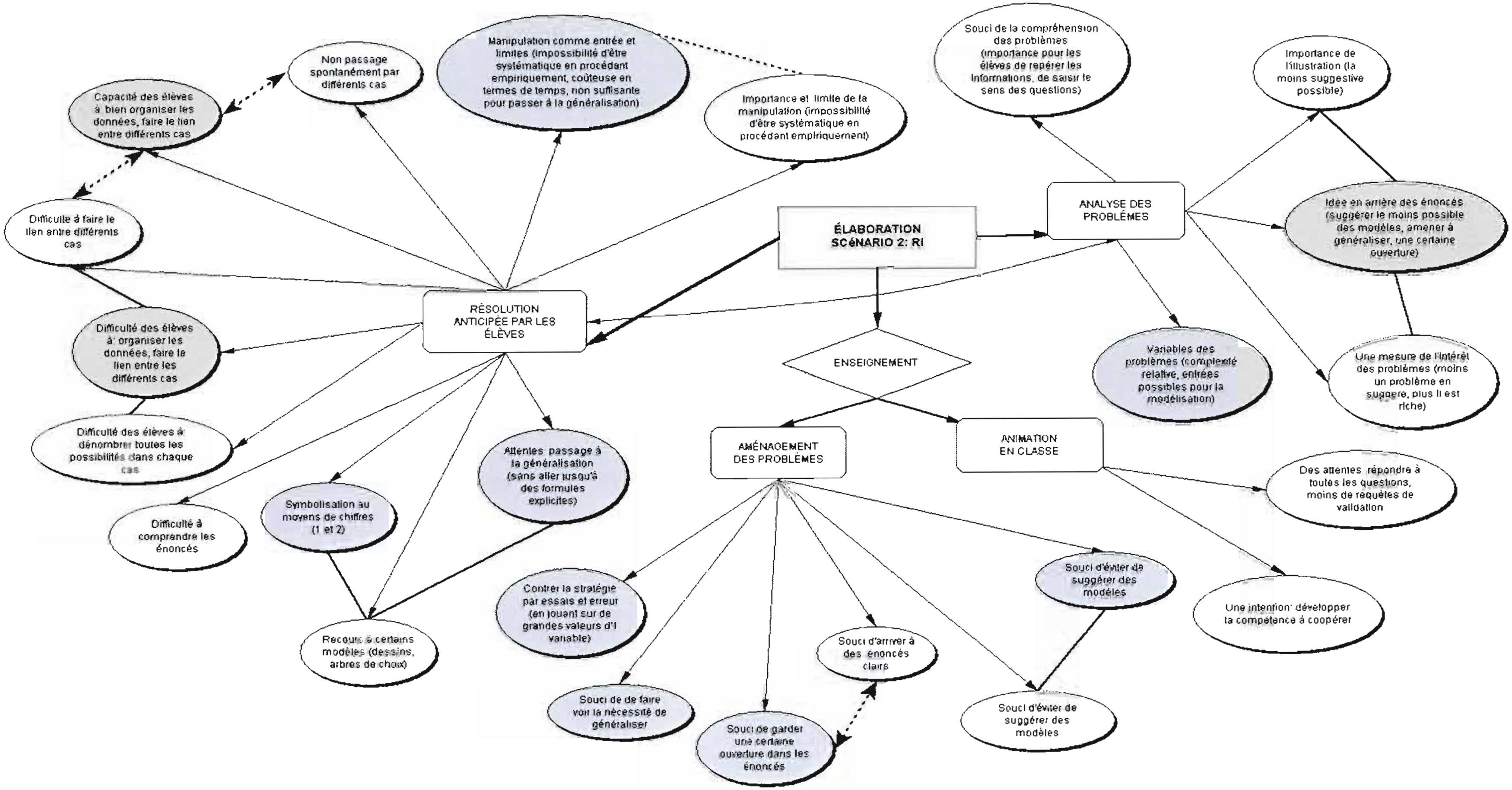



**Figure 4.5 Ressources interprétatives mobilisées lors de l'élaboration du scénario 2**

4.3.3.2 Une analyse en termes de ressources d'action

Rappelons que les ressources d'action, telles que nous les avons définies précédemment, ce sont des ressources autres que les ressources interprétatives, et elles renvoient aux manières de faire, aux approches suggérées par l'enseignant et le chercheur. Dans ce qui suit, nous essayons de mettre en évidence les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'élaboration du second scénario.

Dans l'aménagement des problèmes (tableau 4.9), l'enseignant, fidèle à son souci d'arriver à des énoncés clairs pour les élèves, propose de rendre les énoncés plus explicites en délimitant les différentes parties du problème (problème des tours) et en attirant l'attention des élèves sur la contrainte dans celui-ci (soit le fait que les blocs d'une certaine couleur ne doivent pas être voisins). Toujours, dans l'aménagement des problèmes, l'enseignant traduit le souci de ne pas suggérer des modèles aux élèves par la proposition d'enlever tout bonnement l'illustration trop suggestive du problème (problème des poignées de mains).

En lien avec l'animation du scénario (tableau 4.10), l'enseignant propose de piger les équipes afin de permettre aux élèves de développer la compétence à coopérer avec n'importe qui dans la résolution de problèmes. Comme on le voit, dans l'animation du deuxième scénario, l'enseignant fait entrer en jeu le développement d'une compétence transversale, la compétence à coopérer lors de la résolution en équipe des problèmes. Dans le cas du problème des tours, il suggère non seulement d'offrir du matériel aux élèves, des blocs, pour les aider dans la résolution de ce problème, mais aussi de les inviter à aller au-delà de la manipulation, de faire travailler les équipes sur des tours de hauteur différentes (pour favoriser les échanges dans le retour). Pendant la résolution, l'enseignant propose aussi d'inviter les élèves à répondre à toutes les questions, une attente importante pour lui.

Quant au chercheur, en lien avec l'aménagement des problèmes (tableau 4.9), il actualise une des suggestions formulées par l'enseignant lors du retour sur l'expérimentation du scénario 1, soit de faire en sorte que la disposition des questions permette aux élèves d'y répondre toutes. Dans le cas du problème des poignées de mains, afin de rendre l'illustration moins suggestive, le chercheur propose de recourir à une illustration plus neutre. Enfin, toujours dans l'aménagement, le chercheur fidèle à sa perspective didactique, propose de recourir à de grandes valeurs (pour la variable «nombre de personnes» pour le problème des poignées de mains) et ce afin de contrer la stratégie par essais et erreurs.

Pour ce qui est de l'animation (tableau 4.10), le chercheur s'accorde avec l'enseignant pour offrir aux élèves des blocs pour les aider à résoudre le problème des tours, mais précise qu'il s'agit d'inviter les élèves à ne pas s'attarder sur la manipulation, celle-ci étant à son avis insuffisante pour permettre aux élèves de passer à la généralisation. Toujours, en écho à l'enseignant qui s'attend à moins de requêtes de validation de la part des élèves, le chercheur propose le cas échéant d'opposer diplomatiquement une fin de non-recevoir aux premières requêtes allant dans ce sens. Une autre approche que suggère le chercheur pour l'animation du scénario et à laquelle adhère l'enseignant comme nous l'avons indiquée précédemment, est de faire travailler les équipes sur des tours de hauteurs différentes pour les amener à généraliser par la suite. Enfin, le chercheur propose, advenant que les élèves aient du mal à organiser les données lors de la résolution, de leur suggérer l'idée d'un tableau pour y voir plus clair.

Résumons de quels ordres sont les quelques ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'aménagement des problèmes et dans l'animation lors de l'élaboration du second scénario. Les ressources d'action mobilisées par l'enseignant dans l'aménagement renvoient à des moyens guidés par des principes (clarté, ne pas suggérer de modèles) (types de problèmes) à exploiter dans ce genre de scénario visant le développement du processus de modélisation en secondaire 1, soit des problèmes aux énoncés clairs et dont les illustrations ne suggèrent pas des modèles.

Aussi, les ressources d'action mobilisées par le chercheur dans l'aménagement renvoient à certaines caractéristiques des problèmes qu'on veut exploiter et aux voies et moyens permettant d'y arriver. Il s'agit, comme pour l'enseignant, d'arriver à des problèmes dont les illustrations n'induisent pas des modèles pouvant influencer la résolution des élèves, mais aussi de construire des problèmes dont les énoncés forcent les élèves à aller au-delà des essais et erreurs et dont la disposition des questions les obligent à ne laisser aucune question en rade, à aller jusqu'aux dernières questions qui dans les deux scénarios portent sur la généralisation, une finalité importante poursuivie par le chercheur et l'enseignant.

Pour ce qui est des ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur en lien avec l'animation du scénario 2, elles renvoient surtout aux modalités permettant d'accompagner les élèves dans la phase de recherche des problèmes, les deux s'entendant sur l'importance de permettre aux élèves de recourir à la manipulation mais d'aller au-delà de celle-ci, la nécessité de faire travailler les élèves sur différents cas pendant cette résolution et ce afin de les amener à passer à la généralisation. Par contre, d'autres ressources d'action sont plus spécifiques à l'un ou l'autre, telles pour le chercheur encourager les élèves à valider entre eux ou leur suggérer l'idée d'un tableau advenant qu'ils aient des difficultés à organiser leurs données, et pour l'enseignant inviter les élèves à passer à travers toutes les questions ou encourager les élèves à développer la capacité à coopérer avec n'importe quel élève dans la résolution, ce dernier aspect correspondant à une des compétences transversale promue dans le nouveau programme. La figure 4.6 résume les ressources d'action que nous venons de passer en revue.

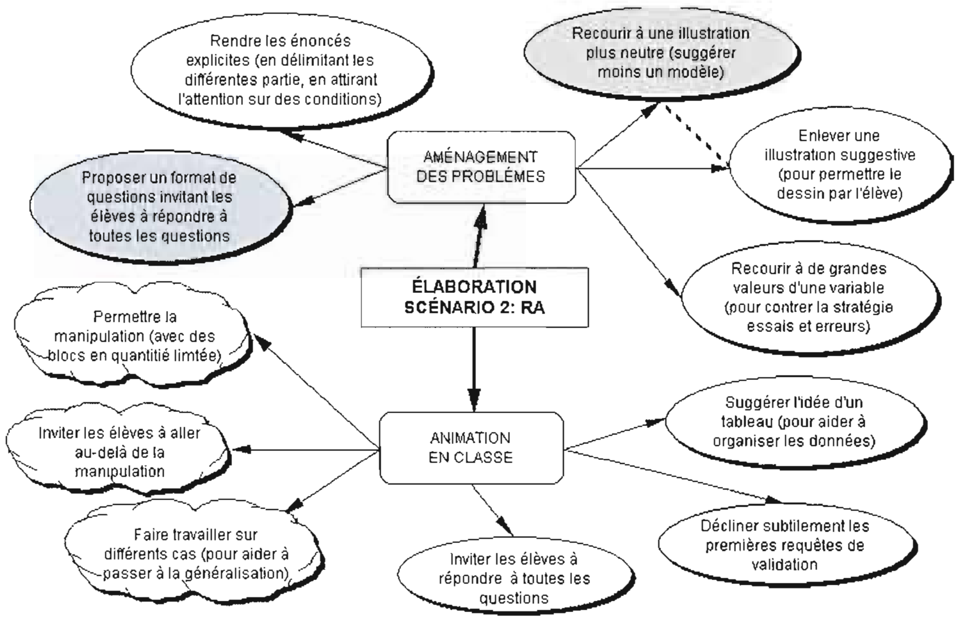



**Figure 4.6 Ressources d'action mobilisées lors de l'élaboration du scénario 2**

4.3.3.3 Une analyse en termes de sensibilité théorique et de sensibilité pratique

L'élaboration du scénario 2 est l'occasion de noter une sensibilité théorique de la part de l'enseignant et une sensibilité pratique de la part du chercheur, en quelque sorte un mouvement de l'un vers l'autre. En effet, comme nous l'avons signalé précédemment, à la fois dans certaines des ressources interprétatives et d'action mobilisées par l'enseignant, ce dernier témoigne d'une appropriation de l'enjeu qui le réunit avec le chercheur, soit le développement du processus de modélisation. Par exemple, pour éviter de suggérer des modèles aux élèves l'enseignant ira jusqu'à proposer d'enlever complètement l'illustration du problème des poignées de mains (voir version 1 et 2 du scénario 2). À l'occasion donc, l'enseignant est comme plus sensible que le chercheur à certaines composantes du processus de modélisation. L'enseignant manifeste donc une sensibilité théorique qui prend appui sur l'expérimentation du premier scénario comme nous le verrons plus tard.

Quant au chercheur, il se montre plus sensible au caractère vraisemblable de ce qui peut se produire chez les élèves réels, des élèves qu'il a pu observer lors de l'expérimentation du scénario 1 et qui ont démontré une certaine ingéniosité. À ce propos nous pouvons parler d'une sensibilité pratique à l'œuvre. Celle-ci amène également le chercheur dans l'aménagement des problèmes du scénario 2 à actualiser une des suggestions majeures de l'enseignant consistant à éviter de poser des questions à la suite, et ce, pour obliger les élèves à traiter toutes les questions.

### 4.4. Analyse du récit commenté de l'expérimentation du scénario 1 par le chercheur et l'enseignant

Dans cette partie, nous proposons une analyse du récit commenté de l'expérimentation du scénario 1, récit préparé et commenté par le chercheur, puis annoté par l'enseignant (appendice C8). L'idée d'un récit annoté par l'enseignant est venue au chercheur suite aux questions de ce dernier à propos des notes de terrain qu'il prenait, des buts poursuivis à travers de telles notes. Pour satisfaire la curiosité de l'enseignant, nous avons dû lui lire des extraits de nos notes puis avons promis de lui envoyer des extraits de notre journal de bord. C'est ensuite seulement que l'idée d'un récit de l'expérimentation nous est venue, un récit qui permettrait également au chercheur de solliciter la validation par l'enseignant de sa reconstruction du déroulement en classe des scénarios. Le matériau complémentaire et inattendu (au sens d'un matériau non prévu à l'entame de cette recherche) que nous analysons est donc important à plusieurs titres. D'abord, il résulte pour reprendre les mots de l'enseignant, d'une tentative de tisser un lien de confiance entre praticien et chercheur, lien nécessaire dans une recherche collaborative (nous verrons comment, dans la suite de cette analyse). Aussi, le récit annoté de l'expérimentation offre un regard croisé de l'enseignant et du chercheur sur cette expérimentation et ce à travers leurs commentaires respectifs. Enfin, au plan méthodologique le matériau que constitue le récit annoté de l'expérimentation permet de rejoindre certains des critères de validité internes chers à la recherche qualitative, soit la qualité dans les relations que le chercheur entretient au praticien, et la triangulation théorique par l'enseignant.

Pour les besoins de l'analyse nous avons passé outre le logiciel Atlas-Ti utilisé jusqu'ici pour le codage et procédé manuellement. Le logiciel ne nous semblait pas adapté pour le codage vu la forme particulière du récit annoté qui, comme l'illustre l'appendice C8, comporte trois colonnes : la première est le récit plus factuel, la deuxième colonne contient les commentaires du chercheur et la dernière colonne comprend les commentaires de l'enseignant (en lien avec ceux du chercheur ou avec le récit factuel). Pour ce qui est du codage, nous avons surtout codé les deux dernières colonnes, la première n'ayant été codée que lorsqu'un commentaire du chercheur (indiqués par Ci[111]) ou de l'enseignant (indiqués par Dj) renvoyait à une partie de cette colonne.

Dans ce qui suit, nous analysons les commentaires sur ce récit sous l'angle des ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors de ce retour conjoint, par commentaires interposés, retour à la fois sur la résolution effective par les élèves et sur les échanges qui ont eu lieu en classe autour des solutions des élèves, qui mettent en quelque sorte un regard croisé sur le récit.

### *4.4.1 Autour de la résolution effective des problèmes par les élèves*

Trois catégories permettent de rendre compte de l'analyse (des commentaires du chercheur et de l'enseignant) sur la résolution effective par les élèves des problèmes du scénario 1 : des *influences* sur cette résolution, des *questionnements* du chercheur et de l'enseignant en lien avec une certaine approche d'enseignement.

[111] Le «i» ou le «j» dans Ci et Dj est une sorte d'indice chronologique qui nous permet de retrouver le moment où est apparu un commentaire donné à l'intérieur du récit.

#### 4.4.1.1 Repérage de facteurs influant sur la résolution des élèves (2, 2)

L'enseignant et le chercheur repèrent deux facteurs ayant pu influencer la résolution par les élèves des problèmes du scénario 1.

> <u>*Influence des arbres de choix (impact de ce modèle utilisé tôt)*</u> *{1[112]}*
> *XXX après un tour rapide des équipes, estime que le fait d'avoir travaillé dans cette équipe les arbres de choix parait clairement dans les essais, les démarches. Je m'en rends compte par moi-même.*
> *(C9a[113])*
> *Ce point confirme une de nos craintes et au départ une prédiction, le risque que l'arbre de choix comme modèle contamine les élèves dans leur démarche, biaise le processus de modélisation.*

Avec ce groupe, les arbres de choix ont été abordés avant que l'expérimentation ne débute. Le constat partagé de l'enseignant et du chercheur confirme une hypothèse de départ, soit la possibilité que les arbres, une fois suggérés aux élèves, risquaient fort de les influencer dans la résolution subséquente.

> <u>*Influence du discours de l'enseignant sur l'efficacité (un frein à la résolution)*</u> *{1}*
> *Nous sommes aussi revenus sur un constat. Dans ce groupe, les élèves parlent d'efficacité, de son importance en mathématiques d'après ce qu'ils ont compris du message de l'enseignant. Certains semblent avoir bogué là-dessus, en estimant qu'il y avait beaucoup d'essais à faire, que la méthode des essais n'est pas efficace.*
> *(C15a)*
> *Le message de XXX sur l'efficacité semble amplifié dans cette classe. Je me rappelle avoir rétorqué à une équipe qui m'opposait l'argument d'autorité, qu'à défaut d'autres stratégies (plus efficaces), à leur place je me contenterai de celle que j'ai sur la main. XXX m'a dit qu'il a peut être trop parlé dans cette classe d'efficacité, mais a-t-il ajouté que dans son école l'efficacité est beaucoup valorisée, surtout au deuxième cycle. Je vois dans cet argument un souci de préparer ses élèves à ce qui les attend.*

---

[112] Ici, pour ce récit annoté et le deuxième, ce nombre renvoie aux commentaires du chercheur et de l'enseignant, et l'extrait factuel tiré de la première colonne n'est là que pour contextualiser. Un tel nombre est donc utilisé dans un sens différent de ce qui précède.

[113] Ce code traduit le fait que le commentaire 9 du chercheur a été subdivisé en unités a, b, c,... : soit donc C9a, C9b, C9c, etc.

Pour les élèves la stratégie par essais et erreurs n'est pas efficace, et puisqu'il s'agit toujours d'être efficace d'après ce qu'ils ont compris de ce que leur a dit l'enseignant, ils ne sont pas allés plus loin. Il est à remarquer que c'est dans le groupe considéré académiquement moins fort, que ce genre d'argument a été évoqué. Le commentaire du chercheur reflète, ici, deux perspectives différentes sur l'efficacité. Alors que pour le chercheur ce n'est pas une fin en soi, les élèves devant se contenter des démarches qu'ils ont même lorsqu'elles leur semblent non efficaces, pour l'enseignant l'efficacité est importante, surtout que c'est un aspect valorisé dans son école.

4.4.1.2 Des approches questionnées par le chercheur et l'enseignant (2, 2)

Les 2 facteurs identifiés précédemment amènent le chercheur à questionner certains aspects de l'approche d'enseignement quant à la résolution de problèmes.

> *Une démarche visant l'efficacité questionnée (un obstacle aux apprentissages mathématiques)/des valeurs explicitées {1}*
> *(C15c)*
> *On sent là une certaine tension entre une micro-culture, une valeur promue par le corps professoral en mathématique ici à l'école, mais qui est questionnée dans cette recherche parce qu'elle ne semble pas toujours favoriser de vrais apprentissages mathématiques. Cela me rappelle ce que disait Grenier à sa conférence du lundi sur ces savoirs dits transversaux, tels savoir modéliser ou construire des contre-exemples, qui sont négligés dans l'enseignement et qui pourtant traduisent ou renvoient le plus à l'activité authentique du chercheur, du mathématicien. Si nous voulons que les élèves fassent des mathématiques en classe, d'après Grenier, il importe de les initier à ces savoirs transversaux. J'ajouterai pour ma part, en lien avec le processus de modélisation vu comme savoir transversal, qu'il développe chez les élèves une certaine tolérance à l'énigme, la capacité de suspendre la réponse pour se permettre d'élaborer davantage, le processus de modélisation pour dire aux élèves qu'ils peuvent s'autoriser à essayer, valider avec d'autres, réviser leurs solutions pas efficaces.*

Dans le commentaire précédent, le chercheur décline des valeurs (importance d'initier les élèves à certains savoirs transversaux) et sa perspective sur la modélisation pour inviter les élèves, mais également l'enseignant à reconsidérer un certain rapport à l'efficacité dans la résolution de problèmes. L'efficacité, dans la perspective du chercheur, n'est pas une fin en soi mais un aboutissement, la résultante d'une démarche systématique consistant à toujours vouloir raffiner, améliorer une stratégie, un modèle, une solution.

> *L'enseignement d'un modèle préalable particulier questionné* {1}
> *(C14)*
> *Rétrospectivement, ils (les élèves) ne voient pas bien le principe multiplicatif à l'œuvre, en tout cas ils n'y font pas référence. Et pourtant, ils ont vu ce principe avec XXX. Je devrais interroger là-dessus XXX sur la façon dont il a approché ce principe avec ce groupe d'élève. Mais, nous en avons discuté lui et moi, peut-être que nous avons là une évidence qui montre que l'effet de contrat est seulement immédiat, les élèves avec le temps en viennent à oublier qu'on leur a parlé de modèles particuliers. À ce propos, XXX a utilisé une métaphore parlante : «dans la classe où on a semé quelque chose, on ne récolte pas» et «c'est dans la classe où on n'a pas semé qu'on récolte. En effet, le plus bel arbre de choix est venu de la 102 et, les idées les plus proches» du principe multiplicatif sont aussi venus de cette classe. Ce constat interroge sur la fécondité à la fois pour les fins du dénombrement ou de la modélisation, d'une introduction des élèves aux arbres de choix et principe multiplicatif. L'impact est nul et l'efficacité très discutable, en termes d'apprentissage s'entend.*

Ici, le chercheur et l'enseignant (dans les propos repris par le chercheur) questionnent l'opportunité de l'enseignement de modèles, en l'occurrence les arbres de choix et le principe multiplicatif. Pour le chercheur, quand les élèves sont mis en situation d'appliquer des modèles ils n'apprennent pas tant que ça, alors que pour l'enseignant, suite à ce qu'a révélé l'expérimentation, il n'y a pas de bénéfice, surtout quand on constate que les élèves qui n'ont pas été exposé aux modèles se débrouillent mieux.

Le tableau suivant résume les ressources mobilisées par le chercheur et l'enseignant lors de ce retour sur la résolution effective par les élèves des problèmes du scénario 1.

**Tableau 4.12 Ressources mobilisées dans le retour sur la résolution effective par les élèves (à travers les commentaires sur le récit de l'expérimentation du scénario 1)**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|

| Repérage de facteurs influant la résolution : | Repérage de facteurs influant la résolution : |
|---|---|
| • impact des arbres de choix : un modèle utilisé tôt dans un des 2 groupes et très présent dans les premières productions des élèves (confirmation d'une prédiction)<br>• discours de l'enseignant sur l'efficacité (un frein à la résolution de problèmes) | • impact des arbres de choix : un modèle utilisé tôt dans un des 2 groupes et très présent dans les premières productions des élèves. |
| **Des questionnements soulevés :**<br>• l'enseignement de modèles préalables (un réinvestissement non présent)<br>• le rapport à l'efficacité dans la résolution de problèmes (à reconsidérer sous l'angle de la modélisation : un aboutissement et non une fin en soi) | **Des questionnements soulevés :**<br>• l'enseignement de modèles préalables (un réinvestissement non présent) |

### *4.4.2 Retour sur les échanges en classe entre élèves autour de leurs solutions*

L'analyse du retour effectué par le chercheur et l'enseignant sur les débats en classe entre les élèves révèle que les échanges autour des solutions des élèves constituent un enjeu important. Trois catégories permettent de rendre compte du regard croisé de l'enseignant et du chercheur sur ces échanges ou leur gestion, soit *des buts* visés par le chercheur et l'enseignant dans les échanges entre élèves, un repérage des *habiletés* déployées par les élèves lors de ces échanges (mais aussi une *représentation inadéquate* en lien avec les arbres de choix), et des *manières de faire* pour organiser ces échanges.

4.4.2.1 Un but visé à travers les échanges entre élèves dans le retour sur les solutions (2, 2)

Un but est explicité par l'enseignant et le chercheur, une sorte de rationnel guidant dans le retour sur ces échanges.

> *Préciser le but des échanges aux élèves (éviter certaines dérives lors des échanges, viser plus à aller plus loin dans sa solution, à l'améliorer) {1}*
> *Les élèves ont fini d'échanger avec l'équipe de leur choix et XXX estime important en voyant que certains élèves sentent une certaine compétition de préciser le sens des échanges entre équipes : ce n'est pas pour rire d'une équipe, mais pour aller plus loin, pour améliorer, finaliser la mise au propre de leurs cahiers bleus.*
> *(D4)*
> *L'échange d'idées est pratiqué au primaire mais j'ignore dans quelle mesure. Il faut leur rappeler le but de cette étape.*

Une préoccupation récurrente de l'enseignant est d'éviter certaines dérives lors des échanges. D'où l'importance d'orienter ces échanges dans un sens tel que les élèves comprennent qu'échanger des idées entre équipes ce n'est pas rire d'une équipe mais voir comment aller plus loin dans la résolution avant de tout mettre au propre.

*Un certain esprit associé à la résolution de problèmes (essayer/rectifier) {1}*
*Après la période de recherche, XXX en guise de préambule aux échanges inter-équipes a utilisé la métaphore du compositeur ou du musicien qui avant de produire une bonne tune, essaie et rectifie son morceau.*
*(C7a)*
*J'aime bien son exemple, qui est plus proche du monde des élèves, la veille moi j'avais parlé des mathématiciens et de l'exemple de Fermat et Pascal.*

Belle métaphore que celle du compositeur qui traduit bien l'esprit dans lequel on aborde la résolution de problèmes. Essayer, rectifier, autant de fois nécessaire, c'est en effet une façon simple de parler des cycles du processus de modélisation dans lequel il s'agit de revisiter les modèles obtenus, de les raffiner. Cette métaphore de l'enseignant contraste en effet avec l'exemple difficilement compréhensible des correspondances entre Fermat et Pascal.

4.4.2.2 Repérage des habiletés déployées par les élèves lors des échanges mais aussi d'une représentation inadéquate en lien avec les arbres de choix (3, 4)

Comme le montrent les codes suivants, les plénières ont été l'occasion pour l'enseignant et le chercheur de noter que les élèves au-delà de certaines difficultés sont capables de bien communiquer ou de produire des contre-exemples en appui à leurs argumentations.

*Repérage par l'enseignant de la compétence à bien communiquer leurs démarches chez certains élèves {2}*
*Les élèves ne comprennent pas comment dans cette équipe ils arrivent à la formule NBRE DE MVTS × (NBRE DE MVTS -1) = 30 (problème du quadrillage). Dans cette équipe, celui qui semble avoir trouvé la solution (l'autre n'a pas vraiment travaillé avec son coéquipier, je m'en souviens) explique sa démarche en disant qu'il a regardé comment cela fonctionne pour AB et BA et a essayé ensuite de généraliser.*

*(D29)*
*Je rajouterais seulement que Ga est un élève qui est intéressant à écouter communiquer ses démarches même si celui-ci est en pleine construction de cette compétence.*
*(D34)*
*Ce cher Bo! Il est, hors de tout doute, compétent pour communiquer ses démarches! Je suis fier de lui!*

Ces deux commentaires de l'enseignant indiquent, au-delà du repérage, un intérêt de ce dernier pour la compétence de communication que les plénières permettent manifestement de travailler.

*Repérage par le chercheur d'une certaine capacité à user du contre-exemple chez les élèves {1}*
*Problème 5. XXX invite la première équipe. Cette équipe expose sa solution. Elle indique en substance que la réponse est 32 chemins en faisant 2×16, le nombre 16 correspondant au nombre de carreaux du quadrillage. XXX demande aux élèves ce qu'ils en pensent. Un élève, Bo, qui verbalise très bien, dit que cela ne marche pas, car avec un carré de 4 carreaux on aurait alors 8 chemins ce qui n'est pas vrai car sur un tel carré il y a en fait 2 chemins.*
*(C20)*
*Contre-exemple magistral, verbalisé à merveille ! Je n'en reviens pas ! C'est fort ! XXX me regarde, je suis tout sourire ! Il ne fait aucun commentaire, il sait que je suis content.*

Là également, au-delà du repérage, le commentaire du chercheur illustre un certain intérêt chez lui pour la capacité des élèves à valider, en particulier en usant de contre-exemples pertinents.

*Une représentation inappropriée construite par les élèves en lien avec les arbres de choix (impossibilité des arbres irréguliers) {1}*
*Je demande aux élèves s'ils pensent qu'il est possible de trouver un moyen d'être sûr que le décompte est juste, qu'on ne compte pas les choses en plus ou en moins. Ils disent que non. Je leur suggère l'idée de l'arbre de choix. Bo... réagit et dit qu'on ne peut pas utiliser un arbre, qu'avec un arbre on doit avoir toujours le même nombre de ramifications, ce qui n'est pas possible sur le quadrillage qui est là, parce qu'alors on aurait un arbre avec des ramifications différentes. XXX me regarde et je comprends qu'il va revenir là-dessus lorsque nous passerons à l'étape suivante dans la résolution du problème 5.*
*(C22)*

*Bo… est en train de dire qu'un arbre doit être régulier, le cas d'un arbre irrégulier lui posant problème. C'est ce qu'il a compris des arbres.*

Il a été donc donné au chercheur (et à l'enseignant) de constater une représentation inadéquate en lien avec les arbres, soit l'impossibilité des arbres de choix irréguliers, tous les arbres devant être réguliers. Il y a là un apprentissage important en jeu comme le soulignait l'enseignant lors de la rencontre portant sur l'élaboration du premier scénario.

4.4.2.3 Des manières de faire pour organiser les échanges entre élèves lors des plénières ainsi que les principes les guidant explicités (11, 15)

Nous avons regroupé ici quelques manières de faire qui reflètent en partie l'animation effective par l'enseignant et le chercheur et, en arrière-plan, les principes qui les guidaient.

*Miser sur les productions et les interventions des élèves {1}*
*À surveiller pour les autres plénières. Une intervention intéressante d'un élève en lien avec le problème 4 qui a été moins bien réussi dans ce groupe. L'idée d'utiliser une exponentiation pour résoudre ce problème.*
*(C6)*
*Il aurait été intéressant de le faire parler davantage pour voir s'il pouvait arriver à la solution de la deuxième question du problème 4 par multiplication non pas par le même nombre 10, mais en faisant 10×9×8, compte tenu des possibilités décroissantes lorsque les chiffres ne se répètent pas dans le code. L'idée du principe multiplicatif est là, dans les mots des élèves.*

Dans ce que dit le chercheur, on voit le souci de miser sur les interventions des élèves pour l'animation des plénières à venir, ici le retour final sur le problème 4. Le chercheur regrette ici qu'ils n'aient pu relancer cet élève dont l'intervention contient l'idée du principe multiplicatif et voir s'il aurait pu arriver à la réponse.

*Pousser plus loin la demande faite aux élèves {1}*
*Prenant appui sur les réponses aux problèmes précédents, le retour sur le problème 4 a été très rapide : d'abord une exponentiation (10 à la 3), puis le produit 10 ×9×8 = 720. XXX est revenu sur la réponse qui était la plus proche de 720, le nombre 730 trouvé par une équipe. Les élèves ont justifié la différence par le fait qu'il y a des cas qui n'ont pas été enlevés, 10 cas de répétitions de chiffres dans un code.*

*(D32)*
*Dans ma pratique, je mise énormément sur la participation des élèves. Je constate que je peux les pousser encore plus loin à leur demande de validation en leur demandant : «qu'en pensez-vous?».*

Le chercheur et l'enseignant ont donc misé sur les productions des élèves dont la participation, comme l'indique l'enseignant dans son commentaire, est sollicitée, par exemple en les relançant, ce que faisait beaucoup le chercheur comme le montrera l'analyse du retour sur le scénario effectué en tête-à-tête.

*<u>Utiliser les productions des élèves : un élément significatif pour les élèves</u> {1}*
*Pour terminer avec le problème 5, XXX dit aux élèves qu'au lieu de leur donner nos réponses, nous allons leur montrer des réponses d'élèves du groupe 102. XXX montre une première solution du groupe 102, une méthode énumérative avec des lignes pour coder les différents chemins. Il fait le lien avec la dernière solution du groupe 103. Une bonne façon de valoriser les solutions des élèves. Il montre une autre démarche dans laquelle les élèves ont procédé par un décompte du nombre de chemins sur une partie du quadrillage, ce qui donne 10, et constate qu'on arrive au même décompte sur l'autre partie, ce qui donne au total 20 qui est la bonne réponse. Les élèves dans ce groupe sont d'accord que c'est la bonne réponse. Ensuite, XXX montre la démarche avec l'arbre. Cet arbre, comme j'en ai parlé précédemment, est irrégulier et la représentation est tellement claire que Bo se rend compte qu'il est bien possible d'avoir un tel arbre.*
*(D35)*
*Une réponse venant d'un élève est autant significative pour un apprenant que celle de l'enseignant. Je dirais peut-être plus...*

Là, nous avons une mise sur les productions des élèves, les solutions d'un autre groupe servant ici à donner la réponse au problème du quadrillage que personne n'a trouvé dans ce groupe. Le commentaire de l'enseignant indique le principe en arrière d'une telle approche, le fait que pour lui une réponse venant d'un élève est même plus significative que la réponse de l'enseignant.

*<u>Prendre les solutions de l'équipe pour relier les solutions des uns et des autres (pour l'enseignant)</u> {2}*
*XXX est allé en avant pour illustrer ce que je disais. Il a pris d'autres acétates, a dit qu'il pouvait faire comme un mélange des démarches et avec les idées de l'équipe de la formule (le codage ABC, le fait qu'il faille pour chaque chemin se déplacer 3 fois à gauche et 3 fois à droite), la symbolisation VBR avec le problème des feux,*

*donc qu'en combinant les solutions il arrivait à un codage avec des D et des H : DHDHDH.*
*(D30)*
*J'aimais bien l'idée de mélanger les solutions de chaque équipe. Le travail d'équipe peut être ainsi vu comme un «travail de classe».*

Cette approche consistant à mélanger les solutions a l'avantage de relier les solutions des uns aux autres. En plus, comme le dit l'enseignant, elle permet de faire passer le travail d'équipe pour un travail de classe.

*Un retour sur les solutions (bonnes et mauvaises) guidé par la validation {2}*
*(C2a)*
*Je m'arrête un instant ici sur la négociation en cours entre chercheur et enseignant sur le sens de la validation dans le processus de modélisation. XXX semble privilégier une approche qui prend appui sur les bonnes solutions ((D6) C'est vrai...), alors que j'embrasse les bonnes comme les mauvaises, l'important étant la justification avancée pour appuyer les modèles ou solution mises en avant et l'horizon étant l'évolution des élèves, le retour sur leurs démarches. Ici, je pense aux cycles de modélisation et à la façon la plus avantageuse de revisiter les modèles ou solutions, de les raffiner ou de les améliorer (en termes d'économie, d'efficacité, de simplicité, de beauté !)*
*(D7)*
*J'en suis maintenant convaincu!*

Une tension semble avoir existé autour d'un retour s'appuyant sur «les bonnes solutions» privilégié par l'enseignant par opposition au chercheur qui trouve plus riche de laisser l'approche ouverte, de mettre sur un même pied bonnes et mauvaises réponses. L'enseignant à travers son commentaire affirme sur ce point avoir bougé, être convaincu de la plus grande richesse de la perspective du chercheur, mais reste prudent...

*Ne pas blesser dans le retour les élèves {2}*
*(C2b)*
*La prudence de XXX tient selon lui à la perception négative des équipes aux «mauvaises réponses». Son souci est donc de ne pas mettre en défaut, de ne pas «blesser» (si je puis dire ainsi) les élèves en les exposant, à travers leurs fausses réponses, à la plus grande compétence des autres ou au sarcasme des autres (d'où son rappel à la règle de respect qui pour lui est essentiel, comme il l'a dit dès le début de l'année).Intéressant ici cette tension entre le souci de rendre riche le processus de modélisation et celui de ne pas «violenter» certains élèves. Aussi, des éléments importants en lien avec la culture de la modélisation émergeant (faire*

*comprendre aux élèves qu'ils ne sont pas en compétition...à travailler...une ouverture aux remarques des autres qui ne devraient pas être considérées comme des jugements sur leurs compétences, leurs personnes).*
*(D8)*
*Je dirais que le fait de travailler avec des élèves de première secondaire explique l'approche de la bonne solution. En effet, leur image devant les collègues de classe est importante. Ils côtoieront ces élèves durant cinq ans. Certains élèves sont encore très fragiles face à la classe*

L'approche de la «bonne solution» se justifie dans le commentaire de l'enseignant par sa connaissance des élèves de secondaire 1 qui sont encore très fragiles.

*Diminuer la compétition en diminuant les comparaisons entre élèves {1}*
*(D9)*
*Un bon moyen pour diminuer la compétition est de diminuer les comparaisons : donner des tâches différentes aux élèves pour éviter la comparaison. Mais c'est difficile à appliquer avec des groupes nombreux... Et ce n'était pas le but de notre expérimentation.*

En attirant l'attention du chercheur sur une fragilité des élèves de secondaire 1, l'enseignant pose la question de la viabilité en contexte du processus de modélisation avec des élèves avec qui il faut savoir où s'arrêter dans les échanges.

*Éviter jusque dans la terminologie de suggérer des modèles aux élèves {1}*
*(C9b)*
*Pour la suite, j'ai en discuté avec XXX pendant que les élèves cherchaient, nous devons éviter d'employer les mots «modèle», «modélisation», «modéliser», «principe multiplicatif». Bien évidemment, à la fin de la recherche, après l'expérimentation du scénario 2 (à la 4e étape), il serait intéressant de revenir avec les élèves sur le principe de la multiplication qui pourrait être énoncé comme tel et aussi sur le processus de modélisation pour enrichir leurs stratégies et compétence en résolution de problème.*

Dans ce commentaire du chercheur, nous avons l'orientation principale donnée à l'animation, soit ne pas donner des modèles ou des stratégies pouvant influencer les élèves lors de la résolution à venir des problèmes du scénario 2, soit d'éviter jusque dans la terminologie de suggérer aux élèves des modèles qui risquent fortement de biaiser le processus de modélisation.

*<u>Différer la solution pour ne pas influencer (et présenter aux élèves pour cela nos véritables buts explicitement lors de la correction)</u> {1}*
*XXX m'interpelle pour me demander comment faire avec cette question, comment donner la réponse. Je m'avance au tableau et esquisse une solution qui suggère le modèle de mot et lui me rappelle que si je le fais, je risque de biaiser la recherche du problème suivant. Je me ravise ! La remarque de XXX me montre qu'il a intégré une mise en garde que j'ai oubliée un instant ! La vigilance du chercheur à l'épreuve ! Haha !!! Je remercie XXX.*
*Il me propose comme alternative de dire la vérité aux élèves. De le dire que pour la solution, nous préférons attendre plus tard, après qu'ils ont résolu le dernier problème parce que cela risque de les influencer. Il me dit qu'ils acceptent cela les élèves quand on leur dit la vérité. Je dis Ok !*
*(D10)*
*Dire nos véritables buts sera compris et accepté par un groupe d'élèves de première secondaire.*

L'enseignant indique une manière de faire qui montre qu'il a intégré à sa façon le souci de ne pas suggérer de modèles aux élèves, soit de différer la solution d'un problème. Pour cela, il importe pour lui de dire aux élèves qu'en faisant cela il veut éviter de les influencer. Nous avons là le principe sous-jacent à la manière de faire suggérée par l'enseignant. Un principe qui prend appui sur sa connaissance des élèves de secondaire 1.

*<u>Présentation de solutions différentes aux élèves (arbre versus un modèle plus neutre)</u> {1}*
*Pour le problème des voitures, XXX suggère d'utiliser l'arbre de choix pour le corrigé. Je penche pour une autre façon. J'ai le goût de proposer une solution construite sur une représentation plus « neutre » ou « naturelle » que l'arbre. Une sorte de tableau avec une ligne pour désigner les rangs et une autre pour le nombre de possibilités pour chaque rang et illustrer en considérant juste les 2 premières places qu'il y avait 30 cas qu'on peut obtenir en faisant 6×5 et non 6+5. Dans ce que j'avance, XXX est d'accord avec moi, l'important est que les élèves voient bien qu'il s'agit de multiplier les possibilités et non de les additionner. C'est cela le principe multiplicatif. XXX aime bien l'arbre car pour lui l'arbre visualise bien le principe multiplicatif. J'ai ajouté que c'est vrai pour les arbres réguliers. Il a ajouté que nous ne sommes pas en compétition, que nous pourrions bien leur montrer les deux solutions. Ce à quoi j'ai répondu par oui.*
*(D28)*
*J'aime bien l'idée de présenter deux solutions aux élèves. Ils choisissent ce qu'ils aiment.*

Dans cet extrait le chercheur et l'enseignant délibèrent et s'entendent pour présenter deux solutions différentes au problème des voitures, l'enseignant penchant pour l'arbre de choix qui permet de bien visualiser le principe multiplicatif alors que le chercheur préfère une représentation autre que l'arbre. Le chercheur affiche une méfiance par rapport à l'arbre, compte tenu de ce qu'ils ont pu observer avec les arbres, mais aussi pour éviter une association entre n'importe quel arbre et le principe multiplicatif. Le commentaire de l'enseignant indique qu'un des principes qui l'anime dans le retour est de laisser le choix aux élèves.

> *<u>Maintien des préférences/des principes en arrière explicités (bien visualiser, laisser le choix aux élèves, ne pas suggérer de modèles)</u> {2}*
> *Pour le problème 2, je suis allé au tableau. Rappelons que dans ce groupe, aucune équipe n'est arrivée à la bonne réponse pour ce problème de course, les élèves ayant répondu en majorité que 36 était le nombre de possibilités. Avant que j'aille au tableau, un élève sur interpellation de XXX a parlé d'exponentiation (6 à la 6). Je suis parti de cette idée dans laquelle il y a le principe multiplicatif sauf qu'ici les répétions ne sont pas possibles, donc il faut d'abord convaincre les élèves des possibilités décroissantes (6 pour la première place, 5 pour la 2e, etc., 1 pour la 6e place). J'ai utilisé mon script préparé pour la plénière et je n'ai pas eu de peine à montrer que les possibilités diminuaient dès lors qu'on ne perdait pas de vue que pour trouver le nombre de possibilités pour la 2e on ne pouvait prendre 6 car il y a une voiture qui est déjà 1e donc en tout 5 cas pour la 2e place. Ensuite, en énumérant les possibilités uniquement pour les 2 premières places, j'ai pu faire voir que les 30 cas auxquels on arrivait ne pouvaient s'obtenir en faisant la somme des possibilités pour les différents rangs mais plutôt les produits. Cela a convaincu. XXX a dit qu'il y avait une autre solution. Il m'a demandé si je voulais le faire, je lui ai dit qu'il pouvait l'exposer et il leur a parlé de l'arbre de choix de profondeur 6. Nous avons continué là aussi à maintenir nos préférences.*
> *(C17)*
> *Ici, chacun reste attaché à une préférence, XXX parce qu'il a un souci de bien visualiser, illustre le principe multiplicatif avec l'arbre et moi, ma réticence à recourir à l'arbre pour illustrer le principe multiplicatif qui marche en réalité avec des arbres réguliers, mais surtout avec ce qui s'est passé au début avec le groupe 103, je n'ai pas tellement envie qu'il retiennent l'arbre de choix qui risque d'être un modèle passe-partout! Une saine et belle tension là, entre didactique de recherche et didactique praticienne.*
> *(D31)*

*Encore une fois, l'importance pour moi que les élèves voient plusieurs solutions. Je suis convaincu que les élèves apprécient notre démarche.*

Dans ce qui est relaté ci-dessus, le chercheur et l'enseignant s'impliquent lors de la correction du problème 2, le chercheur préférant y aller avec une sorte de tableau et l'enseignant avec un arbre de choix. Et là encore, les deux sont guidés par des principes différents : donner le choix aux élèves pour l'enseignant, alors que pour le chercheur il s'agit surtout de ne pas suggérer de modèles aux élèves

Le tableau suivant résume les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors du retour sur les échanges entre élèves en classe autour de leurs solutions, et ce via leurs commentaires sur le récit de l'expérimentation du scénario 1.

**Tableau 4.13 Ressources mobilisées dans le retour sur les échanges en classe entre élèves autour de leurs solutions (à travers les commentaires sur le récit de l'expérimentation du scénario 1)**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| | **Des buts explicités :**<br>• préciser le but des échanges aux élèves : aller plus loin dans sa solution (éviter certaines dérives : rire d'une équipe)<br>• revoir plusieurs fois au besoin sa solution, l'améliorer (métaphore du compositeur) |
| **Repérage d'habiletés chez certains élèves :**<br>• capacité à user de contre-exemples pertinents | **Repérage d'habiletés chez certains élèves :**<br>• une compétence à bien communiquer leurs démarches |
| **Repérage d'une représentation inadéquate en lien avec les arbres :**<br>• impossibilité (pour un élève) d'avoir des arbres non réguliers | |
| **Des manières de faire pour organiser les échanges et des principes sous-jacents :**<br>• manière de faire : miser sur les productions et les interventions des élèves<br>• manière de faire : relancer les élèves<br>• manière de faire : retour sur les solutions (bonnes et mauvaises) (principe : la | **Des manières de faire pour organiser les échanges et des principes sous-jacents :**<br>• manière de faire : miser sur les productions et les interventions des élèves<br>• manière de faire : pousser plus loin la demande faite aux élèves<br>• manière de faire : utiliser les productions des élèves venant d'un autre groupe (principe : une réponse |

| | |
|---|---|
| validation)<br>• manière de faire : éviter, jusque dans la terminologie, de suggérer des modèles aux élèves (principe : ne pas court-circuiter le processus de modélisation)<br>• manière de faire : présenter une autre solution que l'arbre (principe : ne pas suggérer de modèles aux élèves) | d'élève est même plus significative que celle venant de l'enseignant)<br>• manière de faire : revenir sur les bonnes solutions (principe : ne pas blesser lors du retour)<br>• manière de faire : ne pas faire de comparaison entre les solutions des élèves<br>• manière de faire : différer la solution pour ne pas influencer et présenter explicitement aux élèves le but ainsi poursuivi)<br>• manière de faire : présenter des solutions différentes aux élèves (principe : laisser le choix aux élèves d'une solution qu'ils peuvent comprendre) |

### *4.4.3 Quelle lecture faire de l'analyse du récit commenté de l'expérimentation du scénario 1 ?*

Les éléments qui ressortent de l'analyse du récit commenté de l'expérimentation du scénario 1 (tableaux 4.12 et 4.13) permettent de caractériser, comme précédemment en termes de ressources interprétatives et de ressources d'action, les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors de ce premier retour sur la résolution effective par les élèves et sur les échanges qui ont eu lieu en classe entre élèves autour de leurs solutions.

#### 4.4.3.1 Une analyse en termes de ressources interprétatives

Le repérage opéré par l'enseignant sur la résolution effective des élèves révèle une prise de conscience d'un facteur ayant influencé cette résolution, soit l'impact des arbres de choix, un modèle introduit tôt dans une des classes et très présent dans les premières productions des élèves de cette classe. Ce constat majeur amène l'enseignant à questionner l'enseignement de modèles préalables, surtout lorsque les élèves montrent une difficulté à réinvestir ces modèles dans la résolution de problèmes mettant en jeu ces mêmes modèles.

Lorsque l'enseignant revient sur les échanges qui ont eu lieu en classe entre élèves (avant ou lors des plénières), il leur assigne des buts témoignant à la fois de son attachement au respect entre les élèves et de son adhésion au projet qui l'unit au chercheur, soit le développement de la modélisation. Ainsi, pour l'enseignant il s'agit d'éviter dans les échanges de tomber dans certaines dérives, telle rire de la solution de l'autre équipe, et d'œuvrer à améliorer les solutions des uns et des autres, en revoyant au besoin plusieurs fois sa solution, comme en atteste sa métaphore du compositeur. Les plénières sont ainsi l'occasion pour l'enseignant de repérer une certaine habileté des élèves à bien communiquer leurs démarches, une composante importante pour lui comme le montre l'analyse de l'entrevue (section 4.1.2.2).

Enfin, revenant sur l'animation des échanges, l'enseignant indique quelques principes sous-tendant son approche de l'organisation de ces échanges, soit le fait qu'une réponse venant d'un élève est plus significative que celle venant de l'enseignant, l'importance de présenter explicitement aux élèves les buts poursuivis à travers une certaine approche, et, autre principe, le fait de laisser la latitude aux élèves de choisir entre plusieurs solutions lors de la correction.

Quant au chercheur, le retour sur la résolution effective par les élèves des problèmes du scénario 1 lui permet de repérer, comme l'enseignant, l'impact des arbres de choix comme facteur ayant influencé cette résolution et confirmant là sa prédiction, mais surtout de repérer l'impact du discours de l'enseignant sur l'efficacité, plusieurs élèves ayant été freiné dans la résolution arguant du fait que certaines stratégies n'étaient pas efficaces, telle la stratégie par essais et erreurs qui pour cette raison ne mérite pas d'être explorée même lorsqu'elle était la seule disponible pour les élèves. Ce constat amènera le chercheur à questionner le rapport des élèves comme le rapport de l'enseignant à l'efficacité qui dans sa perspective n'est pas une fin en soi, mais est plus l'aboutissement d'un processus y menant graduellement.

Les plénières sont l'occasion pour le chercheur de repérer une représentation inadéquate en lien avec les arbres de choix introduits dans une des classes, soit l'impossibilité d'avoir des arbres irréguliers et dont le chercheur disait dès le début qu'il s'agit d'un type d'arbre évacué dans l'enseignement, mais aussi de repérer une certaine capacité des élèves à user de contre-exemples pertinents lors des échanges. Enfin, dans l'animation des plénières, le chercheur est resté attaché à son souci de ne pas court-circuiter le processus de modélisation par les élèves, en évitant de leur suggérer des modèles.

Résumons la nature des ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur à travers le récit commenté de l'expérimentation du scénario 1. L'enseignant mobilise des ressources interprétatives de différents ordres : une lecture des productions des élèves en lien avec l'enseignement à travers un modèle introduit ayant influencé la résolution des élèves (l'introduction des arbres de choix), l'explicitation des buts poursuivis à travers les échanges entre élèves (le respect et l'amélioration par les élèves de leurs solutions), des principes qui l'ont guidé dans le retour sur les solutions et qui reflètent un rapport positif aux élèves qu'il valorise, à qui il ne veut pas dissimuler les buts poursuivis avec eux, à qui il veut laisser le choix des solutions lors de la correction. Aussi, la lecture interprétative que porte l'enseignant sur ce qui se passe chez les élèves révèle son intérêt pour les habiletés communicationnelles des élèves, certains ayant pu bien communiquer leurs démarches. Rappelons, comme le montre l'analyse de l'entrevue préalable), un des buts privilégiés par l'enseignant dans son enseignement est d'amener les élèves à bien communiquer.

Quant au chercheur, les ressources interprétatives qu'il mobilise à travers le récit commenté de l'expérimentation 1 renvoient à une analyse de l'enseignement et de facteurs ayant influencé la résolution des élèves (l'introduction des arbres et le discours de l'enseignant sur l'efficacité), au principe qui le guide dans l'animation, soit l'importance de laisser les élèves modéliser, de ne pas leur suggérer des modèles. Aussi, la lecture interprétative que pose le chercheur sur ce qui se passe chez les élèves avec les plénières révèle son intérêt pour les arbres irréguliers avec lesquels un élève a eu de la difficulté ainsi que son intérêt pour les capacités argumentatives des élèves, en l'occurrence l'habileté à user de contre-exemples pertinents. La figure 4.7 résume les ressources interprétatives que nous venons de passer en revue.

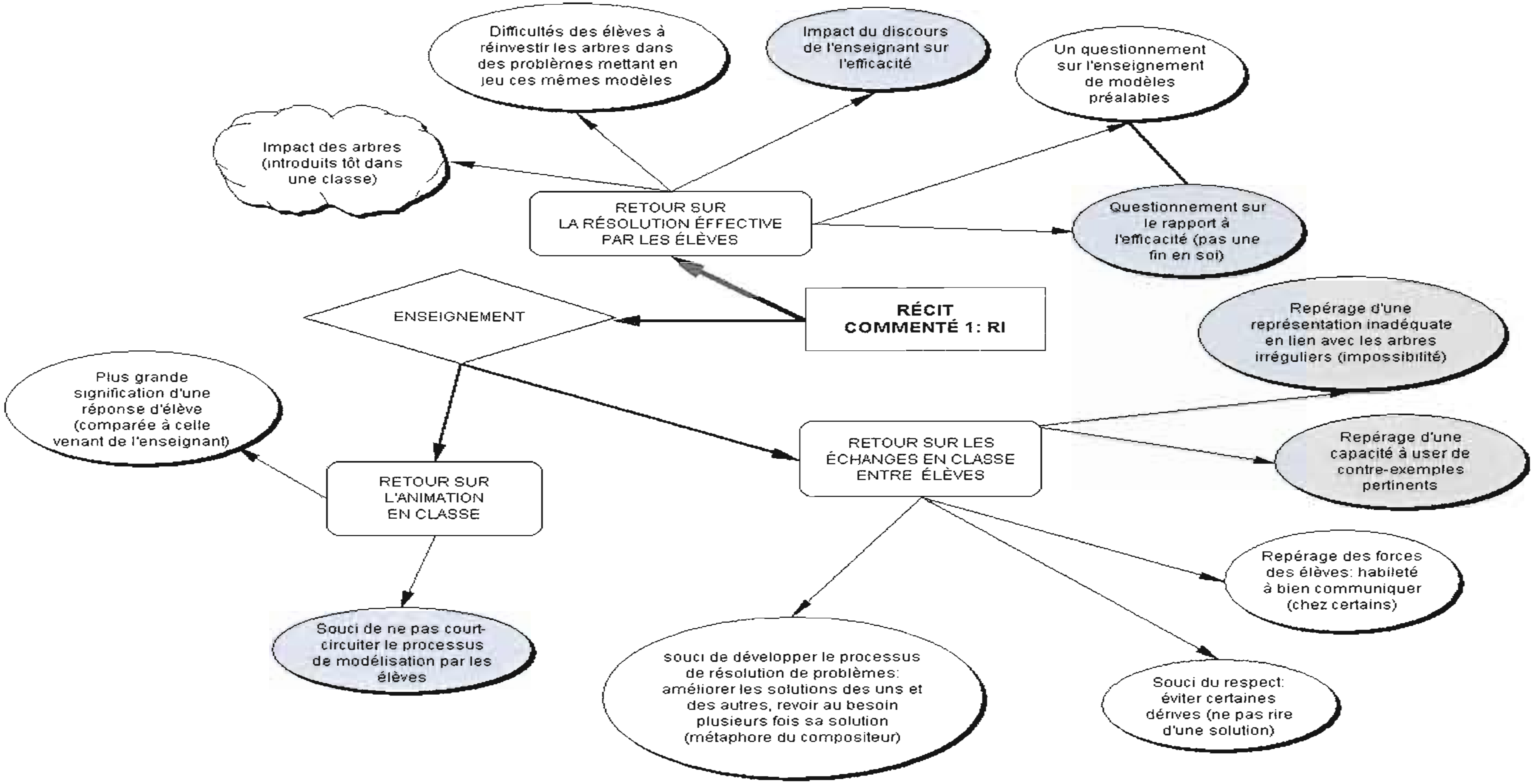



**Figure 4.7 Ressources interprétatives mobilisées lors du retour sur le scénario 1 (1er récit commenté)[114]**

[114] Pour une lecture commode de cette figure et les suivantes, revoir la légende précédant la figure 4.3.

#### 4.4.3.2 Une analyse en termes de ressources d'action

Diverses manières de faire ont permis à l'enseignant et au chercheur de prendre en charge l'animation effective en classe du scénario 1. Ainsi, l'enseignant a misé sur les productions des élèves lors des plénières, utilisant au besoin les productions venant d'une autre classe pour valoriser les réponses des élèves qui à ses yeux sont plus significatives que les siennes même, mais aussi mise t-il sur les interventions des élèves, essayant de pousser plus loin la demande faite aux élèves. Prenant appui sur sa connaissance des élèves de secondaire 1, l'enseignant évite de blesser les élèves, ce qui le dispose à favoriser une approche privilégiant les bonnes solutions, et il tient à ce que les élèves ne se perçoivent pas en compétition d'où son souci de vouloir diminuer les comparaisons entre élèves. Enfin, en lien avec la correction, l'enseignant suggère t-il de différer la solution lorsqu'autrement le risque est grand d'influencer les élèves, et dans cette correction, surtout quand elle est faite à deux (le chercheur et lui), de proposer aux élèves des solutions différentes pour leur donner un éventail de choix.

Quant au chercheur, son approche de l'animation rejoint en partie celle de l'enseignant, en ce sens que les deux ont misé sur les productions et les interventions des élèves, et ont accepté chacun d'y aller si possible avec une solution différente lors de la correction. Cependant, à la différence de l'enseignant, le chercheur est plus attaché à relancer les élèves et ce dans le but de les amener à débattre davantage entre eux. Autre caractéristique propre de l'approche du chercheur, cette disposition pendant le retour à ne pas privilégier les bonnes solutions sur les moins bonnes, et ceci pour permettre aux élèves de comparer leurs modèles, d'améliorer leurs solutions. Afin de rendre le processus de modélisation riche, le chercheur propose d'éviter de suggérer des modèles aux élèves et ce jusque dans la terminologie, par exemple ne pas utiliser les mots «modèle» et «modélisation» qui sont potentiellement inducteurs.

Que dire en résumé des ressources d'action de l'enseignant et du chercheur ? Les ressources d'action de l'enseignant prennent appui sur sa connaissance des élèves et consistent en des manières de faire qui indiquent que dans les faits l'enseignant respecte, est à l'écoute de ses élèves, construit avec eux. Certaines de ces manières de faire renvoient à une perspective nouvelle sur la correction (en regard de son enseignement usuel), une solution pouvant être différée à l'occasion comme le suggérait le chercheur lors de l'élaboration du scénario 1. À cet égard, nous pouvons parler d'une évolution dans la gestion par l'enseignant de la correction. Quant au chercheur, certaines de ses ressources d'action sont les mêmes que celles mobilisées par l'enseignant (miser sur les interventions des élèves, leurs productions), et indiquent en partie une convergence d'action entre les deux dans l'animation. Outre ces manières de faire partagées, les ressources d'action spécifiques propres au chercheur traduisent sa perspective sur la modélisation qui le porte à vouloir par les relances faire jouer aux élèves à fond le jeu des échanges, à valoriser les bonnes mais aussi les «mauvaises» solutions à la différence de l'enseignant, à éviter le recours à des mots inducteurs. À cet égard, les ressources d'action du chercheur esquissent les contours d'une approche du retour en classe sur les solutions des élèves qui représente pour l'enseignant un changement. La figure 4.8 fait la synthèse des ressources d'action mises en évidence de part et d'autre dans ce premier retour via le récit commenté de l'expérimentation du scénario 1.

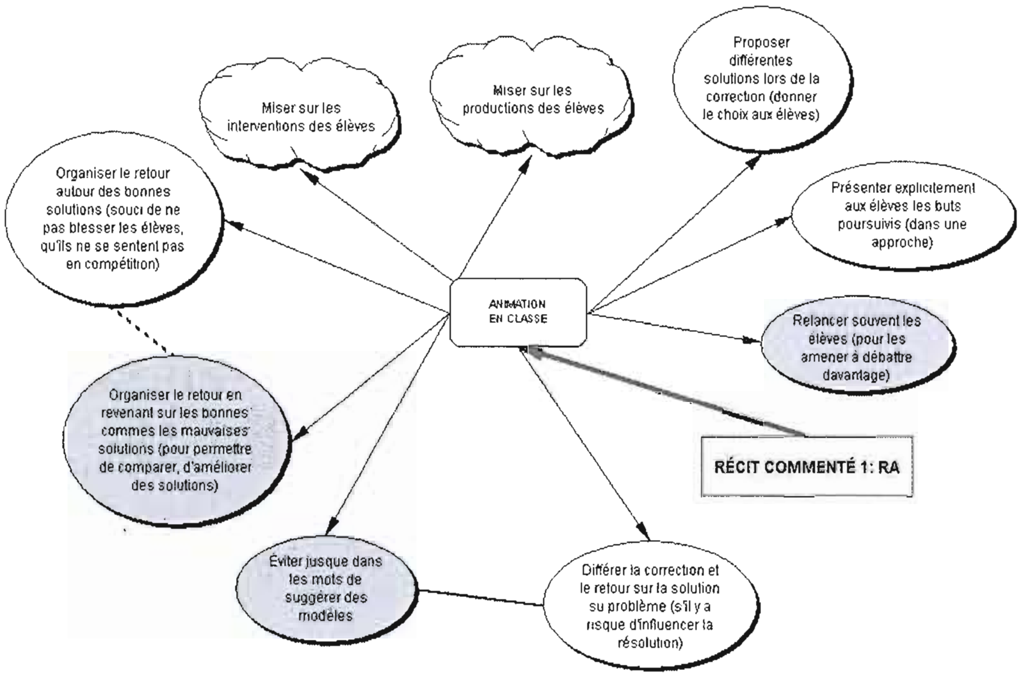



**Figure 4.8 Ressources d'action mobilisées lors du retour sur le scénario 1 ($1^e$ récit commenté)**

4.4.3.3 Une analyse en termes de sensibilité théorique et de sensibilité pratique

C'est dans le récit commenté de l'expérimentation du scénario 1 qu'on voit apparaître une sensibilité de l'enseignant à l'impact des modèles préalables, tels les arbres, et la prise de conscience de l'importance d'éviter de suggérer des modèles aux élèves, par exemple en différant une solution. Aussi, l'enseignant manifeste un souci lors de l'animation d'amener les élèves à voir œuvrer à améliorer les solutions des uns et des autres, en revoyant au besoin plusieurs fois sa solution, comme en atteste sa métaphore du compositeur. Toutes choses qui montrent une sensibilité théorique (en regard de l'objet de cette recherche) chez l'enseignant qui s'approprie l'approche, fait montre d'une grande vigilance face au risque d'induire des modèles lors de la correction comme en atteste un des incidents que nous avons rapporté (section 4.4.2.3) et dans lequel l'enseignant met en garde le chercheur.

Quant au chercheur, certains de ses commentaires montrent une sensibilité à ce que fait l'enseignant, ce dernier comme le souligne le chercheur utilise un langage accessible aux élèves, fait des efforts pour ne pas céder aux requêtes de validation des élèves. À différents endroits le chercheur se met dans la peau de l'enseignant et essaie d'intégrer sa perspective, par exemple sur l'importance du respect, de ne pas blesser les élèves, de faire en sorte que les élèves ne se voient pas en compétition. Le chercheur témoigne et développe au contact de l'enseignant une sensibilité pratique qui l'amène à être à l'écoute des élèves et de l'enseignant, à prendre la mesure de la viabilité en contexte d'une culture de modélisation qui nécessite de concilier des perspectives différentes sur la validation, à trouver le juste milieu entre le souci de rendre riche le processus de modélisation et celui de ne pas «violenter» les élèves.

## 4.5 Analyse du récit commenté de l'expérimentation par le chercheur et l'enseignant du scénario 2

Comme précédemment avec l'analyse du récit commenté de l'expérimentation du scénario 1, dans ce qui suit nous analysons ce deuxième récit sous l'angle des ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors du premier retour conjoint sur le scénario 2, par commentaires interposés, sur la résolution effective par les élèves et sur les échanges qui ont eu lieu en classe autour des solutions des élèves.

### *4.5.1 Autour de la résolution effective des problèmes par les élèves*

Trois catégories rendent compte de l'analyse de l'enseignant et du chercheur sur la résolution effective des problèmes par les élèves à travers un repérage des difficultés vécues par les élèves, de différentes stratégies de résolution, d'une certaine évolution identifiée en comparaison du premier scénario et des aménagements réussis en lien avec les problèmes du scénario 2 (un retour dans ce cas sur l'enseignement aménagé).

4.5.1.1 Repérage de difficultés vécues par les élèves (3, 4)

*Une difficulté dans la prise en compte de la position des blocs dans une tour de hauteur donnée* {1}
*(C7)*
*Assurément, le décompte des tours de hauteur 6 blocs ou plus est plus fastidieux. D'autre part, certains ont du mal à voir l'importance de l'ordre des blocs dans une tour, de sorte que certains cas leur paraissent similaires.*

Le chercheur note là une des difficultés vécue par les élèves lors de la résolution du problème des tours, soit la prise en compte de la disposition des blocs avec la contrainte qui est là (des blocs d'une certaine couleur ne doivent pas être mis côte à côte).

*Une difficulté à se détacher des blocs (de la manipulation empirique)* {2}
*(C8)*
*Bien plus tard, il me confiera que les blocs «polluent» un peu. En effet, les élèves se sont bien amusés avec les blocs et certains les jetaient par terre ou même à d'autres. Il faut dire aussi, que l'objectif que nous poursuivions était de permettre aux élèves de se faire une tête, d'avoir une idée des tours à construire par manipulations. Cependant, certains élèves sont restés un moment attachés aux blocs qu'ils avaient, et une élève m'a demandé comment construire des tours de hauteurs 5 blocs rouges si on n'a que 4 blocs rouges. J'ai dû répondre à celle-là et à d'autres, qu'il faut s'imaginer en disposer suffisamment et que l'important c'est de respecter la condition (en choisissant de fonctionner avec 2 rouges qui ne peuvent être côte à côte ou 2 blancs qui ne peuvent se coller) et de faire attention à la hauteur des tours à construire.*
*(D8)*
*Que dire de plus?*

Le chercheur et l'enseignant ont pu également noter une difficulté anticipée chez les élèves, certains ayant eu du mal à se détacher des blocs, à aller plus loin que la construction empirique.

*Une difficulté à entrer dans le problème de «Boris» jugé par certains comme «irréaliste»* {1}
*Les élèves se mettent à chercher le problème 3. Des commentaires ici et là sur le problème. Un élève interrompt notre aparté en disant tout haut : «c'est irréaliste, personne ne s'amuse à monter un escalier» ! Je vais bien en rire...peut-être qu'il a bien raison !*
*(D18)*

*Cette remarque est également ressortie dans l'autre classe. Je crois qu'il vaut mieux se montrer complice avec les élèves et leur dire qu'effectivement ce jeu est bizarre. Toutefois, il faut verbaliser que c'est le processus de résolution de problème qui nous intéresse.*

Une autre difficulté que certains élèves ont eu a été d'entrer dans le dernier problème du scénario qui simulait un jeu dans lequel Boris s'amuse à monter de différentes façons les marches de l'escalier chez lui. Cette situation sera jugée «bizarre» par quelques élèves. Pour l'enseignant, quand cela arrive, il faut être complice des élèves et garder le cap sur la résolution du problème. Il s'agit là, pour l'enseignant, d'un principe important, montrer une complicité avec les élèves face à leur réaction et réaffirmer l'intention en arrière.

4.5.1.2 Repérage de différentes stratégies de résolution utilisées par les élèves (5, 7)

Différentes stratégies sont repérées par l'enseignant et le chercheur. Ainsi nous avons :

*<u>Un recours à la formule des combinaisons questionné par le chercheur (un questionnement confirmé par l'enseignant)</u> {2}*
*La fille (Ki) a écrit la formule des combinaisons qu'elle veut utiliser pour répondre à la question a. Ma ne suit pas, il joue et moi, je n'aime pas cette formule qu'elle va utiliser. J'interpelle Ma pour lui demander ce qu'il comprend par «r!» au dénominateur de la formule de Ki. Il me répond que c'est un point d'exclamation avec un r. la fille me regarde, en disant non, elle sait que Ma ne sait pas ce qu'elle fait. Je lui demande d'où est-ce qu'elle sort sa formule. Elle répond que c'est son père qui la lui a apprise. Je lui dis que je voudrai quelque chose qui vient d'elle, d'elle et Ma, que tous les 2 peuvent comprendre et expliquer aux autres. Elle s'exécute et efface sa formule.*
*(C20)*
*Enseigner à une petite fille de secondaire 1, la formule des combinaisons ! Il faut le faire ! Je n'aime plus ça ! Je sais de quoi je parle. (...) on joue ainsi à la poupée «savante»...rires...mais, qu'apprend-t-on vraiment de la sorte ? Et puis, il faut s'interroger sur les mobiles*
*(D19)*
*Bonne intervention : pourquoi écrire quelque chose qu'on ne comprend pas...*

Il s'agit là d'une des surprises de cette recherche, le chercheur surtout étant à mille lieux de s'imaginer qu'un élève de secondaire pouvait tenter d'appliquer la formule des combinaisons qu'elle savait bien appliquer au passage.

> *<u>Un dégagement d'une régularité et établissement explicite de la suite de Fibonacci (qui impressionne le chercheur, mais semble plausible à l'enseignant vu sa connaissance des élèves)</u> {1}*
> *Un groupe sort du lot, ils traitent la question c, trouvent le nombre de tours de hauteur 2,3, 4, 5, 6, 7, font le lien entre les différents termes et affirment que nous avons là les termes de la suite de Fibonacci ! Je n'en reviens pas mes yeux ! Je crie «tabarnake» ! XXX me demande comment j'ai dit ça, puis éclate de rire. Oui, j'ai bien sacré ! Il ajoute que le petit Ga est bon ! Que pendant que son coéquipier joue, lui il est dans son monde ! Puis, il renchérit en disant que c'est mission accomplie ! Je suis très heureux, j'ajoute que je n'aurai pas pu faire ça quand j'étais en secondaire 1. Nous nous amusons bien, moi et XXX, heureux de cette apothéose. Il me rappelle le problème du restaurateur, que nous avions décidé de donner aux élèves comme problème à faire à la maison. Ga est pour lui le genre d'élèves capables de traiter ce problème à la maison. Nous le proposerons demain aux élèves et comme convenu, ils auront à chercher ce problème chez eux et lors de la dernière plénière, celle qui clôture le scénario 2, nous y reviendrons.*
> *(D10)*
> *Moment d'anthologie de notre collaboration! Haha!*

Cette solution est l'une des plus élaborées que les élèves élaboreront, là également à la surprise du chercheur qui ne s'attendait pas à ce les élèves dégagent la régularité et la désignent comme la suite de Fibonacci.

> *<u>Des liens faits par les élèves avec la résolution antérieure de problèmes du scénario 1 (tentative d'application du principe multiplicatif, recours à des modèles semblables)</u> {2}*
> *Le groupe de Boris m'appellera pour me faire remarquer d'abord que c'est comme avec le problème des voitures et qu'ils arrivent pour la question a de ce problème à la réponse 9×8×7x...×2×1. Je leur demande de m'expliquer. Ils m'expliqueront ce que presque toutes les équipes verbaliseront très bien (sauf une ou 2 équipes), que si une personne donnée sert 9 poignées de mains, une autre personne parmi les restantes serrera 8 poignées, ces 2 étant maintenant exclus, une troisième parmi les 8 restantes donnera 7 poignées de mains, et ainsi de suite. Qu'ensuite, il fallait multiplier les différents cas (en quelque sorte une application du principe multiplicatif). J'ajouterai pourquoi multiplier, pourquoi pas sommer ou diviser ? Ils se raviseront et reprendront leur recherche.*

*(D15)*
*Je trouve intéressante cette tentative de faire des liens avec les activités précédentes. Non pas que l'intervention de Bo soit riche mathématiquement, mais plutôt au niveau des stratégies de résolution du problème; en effet, plusieurs élèves feront des dessins semblables au problème des portes de la première partie de l'expérimentation.*

Certains élèves se souviennent encore du principe multiplicatif sous-jacent au deuxième problème du scénario et ont voulu l'appliquer. L'enseignant abonde dans le même sens que le chercheur en affirmant avoir repéré des liens que les élèves établissaient entre la résolution du problème des poignées de main de ce scénario et le problème des portes du scénario 1. Les extraits suivants confirment les propos de l'enseignant

*D'autres verront dans cette représentation, un lien avec le problème des portes), une ligne symbolisant une poignée de mains. Les élèves lui opposeront que cette méthode n'est pas rapide, mais qu'elle est bonne, ou qu'elle est mélangeant car le nombre de lignes est grand quand il ya beaucoup de personnes.*
*(D24)*
*Comme je le disais plus haut, j'aime voir les élèves faire des liens avec ce qu'ils ont fait lors de la première expérimentation.*

Un aspect intéressant pour l'enseignant est le fait pour les élèves de faire des liens avec des activités précédentes.

*Un lien avec le problème des tours et la suite de Fibonacci dans le manuel par un élève (un lien valorisé par l'enseignant) {1}*
*Plus tard, Pe regardera ce qui se passe avec un escalier à 4 marches, 5 marches, 6 marches et reconnaîtra les termes de la suite de Fibonacci. Il me le dira, que c'est comme avec le problème 1, c'est une suite de Fibonacci. Je leur réponds qu'il faut écrire cela si c'est ce qu'ils obtiennent. En repassant là, je vois Vi avec le manuel Panoramath en train de lire sur la suite de Fibonacci et il me lancera, c'est les termes de la suite de Fibonacci.*
*(D20)*
*Je suis content qu'il ait ouvert son manuel mon Vi!*

Certains élèves ont pu faire le lien entre le dernier problème du scénario 2 et le premier, la suite de Fibonacci permettant de dénombrer dans ces deux cas le nombre de tours distinctes d'une hauteur donnée ou le nombre de façons différentes de monter les marches pour un escalier quelconque.

> <u>*Une expérience marquante pour les élèves (des liens faits six mois après, ce qui est impressionnant pour l'enseignant)*</u> *{1} (D22)*
> *Ce qui est important de noter ici c'est le rappel dans le temps. En fin d'année, je demande aux élèves ce qu'ils ont préféré de leur année et leurs souvenirs dépassent rarement le dernier mois. Que les élèves aient pu nous verbaliser des faits d'il y a six mois est incroyable!*

Au vu des liens que font les élèves avec les problèmes du scénario 1, six mois après, l'enseignant estime que le travail fait avec les élèves aura été une expérience marquante pour eux.

4.5.1.3 Repérage d'une certaine évolution des élèves dans la résolution de problèmes (dans leur fonctionnement) (4, 4)

Lors de l'expérimentation de ce deuxième scénario, l'enseignant et le chercheur ont pu constater une évolution chez les élèves en lien avec la résolution de problèmes, une évolution qui prend appui sur le travail fait en classe par l'enseignant et sur le mode de fonctionnement lors de l'expérimentation du premier scénario.

> <u>*Une routine de fonctionnement intégrée (intégration du mode de fonctionnement de la première expérimentation par les élèves)*</u> *{1}*
> *Nous convenons de rappeler très brièvement aux élèves comment ils devront travailler pendant la période de recherche et durant la plénière à venir. XXX fait les rappels et distribue les cahiers blancs. Ensuite, il demande à un élève de distribuer les blocs.*
> *(D4)*
> *C'est ici que nous avons pu constater à quel point les réflexes de la première expérimentation étaient encore présents. Les élèves ont su comment nous allions fonctionner.*

De l'avis de l'enseignant la routine de fonctionnement que nous avons installée lors de la première expérimentation a laissé chez les élèves des réflexes qui ont survécu à la pause que nous nous étions imposée.

*Moins de requêtes de validation de la part des élèves {1}*
*Globalement XXX dit être satisfait de cette première manche. Il n'y a pas eu beaucoup de requêtes de validation. C'était une de ses attentes.*
*(D7)*
*En effet, j'ai moins senti le besoin des élèves de faire valider leur solution auprès d'YYY et moi que durant la première expérimentation.*

D'une certaine façon il s'agit là aussi d'une certaine intégration d'une routine installée lors de la première expérimentation, le chercheur et l'enseignant s'étant appliqué à rejeter les requêtes de validation des élèves. Il s'agit là d'un aspect important pour l'enseignant qui avait une forte attente à cet égard.

*Une grande persévérance des élèves lors de la résolution d'un problème à mettre en lien avec l'expérimentation mais aussi le fonctionnement régulier en classe {1}*
*Premier commentaire avant que nous ne débutions. XXX juge que ses élèves ont été très persévérants, car travailler sans relâche sur un seul et même problème toute une période, ce n'est pas rien et dans une certaine mesure ils ont fait du chemin depuis le début de l'année.*
*(D9)*
*Bien sûr, cette persévérance n'est pas étrangère aux acquis de notre première expérimentation. Il faudrait toutefois rajouter que les élèves ont eu à faire des situations d'apprentissage et d'évaluation (SAE) depuis le début de l'année. Ils commencent à être habitués de travailler un seul problème*

Une persévérance que l'enseignant inscrit dans la continuité du travail fait en classe et des acquis de la première expérimentation.

*Une meilleure compréhension des attentes vis-à-vis la généralisation {1}*
*(D16)*
*J'ai senti que les élèves comprenaient mieux nos attentes de généralisations envers eux. Ils trouvaient cette généralisation difficile, mais au moins, ils tentaient...*

Là également, une intégration d'une attente majeure du travail initié avec les élèves et visant le développement de la modélisation, soit la généralisation, passer ultimement de modèles spontanés à des modèles plus généraux.

4.5.1.4 Des aménagements aux problèmes réussis sur lesquels on revient (2, 3)

Le retour sur la résolution effective par les élèves des problèmes est aussi l'occasion pour le chercheur et l'enseignant de constater que certains aménagements apportés à ces problèmes à la lumière des enseignements tirés de l'expérimentation du premier scénario ont produit les résultats escomptés.

> *Une solution adéquate à la problématique des questions aux problèmes laissées sans réponses pour l'enseignant (format a), b), c), ...)* *{1}*
> *(D6)*
> *Notre solution à la problématique des questions laissées sans réponses lors de notre première expérience semble bonne. En effet, le fait de mettre des a) b) et c) devant les questions facilite nos attentes vis-à-vis les élèves. Je rappelle que les questions de généralisation étaient souvent laissées sans réponse lors de notre première expérience.*

Le format choisi pour présenter les questions a aidé les élèves à mieux comprendre les attentes qu'on avait, surtout en lien avec la généralisation.

> *Pertinence de la modification de l'illustration suggestive du problème des poignées de mains pour le chercheur et l'enseignant (une interprétation confirmée)* *{2}*
> *(C16b)*
> *Ensuite, je suis heureux du choix que nous avons fait d'enlever l'illustration de départ emprunté au manuel des élèves et qui induisait une certaine représentation. Nous voulions éviter de trop suggérer aux élèves une représentation des personnes par des «points» et des poignées de mains par des «segments». Les élèves n'auront eu aucunement recours à cette représentation. Définitivement, il s'agit là d'un critère important, dans la perspective qui nous poursuivons, de laisser d'emblée les élèves symboliser librement, modéliser spontanément. Attention aux modèles induits !*
> *(D17)*
> *En effet!*

Le chercheur et l'enseignant sont donc contents de constater qu'ils ont raison d'apercevoir à travers la première illustration du problème des poignées de mains une forte suggestion d'un modèle, d'autant plus que la représentation qu'ils ne voulaient pas suggérer aux élèves n'est pas apparue.

Le tableau suivant résume les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors du retour sur la résolution effective des problèmes du scénario 2, et ce à travers leurs commentaires sur le récit de l'expérimentation de ce scénario.

**Tableau 4.14 Ressources mobilisées dans le retour sur la résolution effective par les élèves (à travers les commentaires sur le récit de l'expérimentation du scénario 2)**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Repérage de difficultés chez les élèves :**<br>• difficulté à se détacher de la manipulation empirique<br>• difficulté à entrer dans un des problèmes (peu vraisemblable pour certains)<br>• non prise en compte de la position des blocs dans une tour de hauteur donnée | **Repérage de difficultés chez les élèves :**<br>• difficulté à se détacher de la manipulation empirique<br>• difficulté à entrer dans un des problèmes (peu vraisemblable pour certains) |
| **Repérage de stratégies de résolution :**<br>• recours à la formule des combinaisons (une surprise pour le chercheur)<br>• dégagement d'une régularité et établissement explicite de la suite de Fibonacci (surprise pour le chercheur)<br>• liens avec la résolution de problèmes du scénario 1 (tentative d'application du principe multiplicatif)<br>• lien entre le problème des tours et le problème de «Boris» résolu en dernier | **Repérage de stratégies de résolution :**<br>• dégagement d'une régularité et établissement explicite de la suite de Fibonacci (plausible pour l'enseignant vu sa connaissance des élèves)<br>• liens avec la résolution de problèmes du scénario 1 (recours à des modèles semblables ; liens valorisés, une surprise pour l'enseignant)<br>• lien entre le problème des tours et le problème de «Boris» résolu en dernier<br><br>**Repérage d'une évolution des élèves dans leur fonctionnement lors de la résolution de problèmes :**<br>• une routine de fonctionnement intégrée (mode de fonctionnement de la 1ère expérimentation)<br>• moins de requêtes de validation (une attente satisfaite)<br>• une grande persévérance lors de la résolution (un acquis de la 1ère expérimentation et du travail fait en classe avec les problèmes écrits)<br>• une meilleure compréhension des attentes vis-à-vis la généralisation |
| **Repérage d'aménagements ayant produit les résultats escomptés :**<br>• modification de l'illustration suggestive du problème des poignées de mains (une représentation contrée) | **Repérage d'aménagements ayant produit les résultats escomptés :**<br>• modification de l'illustration suggestive du problème des poignées de mains (une représentation contrée)<br>• le format a), b), c)... : une solution adéquate à la problématique des questions aux problèmes laissées sans réponses par les élèves |

### *4.5.2 Retour sur les échanges en classe entre élèves autour de leurs solutions (dans les plénières) (2, 2)*

L'analyse du retour effectué par le chercheur et l'enseignant sur les débats en classe entre les élèves révèle une certaine qualité des échanges (usage d'un contre-exemple) mais également des réactions différentes aux solutions très élaborées.

> *Travailler le contre-exemple lors des échanges (un élément valorisé par l'enseignant et au programme de secondaire 1) {1}*
> *Pour la question b, Co expliquera qu'il faut faire par exemple avec 20 personnes, 20 fois 19 puis divisé par 2. Bo demandera pourquoi avec 10 personnes c'est 45 et avec 20 personnes c'est 190. XXX lancera la discussion là-dessus et 2 arguments contradictoires seront avancés : 1) le calcul n'est pas bon car comme dans le cas de 10 personnes, il faut tenir compte du fait que le nombre de poignées de mains doit être décroissant (Bo); 2) avec 20 personnes on devrait avoir le double du nombre de poignées de mains obtenus avec 10 personnes, soit 90 et non 190 (Phil). Pour trancher, XXX leur donne le cas de 5 personnes, qu'obtient-on ? 22.5 poignées ? 15 diront certains, 22.5 ça ne se peut pas dira Co. On laissera ce débat en suspens et on passera à une autre équipe*
> *(D23)*
> *L'enseignement du contre-exemple est au programme de première secondaire. Je suis content de voir que les élèves aient compris le contre-exemple.*

Les élèves s'essaient aux contre-exemples que valorise l'enseignant, mais aussi le chercheur comme nous l'avions vu précédemment, les élèves ayant là un bon moyen de réfuter certaines solutions.

> *Une dynamique d'échange riche et spontanée, valorisée (interprétation confirmée par l'enseignant) {1}*
> *Globalement me confiera XXX, comparativement à la plénière avec le groupe 102, les stratégies sont certes moins diverses avec ce groupe, mais la dynamique des échanges est plus riche. En effet, nous avons plus réussi à faire interagir les élèves ici qu'avec la 102. Cette classe semble plus spontanée. Nous aurons même droit à des applaudissements, lorsque Ca (une des élèves les plus brillants de la classe de l'avis de XXX), après s'être corrigée d'entrée de jeu en disant qu'elles (avec sa coéquipière) n'avaient pas bien répondu à la question b (si je ne m'abuse, elles n'avaient pas trouvé les 21 tours), répondra à la question c, en mettant en évidence les termes de la suite obtenue en faisant varier les hauteurs des tours, puis la régularité qui permet de prolonger la suite en faisant chaque fois la somme des 2*

*termes précédents. Elle l'écrira clairement au tableau. Plusieurs élèves applaudiront, certains y allant avec des Bravos.*
*(D14)*
*En effet, j'aime cette analyse. Le groupe BB a des solutions moins riches mais des échanges plus spontanés.*

Nous sommes ici sur le climat régnant dans un groupe lors d'une plénière où les échanges sont spontanés, et ne se gênent pas pour souligner par des applaudissements une bonne solution.

**Tableau 4.15 Ressources mobilisées dans le retour sur les échanges en classe entre élèves autour de leurs solutions (à travers les commentaires sur le récit de l'expérimentation du scénario 2)**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Repérage d'une qualité dans les échanges :**<br>• capacité d'user et de comprendre les contre-exemples<br>• échanges spontanés et riches | **Repérage d'une qualité dans les échanges :**<br>• capacité à comprendre les contre-exemples (élément valorisé par l'enseignant et au programme)<br>• échanges spontanés et riches |

### *4.5.3 Quelle lecture faire de l'analyse du récit commenté de l'expérimentation du scénario 2 ?*

Les éléments qui ressortent de l'analyse du récit commenté de l'expérimentation du scénario 2 (tableaux 4.14 et 4.15) permettent de caractériser en termes de ressources interprétatives[115] les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors du retour, avant le bilan final, sur la résolution effective par les élèves et les échanges entre élèves en classe autour de leurs solutions.

#### 4.5.3.1 Une analyse en termes de ressources interprétatives

L'enseignant repère, en lien avec la résolution effective par les élèves des problèmes du scénario 2, différentes difficultés et stratégies de résolution. Ce repérage s'appuie sur sa

[115] On remarquera qu'il n'y a pas ici de ressources d'action, ce qui est normal, le récit commenté mobilisant plus des ressources interprétatives.

connaissance des élèves, certaines des stratégies ou difficultés lui paraissant plausibles vu les forces et faiblesses de certains élèves. Aussi, ce repérage, à la surprise de l'enseignant, lui permet de constater que certains élèves ont pu établir différents liens lors de la résolution, des liens entre le premier problème et le dernier problème du scénario 2, mais aussi des liens lointains avec des problèmes du scénario 1 résolus il y a six mois. À travers son repérage l'enseignant explicite un but qu'il valorise dans la résolution de problèmes, soit pour les élèves de faire des liens.

Évaluant le fonctionnement des élèves lors de la résolution des problèmes du scénario 2, l'enseignant repère une évolution en regard de certains critères, tels l'intégration d'un mode de fonctionnement installé depuis la première expérimentation, une meilleure compréhension de certaines attentes vis-vis la validation qu'ils doivent assumer ou vis-à-vis la généralisation qui est une finalité poursuivie à travers la plupart des problèmes qui leur ont été proposés. En somme, ce repérage révèle l'importance pour l'enseignant de certaines routines permettant de préciser aux élèves certaines attentes reliées au processus de modélisation qu'on cherche à développer.

À la lumière de la résolution effective par les élèves, l'enseignant constate que certains aménagements ont produit les résultats escomptés, par exemple avoir évité de suggérer une certaine représentation avec le problème des poignées de mains ou avoir pu forcer plusieurs élèves à répondre à toutes les questions avec le format des questions qui était là. Enfin, l'enseignant repère avec le chercheur une certaine qualité dans les échanges entre élèves, des échanges spontanés et riches dans un des groupes, certains élèves montrant qu'ils comprennent les contre-exemples que valorise l'enseignant et qui sont au programme de secondaire 1.

Quant au chercheur, en lien avec la résolution effective par les élèves, il repère différentes difficultés (dont celles identifiées par l'enseignant) et stratégies de résolution. Les stratégies utilisées par les élèves le surprennent à bien égard, qu'il s'agisse du recours à la formule de dénombrement des combinaisons en secondaire 1, de l'établissement explicite de la suite de Fibonacci lors de la résolution du problème des tours, du lien établi par certains élèves entre le problème des tours et le problème de «Boris» (le dernier problème du scénario 2). Pour ce qui est du lien que certains élèves ont fait entre le problème des poignées de mains et le problème des portes du scénario 1, le chercheur repère une tentative certes inappropriée d'appliquer le principe multiplicatif. Enfin, comme l'enseignant, le chercheur note que le choix fait d'enlever l'illustration suggestive du problème des poignées de mains aura été judicieux, confirmant là l'analyse ayant sous-tendue ce choix.

Que retenir des lectures interprétatives de l'enseignant et du chercheur que dévoilent le récit commenté de l'expérimentation 2 ? Les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant révèlent des aspects valorisés par ce dernier dans son enseignement, tels l'établissement par les élèves de liens lors de la résolution de problèmes, leur recours à des contre-exemples pertinents, l'importance de routines d'appui au travail visant le développement du processus de modélisation, des routines qui aideraient les élèves à saisir et intégrer des attentes vis-à-vis la validation ou la généralisation. Aussi, dans sa lecture interprétative, l'enseignant adopte une posture évaluative qui l'amène à s'intéresser à l'évolution des élèves eu égard à l'intégration d'un certain mode de fonctionnement, mais aussi à apprécier les impacts de certains ajustements sur l'activité des élèves, tels éviter dans l'aménagement des problèmes de suggérer aux élèves des modèles ou éviter de recourir à un certain format de questions. Enfin, certaines des ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant, mais aussi le chercheur, indiquent un repérage de difficultés chez les élèves : à se détacher de la manipulation, à entrer dans le dernier problème du scénario pour son caractère vraisemblable.

Par ailleurs, la lecture interprétative du chercheur révèle sa surprise face à l'ingéniosité de certains élèves qui ont pu créer des modèles ou recourir à des stratégies élaborées. Enfin, se plaçant dans une perspective évaluative, tout comme l'enseignant, le chercheur dans son retour sur les problèmes constate la justesse de son analyse préalable dans laquelle il avait mis en évidence le risque de suggérer aux élèves une certaine représentation avec la première illustration du problème des poignées de mains. On remarquera que les postures évaluatives de l'enseignant et du chercheur ne sont pas du même ordre : pour l'enseignant il s'agit de s'intéresser à l'évolution des élèves et à l'impact de certains ajustements de pratique, alors que pour le chercheur il s'agit de voir la confirmation ou non d'une analyse préalable, d'une hypothèse. La figure 4.9 résume les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur à travers leurs commentaires respectifs sur le récit de l'expérimentation du scénario 2 (ce que nous avons désigné par le récit commenté de l'expérimentation du scénario 2).

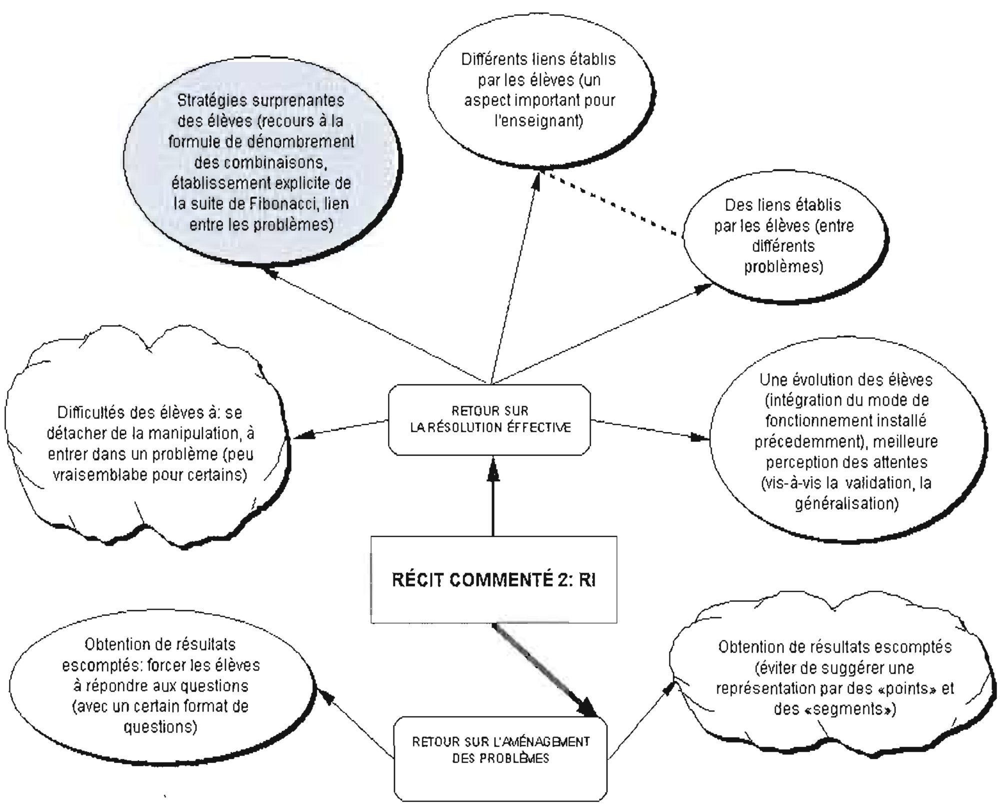



**Figure 4.9 Ressources interprétatives mobilisées lors du retour sur le scénario 2 (2e récit commenté)**

### 4.6 Analyse de la rencontre réflexive portant sur le retour sur le scénario 1 après expérimentation

Dans cette partie, nous analysons le verbatim de la rencontre bilan du scenario 1 qui a eu lieu le 19 décembre 2006[116]. Lors de cette rencontre, il s'agissait surtout à deux, enseignant et chercheur, de revenir globalement sur le premier scénario expérimenté et d'en tirer des enseignements à la lumière des stratégies observées chez les élèves et de l'animation du scénario (voir à ce propos l'appendice C9, le canevas utilisé lors de ce bilan qui se voulait plus qu'une entrevue semi-dirigée). La présente analyse s'articule autour des points suivants, abordés lors de cette rencontre réflexive conjointe :

1. Les stratégies utilisées par les élèves pour résoudre le problème 2 (appendice C3);
2. Retour sur la formulation des problèmes du scénario1;
3. Retour sur l'animation du scénario 1;
4. Des apprentissages souhaités chez les élèves ;
5. Des apprentissages réalisés par l'enseignant;
6. Des pistes d'intervention pour poursuivre;
7. De l'éclairage complémentaire du bilan.

#### *4.6.1 Analyse des stratégies utilisées par les élèves pour résoudre le problème 2*

Pour les fins de l'analyse des stratégies utilisées par les élèves en lien avec le scénario 1, ont été ciblées quelques productions ayant trait au problème 2[117] qui, de l'avis du chercheur, a posé des difficultés à plusieurs équipes dans les deux groupes. En outre, les productions examinées lors de ce bilan ne sont pas les mêmes que celles exploitées lors des plénières, des productions qui à cette occasion avaient été choisies d'un commun accord, sur la base de la diversité des modèles utilisés par les élèves qu'elles reflétaient. Deux

---

[116] Durée : 1h29mn.

[117] Rappelons que ce problème s'énonce comme suit : «Sur la ligne de départ, 6 coureurs automobiles prennent place. Si tous les coureurs terminent la course et qu'il n'y a pas d'ex aequo, combien de résultats différents est-il possible d'obtenir à la ligne d'arrivée?

catégories permettent de rendre compte de ce retour effectué sur les stratégies des élèves : un repérage des stratégies observées chez les élèves et une analyse de ces stratégies de la part de l'enseignant et du chercheur. Pour ce qui est du repérage comme de l'analyse, en réalité nous avons plus affaire ici à travail conjoint, une coconstruction, initiée par l'un ou l'autre et reprise par l'autre.

4.6.1.1 Un repérage des stratégies observées chez les élèves (5, 6)

Les codes suivants rendent compte des stratégies repérées chez les élèves, lors de la résolution du problème 2, par l'enseignant et le chercheur (voir appendice D pour avoir une idée de quelques modèles crées par les élèves pour résoudre ce problème, mais aussi pour comprendre un peu ce dont discute l'enseignant et le chercheur).

*Énumération des cas possibles {2}*
*YYY : j'ai comme l'impression qu'ils font comme énumérer, 1,2, 3, 4, 5, 6 là, c'est pour dire, 1 c'est la voiture 1 qui est en première position, hein? 1 : 2, 3, 4, 5, 6;*
*XXX : la deuxième voiture peut être en 2e, en 1e, en 3e, en 4e, en 5e, en 6e, c'est une autre manière de... (135:140)*
*YYY : je vois. Alors, c'est d'abord XXX (rires).*
*XXX: il part le 1e, 2e, 3e, 4e, 6e...*
*YYY : ça, c'est une personne et toutes les possibilités. Puis, Stéphanie, hum...en fait, là on voit qu'ils essaient de prendre les différents coureurs là, de voir toutes les possibilités (274:280)*

Cette stratégie, très à la portée des élèves, pointée par le chercheur et verbalisée par l'enseignant dans l'extrait précédent, a été utilisée par plusieurs groupes d'élèves. Elle est certes fastidieuse vu le nombre élevé de possibilités en jeu, et on comprend qu'elle n'ait pas permis aux élèves qui y ont recours de résoudre comme il faut le problème.

*Additions des cas possibles {1}*
*YYY : puis, je pense qu'il y a des élèves qui ont quand même bien verbalisé que...simplement, que la première voiture peut être 1, 2, 3, 4, 5, 6, la deuxième position peut être 1, 2, 3, 4, 5, 6, donc...*
*YYY : puis ils ont additionné les...*
*XXX : pour chaque voiture, c'est ça. (124:130)*

C'est comme si on répondait à une autre question que celle posée : le nombre total d'arrivées, les voitures étant considérées séparément.

*Recours à des couples (voitures, rangs) {1}*
*XXX : Eux autres, ils ont vraiment fait quelque chose de différent.*
*YYY : eux, ils font des couples on dirait!*
*XXX : oui.*
*YYY : (1,1); (1,2); (1, 3)...*
*XXX : ok ! La 1e voiture par la 1e, la 1e par la 2e, la1e par la 3e, la 1e par la 4e,...je ne sais pas, mais je pense que c'est ce qu'ils se sont dits, la 2e par la 1e...ils devraient avoir aussi 36, parce que c'est 6*6.*
*YYY : hum, ils le mettent comme des couples (226:239)*

Une stratégie qui consiste en fait à envisager les rangs possibles pour chaque voiture...là aussi, on reste sur les éventualités individuelles.

*Un pattern dans les démarches (une phrase-un calcul) {1}*
*YYY : bon, là, ils disent, il y a 6 coureurs, donc 6 positions, 6*6.Hum...*
*XXX : c'est le même regarde, une phrase, un calcul, une phrase, un calcul, c'est...*
*YYY : il y a un pattern là, hein.*
*XXX : une phrase, un calcul. (258:264)*

*Tentative de faire des permutations {1}*
*YYY : C'est 1, 2, 3, 4, 5, 6; 2, 3, 4, 5, 6, 1; là ils essaient de permuter là (acquiesce), tu vois. J'ai l'impression que ceux là voient des classements, quand on fait comme ils font on est dans des classements, maintenant l'idée c'est...*
*XXX : non, c'est plus riche que les autres copies là.*
*YYY : ici il y a une tentative de...*
*XXX : oui, je suis d'accord, il y a une tentative de permutation.*
*YYY : oui, oui, maintenant le problème c'est de systématiser avec ça. (373:383)*

Une stratégie plus élaborée que les précédentes; ici les élèves tentent des permutations et quelque part considèrent les possibilités comme des classements de tous les voitures.

Globalement, on remarquera que dans le repérage conjoint le chercheur est plus préoccupé de dégager des modèles/stratégies, alors que l'enseignant, quand cela est possible, essaie de les verbaliser ou de rendre compte des tentatives de verbalisation faites par les élèves.

4.6.1.2 Analyse des stratégies utilisées par les élèves (7, 16)

Les codes suivants renvoient aux interprétations, aux sens que le chercheur et l'enseignant tentent conjointement de donner aux stratégies repérées, aux raisons qui font que les élèves ont pu utiliser telle ou telle stratégie.

*<u>Influence du problème 1</u> {6}*
*XXX : ben, il y a peut-être un lien à faire avec le problème 1 qui les a peut-être...*
*YYY : heu...qui les a un peu influencé?*
*XXX : bah, 5 portes, 4 sorties, 5*4, tu sais ils ont appliqué le principe multiplicatif du numéro 1. (119:124)*
*XXX : regarde, la même chose, regarde voiture 1, regarde ça c'est le modèle que je t'ai dit depuis tantôt. Eux, ils l'ont fait par le 1e, 2e, 3e, 4e, ils ont répété, ils ont arrêté à 4 là, mais c'est le même modèle que là, qu'avec le problème numéro 1.*
*YYY : oui, je vois.*
*XXX : eux autres, ils auraient marqué 36, ils ne l'ont pas écrit là, mais c'est vers ça qu'ils s'en allaient. Ben, plus ou moins, ils ont le même raisonnement qu'au numéro 1 (j'acquiesce). (189:197)*
*XXX : ici, c'est carrément calqué sur l'autre (j'acquiesce), ce sont les possibilités d'un coureur, 5 possibilités pour un coureur, puis 6 les coureurs*
*YYY : 5*6, hein.*
*XXX : 5 portes pour rentrer, 4 pour sortir, c'est calqué (j'acquiesce). (465:470)*
*XXX : ben, c'est bon, mais qu'est-ce qu'on voit, on voit que ce qui ressort c'est qu'ils voulaient appliquer la même formule à l'autre cas (j'acquiesce), puis qu'ils veulent appliquer un modèle. (530:532)*
*XXX : regarde, encore une fois.*
*YYY : oui, ils font un arbre par..., c'est vrai, mais là... comment ils font pour arriver à 30? 1, 2, 3, 4, 5, 6, ha 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5, non ça ils se sont trompés.*
*XXX : ils arrivent à 5 à chaque, 6*5, 30.*
*YYY : 5 à chaque, ha oui? 1, 2, 3, 4, 5, c'est vrai.*
*XXX : ils ne prennent pas en compte que la voiture 1 est arrivée en premier ou...*
*YYY : c'est comme s'ils dénombraient la suite, mais c'est vrai que c'est encore un arbre...*
*XXX : ça se ressemble encore, regarde, visuellement, ça se ressemble. (202:216)*

Dans les extraits précédents, l'enseignant, et par la suite le chercheur, réalisent que le problème 1 a fortement influencé les élèves dans la résolution du problème 2. Dans le problème 1 il s'agissait de dénombrer le nombres de façons d'entrer et de sortir d'une pièce à 4 portes sachant qu'on ne peut sortir par une porte par laquelle on est déjà entré. Ce problème utilisait le principe multiplicatif. Les élèves ont voulu donc recourir au même principe multiplicatif avec le problème 2.

*YYY : ha, ils ont essayé un peu de visualiser les arrivées (acquiesce).*
*XXX : tu vois que c'est différent, hein.*
*YYY : oui, c'est différent, oui. Ici, on ne voit pas vraiment de lien avec le problème 1.*
*XXX : non, je ne vois pas.*
*YYY : eux, ils ont été moins contaminés, pour utiliser ton expression. (362:371)*

Certains groupes, comme celle dont on parle dans cet extrait, n'ont pas reproduit la solution du problème 1.

*Effet pervers du manuel (une série de problèmes dont les solutions se répètent) dans ce lien que les élèves ont fait avec le problème 1 pour aborder le suivant {3}*
*XXX : des fois ils se disent que peut-être les problèmes, ils ont l'habitude de faire des problèmes répétitifs et dont la solution va souvent se répéter hein. Les manuels, c'est souvent comme cela qu'ils sont faits, c'est comme ça qu'ils sont faits. Ils vont avoir une formule pour le premier numéro, ben le deuxième ils se disent c'est la même chose. Fait que c'est l'effet pervers un peu de faire une série de problèmes comme ça, ils n'ont pas un seul problème. Ben, je pense, ce n'est pas une réflexion qui m'est venue quand on a monté le document, là ça me saute plus aux yeux, bah c'est une hypothèse que je formule. (149:156)*
*XXX : mais, c'est l'effet pervers des manuels.*
*YYY : des manuels, oui.*
*XXX : qu'ils appliquent, on leur montre quelque chose puis après ils appliquent, appliquent...*
*YYY : il y a une série de problèmes qui suit et qui applique toujours le même principe.*
*XXX : c'est ça! Mais, c'est sécurisant pour eux.*
*YYY : pour les élèves, hein?*
*XXX : parce qu'ils visent la réussite. (161:175)*
*Ils sont habitués de faire des ex..., bah, ça c'est mon hypothèse.*
*YYY : c'est ton hypothèse, de faire des problèmes pour lesquels il y a souvent...*
*XXX : répétitifs! (532:536)*

L'enseignant tente dans les extraits précédents une explication des liens que plusieurs équipes ont vu entre le problème 1 et celui qui le suit dans le scénario, le problème 2. Il pense que c'est l'effet pervers du manuel dans lequel on propose souvent aux élèves des séries de problèmes dont les réponses se répètent.

*<u>Réinvestissement du principe multiplicatif sans tenir compte des différences entre les problèmes</u> {1} (406:420)*
*YYY : oui, oui. Bah, ça veut dire que le principe multiplicatif sous-jacent là bas a été comme, on a voulu l'appliquer sur le suivant, mais bon, ça n'a pas marché comme,...d'accord, parce qu'en fait ici il y avait que deux choix, ha je vois mieux, sur l'autre là il y avait vraiment 2 choix sur les portes là, tu vois le principe c'était un principe multiplicatif à 2 étapes, alors qu'ici...*
*XXX : c'était plusieurs étapes.*
*YYY : c'était plusieurs étapes.*
*XXX : donc, eux autres ils l'ont fait à 2 étapes.*
*YYY : oui, c'est ça.*
*XXX : c'est vrai, c'est une bonne...c'est tout à fait ça, c'est tout à fait ça, YYY.*

Quant au chercheur, il avance une autre explication des liens faits par les élèves entre les problèmes 1 et 2. En fait il y a un lien entre ces deux problèmes pour lesquels le principe multiplicatif s'applique, mais différemment. Le problème des élèves est de faire la différence entre un cas ou il y a deux choix (entrée-sortie) et un autre où il y a 6 choix (les 6 arrivées).

*<u>Effet possible de l'enseignement du principe multiplicatif dan un des groupes d'élèves</u> {1}*
*YYY : l'autre groupe, il est un peu plus proche. J'ai l'impression peut-être que le fait qu'on leur ait parlé du principe multiplicatif, ça a peut-être un peu joué, sauf que des fois certains l'ont mal appliqué. (493:495)*

En plus d'un principe multiplicatif mal appliqué, le chercheur avance une hypothèse : l'influence possible de l'enseignement du principe multiplicatif dans un des 2 groupes. Une variable didactique qui expliquerait un tel lien.

*<u>Effet possible de l'introduction des arbres de choix dans un des groupes d'élèves</u> {2}*
*YYY : c'est vrai hein, c'est comme s'ils avaient le schéma mental de l'arbre, c'est ça? Oui, 6*6.*
*(142:143)*
*YYY : est-ce que le fait que ce modèle est répétitif sur les copies qui sont là, le fait qu'ils fassent l'arbre par voiture, est-ce que c'est parce qu'on leur a parlé de l'arbre?*
*XXX : ça se peut, je n'écarte pas ça du tout. C'est une bonne...*
*YYY : c'est une hypothèse.*
*XXX : une hypothèse. (248:256)*

Une autre hypothèse est avancée, l'effet possible de l'introduction de l'arbre de choix dans un des 2 groupes.

*<u>Difficulté à voir un «classement général», à passer à la généralisation</u> {2}*
*XXX : Ils n'ont pas pris en compte que c'est un classement de 6 voitures. Ils ont pris une voiture, donc ils ont fait un schéma d'arbre mais par voiture. Ça, je pense que ça été la manière dont ils ont...Ils ne sont pas allé plus loin que ça je pense (j'acquiesce) (130:133)*
*YYY : Là on voit qu'ils essaient de prendre les différents coureurs là, de voir toutes les possibilités, mais après le problème c'est de combiner, de voir comme tu disais le classement général. Lui, peut être 1e, 2e, 3e...*
*XXX : je ne sais pas c'est quoi...c'est sûr qu'ils ne visualisent pas toutes les possibilités. Tu sais, c'est de dire, tu peux avoir, XXX, Stéphane, Stéphane, XXX, gnangnan, tu sais, ils ne le voient pas. (279:285)*

L'enseignant et le chercheur pointent du doigt la difficulté majeure des élèves en lien avec ce problème. En effet, les élèves ont du mal à se représenter les arrivées possibles comme différentes suites, ils ne pensent pas en termes de classement général. En somme, il s'agit d'un difficile passage à la généralisation chez les élèves.

*<u>Sous estimation de l'ordre de grandeur des résultats possibles</u> {1}*
*XXX : ils en font là, eux autres ils auraient pu voir qu'il y en avait plus.*
*YYY : c'est qui ça?*
*XXX : le groupe de Vi. Non, ok...*
*YYY : 6*6...*
*XXX : ils ont peut-être vu qu'il en avait beaucoup, d'autres, mais là ils n'ont pas...*
*YYY : ils ont commencé à voir plus.*
*XXX : peut-être qu'ils ont dit non, il y a en peut-être trop, on resterait à 6*6, 36, ça ne doit pas être trop gros.*
*YYY : mais, comme je disais, j'ai comme l'impression que peut-être l'ordre de grandeur des possibilités, on dirait que ça a découragé certains, ils doivent s'être dits, non, non, on est dans le champ, ça ne peut pas être plus de 36.*
*XXX : ça ne peut pas être autant de choix que ça. (432:451)*

En outre, un autre élément qui aura été certainement déterminant lors de la résolution est que certains élèves entrevoyaient plus que 6*6 possibilités, mais devaient se dire qu'on ne pouvait pas trouver autant de cas. Ils sous-estiment donc l'ordre de grandeur des cas possibles : soit 720 !

**Tableau 4.16 Ressources mobilisées lors du retour sur les stratégies utilisées par les élèves en lien avec le scénario 1**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Repérage de différentes stratégies :**<br>• stratégie par énumération<br>• stratégie par additions des cas<br>• tentative de faire des permutations | **Repérage de différentes stratégies :**<br>• stratégie par énumération<br>• considération des couples à l'arrivée (problème des voitures)<br>• un pattern dans les démarches (une phrase-un calcul) |
| **Un repérage guidé par les modèles/stratégies** | **Un repérage guidé par la verbalisation du raisonnement** (repère une tentative de verbalisation par les élèves) |
| **Une certaine interprétation de certaines stratégies :**<br>• mauvaise application du principe multiplicatif (un réinvestissement ne tenant pas compte des différences de contexte)<br>• effet de l'introduction du principe multiplicatif<br>• difficulté à penser en termes de classement général<br>• sous estimation de l'ordre des grandeurs des cas possibles | **Une certaine interprétation de certaines stratégies :**<br>• lien pour les élèves entre les problèmes 1 et 2<br>• effet pervers des manuels (problèmes répétitifs aux solutions se répétant)<br>• difficulté à penser en termes de classement général |

### *4.6.2 Retour sur les problèmes du scénario 1 (7, 10)*

Dans cette section, l'enseignant et le chercheur procèdent à un retour sur le scénario, les problèmes le composant, et tentent d'y apporter des aménagements à postériori, à la lumière de la façon dont les problèmes de ce scénario ont été compris par les élèves, mais aussi dans l'optique du scénario 2 à venir.

> <u>*Intégration du choix de la variable «nombre de voitures» dans l'énoncé pour contrer la stratégie par énumération dans le cas du problème 2 {1}*</u>
> *YYY : c'est vrai qu'il y avait beaucoup de cas, parce qu'un problème comme ça avec 6, je me demande si on l'avait fait pour 4 voitures, 5 voitures*
> *XXX : bah, 4 voitures, ils auraient peut-être...*
> *YYY : ils auraient pu énumérer vite, vite.*
> *XXX : je trouve, 60...120, c'est quand même beaucoup de cas (j'acquiesce), je ne sais pas.*
> *YYY : mais, l'avantage de ça, c'est qu'ils sont obligés de chercher autre chose, si c'était peut-être un cas trop simple là, ils auraient pu énumérer ou (acquiesce) (383:395)*

Le chercheur se questionne sur le nombre de voitures participant à cette course, soit 6. Il justifie a postériori le choix d'avoir mis ce nombre assez grand car autrement la stratégie par énumération aurait été fortement encouragée.

*Importance du dessin : se donner un dessin plus parlant dans le cas du problème 2 {1}*
*XXX : pour le problème numéro 1, c'est qu'il y a un dessin (j'acquiesce), donc quand il y a un appui visuel et qui agrémente, comparativement à ici, le dessin est là rien que pour le contexte, pour faire beau, mais ici il est intéressant. D'ailleurs, dans mon examen, je l'ai fait assez spot, je n'ai pas fait de dessin. (324:327)*

L'enseignant souligne une limite dans l'illustration du problème 2 où une belle voiture rouge a été mise là juste pour faire beau. Il estime qu'avec ce problème, le dessin aurait du être plus parlant, comme avec le problème 1 où le dessin était plus parlant quoique non nécessaire.

*Suggestion d'ajouter des exemples de classement, pour que les élèves visualisent les possibilités dans l cas du problème 2 {1}*
*Je ne sais pas si en améliorant la question ou...*
*YYY : ha, d'accord, dans la consigne quoi.*
*XXX : je pense si dans la consigne, si on avait pu donner deux exemples de classement...*
*YYY : ha*
*XXX : puis de compléter, donc un de ces classements pourrait être...*
*YYY : par exemple...*
*XXX : XXX, Stéphane, gnangnan, mais ça pourrait être également Stéphane, XXX, gnangnan. Ou, tu en donnes 3. Donner 3 exemples, dire de compléter, pour qu'ils visualisent vraiment toutes les possibilités, puis là de les laisser, de leur dire, êtes-vous capable de trouver? Je ne sais pas si c'aurait été une bonne idée de faire ça. Parce que des fois les questions, on ne veut pas trop en donner, c'est bien correct, mais des fois d'en donner, ce n'est pas que nécessairement ça va les aider, mais plus de les, ni les sécuriser, c'est vraiment pour clarifier.*
*YYY : ça clarifie les consignes. Mais, pendant que tu en parles, je sais qu'il y a une recherche que j'ai lue, qui parlait du dénombrement, où les auteurs systématiquement quand ils donnent un problème de dénombrement, ils donnent un exemple.*
*XXX : oui.*
*YYY : oui, Batanero a travaillé beaucoup comme ça là. Systématiquement, chaque fois qu'elle donne un problème, elle dit par exemple, elle donne un exemple.*

*XXX : parce qu'ils voient la complexité, et là ils savent à quoi s'attaquer. Ça, ça aurait peut-être été intéressant de le faire (j'acquiesce), tu comprends qu'est-ce que je dis.*
*YYY : oui, je comprends ce que tu dis. (285:319)*

Dans cet extrait, l'enseignant propose d'offrir aux élèves des exemples de classement pour qu'il soit clair pour les élèves ce sur quoi porte le dénombrement dans ce problème, soit des classements, les élèves ayant montré qu'ils avaient des difficultés à penser en termes de classement. Le chercheur signale à l'enseignant la convergence de son point de vue sur le rôle des exemples avec celui de chercheurs comme Batanero (1994, 1997) qui recourent aux exemples dans la même optique.

*Limite d'un format de questions en secondaire 1 qui n'amène pas les élèves à répondre à toutes les questions dans le cas du problème du quadrillage {2}*
*XXX : ben, je dirai que dans les questions souvent, quand tu poses 2 points d'interrogation dans une question de secondaire 1, c'est trop, ils vont souvent s'arrêter à une première question, puis...*
*YYY : ils vont s'essouffler avec ça.*
*XXX : ils sont assez essoufflés, oui, en 1, je te dis ! Mais, c'est bon d'en faire, si on l'avait isolé plus bas, a) gnangnan, b), là ils n'auraient pas pu se défiler...*
*YYY : comme on l'a fait avec les codes là.*
*XXX : oui, là ils n'auraient pas pu se défiler!*
*YYY : mais, le fait que ce soit dans un texte comme tel...*
*XXX : c'est trop ! Parce que, écoute, quand on dit, les questions qu'ils n'aiment pas les élèves c'est, gnangnan, êtes-vous d'accord? Oui...*
*YYY : pourquoi?*
*XXX : si non, pourquoi? Ils détestent ça ! Ils détestent, parce que là, ils se disent qu'ils ne savent pas si c'est gnangnan. Tu sais, si tu dis si oui, pourquoi, ben ils savent que la réponse c'est oui, tu comprends (j'acquiesce). Donc, c'est le genre de questions...*
*YYY : il faut faire attention.*
*XXX : ils ne sont pas habitués.*
*YYY : bah, tu vois. Je me disais qu'il y avait quelque chose dans ça. (781:784)*
*S'il y a trop de questions, oui si ce n'est pas bien, il faut faire attention au libellé et tout là, si non comme pour le problème 5, il y avait une question qui était bien là mais ils n'ont pas regardé (il acquiesce) (722:750)*

Dans les deux extraits précédents, l'enseignant revient sur le problème du quadrillage dans lequel deux questions sont posées à la suite aux élèves. Pour lui, cette façon de disposer les questions, sans les distinguer clairement dans l'énoncé ne fonctionne pas avec les élèves de secondaire 1 qui n'affectionnent pas beaucoup les questions sollicitant une justification. L'enseignant, encore une fois, met à contribution sa connaissance des élèves pour tenter d'expliquer la raison pour laquelle la seconde question du problème du quadrillage a été laissée en rade par les élèves.

> *<u>Un scénario d'essai avec le scénario 1</u> {1}*
> *YYY : je me disais 4 ou 5 problèmes, bon c'est intéressant quand même pour nous, c'était surtout un scénario d'apprentissage (774:775)*

Le chercheur est ici sur le nombre de problèmes exploités dans le scénario 1 qu'il voyait surtout comme un scénario d'apprentissage, un scénario d'essai pour voir comment les choses allaient fonctionner et par la suite ajuster au besoin.

> *<u>Un grand nombre de problèmes dans la première partie du scenario 1: trop de problèmes</u> {1}*
> *YYY : Parce que les 4 premiers problèmes qu'on leur a donnés, on pouvait leur donner 1 problème assez intéressant où ils ont le temps de (778:779)*

Le chercheur estime qu'il y avait trop de problèmes dans la première partie du scénario qui comprenait 4 petits problèmes. Il suggère qu'avec un problème intéressant en lieu et place, les élèves auraient pu élaborer sur leurs stratégies. On sent là une certaine frustration en lien avec les traces de leurs stratégies laissées par les élèves.

> *<u>Suggestion d'exploiter un problème par période pour le scénario 2, un bon problème</u> {3}*
> *YYY : et puis aussi, il y a quelque chose d'assez important je me disais, surtout pour le scénario 2 qu'on va faire, c'est peut-être penser des problèmes tels que ce soit faisable en une période, tu vois. Je me disais, quand on a fait la première expérimentation, la première partie il n'y avait pas de problèmes. Si on avait eu un bon problème sur lequel ils auraient eu le temps de travailler comme il faut, tu vois, et puis fonctionner comme on a fait, un bon problème et puis une plénière à la deuxième étape, puis on passe au suivant...*
> *XXX : donc, faire 2 problèmes?*
> *YYY : moi, je pensais à ça, l'idée de 2 problèmes...*
> *XXX : pour le prochain scénario (j'acquiesce). Oui, oui. Mais, pour le prochain scénario je trouve que c'est correct ça, il y avait une gradation.*
> *YYY : c'était bon, hein?*

*XXX : oui, oui. Mais, pour le deuxième moi je ne verrai pas, ce serait correct un seul problème.*
*YYY : un seul ou 2 problèmes maximum.*
*XXX : oui, oui (750:772)*
*YYY : mais je voyais vraiment 2 étapes, ils font 1 comme on a fait là sur 3 périodes, les gens réfléchissent et mettent au propre, ensuite à la 2e période on passe à la plénière puis au problème suivants, ainsi de suite, tu vois. (775:778)*
*L'idée c'est de voir comment écrire les choses pour que ce soit faisable en 1 période là (780:781)*

Le tableau suivant résume les ressources mobilisées de part et d'autre par l'enseignant et le chercheur lors du retour sur les problèmes du scénario 1.

**Tableau 4.17 Ressources mobilisées dans le retour sur les problèmes du scénario 1**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Retour sur l'aménagement des problèmes et suggestions :**<br>• justification d'un choix : recours à de grandes valeurs à la variable«nombre de voitures» pour contrer la stratégie par énumération (problème 2)<br><br>**Retour sur le scénario 1 et suggestions :**<br>• un scénario d'essai<br>• constat d'un grand nombre de problèmes (les problèmes introductifs)<br>• exploiter pour le scénario 2, un «bon» problème par période | **Retour sur l'aménagement des problèmes et suggestions :**<br>• constat de l'importance de l'illustration (doit être parlant)<br>• nécessité de donner aux élèves des exemples (problème 2)<br>• structuration des questions : éviter les questions posées à la suite |

### *4.6.3 Retour sur l'animation du scénario 1*

4.6.3.1 Des idées qui fondent l'approche du retour sur les solutions des élèves (3, 4)

Lors du retour sur l'animation du premier scénario, l'enseignant et le chercheur exposent les idées qui fondent la manière dont chacun voit le retour sur les solutions des élèves. Les codes suivants y renvoient.

*Importance de la comparaison pour débattre des stratégies* {1}

*YYY : la comparaison, ça je pense que tu l'as dit, qu'ils sont jeunes, les problèmes de personnalités sont importants, il faut faire attention avec. Seulement, des fois quand ils comparent, éviter les comparaisons des fois ça a l'effet peut-être pervers que ça ne fait pas tellement débattre. Le problème c'est comment faire débattre sans trop... (1082:1085)*

Tout en prenant en compte les appréhensions de l'enseignant quant à ce qui est du rôle de la comparaison dans les débats, le chercheur exprime sa crainte que son évitement ne limite les débats, les discussions entre élèves.

*Éviter le jugement/une comparaison par les échanges d'idées avec l'équipe de son choix avant tout retour* {2}

*XXX : ben, c'est que la comparaison on peut l'avoir quand ils échangent entre.*
*YYY : ha, oui.*
*XXX : parce que là, ce n'est pas la classe qui les regarde. Quand tous les 36 regardent dans la même direction, vers une solution, là la comparaison, heu il y a en pour plusieurs là ils se comparent, mais c'est sûr que ça rejoint ce que je disais, il y a en qui vont se sentir diminués, je ne sais pas moi, je dirai que la comparaison est beaucoup dans l'échange d'idées.*
*YYY : quand ils travaillent en équipes eux-mêmes puis ils échangent avec d'autres équipes.*
*XXX : je pense que déjà il y a une comparaison, puis ils vont comparer avec les élèves qu'ils connaissent, puis là ils savent...*
*YYY : ils sont plus sécurisés.*
*XXX : oui, ils ne sont pas jugés. (1087:1105)*
*XXX : parce qu'il y a un débat entre eux s'ils regardent de quoi en avant. Pff ! Tu sais, ils vont pouvoir se comparer, ils vont dire moi je n'ai pas fait ça, mais au moins il n'y a pas 2 élèves en avant qui se sentent, qui sont obligés de se défendre.*
*YYY : qu'ils sont comme jugés.*
*XXX : c'est ça. Tu sais la plénière dans le fond est intéressante quand l'élève verbalise ce qu'il a fait, puis les autres qu'est-ce que vous pensez de ce qu'ils ont fait, c'est bon, mais on pourrait la faire comme ça(1124:1132)*

Dans les extraits précédents, l'enseignant précise ce qu'il veut surtout éviter à travers des comparaisons : qu'avec tous les conflits de personnalités qu'il y a en secondaire 1 que les élèves se sentent jugés ou obligés de se défendre. Il préfère un mode de partage des solutions plus sécurisant pour les élèves, une comparaison avant la mise au propre des solutions, les élèves pouvant comparer leurs solutions en échangeant avec des équipes de leur choix, des élèves avec qui ils n'ont pas de conflit.

<u>*Non importance du vocabulaire : «modèle»/«modélisation»*</u> *{1}*
*YYY : mais, le dire dans des termes savants comme ça, ce n'est pas ça qui est important, comme tu dis on est en initiation.*
*XXX : c'est ça, je pense que définitivement, oui !*
*YYY : c'est ça, c'est pourquoi on a bien fait d'éviter les mots modèle, modélisation, tout ça, ça complique pour rien.*
*XXX : oui, mais pour eux, même parler de modèle, modélisation, tu pourrais leur en parler, puis qu'est-ce qu'ils en retiendraient...*
*YYY : ce n'est pas ça qu'ils retiendraient.*
*XXX : non, parce que des modèles pour eux c'est surtout en secondaire 4, là je parle pour mo, et que là tu vois les modèles de l'atome qui évoluent dans le temps, puis tu commences à comprendre l'idée de ce qu'est un modèle, tu comprends. Mais, eux, ils ne te diront pas comme ça le modèle, fait que tu aurais pu leur en parler, mais je ne pense pas qu'ils l'auraient retenu, tu comprends, moi c'est ce que je pense. C'est comme si tu dis le mot le principe multiplicatif, ce sont des termes de grand penseur (j'acquiesce, rires de moi), ce sont des termes de grand penseur.*
*YYY : et puis, entre nous, ce n'est pas ça le plus important, le plus important c'est l'apprentissage sous-jacent, savoir l'appliquer... (1265:1287)*

Dans l'échange précédent, le chercheur et l'enseignant indiquent clairement qu'il ne s'agit surtout pas dans une approche visant le développement de la modélisation au secondaire 1 de mettre l'accent sur le vocabulaire. Les mots importent très peu, «modèle» ou «modélisation». L'important, ce sont les apprentissages sous-jacents.

4.6.3.2 Analyse de ce qui s'est passé (3, 3)

<u>*Une réussite des débats entre élèves*</u> *{1}*
*XXX : parce qu'un débat, c'est d'un débat dont qu'on parle, qu'on fasse ça en secondaire 1, puis qu'on soit déjà arrivé en début d'année à faire ça, je pense que c'est fantastique (j'acquiesce), parce qu'un débat c'est au niveau de difficulté, heu...j'en ai des professeurs qui en ont fait, des débats en secondaire 1, puis ça n'a pas marché parce que les élèves ne sont pas en mesure de débattre, parce que débattre ça veut dire que tu comprends bien ton dossier, et puis tu peux vraiment débattre selon...*
*YYY : s'approprier la solution des autres, puis...*

*XXX : s'ouvrir aux autres, c'est ça, ce n'est pas évident, en mathématiques ils ne le font pas, mais dans les autres matières comme en sciences humaines ils vont le faire, mais c'est surtout en secondaire 4 et 5 qu'ils commencent à faire des débats, puis ils ne sont pas satisfaits encore les professeurs des débats qu'ils ont ! Là, nous on l'a fait en secondaire 1 (insiste là-dessus), en mathématiques, en première moitié d'année, c'est fantastique ! Moi, je pense qu'on soit déjà arrivé à ça, puis qu'on les prépare à ça,...c'est merveilleux! On sème vraiment pour les autres années, mais moi je te dis que, heu...c'est plus qu'ils ne pouvaient nous donner.*
*YYY : ha oui, ils sont vraiment allés au bout.*
*XXX : oui, oui, mais c'est que là on les initie à ça, ils aiment ça, mais...c'est quelque chose je te dis YYY, parce que...*
*YYY : ce n'est pas évident.*
*XXX : l'année dernière, tu sais ça fait 2 ans que les profs de science essaient de faire un débat en rapport avec l'écologie, donc il y a des fermiers, il y a des producteurs, tout ça, puis ça ne marche pas, ils disent que tout le monde tient à son idée, tout ça, mais là...fait qu'ils ne sont pas habitués de faire ça...(1156:1184)*

L'enseignant tire un bilan très satisfaisant des débats organisés entre élèves. Pour lui, il faut souligner le fait que l'on soit arrivé en début d'année, à la deuxième étape, en secondaire 1 à faire discuter des élèves qui ne sont pas habitués à des débats, surtout en mathématiques.

*Installation d'un jeu de l'échange basé sur un certain climat relationnel {1}*
*YYY : ce que je pensais, pourquoi ça a marché à la dernière plénière, surtout avec l'autre groupe, j'ai l'impression qu'il y a quelque chose qui a pris et qui est là, c'est-à-dire qu'il y a comme un jeu qu'on a installé, le jeu de l'échange...*
*XXX : c'est ça, il est habitué (j'acquiesce), oui.*
*YYY : ... quand tu regardes les élèves qui sont intervenus là, ils parlent, mais dans l'idée de c'est bon mais, tu vois, je n'ai pas vu de jugements, ..., à la dernière partie je n'ai pas vu de jugement (acquiesce), donc j'ai l'impression que c'est ça qu'il faut continuer à, il faut continuer à veiller à ça, c'est-à-dire qu'ils comprennent qu'on fonctionne comme tel ... c'est comme tu disais ne pas rire, tu as utilisé beaucoup de précision pour ça, il ne faut pas rire de, mais l'idée c'est d'aller plus loin, d'améliorer les solutions. (1141:1154)*

Le chercheur tire également un bilan satisfaisant des échanges entre les élèves, des échanges qui montrent que quelque chose est entrain de prendre forme, qu'un jeu de l'échange s'établit. Un jeu qui exige de ne pas rire des solutions des autres, d'intervenir dans le sens d'améliorer ces dernières. On sent le cadre de référence du chercheur sur la modélisation, cadre à l'aune duquel il apprécie la bonne conduite ou non des débats, mais aussi de l'enseignant qu'il a intégré (le respect, ne pas rire...), une sorte de climat relationnel nécessaire à ce jeu d'échange.

> *Mise en place d'une communauté de validation* *{1}*
> *YYY : je pense que il y a là comme l'idée d'une communauté de validation, dans les écrits plus théoriques ils parlent de culture de modélisation, c'est cette culture qui est là, qui commence à prendre forme. (1190:1192)*

Le cadre de référence du chercheur sur la modélisation est ici explicitement à l'œuvre, pour évaluer le fonctionnement global lors des plénières. À la fois, commencent à prendre forme, une culture de modélisation ainsi qu'une communauté de validation.

4.6.3.3 Des pistes pour poursuivre (4, 5)

La rencontre bilan est également une occasion pour l'enseignant et le chercheur de se pencher sur des pistes permettant de poursuivre le travail conjoint entamé avec le scénario 1 et qui vise rappelons-le, le développement de la modélisation. Les codes suivants renvoient à ces pistes.

> *Travailler avec les élèves des problèmes sur un temps plus long* *{1}*
> *YYY :... Pour le scénario 2 on en a parlé, as-tu des recommandations à faire, comment comptes-tu poursuivre entre temps, pour veiller au grain, à ce que nous avons semé ?*
> *XXX : c'est sûr et certain que là je vais encore donner des problèmes, ...plus longs, qui demandent pratiquement la moitié d'un cours, c'est sûr que je vais poursuivre ça durant la fin de la deuxième étape et durant la deuxième étape. (1333:1339)*

> *Faire travailler les élèves des projets sans leur montrer la matière ou sans préalable* *{1}*
> *XXX : ...ça va peut-être changer mon approche pour d'autres projets que je fais, mais...*
> *YYY : oui, ça entre autres là, parce que tu as plein de choses en faire là, c'est juste que...*
> *XXX : ben, regarde comme entre autres, j'ai un projet, il faudrait que je te le montre, c'est sûr et certain que sans me lancer dans ce qu'est le projet, je leur montrerai pas,... la matière avant. Je vais vraiment les lancer dedans...*
> *YYY : d'abord, voir spontanément comment ils vont...*

*XXX : oui.*
*YYY : puis, après...*
*XXX : oui. (1339:1355)*

<u>*Continuer en classe à faire débattre les élèves*</u> *{1}*
*YYY : je me disais qu'une des grosses tâches de XXX c'est d'ici à là préserver ça, c'est-à-dire l'idée qu'ils continuent à débattre, même d'autres choses (acquiesce), par moments, tu vois, parce que c'est là, si non ça ne marche pas, même les grandes personnes ils ne savent pas débattre, je ne sais pas si tu vois, même nos politiciens (rires de moi, il acquiesce).*
*XXX : oui, oui, je vois ce que tu veux dire.*
*YYY : parce que comme tu dis, il y a d'abord un effort de s'approprier la solution ou le point de vue de l'autre, qu'est-ce qu'il dit, l'écoute, puis après je réagis, et puis je réagis dans le bon sens, ici c'est l'idée d'améliorer, ce n'est pas de démolir (acquiesce). Tu vois, il y a quelque chose là. (1192:1203)*

<u>*Pour le retour : faire débattre de façon anonyme les élèves sur leurs solutions erronées pour le scénario 2*</u> *{2}*
*XXX : moi, pour l'instant ça serait ça, mais ça ne me dérangerait pas qu'on montre des solutions plus erronées dans le 2$^{e}$ scénario.*
*YYY : parce qu'il y avait une solution, sur les solutions erronées je pense que...*
*XXX : parce que, qu'est-ce qu'on pourrait faire, si on met une solution qui est erronée, pas de nom, puis la personne ne va pas en avant, puis qu'on leur demanderait de verbaliser, ou prendre les solutions d'un autre groupe, leur demander ce qu'ils pensent d'une solution comme ça, fait que là il n'y a personne qui est obligé de se défendre en avant.*
*YYY : oui, c'est ça, quelque chose de plus anonyme.*
*XXX : oui, fait que là au moins, tout le monde peut comparer (j'acquiesce), je ne sais pas, ça serait peut-être une manière d'en tirer profit.*
*YYY : c'est ça. C'est important ce que tu dis, il y a moyen de les faire débattre, mais sans pour autant que... (1105:1122)*
*XXX : on pourrait faire également, qu'est ce que vous pensez si on a une solution comme ça ? Bah, on l'a un tout petit peu fait ça (j'acquiesce), on a pris des solutions de l'autre groupe, puis qu'est-ce que vous pensez de ça (j'acquiesce).*
*YYY : ça a l'air moins...*
*XXX : je ne sais pas. (1132:1139)*

### *4.6.4 Des enseignements à retenir par les élèves (2, 3)*

Dans cette section, l'enseignant et le chercheur indiquent les choses qu'ils souhaiteraient que les élèves retiennent de l'expérimentation.

<u>*Résoudre un problème et non trouver une solution d'un coup*</u> *{2}*
*XXX : ce que je voudrais qu'ils retiennent, c'est,..., qu'une solution à un problème ça se trouve pas du premier coup, ça c'est important pour moi. Heu ça, ça serait la plus grosse chose.*
*YYY : ta métaphore le dit bien, hein (acquiesce), ta métaphore dit bien ça.*
*XXX : oui, parce qu'ils ont tendance à baisser les bras rapidement (1209:1215)*

L'enseignant veut surtout que les élèves retiennent que pour arriver à la solution d'un problème, il faut s'y essayer plusieurs fois, comme on les y a encouragés, au lieu d'abandonner, de baisser les bras au premier essai non réussi.

*YYY : pour moi, l'idéal c'est qu'ils retiennent, comme tu l'as dit, le processus, la solution n'est pas donnée d'un coup, donc des fois il y a comme des étapes pour arriver à la solution, il faut formuler, il faut valider, il faut, mais on l'a travaillé là. Dans nos mots, ce qu'on a essayé de travailler, c'est un peu calquer notre fonctionnement sur le processus de modélisation, une partie où on formule, une partie où on valide, tu vois, on a plus ou moins travaillé comme ça, tu vois, chercher les problèmes, puis les valider entre nous, puis les résoudre, tu vois. (1259:1265)*

Le chercheur se fait l'écho du propos précédent de l'enseignant, en soulignant qu'il préfère que les élèves retiennent les phases de formulation et de validation du processus de modélisation qui montrent aux élèves comment s'y prendre dans la résolution de problème.

L'enseignant considère <u>*Avoir eu l'expérience d'un vrai problème*</u> *{1}*
*XXX : ce n'est pas une expérience qu'ils font souvent, ce qu'on a fait avec eux, ils vont s'en souvenir toute leur vie de ça (j'acquiesce). En secondaire 1,...oui, ça pour moi c'est plus important qu'ils fassent un vrai problème, puis tout ça, parce que la prochaine fois ce ne sera peut-être pas le principe multiplicatif, ça va être peut-être autre chose (j'acquiesce), donc s'ils peuvent retenir ça, le plaisir qu'on peut avoir à travailler en équipes, à échanger, et à travailler fort sur un problème, c'est de quoi qui est intéressant, d'avoir vécu une situation d'apprentissage différente, oui. (1250:1257)*

Ce que l'enseignant souhaite ultimement que les élèves retiennent de l'expérimentation, c'est d'avoir vécu une expérience différente, une expérience marquante qui leur a permis d'essayer de fonctionner d'une manière inhabituelle. C'est cela qu'il souhaite ultimement qu'ils retiennent, d'avoir vécu une expérience différente.

Le tableau 4.18 résume les ressources mobilisées de part et d'autre par l'enseignant et le chercheur lors du retour sur l'animation du scénario 1.

**Tableau 4.18 Ressources mobilisées lors du retour sur l'animation du scénario 1**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Des principes guidant le retour sur les solutions des élèves :**<br>• importance de la comparaison (pour permettre de débattre des stratégies)<br>• non importance du vocabulaire (ce n'est pas important de parler de «modèle», de «modélisation») | **Des principes guidant le retour sur les solutions des élèves :**<br>• éviter le jugement (comparaison par l'échange avec l'équipe de son choix)<br>• non importance du vocabulaire (ce n'est pas important de parler de «modèle», de «modélisation») |
| **Analyse de l'activité mathématique des élèves :**<br>• mise en place d'un jeu de l'échange basé sur un climat relationnel<br>• mise en place d'une communauté de validation | **Analyse de l'activité mathématique des élèves :**<br>• réussite dans les débats (surtout en début d'année, en secondaire 1)<br>• vécu par les élèves d'une expérience mathématique riche |
| **Des modalités pour poursuivre :**<br>• continuer à faire débattre les élèves en classe | **Des modalités pour poursuivre :**<br>• travailler avec les élèves des problèmes sur un temps plus long<br>• faire travailler les élèves des projets sans leur montrer la matière<br>• faire débattre de façon anonyme les solutions erronées<br>• relancer le plus souvent les élèves lors des débats autour de leurs solutions |
| **Ce que l'on souhaite que les élèves retiennent :**<br>• résoudre des problèmes comme avec le 1$^{er}$ scénario (suivre un processus, avec les étapes de formulation et de validation) | **Ce que l'on souhaite que les élèves retiennent :**<br>• résoudre un problème peut nécessiter plusieurs essais (la solution ne se trouve pas d'un coup)<br>• avoir eu l'expérience d'un vrai problème |

### *4.6.5 Quelle lecture faire de l'analyse du bilan du premier scénario ?*

4.6.5.1 Une analyse en termes de ressources interprétatives

Lors du retour sur les stratégies des élèves, en lien avec l'un des problèmes du scénario 1 (le problème 2 portant sur une course de 6 voitures et le dénombrement de toutes les arrivées possibles), l'enseignant et le chercheur repèrent différentes stratégies et tentent de leur donner un sens (tableau 4.16). Ainsi, l'enseignant repère des stratégies telles l'énumération, la considération de couples à l'arrivée et remarque un certain pattern dans plusieurs démarches (une phrase-un calcul). On notera aussi, comme le montrent certains extraits de verbatim associés à l'enseignant, que ce dernier est guidé dans son repérage des stratégies des élèves par la verbalisation du raisonnement, les tentatives des élèves allant dans ce sens. Pour donner un sens aux stratégies des élèves, l'enseignant postule un lien que les élèves auraient fait entre ce problème et le précédent, lien d'autant plus plausible pour lui que les manuels avec lesquels les élèves travaillent proposent souvent des séries de problèmes construits sur le même type. De sorte que puisque dans le problème 1 la réponse était 5*4, plusieurs élèves ont cru bon dans le problème suivant de donner comme réponse 6*6 pour le nombre d'arrivées possibles pour 6 voitures participant à une course. Se basant sur sa connaissance des manuels et du rapport des élèves au manuel, l'enseignant souligne une certaine dépendance des élèves aux manuels (qui en proposant des exercices semblables suggèrent aux élèves des démarches de résolution problématiques). En somme, le repérage de l'enseignant est guidé par la verbalisation par les élèves de leur raisonnement et une analyse critique des manuels permettant d'expliquer les liens inappropriés qu'ils font.

Lors du retour sur l'aménagement des problèmes (tableau 4.17), à la lumière de l'expérimentation, l'enseignant souligne plusieurs limites dans la formulation ou dans l'illustration du problème 2 et du problème du quadrillage. Pour lui, l'illustration du problème 2 aurait dû être plus significative (ici elle est là seulement pour faire beau), et des exemples auraient rendu le problème plus clair pour les élèves en leur permettant de visualiser toutes les possibilités d'arrivées. À nouveau, l'enseignant manifeste son souci de rendre les énoncés clairs pour les élèves, au besoin en leur donnant des exemples de classements. Toujours sur la nature des énoncés, l'enseignant prenant appui sur sa connaissance des élèves, soulignera une limite dans la formulation du problème du quadrillage dans lequel la structuration des questions posées l'une à la suite de l'autre n'invitait pas les élèves à répondre à toutes.

Lors du retour sur l'animation du scénario 1 (tableau 4.18), l'enseignant explicite un principe important guidant pour lui le retour sur les solutions des élèves : l'importance d'éviter les jugements entre élèves lors des échanges. De sorte que l'enseignant affiche une réticence pour la comparaison, préférant parler d'échange d'idées. Un autre principe guidant le retour sur les solutions est la non importance du vocabulaire, en effet cela n'apporte rien aux élèves pour lui d'utiliser les termes de «modèle» et de «modélisation». Dans l'analyse globale faite de l'activité des élèves pendant la résolution et lors des plénières, l'enseignant souligne le fait que les élèves aient réussi à débattre entre eux et surtout aient eu l'opportunité d'avoir du plaisir à travailler sur des problèmes, de vivre une expérience mathématique riche. L'enseignant explicite donc un but important pour lui dans l'activité des élèves en classe de mathématiques, soit avoir du plaisir dans la résolution de problèmes, vivre une expérience mathématique riche, et, à ce propos il souhaite que les élèves retiennent de l'approche expérimentée avec eux que résoudre un problème peut nécessiter plusieurs essais (la solution ne se trouve pas forcément d'un coup).

Quant au chercheur, son repérage est guidé par son intérêt pour les modèles combinatoires (tableau 4.16). En effet, diverses stratégies de résolution du problème 2 sont repérées chez les élèves, telle l'énumération, l'addition des cas possibles et des tentatives de permutations. Aussi, dans son interprétation des stratégies repérées chez les élèves (tableau 4.16), le chercheur puise à sa connaissance de la combinatoire qui l'amène à voir une pertinence dans le lien établi par certains élèves entre les deux premiers problèmes du scénario 1, le principe multiplicatif étant en jeu dans ces deux problèmes. La difficulté ici est que le principe multiplicatif ne s'applique pas de la même manière dans ces deux problèmes, d'où l'erreur de certains élèves. Le chercheur questionne au passage la manière dont l'enseignant a introduit le principe multiplicatif dans une des classes plus susceptible de vouloir l'appliquer. Deux raisons supplémentaires avancées par le chercheur pour justifier les stratégies des élèves ont trait au fait que ceux-ci n'aient pas pensé en termes de classements de 6 voitures et n'aient pas considéré plus que les 36 cas auxquels ils arrivent, sous-estimant l'ordre de grandeur des classements possibles.

Lors du retour sur l'aménagement des problèmes (tableau 4.17), le chercheur soulignera l'importance dans le problème 2 d'avoir considéré une grande valeur pour la variable didactique «nombre de voitures», ce qui permet en effet de contrer la stratégie par énumération à laquelle plusieurs élèves ont recouru. Le chercheur trouve donc là un élément confirmant ce que nous avons appelé sa perspective didactique. Quant à l'animation effective du scénario 1 (tableau 4.18), le chercheur explicite deux principes le guidant dans le retour sur les solutions des élèves. Pour le chercheur, il importe surtout de permettre la comparaison pour permettre aux élèves de débattre, alors que l'enseignant affiche une réticence pour la comparaison comme nous l'avons indiqué précédemment. Aussi, s'accordant là-dessus avec l'enseignant, un autre principe guidant le retour sur les solutions des élèves est de faire fi des termes de «modèle» et de «modélisation», le vocabulaire étant peu important.

Analysant globalement l'activité des élèves, le chercheur constatera la mise en place d'un jeu de l'échange basé sur un climat relationnel serein, l'émergence d'une communauté de validation, toutes choses importantes pour lui dans le développement du processus de modélisation.

Comme on le voit, l'approche du chercheur eu égard à l'animation ainsi que son repérage des aspects importants dans celle-ci sont guidées par sa perspective sur le processus de modélisation qui le fait valoriser le débat à travers les comparaisons, reléguer au second plan des mots inducteurs tels que «modèle» et «modélisation», porter son attention dans le repérage sur la mise en place d'un jeu de l'échange ou d'une communauté de validation et, ultimement, souhaiter que les élèves retiennent de l'expérimentation du premier scénario une démarche de résolution de problème inspirée du processus de modélisation avec ses phases de formulation et de validation.

Que retenir des ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors du bilan du premier scénario ? D'une part, les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant renvoient à son repérage, à cette capacité d'offrir une lecture des productions des élèves guidé par certains éléments. Dans ce repérage, comme nous l'avons indiqué précédemment, l'enseignant est en effet guidé par la verbalisation par les élèves de leur raisonnement et les liens que ces derniers font. Ces liens l'amène à fournir une explication puisant à une analyse critique des manuels qui selon lui proposent des séries de problèmes construits sur le même modèle et donc induisent une certaine pragmatique de la résolution de problème. D'autre part, les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant lors du retour sur les problèmes renvoient à sa capacité à entrer dans une analyse de ces problèmes, à scruter les énoncés et à y percevoir des limites (en regard des élèves) en termes d'exemples manquants, d'illustration non significative, de format des questions qui n'invitent pas les élèves à répondre à toutes les questions. Enfin, les ressources interprétatives sur lesquelles s'appuie l'enseignant lors du retour sur l'animation du scénario 1 indiquent l'importance pour lui d'éviter les jugements entre élèves dans les échanges, de se garder d'user de termes chargés comme ceux de «modèle» et de «modélisation», et dans le travail sur la résolution de problèmes, l'importance d'amener les élèves à accepter que plusieurs essais peuvent être nécessaires pour résoudre un problème, à avoir du plaisir à travailler sur des problèmes (ce dernier aspect rejoint un des principes qui guide l'enseignant dans sa pratique comme en témoigne l'entrevue réalisée avec lui dans laquelle il affirmait l'importance de faire jouer aux élèves le jeu de l'école avec plaisir : voir la section 4.1.1.1). Autant de principes qui le guident dans le regard qu'il porte.

Quant au chercheur, les ressources interprétatives qu'il mobilise lors de ce bilan renvoient en partie à son repérage, comme pour l'enseignant, un repérage guidé dans la lecture des productions des élèves par son intérêt pour les aspects combinatoires des modèles des élèves, mais aussi un repérage guidé par sa perspective sur la modélisation pour les aspects liés à l'animation, ce qui l'amène à valoriser les «bonnes» comme les «mauvaises» solutions à la différence de l'enseignant qui préfère à ce stade se focaliser sur les bonnes solutions. Aussi, les ressources interprétatives sur lesquelles s'appuie le chercheur dans le retour sur les problèmes du scénario 1 reflètent sa perspective didactique qui l'amène à considérer des variables dans ces problèmes influant sur la résolution des élèves et, après coup, à constater la pertinence de ces variables. La figure 4.10 résume les ressources interprétatives mobilisées de part et d'autre lors du retour le scénario 1 après expérimentation.

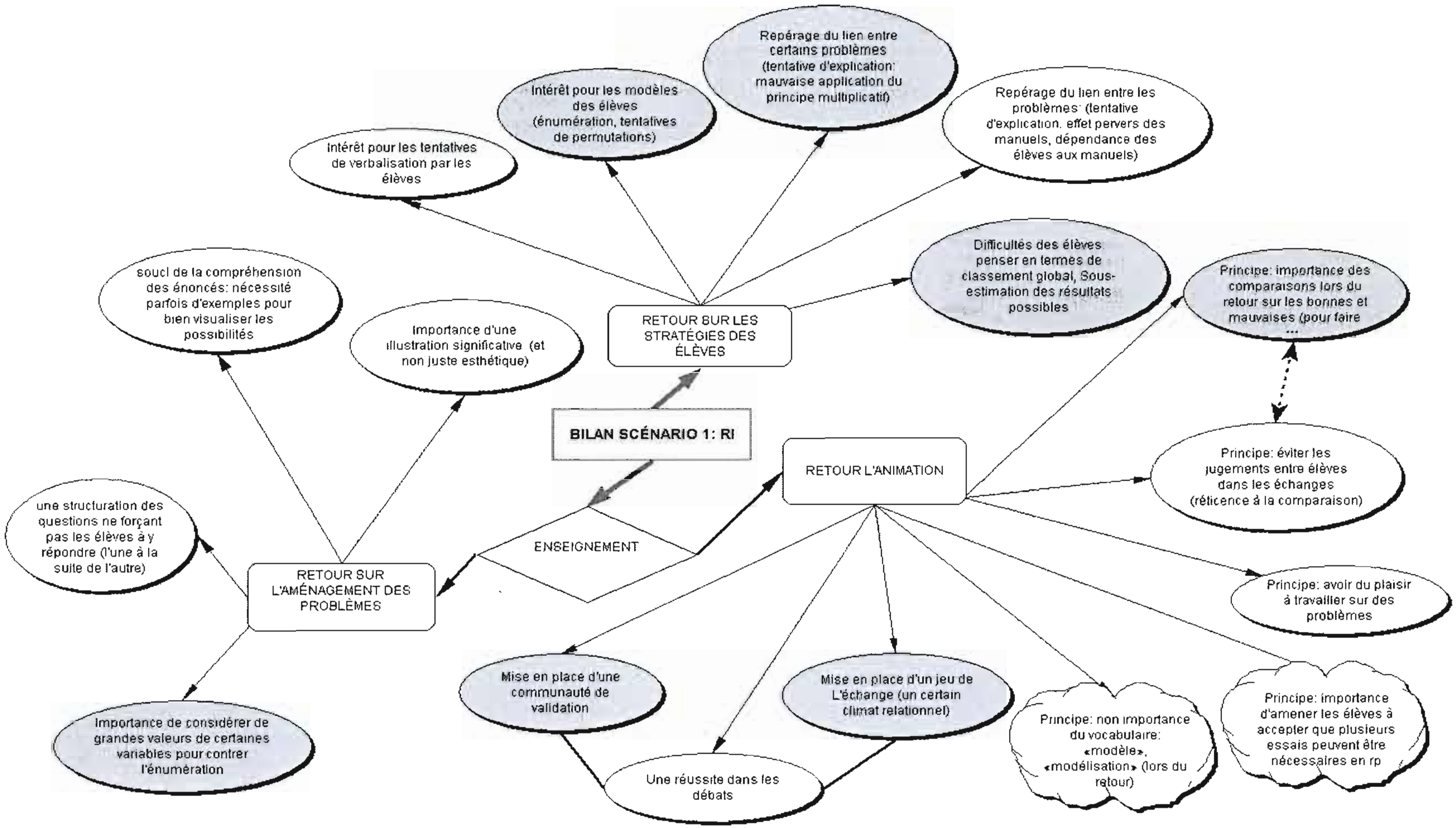



**Figure 4.10 Ressources interprétatives mobilisées lors du retour sur le scénario 1 (1er bilan)**

#### 4.6.5.2 Une analyse en termes de ressources d'action

En lien avec l'aménagement et l'animation, l'enseignant et le chercheur suggèrent différentes approches, des idées pour poursuivre sur la même lancée un travail avec les élèves visant le développement de la modélisation.

Une suggestion majeure d'aménagement des problèmes, pour l'enseignant, est d'éviter à l'avenir les questions posées à la suite, comme dans le cas du problème du quadrillage. Des modalités sont aussi proposées par l'enseignant pour poursuivre le travail entamé, telles travailler avec les élèves des problèmes sur un temps plus long, faire travailler les élèves des projets sans leur montrer la matière, faire débattre de façon anonyme les solutions erronées, relancer autant que possible les élèves lors des échanges. L'enseignant, comme on le voit, entrevoit la suite pour les élèves en termes d'une perspective plus élargie sur la résolution de problèmes, prenant une distance avec une approche centrée sur l'application de modèles ou de notions, valorisant davantage les échanges entre les élèves autour de leurs démarches ou solutions, et ouvrant sur une prise en compte dans le retour des solutions erronées.

Quant au chercheur, la modalité qu'il suggère pour poursuivre le travail entamé avec l'enseignant va dans le sens de travailler avec les élèves des problèmes sur un temps plus long (un problème par période pour le scénario 2), le temps étant nécessaire pour permettre aux élèves de raffiner leurs solutions et de débattre, échanger entre eux. Aussi, il importe de continuer à faire débattre en classe les élèves, en insistant auprès des élèves sur l'importance dans de tels débats d'intervenir dans le sens d'améliorer les solutions des uns et des autres. Là, à nouveau, on voit la perspective du chercheur sur la modélisation vue comme processus cyclique au terme duquel on raffine les modèles créés et avec eux les solutions aux problèmes.

De quel ordre sont les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors du retour sur le scénario 1 ? D'abord pour ce qui est de l'enseignant, les ressources d'action qu'il mobilise consistent pour l'essentiel en des manières de faire voire des routines à introduire dans la classe et ce dans l'optique d'un travail orienté vers le développement de la modélisation. Ces manières de faire qu'entrevoit l'enseignant reflètent plusieurs choses dont une relativisation de l'approche privilégiant l'introduction d'un contenu et un travail par la suite centré sur des exercices portant sur ces mêmes contenus, l'importance d'habituer les élèves à travailler des problèmes sur un temps plus long, l'importance de ne pas soumettre aux jugements des autres les élèves dont les solutions sont erronées lors des débats au cours desquels il considère qu'il faut relancer le plus souvent les élèves.

Quant au chercheur, les ressources d'action qu'il mobilise lors du bilan du scénario 1 renvoient à la façon dont il entrevoit le travail de l'enseignant en classe et le deuxième scénario dans la continuité de l'approche expérimentée. À ce propos, les deux manières de faire qu'il suggère reflètent sa perspective sur la modélisation, soit l'importance de donner aux élèves le temps leur permettant nécessaire de résoudre des problèmes et d'échanger sur leurs modèles et solutions, le but principal des élèves dans de tels débats devant être de toujours intervenir pour améliorer les modèles, stratégies ou solutions des uns et des autres. La figure 4.11 résume les ressources d'action que nous venons de passer en revue.

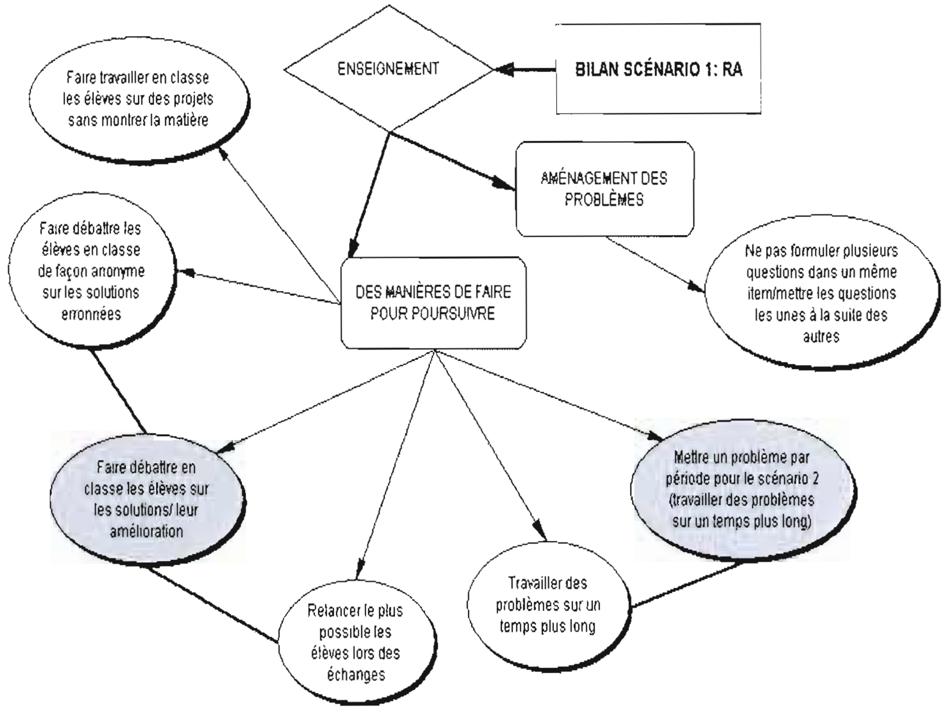



**Figure 4.11 Ressources d'action mobilisées lors du retour sur le scénario 1 (1^er bilan)**

4.6.5.3 Une analyse en termes de sensibilité théorique et de sensibilité pratique

L'enseignant, au-delà de sa grande sensibilité pratique, fait montre d'une sensibilité théorique lors de la rencontre bilan sur le scénario 1. Ainsi, en lien avec le retour sur les solutions des élèves l'enseignant s'accorde avec le chercheur pour ne pas mettre l'accent sur le vocabulaire, car cela n'apporte rien aux élèves pour lui d'utiliser les termes de «modèle» et «modélisation». Aussi, en souhaitant que les élèves retiennent de l'expérimentation du scénario 1 que plusieurs essais peuvent être nécessaires pour arriver à la solution d'un problème, l'enseignant exprime là une sensibilité aux cycles du processus de modélisation.

Quant au chercheur, à côté de la sensibilité théorique qui le caractérise pour l'essentiel lors de cette rencontre réflexive de bilan, il affiche une sensibilité pratique par une prise en compte de la réticence manifestée par l'enseignant aux comparaisons entre élèves, même s'il continue de penser qu'éviter toute comparaison est un obstacle aux débats entre élèves.

## 4.7 Analyse de la rencontre réflexive portant sur le retour sur le scénario 2 après expérimentation ainsi que sur le retour global sur les deux scénarios

Dans cette partie, nous analysons la dernière rencontre réflexive du 22 juin 2007 entre l'enseignant et le chercheur[118], celle-ci ayant été l'occasion d'un retour sur le deuxième scénario ainsi qu'un retour global sur les deux scénarios (voir à ce propos l'appendice C10, le canevas utilisé lors de ce bilan). Cette analyse s'articule autour des points suivants :

1. L'analyse des stratégies utilisées par les élèves pour résoudre le problème dit de «Boris» (le dernier problème du scénario 2);
2. Le retour sur les problèmes des deux scénarios;
3. Le retour sur l'animation du scénario 2.

### *4.7.1 Analyse des stratégies utilisées par les élèves pour résoudre le problème 3 («le jeu de Boris»)*

Comme lors du premier bilan, le choix a été fait de cibler les stratégies utilisées par les élèves en lien avec un seul problème du scénario. L'attention du chercheur et de l'enseignant a été portée sur l'analyse des productions[119] des élèves issues de la résolution du dernier problème du scénario 2, un problème relié au premier problème du même scénario, mais pour lequel le chercheur avait beaucoup d'appréhension quant à son accessibilité pour les élèves. Deux catégories permettent de rendre compte de ce retour effectué sur les stratégies des élèves : un repérage des stratégies observées chez les élèves et une analyse de ces stratégies de la part de l'enseignant et du chercheur.

---

[118] Durée 54 mn.
[119] Là également, comme lors du retour effectué sur le scénario 1, il s'agit de productions autres que celles exploitées en plénière.

4.7.1.1 Un repérage des stratégies observées chez les élèves (5, 7)

Les codes suivants rendent compte des stratégies repérées par le chercheur et l'enseignant chez les élèves lors de la résolution du problème dit de «Boris» (voir appendice D pour quelques modèles crées par les élèves pour résoudre ce problème, et pour avoir une idée de ce dont discutent l'enseignant et le chercheur).

*Lien avec le problème des tours (et la suite de Fibonacci) {2}*
*XXX : eux autres, ils ont vraiment fait le lien avec les tours (132:133)*
*XXX : lui a tout de suite compris Fibonacci, lui il a fait le lien encore avec le premier cours. (95:96)*

Dans les extraits précédents l'enseignant repère que certains élèves ont donc pu saisir le lien entre les deux problèmes, la suite de Fibonacci. Il s'agit là d'une stratégie anticipée par le chercheur et qui s'est avérée.

*Une stratégie par addition {1}*
*XXX : Ré, ça on l'avait déjà souligné, toi-même, tu sais elle s'était séparée de son coéquipier, malheureusement, elle a fait des additions (103:105)*

Il s'agit d'une autre stratégie mentionnée par le chercheur dans le document d'analyse préalable des problèmes du scénario 2 et repérée par l'enseignant. Cette démarche consiste à procéder à une décomposition de l'entier qui donne le nombre de marches de l'escalier. Par exemple, pour un escalier à 10 marches, l'entier 10 est décomposé en différentes sommes «ordonnées» de termes en 1 et 2. Ainsi :

10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 (1 possibilité);

10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+2 = 1+1+1+1+1+1+1+2+1 =...(9 possibilités);

*Recours aux arbres de choix {2}*
*YYY: les arbres, c'est assez curieux, mais les arbres sont revenus (acquiesce), et puis il y a en qui les utilisent assez habilement. (131:132)*
*XXX : ils ont fait des arbres de facteurs dès le début puis ils en font encore. (99:100)*

Le chercheur et l'enseignant repèrent ici le recours aux arbres de choix qu'avait prévu l'enseignant. Le chercheur note que certains utilisent habilement les arbres.

*Recours à des modèles autres que les arbres {1}*
*XXX : mais ils n'ont pas tous fait des arbres (j'acquiesce). Ça prouve qu'il y a en pour qui les arbres, on a beau vanté ça dans la classe, dire que c'est merveilleux tout ça, il y a en pour qui ce n'est pas encore soudé en eux, ce n'est pas construits en eux. (124:126)*

L'enseignant ici insiste sur le fait que les élèves ont utilisé d'autres modèles que les arbres, et ce en dépit de l'importance que peuvent revêtir pour le chercheur les arbres de choix.

*Recours à une diversité de modèles en lien avec le problème de «Boris» {1}*
*YYY : et puis, en termes de, même les modèles aussi, parce que quand même il y a eu pour ce problème pour lequel j'avais beaucoup de craintes, il y a eu pas mal de modèles (110:112)*

Le chercheur ne précise pas de quels modèles il s'agit quand il parle d'une diversité de modèles utilisés par les élèves, mais on sent sa satisfaction d'avoir pu repérer différents modèles en lien avec ce problème pour lequel il avait au départ des appréhensions.

4.7.1.2 Analyse des stratégies utilisées par les élèves (3, 8)

Dans les codes regroupés ici, le chercheur et l'enseignant sont sur les raisons pouvant expliquer certaines des stratégies utilisées par les élèves.

*Une certaine grille de lecture de l'enseignant: lie l'analyse des productions à sa connaissance des élèves ou des équipes {2}*
*YYY : l'idée c'était de voir un peu, de reprendre le problème, puis de voir rétrospectivement comment tu vois les solutions ou les stratégies des élèves. Disons, on pourrait les, c'est sûr que je les ai mises dans le désordre...*
*XXX : c'est sûr, je ne peux pas me déconnecter de qui l'a fait (85:90)*
*YYY : tu fais le lien toi entre évolution des élèves globalement puis un peu le type de solutions qu'ils (acquiesce)... c'est une lecture que je n'avais pas. (108:109)*

Lors de ce retour, fait remarquable, d'emblée l'enseignant expose sa grille de lecture des productions des équipes, soit de lier ces productions/stratégies à sa connaissance des élèves, des équipes, et entrevoit donc une certaine évolution. Il est donc à la fois sur une interprétation des stratégies des élèves et sur une évaluation des équipes comme on le verra dans certains des extraits suivants.

*Des stratégies témoignant d'une évolution des élèves (s'appuyant sur sa connaissance des élèves/des équipes) {6}*
*XXX : bon Ém ainsi qu'Ér, c'est deux autres élèves qui ont beaucoup de difficultés, donc eux autres ils ont vraiment fait le lien avec les tours, ça je suis satisfait, ça dénote une amélioration, je vois qu'ils se sont investis. (94:97)*

Des élèves en difficulté mais qui ont pu s'investir dans la recherche du problème et arriver à voir le lien avec le problème des tours.

*XXX : en plus, Ca c'est une élève qui est en récupération, Co c'est un élève qui est un tout petit peu plus fort, donc c'est un bon travail d'équipe. (102:103)*

Un groupe moyen arrivant à bon travail d'équipe (hélas, nous ne sommes pas capables à l'aide du seul verbatim de retracer la stratégie ici en question)

*XXX : Ré, ça on l'avait déjà souligné, toi-même, tu sais elle s'était séparée de son coéquipier, malheureusement, elle a fait des additions, ça je trouve que pour elle c'est une amélioration, ça c'est clair. (103:106)*

Une élève qui a eu des problèmes à se mettre en équipe et qui est arrivée à une stratégie qui n'était pas à la portée de beaucoup d'élèves.

*XXX : eux autres, Ma, je me souviens que, Ma elle peut travailler en dents de scie, donc ce cours là elle a décidé qu'elle va travailler. (118:119)*

Là encore, une élève qui décide de s'investir dans la résolution, une qui travaille en dents de scie.

*XXX : Ga, le petit blond qui a trouvé la suite de Fibonacci, lui c'en est un qui on dirait qui s'est ouvert beaucoup quand, son examen je peux te le montrer tantôt, il verbalise beaucoup comme ça, ce qu'il ne faisait pas au début de l'année. Donc, c'est comme si on lui avait donné un go, dire hey nous on aime ça que tu fasses ça, donc lui s'est dit hey, je vais toujours faire ça maintenant, je peux m'exprimer. (137:142)*

L'enseignant souligne ici les performances d'un élève qui aura été le seul à avoir explicitement mis en évidence la suite de Fibonacci, un élève qui s'exprime beaucoup depuis qu'il sait qu'on valorise l'argumentation.

*XXX : il y a Fr qui est un élève qui va sans doute échouer son année, puis So qui, je confirme qu'elle va échouer son année. Donc, je trouve que ça pour le dernier problème, qu'ils aient risqué quelque chose comme ça, tu vois qu'ils ont évolué, parce qu'ils ne sont pas encore construits eux autres. Donc, ça, moi je suis satisfait d'eux (90:94)*

Un certain investissement d'un groupe en échec dans la résolution de ce problème, une chose remarquable pour l'enseignant

Globalement, avec les extraits regroupés sous cette catégorie, l'enseignant souligne un certain investissement d'élèves pas toujours motivés ou d'élèves en difficulté ou en situation d'échec. Il souligne également la belle progression d'un élève qui aura été le seul à avoir établi explicitement la suite de Fibonacci. L'évolution dont témoigne l'enseignant dans les extraits regroupés sous ce code concerne autant les stratégies que le fonctionnement des élèves (leur investissement, leur travail en équipe).

*Effets des modèles induits {1}*
*XXX : c'est sûr que d'avoir vu des modèles induits d'arbres, tout ça, ça les a certainement influencés. Tu sais, à un moment donné là, je pense qu'ils sont allés chercher ça, parce qu'ils ont trouvé logique de faire quelque chose comme ça (121:124)*

Là, l'enseignant invoque vaguement la possibilité que les modèles vus précédemment aient influencés les élèves, tels les arbres de choix, le principe multiplicatif (l'analyse précédente du récit annoté du scénario 2 va dans ce sens).

Le tableau 4.19 résume les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors du retour final sur les stratégies utilisées par les élèves pour résoudre un des problèmes du scénario 2, le dernier problème («le jeu de Boris »).

**Tableau 4.19 Ressources mobilisées lors du retour sur les stratégies utilisées par les élèves en lien avec le scénario 2**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Repérage de différentes stratégies :**<br>• recours aux arbres de choix<br>• recours à une diversité de modèles (contrairement à ses appréhensions) | **Repérage de différentes stratégies :**<br>• recours aux arbres de choix<br>• recours à des modèles autres que les arbres<br>• lien avec le problème des tours et la suite de Fibonacci (une stratégie anticipée par le chercheur)<br>• une stratégie par addition (une décomposition en somme de l'entier correspondant à la hauteur de l'escalier)<br><br>**Une certaine interprétation de certaines stratégies :**<br>• Une grille particulière de lecture : lie l'analyse des productions à sa connaissance des élèves ou des équipes<br>• différentes stratégies témoignant d'une évolution des élèves (élèves pas toujours motivés ou en difficultés qui s'investissent, travail représentatif de l'équipe, performance remarquable de certains élèves)<br>• effet des modèles induits (arbres de choix, principes multiplicatif) |

### *4.7.2 Retour sur les problèmes des deux scénarios (7, 8)*

L'enseignant et le chercheur sont également revenus sur les problèmes des deux scénarios à la lumière de la dernière expérimentation mais aussi de la première. Le retour prend la forme d'une évaluation globale des aménagements apportés aux problèmes et débouchent sur d'autres aménagements, de l'intérêt pour les élèves des problèmes. Quelques pistes sont aussi esquissées pour une future exploitation de certains des problèmes.

> *Le problème de «Boris»: une mise en situation à retravailler pour son caractère vraisemblable {1}*
> *YYY : le problème de Boris, comme tu dis, il n'est pas mauvais comme tel, mais c'est juste que... la mise en situation est à retravailler (53:54)*

Le chercheur à la lumière d'une certaine perception du problème de «Boris» (comme nous l'avons vu dans l'analyse du récit annoté ce problème a été jugé «irréaliste» par certains élèves), suggère ici de revoir la mise en situation de ce problème.

> *Le problème des tours: un aménagement réussi en termes de clarté (pour éviter les questions sans réponses) {1}*
> *XXX : mais, pour ce qui est des tours, on l'avait déjà pas mal compartimenté en marquant a), b) et c), ça je pense que les élèves ont bien compris, ça je pense qu'il est assez clair. Le problème parfait n'existe pas... (60:63)*

Comme dans le récit annoté, l'enseignant souligne à nouveau que la solution apportée à la problématique des questions laissées sans réponse a été trouvée. Il s'agit là d'un aménagement réussi.

> *Intérêt du problème des tours (un problème type pour le niveau secondaire 1) {1}*
> *XXX : le matériel, même si je trouve que ça pollue un peu, je trouve que ça se rapproche un tout petit peu plus de l'ambiance de première secondaire. Ils peuvent manipuler, donc je trouvais qu'ils le saisissaient bien, mais il n'est pas vraiment beaucoup meilleur que le problème de Boris, le problème des escaliers. (41:45)*

L'enseignant est ici sur l'intérêt du problème des tours qui en permettant aux élèves de manipuler des blocs est typique d'un problème de niveau secondaire 1.

> *Intérêt du problème du quadrillage (un très bon problème de dénombrement) {1}*
> *XXX : ce problème est super bon pour arriver aux arbres de choix et tout ça, ça c'est à conserver. Lui, puis le problème des tours, moi je dirai que le problème peut-être que j'ai le plus aimé, c'est vraiment à brûle-pourpoint que je te dis ça, c'est le quadrillage. Ça je trouve que c'est un très bon problème de dénombrement, qui n'est pas exploité dans les manuels, puis qui est très, très riche. (199:204)*

L'enseignant revient à nouveau sur le dernier problème du scénario 1. Ce problème lui apparaît comme un très bon problème de dénombrement qui permet de travailler les arbres et qui ne se retrouve pas dans beaucoup de manuels. Au passage, dans l'extrait précédent, il souligne aussi l'intérêt du premier problème du scénario 2, le problème des tours.

*<u>Suggestion d'enlever les problèmes introductifs du scénario 1 (des problèmes pas assez riches)</u> {1}*
*XXX : je pense que l'année prochaine, peut-être que ça va compléter une autre question que tu as posé auparavant, mais je pense que les problèmes qu'on a fait au départ avec les feux de circulation,... qu'on a donné comme hors-d'œuvre,... je ne suis pas sûr que je les redonnerai.*
*YYY : tu ne les mettrais pas*
*XXX : je ne suis pas sûr.*
*YYY : pourquoi?*
*XXX : ben, parce que je ne les trouve pas assez riches. (238:249)*

L'enseignant suggère de modifier le scénario 1, en enlevant les problèmes introductifs qui rétrospectivement ne lui paraissent pas assez riches.

*<u>Suggestion de conserver le problème du quadrillage et le problème des tours (de très bons problèmes)</u> {1}*
*XXX : ce problème est super bon pour arriver aux arbres de choix et tout ça, ça c'est à conserver. Lui, puis le problème des tours (199:201)*

L'enseignant affirme ici sa préférence pour le dernier problème du scénario 1 et le premier du scénario 2 qui sont à conserver pour lui.

*<u>Suggestion de conserver le problème 2 (un bon problème pour travailler les suites)</u> {2}*
*XXX : le problème des poignées de mains, moi je change de collection l'an prochain, donc ça serait un bon problème à garder.*
*YYY : celui-là*
*XXX : oui, ça c'est sûr pour les suites c'est bon. Je pense que pour les suites, je trouve que les manuels ne sont pas assez riches, (18:24)*
*XXX : donc, c'est sûr que moi pour les suites, je garderai...le problème des poignées de mains je le garderai (30:31)*

Un autre problème à garder, le problème des poignées de mains et ce pour travailler les suites pour lesquelles les manuels ne proposent pas des choses riches. Le tableau 4.20 résume les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors du retour sur les problèmes des deux scénarios ainsi que sur ces scénarios mêmes.

**Tableau 4.20 Ressources mobilisées lors du retour sur les problèmes des deux scénarios**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Retour sur l'aménagement des problèmes et suggestions :**<br>• le «jeu de Boris» : une mise en situation à retravailler pour son caractère vraisemblable | **Retour sur l'aménagement des problèmes et suggestions :**<br>le problème des tours : un aménagement réussi pour sa clarté (pour éviter les questions sans réponses)<br><br>Retour sur les scénarios 1 et 2 et suggestions :<br>• enlever les problèmes introductifs du scénario 1 (pas assez riches)<br>• intérêt du problème du quadrillage dans le scénario 1 : un bon problème de dénombrement<br>• intérêt du problème des tours dans le scénario 2 : un problème qui se rapproche de l'ambiance de secondaire 1<br>• le problème du quadrillage et celui des tours : des problèmes à conserver<br>• le problème des poignées : un problème à conserver pour travailler les suites |

### *4.7.3 Retour sur l'animation du scénario 2*

Quatre catégories rendent compte du retour fait par l'enseignant et le chercheur sur l'animation du scénario 2 : un principe orientant l'approche de l'animation, une évolution de l'attitude des élèves lors de la phase de recherche et lors des plénières, des manières de faire pour continuer à travailler en classe un travail visant le développement de la modélisation.

#### 4.7.3.1 Sur l'approche privilégiée lors de l'animation (1, 1)

Concernant l'animation du retour, un principe global guide le chercheur et l'enseignant, soit d'éviter d'induire, de suggérer des modèles aux élèves.

> <u>*Le souci d'éviter d'induire des modèles jusque dans la terminologie*</u> *{1}*
> *YYY : j'essaie de me replacer un peu, pourquoi on n'a pas tellement parlé de modèles comme tel ou de modélisation, modèles peut-être qu'on l'a utilisé un peu plus, mais on n'a pas parlé de modélisation, j'ai l'impression que, est-ce que ça n'a pas été le fait que dès le début, quand on a essayé les arbres de choix dans un groupe puis pas dans un autre groupe, puis on a vu ce que ça a donné, j'ai*

*l'impression qu'on a eu plus de retenue par rapport à ça, on évitait même dans la terminologie d'induire ou d'orienter quelque part le travail des élèves (acquiesce). Bon j'essaie de, peut-être que ce n'est pas ça, mais j'ai comme l'impression que ça a joué un peu. (576:584)*

Pour cela, la précaution va jusque dans le choix des termes afin de ne pas orienter d'une façon ou d'une autre le travail des élèves.

4.7.3.2 L'attitude des élèves pendant la résolution et en plénière : une certaine évolution (7, 10)

Globalement, comme le montrent les codes regroupés ici, l'enseignant et le chercheur notent une évolution dans l'attitude des élèves pendant la phase de recherche mais aussi lors des plénières, et des facteurs pouvant expliquer une telle évolution.

*Moins de requêtes de validation de la part des élèves {3}*
*XXX : je pense qu'ils demandaient moins de validation à la fin (271:271)*
*YYY : mon regard de chercheur à moi, je partage une chose, j'ai senti moins de demandes de validation, ça je l'ai senti (303:305)*
*.YYY : j'ai senti plus ça, parce que la validation c'était nous deux, ils nous demandaient moins, et puis quand on les relançait, qu'est-ce que tu en penses et tout ça, ils jouaient moins le jeu de, ils retournaient et discutaient avec leur collègues. (306:309)*

L'enseignant et le chercheur s'accordent donc sur le fait qu'ils ont senti moins de requêtes de validation de la part des élèves. Il s'agit là, rappelons-le, d'une attente particulière que l'enseignant avait formulé pour ce second scénario.

*Une plus grande persévérance des élèves lors de la résolution {1}*
*XXX : qu'on leur demande de travailler pendant 45 ou 50 mn sur le même problème, ça je trouve qu'à la fin c'est un gros plus que peut-être au départ, ils étaient un tout petit peu perdu en novembre. Ça, ça a changé. (271:274)*

L'enseignant revient sur cet aspect de la persévérance des élèves, une évolution majeure depuis l'expérimentation du premier scénario en novembre.

*<u>Une évolution dans la manière d'interagir en plénière (au-delà des mathématiques, un certain savoir-être en plénière)</u> {2}*
*XXX : c'est peut-être dans leur manière d'interagir en plénière, ça il le savait un tout petit peu plus, on n'a pas eu besoin de réexpliquer ça, donc je pense qu'au niveau du savoir-être en plénière il y avait un acquis (294:297)*

L'enseignant souligne que les élèves ont montré qu'ils avaient assimilé comment fonctionner en plénière, ce qu'il appelle un savoir-être en plénière.

*XXX : c'est sûr que moi en secondaire 1, c'est beaucoup le savoir-être qui est important dans le bilan, tu sais, c'est sûr qu'ils aient appris sur le dénombrement c'est important pour moi, mais cet aspect là d'échanges entre eux c'est très formateur pour eux, puis je pense qu'ils vont se souvenir de ça l'an prochain. Je ne crois pas qu'ils vont, ha je pense que oui, parce que ça a touché leur émotif, je pense qu'ils vont se souvenir qu'ils ont fait des problèmes, ils ne savent pas que ce sont des problèmes de dénombrement, mais ce sont des problèmes qui pouvaient se résoudre...*
*YYY : même ça aussi, on ne l'a pas beaucoup utilisé, dénombrement, on a été assez timide dans les termes là.*
*XXX : oui, mais c'est plus sur cette expérience là qu'ils vont avoir eu, de faire des échanges en plénières, ça j'espère que l'an prochain ils vont être capables de, qu'ils vont retirer un savoir-être de ça, pour moi c'est important ça. (632:645)*

L'enseignant valorise beaucoup en secondaire 1 cette capacité des élèves à savoir interagir avec d'autres, et il estime dans les extraits précédents que le travail fait avec eux aura été formateur pour les élèves, marquant pour eux et qu'ils vont s'en souvenir pendant longtemps.

*<u>Une évolution des élèves dans la continuité du travail fait en classe et de l'expérimentation en lien avec les problèmes écrits</u> {1}*
*XXX : je pense que le fait que j'ai fait autant de problèmes écrits avec eux couplé avec l'expérimentation qui était sur des problèmes, c'est sûr que ça n'a pas nui (361:363)*

L'enseignant indique là un facteur ayant pu jouer dans l'évolution des élèves, soit le fait d'avoir travaillé sur des problèmes écrits, en classe, et à travers les deux scénarios.

*<u>Une intégration du mode de fonctionnement, dans la continuité de la première expérimentation qui a installé une routine de fonctionnement</u> {1}*

*XXX : non, je pense que la première expérimentation a mis les bases pour la deuxième, puis tout de suite ils savaient comment on allait travailler, ils n'ont pas posé de questions, ils avaient déjà une première expérience. Donc, je pense qu'ils ne partaient pas au point a) là, ils partaient au point b), et puis...*
*YYY : ça continuait*
*XXX : je pense que c'est plus la première expérimentation qui a fait que, c'est leur première expérience qui a fait que la deuxième s'est bien déroulée, je ne pense pas que c'est dû à mon intervention entre les deux. (313:322)*

L'enseignant estime que la première expérimentation a promu une routine de fonctionnement que les élèves ont bien intégrée, ce qui explique que la deuxième expérimentation se soit bien passée. L'enseignant semble dire que le travail fait en classe avec les élèves entre les deux scénarios n'aura pas été déterminant.

*Une évolution dans la continuité du travail fait en classe avec les élèves (une reconnaissance du travail fait en classe amenée par le chercheur) {1}*
*YYY : je me souviens, tu m'avais montré un problème, une situation de validation je pense, que tu as travaillé avec eux (acquiesce), et puis moi je voyais un travail comme de continuité un peu dans...*
*XXX : oui, c'est rien que, je ne faisais pas de plénière, ben tu sais je dis ça, je ne faisais pas de plénière formelle avec des acétates, tout ça, mais c'est sûr que quand ils faisaient des situations d'apprentissage et d'évaluation, je les questionnais en classe. Bien là, de leur donner la parole, c'est un tout petit peu ça qu'on faisait, mais tu sais j'en ai fait des situations, des problèmes durant l'étape, peut-être que depuis le début de l'année ça a influencé, je ne sais pas.*
*YYY : ok, ok. Bon, c'était ça, tu l'as dit, parce qu'il y a une des questions qui dit, est-ce que dans la façon dont ils ont travaillé le scénario 2 il y a des liens avec autre chose, c'est-à-dire la façon dont tu as travaillé avec eux hors expérimentation. Parce que, je ne veux pas juste qu'on voit ici là une évolution ou des acquis chez des élèves juste à cause de, tu vois, bon je me dis que quelque part, c'est clair qu'ils sont avec toi toute l'année...*
*XXX : ben, peut-être qu'effectivement que ce que j'ai fait avec eux entre les deux a aidé, je penserai là, mais bon. (324:343)*

Dans cet échange, l'enseignant et le chercheur discutent de la pertinence de retenir le travail fait en classe dans l'évaluation. Le chercheur amène l'enseignant à concéder que le travail qu'il a fait avec les élèves a pu jouer dans leur évolution, par exemple à travers certaines situations travaillées et des plénières certes moins organisées que celles de l'expérimentation.

> *Une évolution des élèves en regard de la compétence à communiquer sur laquelle l'enseignant insiste* {1}
> *XXX : sur les tableaux, je ne sais pas si tu te souviens, il y avait trois cartons qui mettaient en évidence les trois compétences, je pense que j'ai beaucoup verbalisé mes attentes durant toute l'année, qu'ils communiquent clairement...*
> *YYY : et puis les autres.*
> *XXX : je pense que ça, ça a aidé. Fait que, je pense qu'ils ont évolué c'est sûr depuis le début de l'année, mais je ne suis pas assez outillé pour dire qu'est-ce qui a amené des changements, puis quels sont exactement ces changements. (363:372)*

L'enseignant indique un autre élément ayant pu contribuer dans l'évolution des élèves, le fait qu'il ait insisté sur l'importance qu'ils communiquent clairement. Nous savons qu'il s'agit là d'un but important comme en atteste l'analyse de l'entrevue préalable à la recherche avec l'enseignant.

4.7.3.3 Des manières de faire visant le développement de la modélisation à réinvestir dans la pratique (7, 12)

Dans la perspective d'un enseignement visant le développement de la modélisation, le chercheur et l'enseignant (surtout) avancent différentes propositions, dans la continuité du travail conjoint réalisé. Il s'agit là de mesures d'installation (en début d'année surtout) et d'entretien (au fil de l'année) de différentes manières de faire ou routines visant le développement du processus de modélisation.

> *Garder le format des plénières de cette expérimentation* {2}
> *XXX : non, je garderai la même procédure, l'an prochain je vais garder la même procédure sur le format, ça je t'en ai déjà parlé, les plénières. (59:60)*
> *XXX : c'est que je ne veux pas me répéter, mais je dirai que le format des plénières c'est de quoi qui est gagnant, qu'il faut conserver. (551:552)*

L'enseignant estime d'abord que le format des plénières est gagnant. Indiquons que les «plénières» ou retours collectifs ont été privilégiées pour permettre aux élèves de partager, revisiter, raffiner leurs modèles. Ainsi, lors des plénières, des équipes choisies par l'enseignant et le chercheur devaient, dans un premier temps, présenter et justifier leurs modèles pour un problème donné. Ensuite, suivait une période d'échanges au cours de laquelle la classe était invitée à améliorer ces modèles, voir leurs liens à d'autres modèles. Pendant ces plénières, le rôle de l'enseignant était surtout de rappeler aux élèves que l'important est la diversité des façons de faire, de faire débattre les élèves, de les relancer afin qu'ils aillent plus loin.

> *<u>Éviter au début pour les fins du retour de faire un tri des solutions des élèves en fonction de la justesse des solutions</u> {2}*
> *YYY : est-ce qu'il y a des choses sur lesquelles tu mettrais plus l'accent dans la façon dont on a travaillé avec les élèves lors des plénières ou tu procéderais de la même manière? Sur quoi mettrais-tu plus l'accent maintenant que tu l'as vécu?*
> *XXX : je pense qu'en début d'année, ..., je ne ferai quasiment pas de sélection, j'irai, bon ou pas bon, je les enverrai...*
> *YYY : ok, les solutions des élèves.*
> *XXX : oui. Parce que je me souviens qu'au début, je ne voulais pas les induire en erreur et je voulais toujours aller au plus efficace, puis je ne pense pas que c'est important ça. Fait que, je ne ferai pas beaucoup de tri (150:162)*
> *XXX : donc, moins de tri au début (176:176)*

Pour l'enseignant, il importe lors du retour de ne pas distinguer les bonnes et les moins bonnes solutions, l'important pour lui n'était plus d'aller au plus efficace, mais de discuter des différentes stratégies de résolution.

> *<u>Renvoyer le plus possible la balle aux élèves lors des retours (verbaliser ce qu'on attend d'eux dans les plénières)</u> {2}*
> *XXX : je pense encore qu'en début d'année qu'est-ce que je vais faire l'an prochain, je vais beaucoup les éduquer sur comment faire une plénière. Parce qu'au début ils ne savent pas, il faut verbaliser ce qu'on attend d'eux, donc comment s'exprimer, tout ça, qui n'est pas vraiment en lien avec leur dessins, quoique ce soit, c'est plus sur l'interaction, tout ça. Je conserverai beaucoup leur renvoyer la balle, leur demander ce qu'ils en pensent, ça c'est la phrase clé, qu'est-ce que vous en pensez vous autres? (162:168)*
> *XXX : Peut-être au fil de l'année, quand je vais le refaire là, je vais peut- être plus en arriver, pour que ce ne soit vraiment pas fastidieux, rien qu'à deux solutions, qui sont bonnes, puis qu'est-ce que vous en pensez, deux solutions différentes? (177:179)*

L'enseignant est ici sur la nécessité en début d'année d'installer certaines routines d'échanges et de les maintenir durant l'année, entre autre beaucoup la routine consistant à relancer les élèves pour les amener à verbaliser davantage, débattre entre eux.

> <u>*Retarder la bonne réponse lors des retours*</u> *{1}*
> *XXX : Puis, les laisser toujours sur, pas tout de suite confirmer ou infirmer si c'est bon ou pas. Là, ce n'est vraiment pas ce que j'avais au début comme plénière, je voulais tout de suite arriver au point a, point b, dire ça c'est la bonne réponse. Puis, je pense que si tu n'avais pas été là, tout de suite j'aurai donné les réponses. (168:172)*

L'enseigne décline là une manière de faire permettant de laisser les élèves valider entre eux, améliorer leurs solutions, soit de suspendre la bonne réponse, d'éviter de la sorte de clôturer trop vite les échanges.

> <u>*Énumérer les modèles des élèves lors des retours (les nommer)*</u> *{3}*
> *XXX : je dirai beaucoup, je retaperai sur le clou pour les élèves, j'insisterai sur qu'est-ce que c'est qu'un modèle, parce que là on n'a pas dit aux élèves qu'ils faisaient de la modélisation (je confirme), mais je soulignerai intensément, bon de dire il y a des élèves qui ont fait un schéma en arbre, qui a fait un schéma en arbre, est-ce que vous pensez que c'est une bonne, on l'a fait mais lors du retour j'énumérerai tous les modèles possibles tu sais, schéma en arbre, des mots, des tableaux...(552:558)*
> *XXX : je pense qu'ils le voyaient, tu sais, ils le voyaient quand on a dit que Jé a fait un tableau, tu sais c'est comme lui il a fait un tableau, puis les élèves le voyaient. Mais ce serait de, puis s'il en manquait on disait des fois dans le groupe CC, on disait on va prendre un acétate du groupe BB, ça je pense qu'il faut le faire ça, il faut le montrer, il faut être exhaustif sur ces modèles, sans leur dire qu'ils font de la modélisation, mais il faut leur dire, ça c'est un point important. (562:567)*
> *YYY : au moins essayer de nommer autant que possible les modèles auxquels ils arrivent.*
> *XXX : oui, les énumérer pour les élèves (569:572)*

L'enseignant estime qu'il est important d'être exhaustif sur les modèles des élèves, de les mettre en évidence, de les nommer.

*<u>Nommer prudemment les modèles des élèves lors des retours (un intérêt de nommer les modèles des élèves questionné)</u> {1}*
*YYY : la difficulté que je vois, c'est mon point de vue à moi, la limite que je vois dans peut-être nommer ou donner un nom explicite aux modèles même implicites des élèves...*
*XXX : par exemple dire schéma en arbre.*
*YYY : oui, tout ça, quand c'est standardisé ou quand c'est un modèle implicite qui est assez proche de modèles connus, leur donner un nom est assez simple, par exemple un tableau c'est assez standard ou un arbre de choix (acquiesce), mais tu vois ça (je désigne un modèle sur une des copies), peut-être que c'est un dessin là, dessin ça peut être un nom générique pour dire ça, mais j'ai l'impression que heu...on peut le faire hein, on peut être assez didactique pour le faire quoi, pour quand même trouver comme des noms génériques ou des noms assez commodes pour désigner, donner différents noms aux modèles qui sont là, mais je me pose la question de quel intérêt. (595:608)*

Le chercheur questionne l'intérêt de nommer les modèles des élèves, ces dernières étant plus difficiles à nommer quand ils s'écartent des modèles standardisés.

*<u>Sur la question de l'institutionnalisation : qu'est-ce que les élèves devraient retenir</u> {1}*
*YYY : Peut-être que c'est pour qu'ils retiennent mieux, parce que la question que tu poses et à laquelle je n'ai pas beaucoup pensé dans cette recherche, c'est la question de l'institutionnalisation, c'est-à-dire quoi retenir à la fin, comme un peu quand tu fais une activité puis à la fin il faut qu'on retire quelque chose. Ça, c'est peut-être une question importante à laquelle on n'a pas beaucoup réfléchi, mais si on veut initier à la modélisation en partant des modèles implicites des élèves, comment faire le travail d'institutionnalisation, c'est-à-dire finalement quoi retenir des élèves, comment nommer ce que les élèves font, et puis...*
*XXX : c'est vrai, ça peut être dangereux de trop nommer, mais...il y a en qui sont curieux*
*YYY : oui, c'est ça. Je trouve que ce genre de modèle comme ici là, le problème des escaliers, c'est un modèle qui est plus dessin, hein, on l'a dit comme tel, des fois tu le ramassais comme tel, il y a en qui ont fait des dessins (confirme), quand tu le disais c'est ça, et pour moi dessins c'est assez neutre, cela n'induit rien, donc ça marche (acquiesce). Peut-être que cet effort, on ne l'a pas suffisamment fait, mais si on l'avait mieux fait peut-être, ça aurait pu permettre aux élèves de mieux répertorier, de faire le point, de savoir on est passé à ça, puis ça, à cette stratégie, ce n'est pas peut-être une mauvaise chose, tu vois. Parce qu'ultimement c'est ça aussi, quand on fait des choses en classe c'est pour qu'à la fin pour toi que les élèves retiennent quelque chose de ce qu'on fait. (609:630)*

L'enseignant et le chercheur discutent ici sur le processus d'institutionnalisation. Pour le chercheur, l'intérêt de nommer, d'insister sur les modèles des élèves, comme le suggère l'enseignant, est d'aider les élèves à faire le point, mais encore faut-il le faire dans des termes neutres (tel le terme de «dessins»), surtout s'il s'agit d'un retour suivi d'une autre étape de résolution de problèmes. Cette question de l'institutionnalisation a été laissée en rade durant cette recherche, de l'avis même du chercheur.

Le tableau 4.21 résume les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors du retour sur l'animation du scénario 2.

**Tableau 4.21 Ressources mobilisées lors du retour sur l'animation du scénario 2**

| Le chercheur | L'enseignant |
|---|---|
| **Approche privilégiée lors du retour :**<br>• le souci d'éviter d'induire des modèles jusque dans la terminologie | **Approche privilégiée lors du retour :**<br>• le souci d'éviter d'induire des modèles jusque dans la terminologie |
| **Repérage d'une évolution dans l'attitude des élèves (pendant la résolution et dans les échanges lors des plénières) :**<br>• moins de requêtes de validation | **Repérage d'une évolution dans l'attitude des élèves (pendant la résolution et dans les échanges lors des plénières) :**<br>• moins de requêtes de validation (une attente satisfaite)<br>• une plus grande persévérance des élèves lors de la résolution<br>• une évolution du savoir-être en plénière (un aspect privilégié par l'enseignant en secondaire 1) |
| **Repérage de facteurs ayant pu jouer dans cette évolution :**<br>• les acquis du travail fait en classe : continuité avec les situations de validation (dont l'enseignant lui a parlé) | **Repérage de facteurs ayant pu jouer dans cette évolution :**<br>• les acquis du travail fait en classe : les problèmes travaillant la validation, les problèmes écrits, le développement de la compétence à communiquer (une insistance là-dessus)<br>• les acquis de la première expérimentation : base installée (routines), intégration du mode de fonctionnement en plénière, continuité dans le travail avec les problèmes écrits |
| **Des manières de faire suggérées pour développer la modélisation :**<br>• pour le retour : nommer prudemment les modèles des élèves (surtout avant le retour final, pour ne pas influencer les élèves), nommer les modèles pour aider les élèves à retenir (une entrée pour l'institutionnalisation) | **Des manières de faire suggérées pour développer la modélisation :**<br>• garder le format des plénières : un format gagnant<br>• pour le retour : éviter au début un tri des solutions des élèves (en fonction de leur justesse), verbaliser aux élèves ce qu'on attend d'eux, renvoyer le plus possible la balle aux élèves (les relancer souvent pour leur permettre de débattre davantage), retarder la bonne réponse, énumérer les modèles des élèves (les nommer) |

### *4.7.4 Quelle lecture faire de l'analyse de la rencontre réflexive portant sur le retour sur le scénario 2 après expérimentation ainsi que sur le retour global sur les deux scénarios ?*

Les éléments se dégageant de l'analyse de la dernière rencontre réflexive entre l'enseignant et le chercheur permettent de caractériser les ressources mobilisées par les deux en termes de ressources interprétatives et de ressources d'action (tableaux 4.19, 4.20 et 4.21).

4.7.4.1 Une analyse en termes de ressources interprétatives

Lors du retour sur les stratégies utilisées par les élèves dans la résolution des problèmes du scénario 2 (tableau 4.19), le repérage de l'enseignant est guidé en partie par la nature des modèles des élèves. Ainsi, l'enseignant repère différentes stratégies, telles le recours au modèle de l'arbre de choix, la décomposition en somme de l'entier correspondant à la hauteur d'une tour donnée (une stratégie mentionnée par le chercheur dans le document d'analyse accompagnant la première version du scénario 2) et le recours à la suite de Fibonacci comme modèle permettant de solutionner le problème des tours (une prédiction du chercheur). Comme on le voit, le repérage de l'enseignant confirme certains des modèles mentionnés ou prédits par le chercheur.

Dans l'interprétation des stratégies utilisées par les élèves (tableau 4.20), l'enseignant évoque l'effet des modèles induits, tels les arbres de choix et le principe multiplicatif, là encore considérant des modèles combinatoires introduits tôt dans une des deux classes avant l'expérimentation du scénario 1. Dans l'interprétation d'autres stratégies ou modèles utilisés par les élèves, l'enseignant lie les productions à sa connaissance des élèves (leurs difficultés, faiblesses, forces) et considère une évolution des élèves. Pour l'enseignant, ces modèles et stratégies reflètent selon le cas, une évolution de certains élèves qui se sont investis même s'ils sont en difficulté ou ne sont pas toujours motivés, mais aussi ces stratégies et modèles sont représentatifs du travail de certaines équipes ou du très bon niveau de certains élèves.

Quant au retour global sur les problèmes des scénarios 1 et 2 (tableau 4.20), l'enseignant porte son attention sur leur clarté, insistant au passage sur la structuration réussie des questions dans les problèmes du scénario 2, et sur l'intérêt de certains problèmes comme le problème du quadrillage, un bon problème de dénombrement pour lui, et le problème des tours, un problème qui se rapproche de l'ambiance de secondaire 1 parce que permettant la manipulation.

Le retour sur l'animation du scénario 2 est l'occasion pour l'enseignant d'indiquer l'approche privilégiée dans l'animation, soit le souci d'éviter d'induire des modèles et ce jusque dans la terminologie (tableau 4.21). Le repérage de l'enseignant sur l'animation est guidé par des attentes formulées précédemment (en lien avec la validation et la coopération entre élèves) et le souci de voir s'il y a eu une évolution des élèves à cet égard et les facteurs permettant d'expliquer cette évolution le cas échéant. L'enseignant constate qu'il y a eu moins de requêtes de validation de la part des élèves, une plus grande persévérance de leur part lors de la résolution, une évolution de leur façon d'interagir en plénière. Au nombre des facteurs ayant joué dans cette évolution, l'enseignant considère les acquis de la première expérimentation qui a permis d'installer un mode de fonctionnement, des routines intégrées par la suite, et subsidiairement, les acquis de son enseignement sur l'évolution des élèves (avec les situations d'apprentissage et d'évaluation, certaines travaillant la validation ; la résolution en classe de problèmes écrits ; son insistance sur l'importance de la communication et le développement de cette compétence).

Quant au chercheur, lors du retour sur les stratégies utilisées par les élèves, son repérage continue à être guidé par son intérêt pour les modèles des élèves, certains élèves ayant eu recours encore aux arbres de choix (tableau 4.20). Globalement, le chercheur avoue sa surprise d'avoir observé une diversité de modèles (sans préciser lesquels) en lien avec la résolution du problème de «Boris» pour lequel il avait des appréhensions. Pour ce qui est du retour sur l'animation (tableau 4.21), le chercheur, tout comme l'enseignant, affirme avoir privilégié une approche caractérisée par un souci d'éviter d'induire des modèles et ce jusque dans la terminologie. Dans son repérage sur l'animation, le chercheur confirme une évolution des élèves qui ont formulé moins de requêtes de validation, et considère que le travail fait en classe par l'enseignant est à prendre à compte dans l'identification des facteurs ayant joué dans l'évolution des élèves, en l'occurrence le travail avec les situations de validation.

Que retenir des ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors du retour final sur les deux scénarios?

Les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant renvoient à son repérage, à une lecture des modèles et stratégies des élèves ainsi qu'à une lecture de l'activité des élèves avant et pendant les plénières. Ce repérage est guidé par la nature des modèles mobilisés par les élèves, mais aussi par le souci d' « évaluer »[120] une évolution des élèves en regard de leurs difficultés, faiblesses, forces, mais aussi une évolution en regard de certaines attentes dont une dévolution de la validation, une persévérance dans la résolution de problèmes, une évolution dans la façon d'interagir. Nous notons là, à nouveau, que l'enseignant adopte une posture « évaluative », comme dans le récit commenté du scénario 2, posture qui l'amène à s'intéresser à l'évolution des élèves à la fois dans leur cheminement propre et dans l'intégration d'un certain mode de fonctionnement. Les ressources interprétatives mobilisées dans cette évaluation reposent sur sa connaissance des élèves et indiquent l'importance pour l'enseignant de l'existence de routines d'appui à un travail visant le développement de la modélisation, mais aussi la poursuite de buts convergents tels le développement de la compétence à bien communiquer ou de la capacité à pouvoir coopérer avec n'importe qui dans la résolution de problèmes.

Enfin, le retour opéré par l'enseignant sur les problèmes lui permet d'indiquer son souci pour la clarté des énoncés ainsi que des caractéristiques intéressantes selon lui des problèmes abordés avec les élèves avec les deux scénarios : des problèmes dans lesquels les élèves peuvent s'engager facilement, ou qui se rapprochent de l'ambiance de secondaire 1

[120] Au sens d'un intérêt (formatif) pour la progression des élèves et les apprentissages réalisés.

(comme lorsqu'ils permettent la manipulation)[121]. L'enseignant entre aussi sur une analyse de l'enseignement : l'effet des modèles induits (arbres de choix, principe multiplicatif), les acquis de la première expérimentation, de son enseignement (travail sur la résolution de problèmes, la validation, la communication).

Quant au chercheur, on remarquera qu'il occupe beaucoup moins de place lors de cette dernière rencontre réflexive, et les ressources interprétatives qu'il mobilise renvoient à son repérage qui continue d'être guidé par son intérêt pour les modèles des élèves (arbres de choix, diversité des modèles) et sa perspective sur la modélisation qui l'amène à confirmer une évolution des élèves en lien avec la validation un aspect important du processus de modélisation. La figure 4. 12 résume les ressources interprétatives que nous venons de passer en revue.

[121] On retrouve ici l'idée de « beaux problèmes » présente dans l'entrevue.

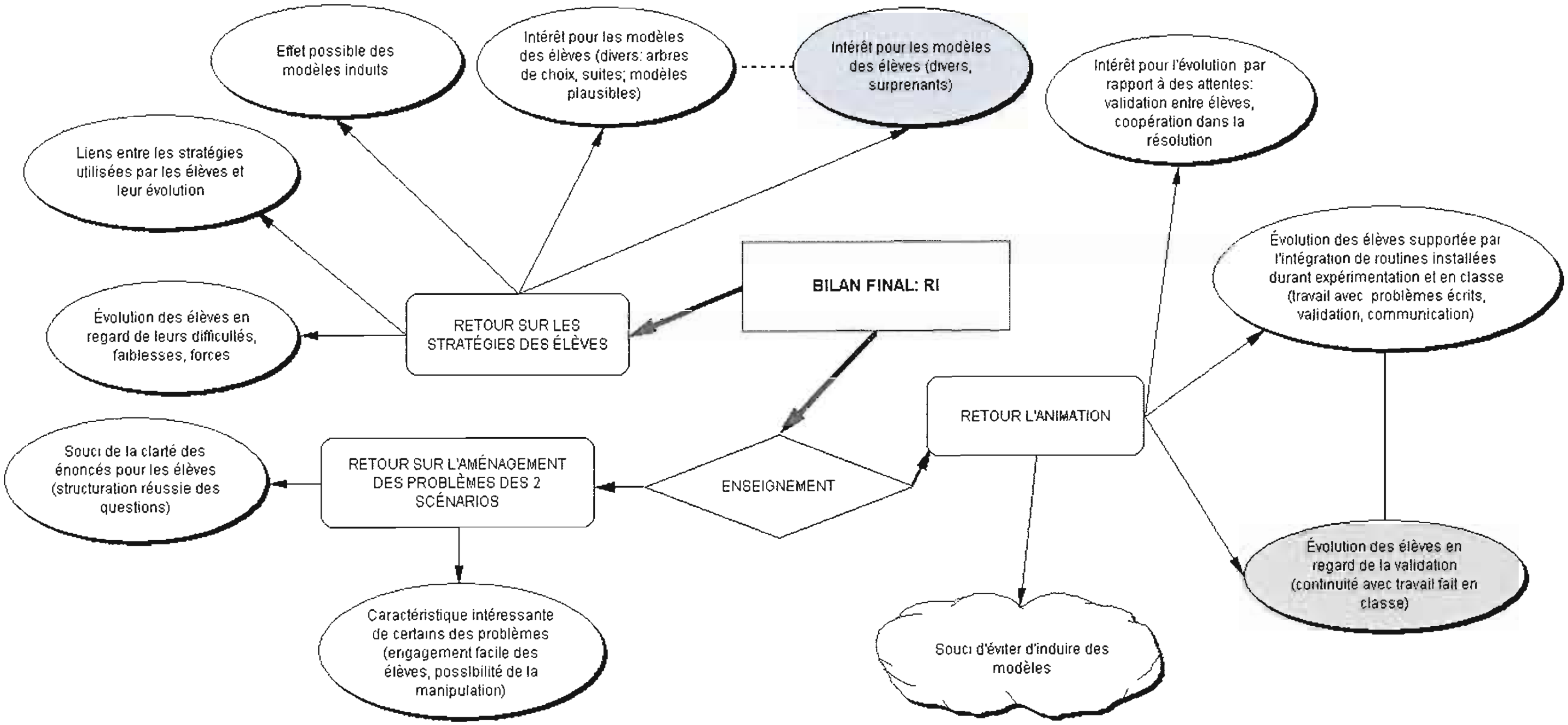



**Figure 4.12 Ressources interprétatives mobilisées lors du retour sur les scénarios 2 et 1 (bilan final)**

4.7.4.2 Une analyse en termes de ressources d'action

Des suggestions sont avancées par l'enseignant lors du retour sur les problèmes et sur les deux scénarios (tableau 4.20). Pour le scénario 1, il s'agit d'enlever les problèmes introductifs qui rétrospectivement ne lui paraissent pas assez riches et de garder le problème du quadrillage, le dernier problème de ce scénario qu'il considère comme un très bon problème de dénombrement. Quant au scénario 2, l'enseignant souligne l'intérêt du problème des tours qui est un problème type de secondaire 1 et celui du problème des poignées de mains pour travailler les suites pour lesquelles les manuels ne proposent pas toujours de bons problèmes selon l'enseignant.

Pour ce qui est de l'animation du retour (tableau 4.21), l'enseignant suggère des manières de faire visant à développer la modélisation. Pour cela, il s'agit de garder le format des plénières qu'il qualifie de gagnant, d'éviter au début un tri des solutions des élèves en fonction de leur justesse, de verbaliser aux élèves ce qu'on attend d'eux, de leur renvoyer le plus possible la balle pour leur permettre de débattre davantage, de retarder la bonne réponse, d'énumérer les modèles des élèves voire de nommer ces modèles. Transparaît à travers ces suggestions pour animer le retour des élèves sur leurs solutions le souci d'indiquer clairement aux élèves différentes attentes, des attentes que permettent d'installer ces manières de faire qui pourraient évoluer en routines.

Quant au chercheur, dans son retour sur l'aménagement des problèmes (tableau 4.20), il avance l'idée de revoir la mise en situation du problème dit de «Boris» pour son caractère vraisemblable et ce à la lumière des commentaires de certains élèves qualifiant de bizarre le jeu de Boris (jouer à monter de différentes manières un escalier, en respectant une contrainte donnée). Pour l'animation du retour (tableau 4.21), le chercheur complétant certaines des propositions de l'enseignant avance quelques suggestions, telle nommer prudemment les modèles des élèves (surtout avant le retour final, pour ne pas influencer les élèves), nommer les modèles pour aider les élèves à retenir (une entrée pour l'institutionnalisation).

Que retenir des ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors du bilan final ?

Pour ce qui est du retour sur les deux scénarios, l'enseignant indiquera les problèmes qu'il souhaite enlever et ceux qu'il voudrait conserver et ce, parce qu'ils représentent ou un bon problème de dénombrement, ou bien un problème type du niveau des élèves de secondaire 1 ou encore un problème permettant de travailler les suites numériques pour lesquelles il estime que les manuels ne proposent pas souvent de bons exercices. Comme on peut le voir dans ce qui précède, les ressources d'action suggérées par l'enseignant à travers les scénarios revisités résultent d'une évaluation globale des limites et richesses des problèmes qui ont été proposés aux élèves. Quant au retour sur l'animation, les ressources d'action mobilisées par l'enseignant à cette occasion consistent en plusieurs manières de faire permettant de travailler la modélisation dans la classe. Ces ressources d'action reflètent une évolution par rapport au début dans la façon pour l'enseignant d'envisager l'animation en même temps qu'elles traduisent son souci de «routiniser» des aspects d'une approche visant le développement de la modélisation et ce afin d'aider les élèves à intégrer des attentes en lien avec le processus de modélisation (en passant par la validation, la généralisation, jusqu'à l'institutionnalisation).

Quant au chercheur, les ressources d'action qu'il mobilise reflètent son souci d'arriver à des problèmes plus vraisemblables suite à la réaction des élèves au problème de «Boris» et celui de prendre à bras le corps la question laissée en rade de l'institutionnalisation, une piste ayant été suggérée par l'enseignant qui propose d'énumérer les modèles auxquels parviennent les élèves, et complétée par le chercheur qui invite à une prudence dans la désignation des modèles spontanés des élèves. La figure 4.13 résume les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur et que nous venons de passer en revue.

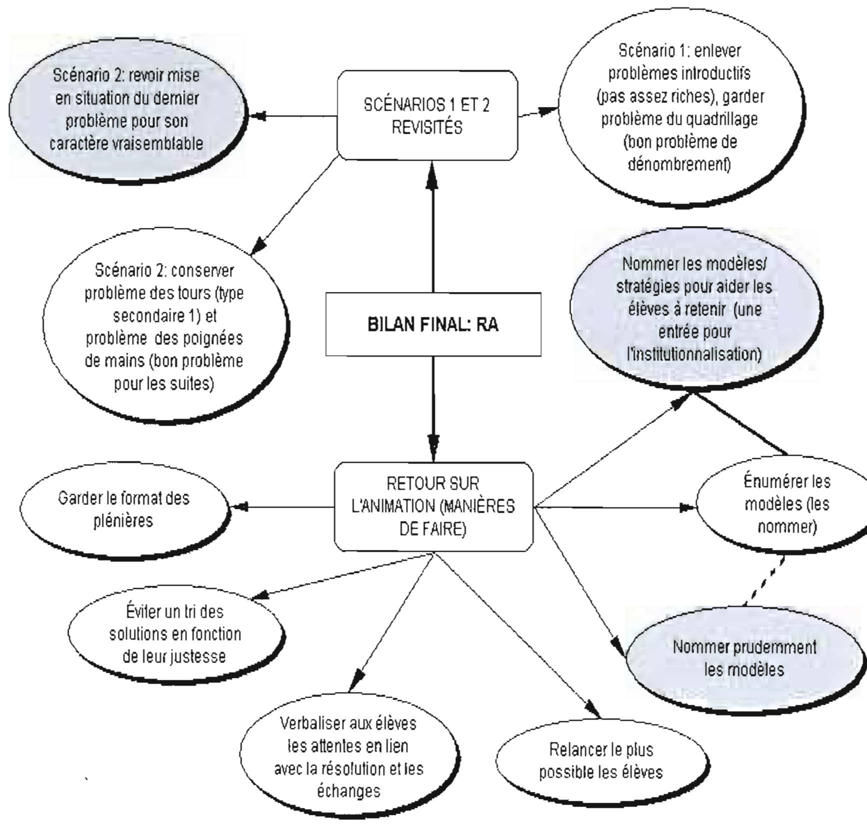



**Figure 4.13 Ressources d'action mobilisées lors du retour sur les scénarios 2 et 1 (bilan final)**

4.7.4.3 Une analyse en termes de sensibilité théorique et de sensibilité pratique

Comme dans ce qui précède, nous pouvons noter une sensibilité pratique chez l'enseignant et une sensibilité théorique chez le chercheur. Toutefois, chacune de ces deux sensibilités n'est pas l'apanage du chercheur ou de l'enseignant, et il est intéressant de remarquer un mouvement de l'un vers l'autre. En effet, l'enseignant témoigne d'une sensibilité aux modèles des élèves ainsi qu'au processus de modélisation, ce qui l'amène comme nous l'avons vu plus loin à entrevoir dans le retour sur les modèles et stratégies des élèves l'effet de modèles introduits plus tôt (tels les arbres de choix, le principe multiplicatif), à décliner le souci partagé avec le chercheur d'éviter d'induire des modèles qui l'animé. Enfin, son attente de voir le moins de requête de validation des élèves auprès de lui et du chercheur renvoie aussi à une sensibilité à la richesse d'une dévolution de la validation, un aspect important du processus de modélisation.

Quant au chercheur, on note aussi dans son retour sur l'aménagement des problèmes une sensibilité au caractère vraisemblable de ces problèmes, une sensibilité donc pratique dans la mise en situation.

Dans le chapitre suivant, nous reviendrons sur les différents résultats issus de l'analyse que nous avons tentée et essayerons d'élaborer davantage à propos des ressources interprétatives et d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans la construction et l'exploitation en classe des deux scénarios visant le développement de la modélisation en classe de secondaire 1.

# CHAPITRE V

# INTERPRÉTATION DES DONNÉES

Rappelons que notre objectif de recherche est de documenter le processus de coconstruction enseignant-chercheur de scénarios d'enseignement exploitant des problèmes de dénombrement et visant le développement de la modélisation en secondaire 1. Plus spécifiquement, il s'agit dans un tel processus de dégager les éclairages de part et d'autre sur: 1) les problèmes de dénombrement élaborés ensemble ainsi que les scénarios d'enseignement qui en résultent; 2) le processus de modélisation par les élèves en lien avec ces scénarios et; 3) l'enseignement visant le développement de ce processus de modélisation.

Le chapitre de présentation et d'analyse des données nous a permis dans un premier temps d'expliciter le cadre de référence de l'enseignant avant la recherche (figures 4.1 et 4.2), et dans un second temps, de mettre en évidence les ressources interprétatives et les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'élaboration de deux scénarios d'enseignement visant le développement de la modélisation et le retour a posteriori sur le récit d'expérimentation de ces deux scénarios. Rappelons que la lecture faite dans ce chapitre est inductive, suivant en cela la démarche de théorisation ancrée (Glaser et Strauss, 1967), lecture qui a débouché sur la caractérisation des ressources mobilisées par l'enseignement et le chercheur (tableaux 4.1 à 4.21) en termes de ressources interprétatives et d'action (figures 4.3 à 4.13). Il s'agit là, déjà à cette étape, d'un premier apport de la thèse sur le plan théorique : reprenant le concept de ressource structurante développée par Lave (1988), elle contribue à caractériser davantage certaines de ces ressources structurantes mobilisées dans l'activité de co-construction : la notion de ressource interprétative, empruntée à la sociologie de l'expérience (Dubet, 1994) est précisée et, la notion nouvelle de ressource d'action a été introduite par nous-mêmes.

Dans ce chapitre, nous cherchons toutefois à aller plus loin en faisant une lecture transversale (sur l'ensemble des matériaux analysés) des ressources interprétatives et d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur (figures 4.3 à 4.13). Cette lecture transversale nous permettra de conceptualiser davantage la nature du regard de l'enseignant et du chercheur dans cette co-construction.

## 5.1 La nature des ressources interprétatives mobilisées

Dans notre perspective, rejoignant en cela une posture commune à plusieurs variantes du constructivisme, la réalité est construite par les acteurs dont les structures conceptuelles singulières déterminent à quoi une expérience donnée va être assimilée (Von Glasersfeld, 1989). De sorte que toute observation et par conséquent tout discours impliquent une interprétation, une « sélection » faite selon une perspective particulière ou selon un point de vue donné. Il y a donc une dimension interprétative liée à l'activité des acteurs, un processus convoquant des références conceptuelles et sociales et qui nécessite une négociation entre différentes représentations (ou modèles) d'une situation, et ce, afin d'arriver aux représentations les plus pertinentes en regard à la fois du contexte dans lequel évoluent ces acteurs et des projets qu'ils se donnent (Fourez, 1997). En somme, qui dit interprétation, dit des ressources mobilisées dans cette interprétation et celle-ci renvoie à un cadre de référence à l'œuvre (ou à un cadre interprétatif). C'est cette idée qui nous a amené d'emblée à vouloir expliciter le cadre de référence sous-jacent à la pratique de l'enseignant (cadre que nous ne connaissions pas à l'entame de cette recherche), puis à essayer de mettre en évidence les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur quand ils tentent chacun une lecture interprétative de certains des aspects abordés dans cette co-construction. Pour caractériser ce type de ressources, nous avons emprunté la notion de « ressources interprétatives » à la sociologie de l'expérience (Dubet, 1994 ; Vrancken et Kuty, 2000).

Pour la sociologie de l'expérience, les ressources interprétatives sont des ressources argumentatives et critiques permettant aux acteurs sociaux de prendre position par rapport aux théories proposées par les chercheurs. Pour notre part, nous proposons d'étendre ce concept et *par ressources interprétatives nous entendons des ressources permettant à l'enseignant et au chercheur de donner un sens, de proposer une certaine lecture des aspects abordés* lors de l'élaboration du récit de l'expérimentation et du retour sur les deux scénarios élaborés visant le développement de la modélisation en secondaire 1. Dans ce qui suit, nous revenons sur ces ressources interprétatives à la lumière des différentes analyses réalisées (figures 4.3, 4.5, 4.7, 4.9, 4.10 et 4.12) et sur les cadres de référence auxquels elles renvoient, des cadres interprétatifs en interaction, qui se croisent dans cette lecture conjointe. Ces deux aspects, les cadres interprétatifs à l'œuvre dans cette lecture conjointe, et l'idée d'un croisement de ces cadres au fondement de la recherche collaborative, sont ceux sur lesquels nous tenterons d'aller plus loin pour éclairer l'apport du chercheur et de l'enseignant.

### *5.1.1 Cadres interprétatifs auxquels renvoient les ressources mobilisées de part et d'autre*

Pour expliciter ces cadres de référence, nous nous intéresserons tour à tour au regard porté par l'enseignant et le chercheur sur les problèmes (dans l'analyse conjointe des problèmes de dénombrement et leur aménagement), sur les élèves et leur résolution, et sur l'enseignement visant le développement de la modélisation. Précisons qu'en procédant à un tel découpage, nous repartons de nos objectifs de recherche (et donc de nos questions de recherche) que nous avons rappelés au début de ce chapitre. Il s'agit donc pour nous de procéder à une lecture transversale, de la conception au retour sur l'expérimentation. Cette lecture transversale nous permettra de mettre en lumière de quel ordre sont les ressources interprétatives mobilisées au sujet:

- Des problèmes (susceptibles de contribuer au développement de la modélisation) ;

- Des élèves (en regard du processus de modélisation) ;
- De l'enseignement visant le développement du processus de modélisation.

5.1.1.1 Le regard porté sur les problèmes par l'enseignant et le chercheur

Nous nous intéressons ici dans un premier temps aux ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'analyse et l'aménagement des problèmes[122]. Ce regard est présent dans l'élaboration du scénario 1 (figure 4.3) et du scénario 2 (figure 4.5), dans le deuxième récit commenté (figure 4.9) ainsi que dans les bilans des scénarios (figures 4.10 et 4.12). Après avoir dégagé ce qui ressort, nous mettrons en évidence les cadres interprétatifs auxquels renvoient ces ressources de part et d'autre.

Sur l'analyse des problèmes : quelles ressources interprétatives ?

Au début, dans l'analyse conjointe des problèmes du scénario 1, l'enseignant amène surtout sa *connaissance des élèves de secondaire 1*, alors que le chercheur met à contribution sa *connaissance de la combinatoire* et sa perspective sur le *processus de modélisation*. Les ressources mobilisées par l'enseignant permettent donc un ancrage du chercheur dans la réalité particulière d'une classe de secondaire 1 avec des élèves qui fonctionnent d'une certaine manière et pour qui le processus de modélisation représente des défis, tel parvenir à *se structurer* lors de la résolution. Aussi, le regard porté par l'enseignant et le chercheur sur les problèmes renvoient à un *repérage (de variables en jeu* dans ces problèmes) qui dans le cas du chercheur reflète ce que nous avons désigné par sa *perspective didactique* (qui l'amène à entrevoir des *variables* déterminant la complexité relative des problèmes), et dans le cas de l'enseignant à sa *didactique praticienne* (qui l'amène en regard de sa connaissance des élèves à décoder les *implicites* d'un énoncé).

[122] L'aménagement des problèmes fait aussi partie de l'enseignement sous l'angle de la planification, mais nous avons fait le choix de le placer ici où nous reprenons tout ce qui concerne les problèmes et de ne garder en 5.1.1.3 que la partie réalisation en classe (l'exploitation des problèmes comme telle).

Lors du premier bilan, l'enseignant et le chercheur portent un regard a posteriori sur les problèmes du scénario 1, informés par ce qui s'est passé avec l'expérimentation. Ainsi, l'enseignant montre une capacité à aller plus loin dans l'analyse des énoncés, dévoilant sa perspective sur *l'importance pour les élèves de comprendre les énoncés*, le *rôle des illustrations et des exemples,* l'importance du *format des questions* (qui doit autant que possible inviter les élèves à répondre à toutes les questions). Se prononçant sur les exemples, l'enseignant considère que leur but dans un énoncé n'est pas de vouloir sécuriser les élèves, ni de les guider à tout prix, mais plutôt de les aider à visualiser toutes les possibilités. D'ailleurs, il n'est pas étonnant que l'enseignant accorde de l'importance aux exemples, car comme nous l'avions indiqué dans l'analyse de l'entrevue préalable, il exemplifie beaucoup à l'occasion, par exemple pour expliquer aux élèves les principes importants dans son enseignement. Nous soulignions également le fait que cette façon de voir les exemples rejoignait la perspective de Batanero et ses collègues (1994, 1997), des didacticiens ayant beaucoup travaillé sur la résolution de problèmes combinatoires et qui dans plusieurs des problèmes qu'ils proposent donnent systématiquement des exemples. Quant au chercheur, il reste fidèle à sa perspective didactique dans son analyse des problèmes lors du bilan du scénario 1, une analyse qui confirme *l'effet de certaines variables sur lesquelles il est possible de jouer* pour obliger les élèves à aller au-delà de la seule énumération, pour aller vers quelque chose de plus systématique[123].

Dans l'analyse des problèmes du scénario 2, lors de l'élaboration de celui-ci et dans le retour final, l'enseignant mobilise moins sa connaissance des élèves, mais continue de prendre part activement à l'analyse des énoncés et *dévoile davantage sa perspective sur les illustrations et la compréhension des énoncés.* Nous avions apparenté sa perspective à celle de Descaves (1992) qui insiste sur l'importance pour les élèves dans la résolution de

---

[123] Ici, nous employons le terme de « variable » au sens de Guy Brousseau, c'est-à-dire une *variable didactique* sur laquelle le chercheur joue pour provoquer un changement de procédure.

problèmes de pouvoir repérer les données essentielles ainsi que de saisir le sens des questions, de décoder les tâches à accomplir. Donc, l'enseignant garde le cap sur son souci que les *énoncés* soient *compréhensibles* et il évolue dans son point de vue sur les *illustrations qui en plus d'être significatives doivent être le moins suggestives possible* pour la résolution du problème par les élèves. Pour ce qui est du chercheur, les ressources qu'il mobilise dans l'analyse des problèmes du scénario 2 à l'étape de l'élaboration indiquent qu'il continue de puiser au monde de la recherche (la didactique de recherche, avec un intérêt pour l'*explicitation de variables*) et à son *cadre de référence sur le processus de modélisation* qui éclipse son cadre de référence sur la combinatoire quasi absent lors de cette seconde élaboration. Nous noterons que le *souci des élèves* est maintenant plus présent dans l'analyse faite par le chercheur qui passe d'un élève épistémique à un élève « réel » de secondaire 1 et ce, à la lumière du travail conjoint précédent et de ce qui s'est passé avec l'expérimentation du scénario 1.

Sur l'aménagement des problèmes : quelles ressources interprétatives ?

Passons maintenant au deuxième volet annoncé, soit les ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans le regard respectif qu'ils portent sur l'aménagement des problèmes (et le retour sur cet aménagement après expérimentation).

Au début, dans l'aménagement des problèmes du scénario 1, les ressources interprétatives mobilisées par les deux renvoient à deux préoccupations, le *passage à la généralisation* pour le chercheur et la *clarté* des énoncés pour l'enseignant. La première préoccupation amenée par le chercheur, et qui découle de sa perspective sur la modélisation (l'importance du passage de modèles spontanés construits par les élèves à des modèles plus généraux), est l'occasion pour l'enseignant de mobiliser sa *connaissance des élèves* et de *questionner cette finalité centrale pour le chercheur.* Pour l'essentiel, l'enseignant soulève une limite de l'ordre des connaissances algébriques des élèves et dont il faudrait tenir compte dans la formulation des problèmes, en l'occurrence dans le dernier problème du scénario 1. Quant au deuxième point qui est l'objet de discussions entre le chercheur et l'enseignant, soit la clarté des énoncés, il est plus une préoccupation de l'enseignant, les *ressources argumentatives mobilisées de part et d'autre renvoyant à un enjeu central dans le projet qui les réunit, soit le degré d'ouverture des énoncés.* Le chercheur, vu sa perspective sur le processus de modélisation, est moins enclin à donner des balises et ce pour éviter de tomber dans des exercices d'application, donc de laisser modéliser les élèves et de leur suggérer le moins possible des modèles, alors que l'enseignant montre plus de sensibilité à la portée des défis proposés aux élèves. Un compromis sera trouvé et qui orientera le travail d'aménagement par la suite, soit d'arriver à des énoncés clairs et ouverts au besoin, mais posant aux élèves un défi raisonnable.

Dans l'aménagement des problèmes du scénario 2, les deux préoccupations que nous venons de mentionner seront à nouveau présentes, à cette différence près que dans le cas du chercheur il s'agit non seulement de construire les problèmes avec l'objectif d'amener les élèves à *passer à la généralisation* (d'où l'importance de contrer les essais et erreurs sur lesquels les élèves ne doivent pas rester), mais aussi de *motiver le passage à la généralisation,* c'est-à-dire de faire en sorte que les élèves voient la nécessité d'un tel passage. Sa perspective sur la généralisation, et par conséquent celle sur le processus de modélisation, s'affine donc ici dans la mesure où il faut amener, voire forcer à la généralisation tout en prenant soin de fonder celle-ci auprès des élèves, faire en sorte qu'ils voient la pertinence du passage à des modèles plus généraux (cela transparaît dans les formulations proposées à l'enseignant à travers lesquelles un effort plus important de contextualisation est déployé comparativement à l'aménagement du scénario 1). Les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans la formulation des problèmes du scénario 2 indiquent également une *sensibilité commune aux modèles induits* à la lumière de ce qui s'est passé avec l'expérimentation du scénario 1, et l'émergence d'une nouvelle balise dans l'aménagement soit le souci d'éviter de suggérer des modèles, par les illustrations ou le choix des termes. L'enseignant et le chercheur conviendront, dans le deuxième récit commenté, que la modification de l'illustration du problème dit des poignées de main (2e problème du scénario 2) aura eu l'effet escompté dans la mesure où en procédant de la sorte ils ont effectivement pu éviter de suggérer aux élèves une représentation par des « points » et des « segments » auxquels les élèves n'ont pas fait allusion.

Enfin, dans le retour sur l'aménagement des problèmes lors des deux bilans, le regard porté par l'enseignant continue de refléter son *souci de la clarté des énoncés* ainsi que du *format des questions* qu'il faudrait éviter de formuler les unes à la suite des autres afin d'amener les élèves à répondre à toutes les questions, surtout celles portant sur la généralisation qui ont été laissées en rade au début, mais traitées lors de l'expérimentation du scénario 2 suite aux ajustements effectués (dans le deuxième récit commenté, l'enseignant confirmera que le nouveau format des questions aura permis à un plus grand nombre d'élèves de répondre à ce type de questions). Quant au chercheur, le regard a posteriori qu'il porte sur l'aménagement des problèmes du scénario 1 indique l'importance pour lui dans la formulation de contrer l'énumération, d'amener les élèves à aller au-delà de l'énumération sur laquelle ils ne doivent pas rester si le but est de les amener à *considérer la généralisabilité de leurs modèles.*

Que retenir de tout ce qui précède ? Quels sont les cadres interprétatifs à l'œuvre ?

Le tableau 5.1 résume les cadres interprétatifs à l'œuvre dans le regard porté par l'enseignant et le chercheur sur les problèmes et leur aménagement, ainsi que l'évolution de ces cadres dans le temps (à travers ce qui précède, il est en effet possible d'entrevoir que chacun des regards bouge au contact de l'autre, les cadres interprétatifs à l'œuvre dans cette recherche collaborative ne sont donc pas statiques mais se précisent, se raffinent, voire se modifient). Ce tableau rend compte de notre effort de théorisation émergente, mettant en évidence les cadres interprétatifs à l'œuvre et permettant de rendre compte de l'évolution dans le temps de ces cadres interprétatifs, ainsi que de leur croisement. Il s'agit donc, dans l'optique d'une théorisation ancrée, de tenter une théorisation à mesure qui s'enrichira certainement avec les éléments qui se dégageront des lectures transversales auxquelles nous procéderons aux points 5.1.1.2 (regard sur les élèves et leur résolution) et 5.1.1.3 (regard sur l'enseignement).

**Tableau 5.1 Cadres interprétatifs à l'œuvre dans le regard porté sur les problèmes, et évolution** [124]

| Évolution dans le temps du C I (de l'enseignant) | C I[125] (de l'enseignant) | Interaction[126] | C I (du chercheur) | Évolution dans le temps du C I (du chercheur) |
|---|---|---|---|---|
| Connaissance des élèves moins mobilisée (CS2, BS2) | **Une connaissance**<br><br>Des élèves de secondaire 1 : difficulté avec la notion de variable, non-familiarité avec l'algèbre (CS1[127]) | Force un ancrage dans la réalité d'une classe de secondaire 1<br><br>→ | **Une connaissance** | Prise de conscience du fonctionnement des élèves et des défis que peut poser l'approche (CS1, CS2)<br><br>Passe d'un élève épistémique à un élève réel de secondaire (CS1, CS2) |

[124] De la conception du premier scénario au retour sur le deuxième scénario, les ressources interprétatives mobilisées par les acteurs bougent. Nous essayons de rendre compte de cette évolution des cadres interprétatifs mobilisés de part et d'autre.
[125] C I= cadre interprétatif.
[126] Le croisement de ces ressources interprétatives force une prise en compte des cadres de l'autre dans le regard sur les problèmes. Nous avons essayé ici de rendre compte de ce qu'amène cette interaction entre les deux cadres interprétatifs sous-jacents.
[127] Pour les tableaux 5.1, 5.2 et 5.3, nous introduisons la légende suivante afin de simplifier la synthèse :
-construction des scénarios (CS1/CS2);
-récits des expérimentations (RE1/RE2);
-bilan sur les scénarios (BS1/BS2)

| Évolution dans le temps du C I (de l'enseignant) | C I[125] (de l'enseignant) | Interaction[126] | C I (du chercheur) | Évolution dans le temps du C I (du chercheur) |
|---|---|---|---|---|
| Sensibilité aux modèles induits (RE1, BS1) | | Force prise en compte de l'objet (processus de modélisation)<br>← | De la combinatoire (CS1) et du processus de modélisation (tout au long) | Référence à la combinatoire qui s'éclipse par la suite (CS2, RE2, BS2). |
| | **Une perspective didactique (à travers) :**<br><br>***un mode d'analyse**<br>▪Exigence/difficultés/intérêt (en lien avec les élèves (CS1) ;<br>▪Viabilité de ce qui est proposé (CS1) ;<br>▪Comparaison des problèmes en termes de variables à l'occasion : potentiel pour les élèves (CS1) ;<br><br>***un rationnel qui guide choix/aménagement**<br>▪Compréhension pour les élèves (BS1, CS2) ;<br>▪Clarté dans la structuration (BS1) ;<br>▪Apport des exemples pour | Une sensibilité à des modes d'analyse différents, complémentaires<br>↔ | **Une perspective didactique (à travers) :**<br><br>***un mode d'analyse**<br>▪En termes de variables : complexité (CS1/CS2) ;<br>▪Intervention sur des variables didactiques (pour forcer évolution (CS1, BS1) ;<br><br>***un rationnel qui guide choix/aménagement**<br>▪Modèles émergents : pas de modèles a priori (CS1, CS2) ; | |

| Évolution dans le temps du C I (de l'enseignant) | C I[125] (de l'enseignant) | Interaction[126] | C I (du chercheur) | Évolution dans le temps du C I (du chercheur) |
|---|---|---|---|---|
| Une perspective sur la compréhension et le rôle des illustrations qui se précise, évolue (CS1, CS2)<br><br>Importance d'une certaine ouverture dans les énoncés : ne pas donner trop de balises (CS1, CS2) | visualiser (BS1) ;<br>• Défis posés aux élèves : doivent être raisonnables, éviter les problèmes trop ouverts (CS1) | Deux rationalités en interaction<br>⟷ | • Idée derrière : généraliser, passage à des modèles généraux (CS1, CS2) ;<br>• Passage à la généralisation : le motiver (CS2) ;<br>• Ouverture des énoncés : éviter les problèmes d'application : (CS 1) | Perspective sur la généralisation qui s'affine (CS1, CS2)<br><br>Importance de ne pas rendre trop complexes les problèmes proposés : donner des balises (CS1, CS2)) |
| Réceptivité à des problèmes de type « ouvert », sensibilité aux modèles induits, aux illustrations suggestives | ***une sensibilité à l'autre**<br>Processus de modélisation : une illustration non suggestive (tout au long) | Double vraisemblance<br>⟷ | ***une sensibilité à l'autre**<br>Prise en compte du cadre de référence sous-jacent à la pratique de l'enseignant (tout au long) | Réceptivité à la contrainte de compréhension par les élèves (défi à leur portée) ; aussi format des questions (qui sera repris par le chercheur) |

À la lumière du tableau précédent, les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans cette coconstruction puisent à des cadres interprétatifs en interaction et qui se précisent, évoluent au fil du temps. Essentiellement ces cadres interprétatifs relèvent, pour reprendre les concepts initiés par Martinand (1992), d'une *didactique praticienne et* d'une *didactique de recherche*, des didactiques qui s'explicitent dans l'interaction, se raffinent au contact l'une de l'autre. Différents aspects nous aideront à mettre en évidence ces cadres et les didactiques auxquels ils renvoient, soit les *connaissances* qu'ils mobilisent (pour donner sens, interpréter), les *modes d'analyse* auxquels ils renvoient (pour aborder les questions de pertinence, complexité des problèmes, les modifications à leur apporter), les *rationnels* en arrière et les *sensibilités* qu'ils convoquent.

Les *connaissances* convoquées dans l'interaction ne sont pas du même ordre comme nous l'avons déjà souligné, l'enseignant informant le chercheur sur ce qui constitue à ses yeux des limites pour les élèves eu égard au type de problèmes qu'on veut leur faire travailler et, le chercheur éclairant en retour l'enseignant sur certains aspects combinatoires des problèmes abordés (arbres de choix, principes multiplicatifs), mais surtout sur le processus de modélisation. Cette dynamique aura pour effet d'amener le chercheur à une perspective moins désincarnée sur le développement du processus de modélisation par une prise en compte de l'éclairage pratique de l'enseignant, une prise de conscience des défis que posent l'approche à des élèves donnés de secondaire 1. Quant à l'enseignant, les discussions avec le chercheur l'exposeront à la perspective de celui-ci sur le processus de modélisation et le forceront à une prise en compte de l'objet qui le réunit avec le chercheur, surtout après la première expérimentation qui le sensibilisera à l'effet des modèles induits. Pour conclure sur cette dimension des connaissances en jeu dans l'interaction enseignant-chercheur, nous remarquerons, après l'expérimentation du premier scénario, les connaissances en lien avec les élèves et la combinatoire s'éclipseront, les échanges portant par la suite sur le processus de modélisation lui-même, mettant bien en évidence une évolution des cadres interprétatifs à l'œuvre dans ce cas.

En plus des connaissances mobilisées de part et d'autre, les cadres interprétatifs convoqués dans le regard porté sur les problèmes renvoient à deux perspectives didactiques qui se déclinent à travers des *modes d'analyse* et des *rationnels différents* et complémentaires, mais aussi *des sensibilités différentes*.

En somme, les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant dans le regard porté sur les problèmes renvoient à une didactique praticienne, mobilisant sa connaissance des élèves de secondaire 1, un mode d'analyse fortement marqué par le souci des élèves (exigences, difficultés, intérêt, potentiel pour eux) et un rationnel en arrière qui révèle une perspective sur la compréhension par les élèves des énoncés et le rôle des exemples et des illustrations. Ce que révèle ainsi l'analyse, c'est que l'enseignant dans son mode d'analyse et à travers le rationnel qui le guide dans le choix/l'aménagement des problèmes est plutôt centré sur les élèves même si à l'occasion il rejoint le chercheur (par exemple, lorsqu'il compare à l'occasion des problèmes en termes de variables). Les ressources interprétatives mobilisées par le chercheur quant à elles renvoient à une didactique de recherche, mobilisant le cadre de référence du chercheur sur le processus de modélisation, un mode d'analyse qui est celui de certains didacticiens (par la mise en évidence de variables déterminant la complexité des problèmes, et à l'occasion l'explicitation de variables didactiques sur lesquelles on peut jouer), et un rationnel le guidant dans le choix/l'aménagement des problèmes qui révèle une perspective particulière sur la modélisation par les élèves, soit la modélisation émergente avec un intérêt pour les modèles spontanés des élèves et une finalité centrale pour le chercheur : le passage à des modèles plus généraux. Le chercheur axe ainsi ses interventions sur la complexité relative des problèmes (en termes de variables didactiques) et le développement du processus de modélisation.

Nous avons là indéniablement deux types de sensibilités caractérisant l'un et l'autre, une sensibilité pratique chez l'enseignant qui force le chercheur à un ancrage dans sa réalité singulière, et une sensibilité théorique du chercheur qui puise à ses connaissances théoriques sur le processus de modélisation pour éclairer l'enseignant sur l'objet de recherche. Toutefois, comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 4, on a pu noter un mouvement de l'un vers l'autre, une *sensibilité à l'autre*, l'enseignant montrant une sensibilité théorique (ce que l'on voit par exemple quand il discute de l'importance de recourir à une illustration non suggestive dans le développement du processus de modélisation, de faire attention aux modèles induits), et le chercheur une sensibilité pratique (lorsqu'il cherche à prendre en compte la réalité de l'enseignant, un praticien évoluant en secondaire 1 avec des élèves d'un niveau donné, fonctionnant d'une certaine manière, qui l'amèneront par exemple à prendre en compte la clarté des énoncés et le format des questions). Certainement, l'ouverture du chercheur à la réalité de l'enseignant est pour beaucoup dans l'évolution de sa perspective (le chercheur) sur le développement de la modélisation, en l'occurrence ici dans le choix de problèmes ouverts mais pas trop (balisés), et l'ouverture de l'enseignant à l'objet de recherche est pour beaucoup dans sa prise de conscience de l'influence possible des modèles induits, des illustrations suggestives. On observe donc un croisement des cadres interprétatifs à l'œuvre (nous reviendrons sur cet aspect par la suite, voir 5.1.2).

Passons maintenant au regard porté par l'enseignant et le chercheur sur les élèves et leur résolution.

#### 5.1.1.2 Le regard porté sur les élèves et leur résolution

Comme nous l'avons montré dans le chapitre 4, l'enseignant et le chercheur mobilisent différentes ressources interprétatives lorsqu'ils anticipent la façon dont les élèves pourront résoudre les problèmes avant toute expérimentation et lors du retour sur leur résolution effective après expérimentation de chacun des deux scénarios.

Au début, lors de l'élaboration du scénario 1, les ressources interprétatives de l'enseignant pointent surtout des *difficultés perçues pour les élèves* et un souci de ramener le chercheur au vraisemblable, à ce qu'en tout réalisme on peut espérer comme démarches, stratégies pour des élèves de secondaire 1, ce qui explique la posture critique qu'il adopte en réaction à une symbolisation du chercheur qui n'est pas à la portée des élèves. L'enseignant, à nouveau, mobilise sa *connaissance des élèves* pour amener le chercheur à ancrer sa réflexion dans la réalité singulière des élèves d'une classe de secondaire 1, un chercheur dont les ressources interprétatives indiquent un *intérêt pour les modèles et stratégies des élèves*, leurs *justifications* et tentatives de *passages de modèles spontanés à des modèles plus généraux*. Comme on le voit, le cadre de référence du chercheur sur le *processus de modélisation* est très présent dans la résolution anticipée par les élèves et sa connaissance de la combinatoire ne lui sert qu'à éclairer l'enseignant sur la fonction des arbres de choix, un modèle combinatoire particulier qu'il considère comme un pré requis.

À travers le premier récit commenté, les ressources interprétatives mobilisées par le chercheur et l'enseignant lors du retour sur la résolution effective des élèves renvoient à un *repérage* qui débouche sur des *prises de conscience.* Ainsi, dans son repérage, l'enseignant note chez les élèves une difficulté de réinvestissement de modèles introduits auprès d'une des classes et *prend la mesure de la limite d'un enseignement préalable de modèles.* Cette prise de conscience, au demeurant partagée par le chercheur qui avait gagé sur un impact des arbres de choix sur la résolution des élèves, a été pour l'enseignant un tournant majeur dans la mesure où elle représente le moment à partir duquel il trouve une pertinence au projet qui le réunit avec le chercheur et montre une *sensibilité aux modèles suggérés aux élèves*, des modèles induits dont il se distancera comme nous le verrons dans la suite. Quant au chercheur, son repérage lui permet de mettre en évidence des *« connaissances* *pragmatiques » auxquelles réfèrent les élèves* dans leur résolution, soit l'importance d'être efficace, un but poursuivi par l'enseignant comme il l'a indiqué lors de l'entrevue préalable. La lecture proposée par le chercheur a donc un effet miroir pour l'enseignant, elle lui permet de voir sous un jour nouveau un aspect de sa pragmatique de résolution de problèmes, à tout le moins dans une de ses classes, et de q*uestionner son rapport à l'efficacité* qui dans la perspective du chercheur sur le processus de modélisation n'est pas une fin en soi. Comme on le voit, le chercheur puise ici aussi à son cadre de référence sur le processus de modélisation qui s'explicite davantage et lui permet de pointer des connaissances pragmatiques chez les élèves, une façon d'aborder la résolution de problème, qui posent problème.

Enfin, toujours en lien avec la résolution par les élèves des problèmes du scénario 1, le retour opéré par l'enseignant et le chercheur lors de la rencontre bilan est l'occasion pour les deux de se pencher sur quelques productions et stratégies d'élèves. Ici, nous sommes encore sur le repérage conjoint, un *repérage* certes *a posteriori et* par lequel les deux mobilisent d'autres ressources interprétatives. Le repérage de l'enseignant est guidé par la *verbalisation du raisonnement* des élèves et un *intérêt pour les liens* que ces derniers établissent entre les problèmes. Ceci amènera l'enseignant à jeter un regard *critique sur les manuels* qui proposent souvent des séries de problèmes construits sur le même modèle et ont donc un effet pervers sur la résolution des élèves, ces derniers étant portés à vouloir recourir aux modèles introduits, aux stratégies du problème précédant celui qu'ils ont à résoudre (Cela explique en partie pour l'enseignant le recours aux arbres de choix et au principe multiplicatif par certains élèves dans la résolution du problème 2 du scénario 1). Une autre lecture du recours par les élèves au principe multiplicatif est offerte par le chercheur qui lui dans son repérage est guidé par un *intérêt pour les aspects combinatoires des modèles* des élèves, mettant là à contribution son cadre de référence sur la combinatoire. Ainsi, le chercheur voit une pertinence dans le lien fait par les élèves entre les deux premiers problèmes et une difficulté de leur part à appliquer convenablement le principe multiplicatif dans le second problème, rejoignant une remarque faite précédemment par l'enseignant qui remettait en question la pertinence de l'enseignement de modèles préalables quand les élèves ne peuvent pas les réinvestir à bon escient. Comme on le voit, les ressources interprétatives de l'enseignant mobilisées dans le retour sur les stratégies des élèves renvoient à sa *connaissance des manuels et à son cadre pratique* qui le fait valoriser la verbalisation et l'établissement de liens par les élèves alors que dans le cas du chercheur ces ressources renvoient à son *cadre de référence sur la combinatoire*, sa familiarité avec les modèles combinatoires, en particulier le principe multiplicatif, mais aussi à son *cadre de référence sur le processus de modélisation,* son intérêt pour les modèles spontanés des élèves et leur passage à des modèles plus généraux, une des attentes explicitées par le chercheur dans le développement de la modélisation par les élèves.

Passons maintenant au regard porté par l'enseignant et le chercheur sur les élèves et leur résolution des problèmes du scénario 2 (résolution anticipée ou effective). Comme on pouvait s'y attendre, les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'anticipation de la résolution par les élèves des problèmes du scénario 2 sont d'un tout autre ordre, comparé à ce que nous avons vu précédemment avec le scénario 1. En effet, l'élaboration du scénario 2 prend appui sur les enseignements de l'expérimentation du premier scénario, l'enseignant saisissant davantage la problématique du développement du processus de modélisation et le chercheur ayant pu voir ce que des élèves de secondaire 1 non pas génériques, mais « réels » peuvent faire dans une approche visant le développement du processus de modélisation. L'enseignant dans la résolution anticipée par les élèves continue à indiquer des *difficultés* pour les élèves (comprendre les énoncés, voir différents cas et faire les liens entre les différents cas) et *prédit des modèles* proches de l'activité spontanée des élèves. Quant au chercheur, ses prédictions sont également plus proches de *l'activité spontanée des élèves* dont il a découvert la grande débrouillardise. Le cadre de référence du chercheur sur le processus de modélisation est encore présent par son insistance sur l'importance de voir les élèves dans leur résolution *passer à la généralisation* sans toutefois aller jusqu'à s'attendre à ce que les élèves parviennent à des modèles trop élaborés. En somme, chez l'enseignant et le chercheur on note dans l'élaboration du scénario 2 une évolution dans l'approche de celui-ci, l'enseignant sentant moins le besoin d'informer le chercheur sur les connaissances des élèves et le chercheur prenant en compte les capacités des élèves. Aussi, un effort est fait de part et d'autre pour rester au plus près de l'activité informelle des élèves.

À travers le récit commenté du scénario 2, dans le retour sur la résolution effective des élèves, l'enseignant mobilise sa connaissance des élèves dans l'évaluation de *l'évolution des élèves* par rapport à la première expérimentation et dévoile un pan de son cadre pratique qui lui fait valoriser que les élèves aient pu établir des l*iens* entre les problèmes. Aussi, les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant dans son repérage pointent un autre aspect de son cadre de référence, *l'importance des routines* supportant la résolution de problèmes en classe, ici le *mode de fonctionnement* que nous avons expérimenté avec les élèves ainsi que les *attentes associées :* une dévolution[128] de la validation et le passage à la généralisation. Quant au chercheur, sa lecture interprétative de la résolution effective par les élèves des problèmes du scénario 2 renvoie encore à sa perspective sur le processus de modélisation qui oriente son regard essentiellement vers les *modèles et stratégies des élèves qui l'ont surpris.* En effet, le chercheur s'attendait peu à voir le recours à la formule de dénombrement des combinaisons[129] ou l'établissement explicite de la suite de Fibonnaci[130] pour résoudre le problème des tours (le premier problème du scénario 2). On se rappelle qu'au début, dans la résolution anticipée par les élèves des problèmes du scénario 1, le chercheur explicitait cette attente-là, c'est-à-dire voir jusqu'où pouvaient aller les élèves dans leur résolution. Assurément, ils sont allés loin,

[128] En employant le terme de dévolution nous sommes conscient des ses acceptions multiples, en l'occurrence le sens qu'il revêt dans la théorie des situations didactique. Ici, nous l'employons pour signifier la prise en charge par les élèves eux-mêmes de la validation.
[129] Une formule de dénombrement enseignée au niveau collégial !
[130] L'élève qui parlera le premier de la suite de Fibonnaci dira l'avoir vu au primaire.

certains à tout le moins, en recourant à la formule de dénombrement des combinaisons ou en modélisant le problème des tours ou celui dit de Boris par la suite de Fibonnaci.

Enfin, dans le retour fait lors du bilan final sur la résolution par les élèves des problèmes du scénario 2, les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant dans son repérage renvoient à la *sensibilité* développée *par rapport aux modèles des élèves* (l'effet de modèles introduits plus tôt) et à son *souci d'évaluer l'évolution des élèves*, une évaluation entamée dans le deuxième récit commenté et qui l'amène à constater moins de requêtes de validation venant des élèves, une plus grande persévérance de leur part dans la résolution. À nouveau, le regard porté par *l'enseignant indique l'installation et l'intégration par les élèves d'une routine supportant la résolution de problèmes* dans une approche visant le développement du processus de modélisation. En outre, il explicite un but convergent important dans une telle approche où les élèves devaient travailler en équipes de deux, soit le *développement de la capacité à pouvoir coopérer* avec n'importe qui dans la résolution de problèmes. L'enseignant souligne ainsi une spécificité de l'approche expérimentée, la résolution collective de problèmes et la nécessité du développement d'une des compétences transversales figurant dans le curriculum de secondaire 1. Donc, plus que sa connaissance des élèves et sa sensibilité aux modèles et au processus de modélisation, l'enseignant convoque sa *connaissance du curriculum* dont certaines orientations permettent de soutenir l'approche. Pour ce qui est du chercheur, comme nous l'avons déjà mentionné, il est moins présent dans le bilan final, mais continue à manifester un *intérêt pour les modèles des élèves et à prendre appui sur son cadre de référence sur la modélisation*. Le tableau 5.2 suivant résume les cadres interprétatifs à l'œuvre dans le regard porté par l'enseignant et le chercheur sur les élèves et leur résolution, ainsi que l'évolution de ces cadres.

**Tableau 5.2 Cadres interprétatifs à l'œuvre dans le regard porté sur les élèves/leur résolution ; et évolution de ces cadres**

| Évolution dans le temps du C I | C I (Enseignant) | Interaction | C I (Chercheur) | Évolution dans le temps du CI |
|---|---|---|---|---|
| Évaluation et prise en compte de l'importance de la coopération dans le développement de l'approche (CS2, BS2)<br><br>Modèles aussi induits par les manuels questionnés (BS1, CS2) | **Une connaissance**<br>Des élèves de secondaire 1 : difficulté à comprendre les énoncés (CS1), à voir et faire les liens entre différents cas (CS2)<br><br>Des manuels : types de problèmes souvent proposés aux élèves (BS1)<br><br>Du curriculum : compétences transversales à développer (CS2) | Force un ancrage dans la réalité d'une classe de secondaire 1<br><br>⟶ | **Une connaissance**<br><br>De la combinatoire (CS1) et surtout du processus de modélisation (CS1, CS2) | Effort pour rester au plus près de l'activité des élèves : dans les anticipations (CS1, CS2) |
| Prise de conscience de la limite d'un enseignement préalable de modèles (RE1, BS1)<br><br>Sensibilité aux modèles suggérés aux élèves (RE1) | **Une perspective didactique (à travers) :**<br>***Une analyse de l'activité et des stratégies des élèves**<br>• difficulté des élèves à réinvestir des modèles introduits (RE1)<br>• Effet pervers des manuels sur la résolution des élèves (BS1) ; | | **Une perspective didactique (à travers) :**<br>***Une analyse de l'activité et des stratégies des élèves** | Plus grande sensibilité aux modèles suggérés aux élèves (CS1, RE1) |

| Évolution dans le temps du C I | C I (Enseignant) | Interaction | C I (Chercheur) | Évolution dans le temps du CI |
|---|---|---|---|---|
| Questionnement du rapport à l'efficacité<br>(RE1, BS1, BS2) | | aide à mieux voir sa pragmatique de résolution de problème en classe (effet miroir)<br>← | Connaissances pragmatiques des élèves lors de la résolution :<br>« importance d'être efficace »<br>(RE1, BS1) | Mise en évidence d'approches en contradiction avec le développement de la modélisation : efficacité<br>(RE1, BS1, BS2) |
| | ***un rationnel qui guide le retour/repérage sur l'activité et les stratégies des élèves)**<br>• verbalisation du raisonnement des élèves (BS1) ;<br>• liens établis par les élèves entre les problèmes ; (tout au long)<br>• routines supportant l'activité de modélisation par les élèves (les attentes en lien avec la généralisation et la validation ont été intégrées par les élèvesRE2/BS2); | | ***un rationnel qui guide le retour/repérage sur l'activité et les stratégies des élèves)**<br>• aspects combinatoires des modèles des élèves (RE1, BS1);<br>• liens établis par les élèves (RE1, BS1, RE2, BS2) | Prise de conscience de l'importance d'installer et de maintenir des routines d'appui dans le développement du processus de modélisation<br>(RE2, BS2) |
| | | Deux modes de repérage en interaction<br>↔ | | |

Comparativement au tableau 5.1, le tableau précédent met en évidence des éléments nouveaux en regard des cadres interprétatifs à l'œuvre dans le regard porté par l'enseignant et le chercheur sur les élèves/leur résolution ainsi que l'évolution au fil du temps de ces cadres. *Les connaissances* sur lesquelles s'appuie l'enseignant ne portent pas uniquement sur les élèves (à travers leurs difficultés), elles concernent également les manuels (les types de problèmes souvent proposés aux élèves) et le curriculum (à travers ici les compétences transversales). L'enseignant fait donc référence ici à deux ressources importantes dans sa pratique qui l'amènent à identifier un écueil à l'approche utilisée dans les manuels proposant le plus souvent aux élèves des séries d'exercices de même type (qui conduit les élèves à recourir à un même modèle ou une même stratégie de résolution qu'ils appliquent à toute la série de problèmes), et en lien avec le curriculum, à identifier un préalable à l'approche, le développement de la capacité à coopérer avec n'importe quel élève dans la résolution en équipe. Quant au chercheur, on notera que l'éclairage de l'enseignant sur les difficultés des élèves de secondaire aura pour effet de le pousser lors de la construction du scénario 2 à rester au plus près de l'activité des élèves, par exemple dans l'anticipation de la résolution par les élèves.

Le regard porté par les deux sur les élèves et leur résolution met en évidence deux perspectives didactiques qui se déclinent en des *modes d'analyse de l'activité et des stratégies des élèves* ainsi que des *rationnels guidant le retour sur celles-ci* qui ici aussi sont différents, mais complémentaires. On notera que dans leurs modes d'analyse des productions des élèves, l'enseignant souligne l'effet pervers des manuels sur la résolution des élèves, leur difficulté à réinvestir le principe multiplicatif (l'arbre de choix) introduit en classe (dans un des 2 groupes), et le chercheur a pu mettre en évidence chez les élèves une propension à vouloir être efficace à tout prix, en lien avec un but qui se révèle important pour l'enseignant. En identifiant chez les élèves ce type de connaissances pragmatiques (recherche d'efficacité constituant un frein à l'utilisation de certaines stratégies de résolution) le chercheur aidera l'enseignant à réaliser l'impact de son insistance sur l'efficacité sur la façon dont les élèves perçoivent la résolution de problèmes. Ceci amènera l'enseignant à remettre en question son rapport à l'efficacité qui en regard de la perspective du chercheur n'est pas une fin en soi.

Enfin, les *rationnels sous-jacents* guidant le retour sur l'activité et les stratégies des élèves révèlent chez l'enseignant des finalités importantes dans la résolution de problèmes (la *capacité des élèves à verbaliser leurs raisonnements*, à *faire des liens d'un problème à l'autre, entre les résolutions*) ainsi que *l'importance de routines* supportant l'activité de modélisation par les élèves, et chez le chercheur son cadre de référence sur la *combinatoire* (d'où son intérêt pour les aspects combinatoires des modèles des élèves) ainsi que l'importance qu'il accorde lui aussi au fait que les élèves puissent établir des *liens* lors de la résolution (avec un rationnel sous-jacent toutefois différent de celui de l'enseignant : ces *liens leur permettant de passer à des modèles plus généraux).* À propos des routines de classe, on notera qu'elles occupent une place centrale dans la pratique de l'enseignant (voir 4.1.1.5) et l'enseignant saisira l'opportunité de cette collaboration pour faire prendre conscience au chercheur de l'importance dans le développement du processus de modélisation d'installer des routines d'appui aux activités de modélisation[131], des routines qui ont pour fonction comme nous l'indiquions dans le chapitre 4 de permettre aux élèves de savoir où ils s'en vont, ce que l'on va faire en classe en lien avec le processus de modélisation.

En somme, le cadre interprétatif à l'œuvre dans le regard porté par l'enseignant sur les élèves et leur résolution met en relief une didactique praticienne avec une préoccupation pour l'installation et le maintien de routines de classe servant d'appui au processus de

[131] Telles habituer les élèves à valider entre eux et non auprès du professeur leurs solutions (une certaine dévolution de la validation), à essayer de généraliser leurs modèles ; pour le professeur retarder, suspendre la bonne réponse, relancer le plus possible les élèves pour les amener à débattre de leurs modèles.

modélisation, la poursuite de certaines finalités (telles amener les élèves à faire des liens, réinvestir des modèles vus précédemment, verbaliser leurs raisonnements) ainsi qu'un intérêt pour les obstacles qui empêchent leur atteinte lors de la résolution de problèmes (telles une introduction préalable de modèles dans l'enseignement, l'influence des manuels préconisant le recours à des problèmes de même type). Et dans le cas du chercheur, son cadre interprétatif renvoie à une didactique de recherche avec un intérêt pour l'analyse de l'enseignement, c'est-à-dire l'explicitation de facteurs influant sur le travail mathématique en classe avec les élèves (tel la pragmatique de résolution de problème dans une classe donnée et les connaissances pragmatiques que les élèves en retirent, comme par exemple la valorisation de stratégies efficaces), et une perspective sur le processus de modélisation au fondement de son intérêt pour les liens que font les élèves dans l'activité de modélisation et les modèles qu'ils développent (en lien avec la combinatoire). On notera que didactique pratique et didactique de recherche se rejoignent ici sur un point, une préoccupation commune pour la capacité des élèves à faire des liens, mais pour des raisons différentes : certainement pour l'enseignant, cette capacité est révélatrice de réinvestissements de la part des élèves, alors que pour le chercheur elle permet aux élèves de dégager des régularités, de généraliser leurs modèles.

Passons maintenant au regard porté par l'enseignant et le chercheur sur l'enseignement visant le développement de la modélisation.

#### 5.1.1.3 Regard porté sur l'enseignement visant le développement de la modélisation

Par regard porté par l'enseignant et le chercheur sur l'enseignement visant le développement du processus de modélisation, nous entendons les ressources interprétatives mobilisées de part et d'autre en lien avec l'animation en classe des deux scénarios (avant lors de son anticipation, et après expérimentation dans la reconstruction du récit d'expérimentation et lors du bilan).

Au début, lors de l'élaboration du scénario 1, la façon dont l'enseignant et le chercheur envisagent chacun l'animation en classe avec les élèves révèle *des finalités* différentes. Pour l'enseignant, il s'agit de *faire ressortir l'efficacité des modèles des élèves* lors du retour sur leurs solutions alors que le chercheur est plus soucieux de *voir comment les élèves se représentent les problèmes* pendant la résolution en équipe et *d'amener les élèves à partager et valider entre eux leurs modèles*. Comme on le voit, les cadres de *référence en arrière* sont concernant l'enseignant, son *cadre pratique* qui le fait beaucoup valoriser l'efficacité et, pour le chercheur, sa *perspective sur le processus de modélisation* au fondement du projet qui le réunit avec l'enseignant.

Cette perspective du chercheur colore également la lecture qu'il fait à travers le premier récit commenté lorsqu'il indique le souci qui l'habitait dans l'animation, soit de *ne pas court-circuiter le processus de modélisation par les élèves*. Le maître mot pour lui était de laisser modéliser. Le chercheur a donc l'œil rivé sur le processus comme tel, l'activité mathématique spontanée des élèves. Pour ce qui est de l'enseignant, la lecture qu'il donne de sa posture dans l'animation nous indique plutôt une centration sur les élèves dont il estime qu'il faut *expliciter auprès d'eux les buts poursuivis à travers l'approche, valoriser les réponses qu'ils avancent l*ors des échanges et *leur donner la liberté de choisir les solutions qu'ils préfèrent* dans le retour fait avec eux sur celles-ci. Les ressources interprétatives de l'enseignant renvoient donc au *cadre de référence sous-jacent à sa pratique,* en l'occurrence à *l'importance des routines de classe* permettant d'indiquer clairement aux élèves les buts que nous poursuivions (par exemple, les laisser modéliser eux-mêmes, les influencer le moins possible), et des *principes* explicités lors de l'entrevue préalable tel «l'importance de faire sentir aux élèves qu'ils peuvent s'exprimer » (d'où la nécessité de valoriser leurs réponses), « l'importance du respect » (le respect entre élèves, d'où sa mise en garde aux élèves de ne pas rire d'une solution lors des plénières). À propos des échanges en classe, les commentaires de l'enseignant sur le récit de l'expérimentation du scénario 1 indiquent ce que nous avons déjà mentionné ailleurs, une appropriation de l'approche visant le développement de la modélisation. En effet, l'enseignant verbalise aux élèves une consigne importante en lien avec les échanges qui ont pour *but,* leur indique t'il, *d'aider les uns et les autres à améliorer leurs solutions* et à cet égard sa métaphore du compositeur est édifiante : « pour arriver à la bonne «tune», plusieurs essais peuvent être nécessaires pour permettre au compositeur d'améliorer sa chanson ».

Enfin, dans les bilans, en restant toujours sur les ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors du retour sur l'animation du scénario 1, ces ressources mettent en évidence des *perspectives différentes* voire opposées à un moment donné sur la place de la comparaison, l'enseignant puisant à sa connaissance des élèves manifeste une *réticence aux comparaisons entre élèves* qui peuvent dégénérer en jugements portés les uns sur les autres alors que le chercheur prenant appui sur sa perspective sur le développement du processus de modélisation voit dans ces comparaisons une *opportunité de débats pour aider les élèves à améliorer leurs modèles, stratégies, solutions*. Dans le retour sur l'animation du scénario 1 lors du premier bilan, l'enseignant et le chercheur s'entendent sur le fait que le vocabulaire n'est pas important, voulant dire par là que cela n'apporte rien dans l'approche promue de mentionner aux élèves, surtout en classe de secondaire 1, qu'ils font de la « modélisation » ou qu'ils arrivent à différents « modèles ». Cette précaution traduit la prise de conscience commune de l'importance du choix des termes dans une approche voulant initier à la modélisation, *des termes qui ne doivent pas être inducteurs* au risque de court-circuiter la résolution des élèves ou de peur d'influencer indûment les élèves dans leurs échanges à propos de leurs modèles et stratégies. L'enseignant et le chercheur sont ici sur l'opérationnalisation de l'approche, informés par le constat fait pendant l'expérimentation de ce premier scénario de la limite de l'introduction de modèles (et par conséquent d'une terminologie qui vient avec), les élèves d'une des classes, rappelons-le, ayant montré une difficulté à réinvestir des modèles vus dans des problèmes dans lesquels ces mêmes modèles étaient en jeu (les arbres de choix et le principe multiplicatif).

Qu'en est-il des ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'animation du scénario 2 ?

Lors de l'élaboration du scénario 2, le chercheur est moins présent que l'enseignant qui formulera deux *attentes* en lien avec la résolution : que les élèves ne laissent *aucune question en rade* lors de la résolution et qu'ils formulent *moins de requêtes de validation* que précédemment. D'emblée, l'enseignant se place dans une posture évaluative qui l'amène à vouloir *apprécier le chemin parcouru par les élèves, leur évolution*, en l'occurrence leur dévolution de la validation qui est un aspect important du processus de modélisation.

Le retour sur l'animation du scénario 2 après expérimentation confirmera *l'intérêt de l'enseignant pour l'évolution des élèves* en regard non seulement de la *validatio*n, ce que confirmera le chercheur, mais aussi leur évolution dans la *résolution en équipe* des problèmes (une attente explicitée par l'enseignant dans la résolution anticipée par les élèves). Cette évolution s'inscrit selon l'enseignant dans la *continuité de la première expérimentation qui a installé des routines* intégrées par les élèves, mais aussi *elle prend appui comme le défendra le chercheur sur le travail fait en classe par l'enseignant* autour des problèmes écrits (les « beaux problèmes » pour reprendre les propos de l'enseignant) et le développement de la compétence à communiquer (un aspect privilégié par l'enseignant qui déclarait lors de l'entrevue préalable avoir une passion pour la communication avec les élèves qu'il travaille à rendre compétents à bien communiquer leurs démarches). Pour l'enseignant, son souci d'évaluer l'évolution des élèves et par conséquent leur degré d'intégration des routines supportant l'approche à laquelle nous avons travaillé, ce souci renvoie au *cadre sous-jacent à sa pratique* et l'*importance* qu'il accorde dans son enseignement à la fois aux *routines de classe* et à la *communication.* Enfin, l'enseignant et le chercheur s'entendent lors du bilan final sur *l'importance d'éviter d'induire des modèles*, un souci qui les a également habités dans l'animation du scénario 2 depuis la réalisation faite avec l'expérimentation du scénario 1 de l'impact sur les élèves des modèles auxquels ils sont exposés. Le tableau 5.3 résume les cadres interprétatifs à l'œuvre dans le regard porté sur l'enseignement/l'exploitation des problèmes et l'évolution de ces cadres.

**Tableau 5.3 Cadres interprétatifs à l'œuvre dans le regard porté sur l'enseignement/l'exploitation des problèmes et évolution de ces cadres interprétatifs**

| Évolution dans le temps du C I | C I (Enseignant) | Interaction | C I (Chercheur) | Évolution dans le temps du CI |
|---|---|---|---|---|
| Réticence aux comparaisons entre élèves (RE1, BS1) qui s'éclipse par la suite (RE1, BS1, CS2, BS2)<br><br>Prise en compte de la responsabilité de la validation par les élèves : une finalité importante (CS1, CS2, BS2) | **Une connaissance**<br>des élèves : une vulnérabilité aux jugements des autres (RE1, BS1) | Force un ancrage dans la réalité d'une classe de secondaire I<br>→<br><br>←<br>Force prise en compte de l'objet (processus de modélisation) | **Une connaissance**<br><br>Du processus de modélisation : phases de formulation et de validation (CS1, RE1, BS1) | Prise de conscience d'une vulnérabilité des élèves et des dérives possibles lors des échanges (CS1, RE1, BS1) |
| | **Une perspective didactique (à travers) :**<br><br>***des finalités poursuivies dans l'animation en classe :**<br>• faire ressortir l'efficacité des modèles des élèves (CS1) ;<br>• expliciter aux élèves les buts poursuivis à travers l'approche : clarté des intentions (RE1) ;<br>• valoriser les réponses des élèves (RE1) ; | Deux rationalités en interaction<br>↔ | **Une perspective didactique (à travers) :**<br><br>***des finalités poursuivies dans l'animation en classe :**<br>• voir les modèles construits par les élèves (CS1) ;<br>• amener les élèves à partager, valider entre eux leurs modèles (CS1) ;<br>• ne pas court-circuiter le processus de modélisation par les élèves (RE1) | |

| Évolution dans le temps du C I | C I (Enseignant) | Interaction | C I (Chercheur) | Évolution dans le temps du CI |
|---|---|---|---|---|
| Prise de conscience de l'impact de termes inducteurs dans le processus de modélisation (BS1) | • laisser aux élèves la liberté de choisir les solutions qu'ils préfèrent (RE1) ;<br>• inviter les élèves à répondre à toutes les questions (CS2) ;<br>• inviter les élèves à formuler moins de requêtes de validation (CS2)<br><br>***des principes sous-jacents (importance) :**<br>• du respect (tout au long) ;<br>• de faire sentir aux élèves qu'ils peuvent s'exprimer (entrevue préalable) ;<br>• des réponses des élèves : plus significatives que celles de l'enseignant (RE1) ;<br>• des routines (entrevue préalable, CS1, CS2, BS2) ;<br>• d'éviter les termes suggestifs ou inducteurs : en termes de modèles (BS1, BS2)<br><br>***une posture évaluative**<br>• Intérêt pour l'évolution des élèves<br>• Évolution vis à vis la dévolution de la validation (CS2, RE2, BS2) ; | Deux rationalités en interaction<br>⟷ | ***des principes sous-jacents (importance) :**<br>• ne pas court-circuiter le processus de modélisation par les élèves (RE1) ;<br>• d'éviter les termes inducteurs : en termes de modèles (BS1, BS2) ; | Prise de conscience de l'impact de termes inducteurs dans le processus de modélisation (RE1, BS1, CS2, BS2)<br><br>Prise de conscience de la possibilité de développer des routines d'appui au processus de modélisation se situant dans le prolongement des routines de classe de l'enseignant (RE2, BS2) |

| Évolution dans le temps du C I | C I (Enseignant) | Interaction | C I (Chercheur) | Évolution dans le temps du CI |
|---|---|---|---|---|
| | • Évolution dans la résolution collective : fonctionnement des équipes (CS2, BS2) ;<br>• Critère : degré d'intégration des routines installées par l'approche (BS2) | Force à une évaluation, à regarder l'évolution des élèves au cours de la démarche<br>→ | | |
| Appropriation du processus de modélisation (tout au long) | **Une sensibilité à l'autre**<br>Métaphore du compositeur (RE1) | Une double vraisemblance<br>↔ | **Une sensibilité à l'autre**<br>Ramène la pratique de l'enseignant : travail avec les beaux problèmes, importance de la communication (BS2) | |

À la lumière du tableau 5.3, les cadres de référence à l'œuvre dans le regard porté par l'enseignant et le chercheur sur l'exploitation en classe des deux scénarios visant le développement de la modélisation renvoient comme dans ce qui précède (tableaux 5.1 et 5.2) à une didactique praticienne et à une didactique de recherche. Dans le cas de l'enseignant sa *didactique praticienne* prend appui sur sa *connaissance des élèves*, leur affect (une certaine vulnérabilité aux jugements de leurs collègues), et révèle une *perspective didactique à travers des finalités* poursuivies dans l'animation en classe guidé en cela par des *principes* et une *posture évaluative* caractérisée par un intérêt pour l'évolution des élèves en regard du travail en équipes, d'une certaine prise en charge du jeu de la validation et de l'intégration d'une routine de fonctionnement installée dès la première expérimentation. Quant au chercheur, la *didactique de recherche* qui le caractérise se décline en un *éclairage théorique sur le processus* de modélisation, en l'occurrence sur les phases de formulation et de validation, et la poursuite de *finalités* en lien avec le développement de ce processus, guidé en cela par des principes.

L'exploitation en classe des deux scénarios, surtout du premier, poussera les deux à prendre conscience de l'impact des termes inducteurs de modèles dans le développement du processus de modélisation, et l'interaction avec l'enseignant permettra au chercheur de prendre également conscience de la possibilité de développer des routines d'appui au processus de modélisation se situant dans le prolongement des routines de classe de l'enseignant.

### *5.1.2 Retour sur le concept de ressources interprétatives*

Nous avons emprunté le concept de ressources interprétatives à la sociologie de l'expérience (Dubet, 1994 ; Vrancken et Kuty, 2000) qui l'utilise au sens de ressources argumentatives et critiques permettant aux acteurs sociaux de prendre position par rapport aux théories proposées par les chercheurs. Cette notion nous est apparue comme un appui théorique fécond pour rendre compte et aider à caractériser les lectures interprétatives de l'enseignant et du chercheur. Dans le chapitre de présentation et d'analyse des données, mais aussi dans le présent chapitre, nous avons tenté de caractériser ces ressources interprétatives mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'élaboration des scénarios et dans les retours sur les scénarios après expérimentations à travers les récits commentés et bilans (voir les tableaux 5.1, 5.2, 5.3 et les synthèses qui les suivent). Cette catégorisation émergente nous a permis de montrer que les ressources interprétatives puisent aux cadres interprétatifs guidant le chercheur et l'enseignant, nous donnant par là accès à un aspect important des didactiques en jeu dans cette co-construction, venant éclairer en retour les concepts de didactique praticienne et de didactique de recherche introduits par Martinand (1992)

Dans le cas de l'enseignant, nous avons accès à plusieurs pans de sa didactique praticienne à travers son cadre de référence à l'œuvre à la fois dans le regard qu'il porte sur les problèmes, les élèves et leur évolution, l'exploitation en classe des scénarios élaborés avec le chercheur. Cette didactique praticienne se décline, comme nous l'avons déjà montré, en des connaissances (des élèves, des manuels et du curriculum), un mode d'analyse pour l'essentiel caractérisé par un fort souci des élèves (leurs difficultés, vulnérabilité, intérêt, potentiel), une préoccupation pour l'installation et le maintien de routines de classe permettant l'encadrement des activités de résolution de problèmes, et un rationnel sous-jacent qui dévoile diverses finalités poursuivies et des principes (certains de ces principes sont didactiques en ce sens qu'ils sont en lien avec la résolution de problèmes, alors que d'autres sont des principes pédagogiques liés à sa gestion de classe).

Quant au chercheur, nous avons assimilé son cadre de référence, la perspective qu'il déploie dans le regard sur les problèmes, les élèves, leur résolution et l'enseignement visant le développement de la modélisation, à une didactique de recherche. Celle-ci se décline en un éclairage théorique puisant à sa connaissance de la combinatoire et du processus de modélisation, un éclairage qui s'affine dans l'intervention, mais aussi en un mode d'analyse centré sur la nature des problèmes (les variables qu'ils mettent en jeu, leur complexité) et le processus de modélisation, et dans son cas aussi un rationnel en arrière renvoyant à des finalités poursuivies et des principes sous-jacents (des principes pour l'essentiel didactiques).

Dans ce qui précède, à travers la théorisation que nous avons tentée, émerge un nouveau concept de ressources interprétatives entendues comme des ressources qui puisent à des cadres interprétatifs (didactique de recherche/didactique praticienne). Surtout, notre théorisation contribue à donner de la chair à des concepts qui sont restés non exploités, non développés, ceux de didactique praticienne et de didactique de recherche (Martinand, 1992).

En outre, comme on l'entrevoit dans les tableaux 5.1 à 5.3 (voir les flèches au centre), les ressources interprétatives mobilisées de part et d'autre sont en interaction, se croisent, contribuant à expliciter, voire à restructurer certaines des composantes de ces cadres interprétatifs. En effet, si nous prenons le chercheur, l'éclairage pratique de l'enseignant mais aussi l'ouverture dont il témoigne (sa sensibilité à l'autre) l'amèneront à adopter une perspective moins désincarnée sur le développement du processus de modélisation par une prise en compte des défis que posent le développement de ce processus pour des élèves de secondaire 1, à faire évoluer sa perspective sur la modélisation par un souci de motiver chez les élèves le passage à la généralisation, et non des moindres, à prendre conscience de la possibilité de développer des routines d'appui au processus de modélisation qui se situent dans le prolongement des routines de classe de l'enseignant. Quant à l'enseignant, son ouverture au chercheur (sa sensibilité à l'autre) ainsi que l'éclairage théorique de ce dernier sur le processus de modélisation l'amèneront à une prise en compte de l'objet qui les réunit, le processus de modélisation, à travers une sensibilité aux modèles spontanés des élèves et à l'impact des modèles induits, à l'importance de la validation dans le développement de ce processus. Comment s'exprime ce croisement entre ces ressources interprétatives et les cadres interprétatifs sous-jacents ?

Dans certains cas, *les lectures interprétatives de l'enseignant et du chercheur sont opposées,* comme lorsque l'enseignant prend position et interpelle la viabilité ou la vraisemblance d'un modèle de résolution des problèmes de dénombrement (le principe du berger), ou d'une solution possible anticipée par le chercheur (en termes de symbolisation). Dans d'autres cas, *la lecture interprétative de l'un nuance celle de l'autre*, par exemple autour de la nature des problèmes à considérer qui doivent être ouverts (lecture du chercheur), mais dont les énoncés doivent être clairs (regard de l'enseignant). Enfin, il y a plusieurs moments où les *lectures interprétatives* sont *en accord,* comme lorsque l'enseignant et le chercheur adoptent une entrée semblable dans l'analyse des problèmes et explicitent des variables, ou lorsque débute un mouvement de l'un vers l'autre, l'enseignant développant une sensibilité théorique grandissante et le chercheur développant une sensibilité pratique par une prise en compte de la réalité de l'enseignant, ce qu'il fait, ses connaissances notamment celle sur les élèves de secondaire 1, ou encore sur le processus de modélisation lorsqu'ils s'entendent sur le fait d'illustrations trop suggestives.

C'est le lieu de souligner dans cette co-construction l'émergence d'une zone interprétative commune qui n'aurait pas été possible sans le dispositif mis en place. Ce que l'analyse a révélé c'est, de la part de l'enseignant, une adhésion et une appropriation de l'enjeu qui le réunit avec le chercheur, soit le développement du processus de modélisation, mais aussi une meilleure visibilité sur sa pragmatique de résolution de problèmes à tout le moins dans une de ses classes avec une insistance sur l'efficacité. Quant au chercheur, l'analyse montre une plus grande sensibilité au caractère vraisemblable de ce qui peut se produire chez les élèves réels, mais aussi une évolution dans sa perspective sur la modélisation qui s'est précisée au contact de l'enseignant qui l'a interpellé sur la viabilité de la démarche dans le contexte singulier de classes de secondaire 1. En somme, dans cette co-construction, le chercheur se caractérise surtout par sa sensibilité théorique et l'enseignant par sa sensibilité pratique comme on pouvait s'y attendre, cependant sensibilités théorique et pratique ne sont pas en définitive l'apanage ni de l'un ni de l'autre. Cette analyse contribue donc à enrichir le concept de double vraisemblance.

Aussi, cette étude permet d'élargir la notion de ressources interprétatives telle que l'envisage la sociologie de l'expérience qui la définit surtout en termes de ressources argumentatives et critiques permettant aux acteurs de prendre position par rapport aux élaborations, théories proposées par les chercheurs (Dubet, 1994). Dans une telle perspective, le croisement est vu de façon dichotomique, en termes uniquement des accords et des désaccords entre les acteurs et les chercheurs. Entre les deux, l'accord et la réfutation, avons-nous montré, il y a l'espace d'une nuance, d'une extension. Le nouveau concept de ressources interprétatives qui émerge de notre théorisation permet de définir celles-ci comme des ressources puisant à des cadres interprétatifs, ici didactique praticienne et didactique de recherche (des didactiques que notre analyse contribue à mieux caractériser), des ressources croisées que l'interaction contribue à expliciter et affiner, et ce, dans un mouvement/une ouverture à l'autre (sensibilité théorique et pratique).

Dans la section suivante, nous nous penchons sur une autre des composantes mise en évidence par l'analyse, les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur.

## 5.2. Des ressources d'action mobilisées

Rappelons que par ressources d'action nous entendons des ressources autres que les ressources interprétatives, des ressources mobilisées par l'enseignant et le chercheur lorsqu'ils se placent dans une perspective d'intervention qui les amène à indiquer des principes d'action, à suggérer des manières de faire, avancer des propositions d'aménagement des problèmes ou d'animation. Nous reviendrons sur ces ressources d'action pour les caractériser davantage et faire ressortir le fait qu'elles reflètent, comme pour les ressources interprétatives, des cadres de référence sous-jacents en interaction. Pour ce faire, nous examinerons de plus près les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'élaboration des scénarios et les retours sur ces scénarios lors des bilans[132], des ressources qui selon le cas touchent à l'aménagement des scénarios ou à l'animation en classe de l'activité des élèves orientée vers le développement du processus de modélisation (à la fois pendant la résolution des problèmes et le retour collectif en classe sur les modèles, stratégies, solutions des élèves).

### *5.2.1 Des ressources d'action dans la construction de scénarios visant le développement de la modélisation*

Les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors de l'élaboration du scénario 1 renvoient à des *balises* à prendre en compte pour construire des problèmes permettant le développement de la modélisation. Pour l'enseignant, il s'agit dans la formulation de ces problèmes de :

- Faire en sorte que les *énoncés* soient *clairs* pour les élèves et *les impliquent* ;
- *Ne pas s'attarder sur les artifices* dont on peut parfois se passer (ils ne sont pas toujours nécessaires, les problèmes peuvent être décontextualisés) ;
- *Décourager le tâtonnement chez les élèves et les encourager à aller vers quelque chose de systématique.*

Ces balises montrent d'une part que l'enseignant se soucie vraiment de la compréhension par les élèves des énoncés de problèmes, comme nous l'avons déjà indiqué, une compréhension qui conditionne leur résolution effective et qu'il avait clairement identifiée comme une des difficultés des élèves de secondaire 1 lors de l'entrevue préalable.

---

[132] On remarquera que ces ressources d'action sont absentes des récits commentés.

Il s'agit là d'une *balise qui repose sur sa connaissance des élèves* de ce niveau et qui à notre sens n'est pas propre aux problèmes visant le développement de la modélisation.

D'autre part, on peut s'attarder sur le fait que l'enseignant veuille, pour le type de problèmes qu'on veut travailler ici, qu'ils impliquent les élèves, mais aussi puissent être assez « froids » ou sans artifices. L'enseignant considère que l'important est de proposer aux élèves des *problèmes qui les intéressent*, cependant pour lui cela ne signifie pas pour autant que ces problèmes soient artificiellement réalistes, leurs contextes pouvant être « froids ». Rappelons que cette position de l'enseignant était en réaction à l'interpellation du chercheur qui voulait que la mise en situation du problème du quadrillage soit plus parlant, réaliste (le dernier problème du scénario 1, un excellent problème de dénombrement pour lui). L'enseignant légitime donc les problèmes de ce type, des problèmes fictifs, mais pouvant susciter l'intérêt des élèves. L'enseignant semble dire qu'il n'est pas nécessaire d'avoir des problèmes à contextes « réels » pour travailler la résolution de problèmes, en particulier dans des scénarios visant le développement de la modélisation. Enfin, la dernière balise explicitée par l'enseignant, soit décourager le tâtonnement chez les élèves et les encourager à aller vers des choses plus systématiques, elle nous apparaît comme un *écho de l'importance qu'il accorde à l'organisation et à l'efficacité* dans la résolution de problèmes (figure 4.1).

Pour conclure sur les ressources d'action mobilisées par l'enseignant lors de l'élaboration du scénario 1, nous dirons qu'elles consistent en des principes d'action guidant la construction des problèmes et qui explicitent davantage sa perspective sur la résolution de problèmes. Par ailleurs, ces ressources prennent également la forme de *leviers d'action, certains puisés à son expérience,* tels « exagérer les nombres » pour décourager le tâtonnement ou mettre des indications claires pour guider les élèves.

Quant au chercheur, l'unique *balise* qu'il indique en lien avec la formulation des énoncés est de :

- *forcer* une évolution des stratégies des élèves (un *passage à la généralisation*).

Cette balise prend bien évidemment appui sur sa *perspective sur la modélisation* qui l'amène à s'intéresser au passage de modèles spontanés à des modèles plus généraux. Pour ce faire, le chercheur propose certains leviers d'action (manières de faire) tels jouer sur les valeurs de certaines variables, comme les dimensions du quadrillage dans le dernier problème du scénario 1, des variables mises en évidence à la suite d'une analyse didactique des problèmes. Nous avons là un levier d'action reflétant ce que nous avons nommé sa *perspective didactique*.

Qu'en est-il des ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur lors de l'élaboration du scénario 2 ?

L'enseignant continue à avoir :

- Ce *souci de la clarté* pour les élèves des énoncés des problèmes, comme lors de l'élaboration du scénario 1 (balise qui guide dans la formulation des problèmes). Pour lui, *une façon* d'y arriver (levier d'action) est de *délimiter distinctement des unités ou parties dans les énoncés* (par exemple, attirer leur attention sur la contrainte dans le premier problème du scénario 2, le problème des tours, qui impose que les des blocs d'une même couleur ne peuvent se suivre). En outre, à la lumière de ce qui s'est passé avec l'expérimentation du scénario 1 et avec la sensibilité qu'il a développée par rapport à l'influence sur la résolution des élèves des modèles auxquels on les expose, apparaît une *nouvelle balise* :
- *Éviter de suggérer des modèles* (à travers les illustrations des problèmes).

Au demeurant, cette balise est partagée par le chercheur même si ce dernier penche pour une illustration neutre là où l'enseignant propose d'enlever carrément une illustrative avérée suggestive comme dans le cas de l'illustrative de la première version du deuxième problème du scénario 2. *D'autres balises avancées par le chercheur* dans la formulation des problèmes du scénario 2 sont :

- Amener dans les énoncés la *pertinence de la nécessité du passage à la généralisation ;*
- *Contrer la stratégie par essais et erreurs ;*
- *Amener les élèves à répondre à toutes les questions.*

Ces dernières balises, à part la première, *traduisent une sensibilité à certaines des préoccupations de l'enseignant* qui préfère que les élèves ne restent pas sur les essais et erreurs ou qui veut pousser les élèves à aller jusqu'aux questions de généralisation qui n'ont pas été traitées dans le scénario 1. De plus, en voulant que dans la formulation des énoncés les élèves perçoivent la pertinence de la nécessité de passer à la généralisation, le chercheur revisite une balise centrale formulée lors de l'élaboration du scénario, soit forcer une évolution des stratégies. Ces balises explicitées, le chercheur proposera (leviers d'action) de *sérier distinctement les questions* afin d'éviter qu'à nouveau les élèves ignorent de répondre à toutes les questions. Le chercheur proposera également de *grandes valeurs* des variables identifiées pour contrer la stratégie essais et erreurs. Sur la stratégie essais et erreurs, ce que révèle l'analyse c'est qu'elle est pour beaucoup dans l'exhortation faite aux élèves par l'enseignant d'aller vers quelque chose de systématique. Le chercheur avait légitimé cette stratégie qu'il ne fallait pas rejeter quand les élèves n'ont pas d'autres possibilités, mais lors de l'élaboration du scénario 2 il concédera qu'elle est une entrée possible, certes non suffisante, et qu'un des objectifs à poursuivre lors de l'élaboration est de forcer progressivement les élèves à aller au-delà des essais et erreurs.

Enfin, en restant sur les ressources d'action, le chercheur indiquera *d'autres balises* lors des bilans des scénarios. Il s'agit dans la formulation :

- *D'éviter les questions posées les unes à la suite des autres* (sans qu'elles soient clairement distinguées) ;
- *Amener les élèves à aller au-delà de l'énumération* ;
- *Éviter les énoncés peu vraisemblables.*

L'avant-dernière balise est bien évidemment plus spécifique des problèmes de dénombrement exploités dans le scénario 1 et reflète encore une fois la *perspective du chercheur sur le processus de modélisation.* Là, il réaffirmera la pertinence de donner de grandes valeurs à certaines des variables identifiées dans les problèmes. Cette manière de procéder dans la conception (donner de grandes valeurs à certaines des variables) est un levier d'action récurrent privilégié par le chercheur qui reste attaché à sa perspective. Enfin, le souci du chercheur de retravailler les mises en situation de manière à *proposer des problèmes vraisemblables reflète la prise de conscience de la mise en garde de l'enseignant* à l'effet que l'habillage des problèmes doit éviter l'écueil consistant à introduire des artifices de vocabulaire ou d'illustration qui peuvent paraître absurdes aux élèves alors que le même problème avec un contexte plus « froid » aurait intéressé plus les élèves.

Le tableau 5.4 suivant résume les cadres de référence auxquels renvoient les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans la construction des problèmes ainsi que l'évolution de ces cadres. De part et d'autre, nous avons des balises (renvoyant à un rationnel sous-jacent) mais aussi des leviers d'action puisant à des perspectives différentes, perspective didactique pour le chercheur, stratégies éprouvées et savoir d'expérience pour l'enseignant. Ainsi, dans le cas du chercheur sa perspective didactique s'explicite par exemple à travers un mode d'entrée didactique dans l'action qui est celui utilisé par les didacticiens dans les ingénieries didactiques par exemple, et chez l'enseignant sa perspective didactique se décline à travers des manières de faire voire des stratégies éprouvées mobilisées par l'enseignant dans la construction des problèmes. Ces perspectives illustrent à nouveau une didactique praticienne à l'œuvre en interaction avec une didactique de recherche, et ce de façon complémentaire. On notera une convergence de vues entre l'enseignant et le chercheur, l'un se faisant l'écho de l'autre à la fois dans les finalités poursuivies/reprises (par exemple éviter les illustrations suggestives, ou veiller au caractère vraisemblable du problème) et les leviers proposés pour atteindre ces mêmes finalités (par exemple contrer l'essai-erreur, mais cependant avec des modalités différentes).

**Tableau 5.4 Cadres interprétatifs auxquels renvoient les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans la construction des problèmes et évolution de ces cadres**

| Évolution dans le temps du C I | C I (Enseignant) | Interaction | C I (Chercheur) | Évolution dans le temps du CI |
|---|---|---|---|---|
| Prise de conscience de l'impact des modèles suggérés aux élèves sur leur résolution<br>(RE1, BS1, ES2) | **Une perspective didactique (à travers) :**<br>***Des balises/un rationnel guidant la construction des problèmes**<br>• Clarté des énoncés pour les élèves ; (ES1, ES2)<br>• Importance d'impliquer les élèves (possibilités de problèmes décontextualisés) ; (ES1)<br>• Forcer les élèves à être organisé, aller vers quelque chose de systématique ; (ES1, ES2)<br>• Éviter de suggérer des modèles (à travers les illustrations) ; (ES2)<br><br>***Des manières de faire/stratégies éprouvées pour la construction des problèmes**<br>• Éviter les questions posées les unes à la suite des autres ; (ES1)<br>• Délimiter distinctement des unités dans les énoncés ; (ES2) | Deux rationnels en interaction<br>⟷ | **Une perspective didactique (à travers) :**<br>***Des balises/un rationnel guidant la construction des problèmes**<br>• Forcer un passage à la généralisation ; (CS1)<br>• Motiver la pertinence de la nécessité d'un passage à la généralisation ; (ES2)<br>• Éviter de suggérer des modèles (à travers les illustrations) ; (ES2)<br>• Éviter les énoncés peu vraisemblables ; (BS2)<br><br>***Un mode d'entrée didactique dans la construction des problèmes**<br>• Jouer sur les variables didactiques des problèmes ; (ES1, ES2) | Une perspective sur la généralisation qui se précise<br>(CS2, ES2, BS2)<br><br>Prise de conscience de la limite d'une certaine contextualisation (le problème de « Boris » : un jeu jugé irréaliste par certains élèves)<br>(RE2, BS2) |

| Évolution dans le temps du C I | C I (Enseignant) | Interaction | C I (Chercheur) | Évolution dans le temps du CI |
|---|---|---|---|---|
| | •Exagérer les nombres pour décourager le tâtonnement (ES1) ; | Des manières de faire complémentaires, en écho ⟷ | •Recourir à de grandes valeurs des variables pour décourager/contrer la stratégie par essais, /l'énumération ; (ES2, BS1, BS2) | |
| | ***Une sensibilité à l'autre**<br>Dans des balises qui s'affirment (éviter de suggérer des illustrations suggestives) | Une convergence ⟷ | ***Une sensibilité à l'autre**<br>Des balises (problèmes vraisemblables) et des leviers d'action (éviter les questions les unes à la suite des autres) en écho à certaines des préoccupations de l'enseignant | |

### *5.2.2 Des ressources d'action mobilisées dans l'animation*

Dans cette section nous revenons sur les diverses *manières de faire* suggérées par l'enseignant et le chercheur en lien avec l'animation des scénarios élaborés puis expérimentés. Ces manières de faire sont des ressources d'action qui aident à opérationnaliser dans des classes de secondaire 1 l'approche visant le développement de la modélisation.

Au début de la collaboration enseignant-chercheur, lors de l'élaboration du premier scénario, deux modalités sont proposées respectivement par l'enseignant et le chercheur :

- *Inviter les élèves à montrer qu'ils sont bons* ;
- *Y aller graduellement dans la correction* des problèmes.

En proposant comme levier pour impliquer les élèves de les inviter à montrer qu'ils sont bons, l'enseignant mise sur sa connaissance des élèves de secondaire 1 qui comme il le disait lors de l'entrevue préalable sont participatifs et ont tendance à vouloir montrer qu'ils sont bons. Il s'agit donc de leur signifier qu'ils vivent une expérience intéressante, de leur proposer un défi à relever, ce que fera l'enseignant dans les préambules du début avec la première expérimentation.

Quant au chercheur, en proposant une correction graduelle, il signifie tôt, avant toute expérimentation, une crainte majeure qu'il avait en lien avec l'approche à développer et dans laquelle la routine de correction des devoirs devait sensiblement changer. Il est de la plus grande importance pour le chercheur *d'éviter de suggérer des modèles ou stratégies pouvant par la suite influencer la résolution des élèves,* surtout lors des retours intermédiaires, entre deux périodes de recherche. Comme l'a montré l'analyse de la rencontre réflexive d'élaboration du scénario 1, le chercheur est *sensible à la rupture qu'il introduit dans le fonctionnement habituel de l'enseignant* en proposant de procéder de la sorte, c'est-à-dire en donnant juste quelques indices des bonnes solutions aux problèmes qui seront exploités en classe. De sorte que là où l'enseignant avait habitué les élèves à corriger systématiquement les devoirs et répondre à toutes les questions, le chercheur propose de laisser les élèves échanger entre eux, de voir dans quelle mesure ils peuvent améliorer les modèles et stratégies des uns et des autres, et de ne leur donner que quelques indices des bonnes solutions dans certains cas.

À la suite de l'expérimentation du scénario1, d'autres modalités d'animation sont explicitées dans le récit commenté. Ici, les ressources d'action visent principalement les retours et les échanges entre élèves. *Pour le chercheur et l'enseignant, il s'agit clairement de miser sur les productions et les interventions des élèves* lors de ces retours dont les acteurs sont essentiellement les élèves. Voici résumées, les propositions d'animation de l'enseignant (qui renvoient à son rationnel sous-jacent) :

- *Privilégier les bonnes solutions des élèves* (pour ne pas stigmatiser les solutions erronées) ;
- *Différer la correction* (s'il y a un risque d'influencer la résolution) ;
- *Varier les solutions présentées* lors de la correction des problèmes.

Comme on le voit dans ce qui précède, l'enseignant est en train de modifier sa routine de correction dans la mesure où c'est lui-même qui reprend la proposition faite par le chercheur d'une correction graduelle lors de l'élaboration du scénario 1. Toutefois, il insiste sur l'importance de privilégier les bonnes solutions lors des retours, et ce, pour *ne pas stigmatiser les solutions erronées* ou bien pour que les élèves ne se sentent pas en compétition. Sur ce dernier point, il sera en désaccord avec le chercheur au début comme on peut le voir à travers une des propositions suivantes d'animation du chercheur issues du récit commenté du scénario 1 :

- *Relancer souvent les élèves* (pour faire débattre) ;
- Éviter de suggérer des modèles, jusque dans le choix des mots utilisés;

- Ne pas différencier entre bonnes solutions et solutions erronées (pour comparer et améliorer les solutions des uns et des autres).

Ces propositions reflètent encore une fois l'importance pour le chercheur de ne pas suggérer de modèles aux élèves, mais surtout l'importance des débats entre élèves à propos de leurs solutions lors des retours. On voit bien que pour le chercheur, dans l'approche promue, les élèves sont sans conteste les acteurs centraux et son rôle ou celui de l'enseignant est de mettre en débat, de laisser débattre sans influencer.

La rencontre bilan sur le scénario 1 est l'occasion pour l'enseignant et le chercheur de faire le point et d'indiquer des manières de faire permettant de poursuivre le développement de l'approche. Pour l'enseignant, il s'agit :

- *D'habituer les élèves à travailler des problèmes sur un temps plus long* (en classe) ;
- De *faire débattre de façon anonyme les solutions erronées* (en classe ou avec le scénario 2 à venir) ;
- De *relancer le plus possible les élèves lors des débats.*

L'enseignant indique des mesures de maintien en classe du mode de fonctionnement introduit lors de l'expérimentation du scénario 1. Ces mesures de maintien ont surtout trait à la résolution sur un temps plus long à travailler, l'important étant de sensibiliser les élèves au fait qu'un problème ne se fait pas nécessairement sur un temps court, et nous touchons ici touche au type de problèmes à aborder en classe, qui ne sont pas dans ce cas des problèmes d'application. Rappelons à cet égard que l'enseignant perçoit la nécessité de préparer davantage les élèves aux situations dans lesquelles ils n'ont pas à faire de l'application, comme lorsqu'ils auront à réaliser un projet sans avoir vu avec lui les notions sous-jacentes. Nous avons là, avec cette deuxième mesure de maintien, un effort de réinvestissement dans sa pratique d'un des enseignements tirés de la première qui aura montré la limite de l'introduction rapide de modèles (rappelons que dans le récit 1 il s'était questionné sur la pertinence dans l'enseignement de voir autant de matière quand on sait que par la suite les élèves montrent une faible capacité de réinvestissement). Les autres manières de faire avancées par l'enseignant reprennent des idées suggérées précédemment par le chercheur et donc témoignent d'une ouverture de sa part, surtout pour ce qui est des relances dont l'enseignant avouera qu'elles devraient occuper plus de place dans sa pratique d'enseignement, mais aussi de la prise en compte des solutions erronées dans le retour collectif, et pas seulement des bonnes solutions. Comme l'enseignant, le chercheur indique des mesures de maintien à la fois pour la classe et dans l'optique du deuxième scénario. Ainsi, pour lui il faudra :

- Continuer à faire débattre les élèves (en classe) ;
- Travailler des problèmes sur un temps plus long (un problème par période pour le scénario 2 à venir).

Le chercheur insiste également sur la dimension du temps pour une raison qui n'est pas si différente que cela de celle de l'enseignant. Pour le chercheur, comme nous l'avons déjà mentionné, il faut donner du temps aux élèves pour qu'ils puissent aller le plus loin possible dans la résolution et échanger à propos de leurs solutions alors que pour l'enseignant les élèves doivent s'habituer à l'effort soutenu qu'exige l'approche dans laquelle ils doivent résoudre des problèmes et préparer les arguments qui leur serviront pour faire valoir leurs modèles, stratégies ou solutions lors des retours.

Que dire des ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur en lien avec l'animation du scénario 2 ? Nous remarquerons que dans l'élaboration de celui-ci, les ressources d'action portent moins sur l'animation des échanges que sur l'animation des périodes de recherche. L'enseignant et le chercheur s'entendent pour :

- *Permettre la manipulation* tout en invitant les élèves à aller au-delà de celle-ci ;

- *Faire travailler les élèves sur différents cas* (pour faciliter le passage à la généralisation).

Ce qui précède montre que les deux ont en vue le processus de modélisation et l'importance dans celui-ci du passage à la généralisation, un passage compromis si lors de la résolution les élèves restent sur la manipulation ou ne considèrent pas différents cas. Plus spécifiquement, l'enseignant proposera :

- *D'inviter (à nouveau) les élèves à répondre à toutes les questions* ;
- *D'inviter les élèves à montrer qu'ils sont capables de coopérer avec n'importe quel autre élève dans la résolution.*

L'enseignant en faisant de la capacité à coopérer avec n'importe quel élève un but à poursuivre et une compétence à développer chez les élèves, et en précisant un levier d'action pour le faire, identifie une condition nécessaire à l'approche dans laquelle les élèves travaillent en coopération à développer des modèles et stratégies permettant de résoudre des problèmes. Quant au chercheur, en restant toujours sur les ressources d'action mobilisées dans l'élaboration du scénario 2, il proposera :

- *D'aider au besoin les élèves à organiser leurs données* lors de la résolution ;
- *De rejeter subtilement les premières requêtes de validation* des élèves.

Le chercheur anticipant une difficulté des élèves à organiser les données lors de la résolution, proposera une aide sous forme d'un tableau advenant que cela se produise. Aussi, faisant suite à une des attentes de l'enseignant avant l'expérimentation du scénario 2, il opte pour une approche consistant subtilement à laisser aux élèves la responsabilité de la validation, en les renvoyant à leurs équipes pour décider entre eux de ce qui bon ou non, de ce qui peut être retenu. C'est ce que nous avons appelé une dévolution de la validation.

Enfin, en lien avec l'animation, d'autres ressources d'action sont indiquées lors du bilan final[133]. Pour l'enseignant, il s'agit de :

- *Verbaliser aux élèves les attentes* en lien avec une approche visant le développement de la modélisation (lors de la résolution et dans les échanges) ;
- *Éviter un tri des solutions en fonction de leur justesse* lors des retours ;
- *Relancer le plus possible les élèves lors des échanges* ;
- *Nommer les modèles des élèves lors des retours.*

L'enseignant indique alors des pistes permettant d'opérationnaliser l'approche. Pour l'essentiel, de son point de vue, cela consiste à « routiniser » les attentes liées au développement du processus de modélisation (par exemple, le passage à la généralisation et une dévolution de la validation), dans les phases de recherche ainsi que dans les retours, ces derniers devant être des moments de débats entre élèves durant lesquels la fonction de l'animation est un travail de relancer les élèves, mais aussi de souligner voire nommer les différents modèles auxquels parviennent les élèves. Quant au chercheur, à la suite de l'enseignant, il proposera de :

- *Nommer les modèles des élèves pour les aider à les retenir ;*
- *Nommer prudemment ces modèles.*

Le chercheur se situe donc dans une perspective d'institutionnalisation, ce qui l'amène à voir dans la proposition de l'enseignant de nommer les modèles des élèves comme une piste intéressante pour la phase d'institutionnalisation qui revêt un cachet particulier dans une approche visant le développement de la modélisation. Le tableau 5.5 qui suit résume les cadres de référence auxquels renvoient les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'animation des scénarios.

---

[133] On remarquera que les ressources d'action sont absentes du deuxième récit commenté à la différence du premier récit.

**Tableau 5.5 Cadres de référence auxquels renvoient les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'animation des scénarios**

| Évolution dans le temps du CI | C I (Enseignant) | Interaction | C I (Chercheur) | Évolution dans le temps du CI |
|---|---|---|---|---|
| Identification de conditions nécessaires au développement du processus de modélisation (ES2, BS1, BS2) | **Une perspective didactique (à travers) :**<br>***Un rationnel guidant l'animation**<br>• Miser sur les productions/interventions des élèves ; *(RE1)*<br>• Ne pas blesser les élèves ; *(RE1)*<br>• Amener un passage à la généralisation ; *(BS2)*<br>• Nécessité pour les élèves de pouvoir coopérer avec n'importe quel élève ; *(ES2)*<br>• Importance de routines d'appui à l'approche (clarté des intentions vis-à-vis des élèves) ; (ES2, BS1/S2)<br><br>***Des modalités/mesures d'animation ou de maintien**<br>• Inviter les élèves à montrer qu'ils sont bons (pour les impliquer); (ES1) | Deux rationalités en interaction<br>$\longleftrightarrow$ | **Une perspective didactique (à travers) :**<br>***Un rationnel guidant l'animation**<br>• Miser sur les productions/interventions des élèves ; (RE1)<br>• Éviter de suggérer des modèles/stratégies aux élèves ; (ES1, RE1, BS1/S2)<br>• Faire/laisser débattre les élèves (pour les amener à améliorer leurs modèles, solutions); (RE1, BS1)<br>• Forcer un passage à la généralisation ; (BS2)<br>• Renvoyer aux élèves la Progression du savoir (institutionnalisation) ; *(BS1/S2)*<br><br>***Des modalités/mesures d'animation ou de maintien**<br>• Faire travailler les élèves sur différents cas ; (ES2) | Prise de conscience des défis de l'institutionnalisation dans une approche visant le développement de la modélisation (BS1, BS2) |

| Évolution dans le temps du CI | C I (Enseignant) | Interaction | C I (Chercheur) | Évolution dans le temps du CI |
|---|---|---|---|---|
| Changement dans sa routine de correction<br>(ES1, RE1, BS1)<br><br>Prise de conscience de l'importance de considérer les mauvaises solutions<br>(BS1, BS2)<br><br>Prise de conscience de l'importance des relances<br>(RE1, BS1, ES2, BS2) | • Habituer les élèves à résoudre des problèmes sur un temps plus long ; (BS1)<br>• Faire travailler les élèves sur différents cas ; (ES2)<br>• Inviter les élèves à répondre à toutes les questions ; ES2)<br>• Faire en sorte que les élèves coopèrent avec n'importe quel élève ; (ES2)<br>• Verbaliser aux élèves les attentes en lien avec l'approche ; (BS1/S2)<br>• Différer la correction ; (RE1)<br>• Varier les solutions lors de la correction ; (RE1)<br>• Privilégier les bonnes solutions ; (RE1)<br>• Faire débattre de façon anonyme les mauvaises solutions ; (BS1)<br>• Éviter un tri des solutions en fonction de leur justesse ; (BS1/S2)<br>• Relancer le plus possible durant les débats ; (BS1, BS1/S2)<br>• Nommer les modèles des élèves ; (BS1/S2) | Des modalités complémentaires<br>⟷ | • Aider au besoin les élèves à organiser leurs données ; (ES2)<br>• Rejeter subtilement les requêtes de validation des élèves ; (ES2)<br>• Graduer la correction ; (ES1)<br>• Relancer le plus possible les élèves ; (RE1)<br>• Ne pas différencier entre bonnes et mauvaises solutions ; (RE1)<br>• Habituer les élèves à débattre ; (BS1)<br>• Nommer prudemment les modèles des élèves lors du retour ; (BS1/S2) | Prise de conscience de l'importance de routines d'échange en lien surtout avec la validation<br>(ES2, BS2) |

| Évolution dans le temps du CI | C I (Enseignant) | Interaction | C I (Chercheur) | Évolution dans le temps du CI |
|---|---|---|---|---|
| Prise de conscience de l'importance de faire plus de place dans sa pratique aux relances (RE1, ES2, BS2) | ***Une sensibilité à l'autre** Importance des relances lors des débats entre élèves ; (BS1) | Double vraisemblance ↔ | ***Une sensibilité à l'autre** Rupture introduite dans la pratique de l'enseignant ; (ES1) | Prise de conscience de routines à réaménager/sur lesquelles s'appuyer dans le développement de la modélisation (dans la correction/ le retour sur les problèmes) (BS1, ES2, BS2) |

Le tableau 5.5 précédent résume les cadres interprétatifs auxquels renvoient les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans l'animation des scénarios. Ici aussi, comme avec le tableau 5.4, nous avons une perspective didactique (une didactique de recherche et une didactique praticienne) qui s'explicite de part et d'autre, avec des *rationnels* différents, mais complémentaires guidant l'animation et des *modalités (manières de faire)* pour installer et maintenir des routines de classe encadrant le processus de modélisation par les élèves durant les phases de recherche et de débats. Les rationnels sous-jacents dévoilent l'identification par l'enseignant de quelques conditions nécessaires au développement de l'approche (importance de routines d'appui, nécessité pour les élèves de pouvoir coopérer avec n'importe quel autre élève), et la prise de conscience par le chercheur d'un des défis de l'institutionnalisation sur laquelle les deux ne se sont vraiment pas penchés, tel pouvoir nommer les modèles spontanés des élèves sans pour autant devoir passer trop vite à des désignations « standardisées », ce qui n'est ici pas une finalité poursuivie, le chercheur et l'enseignant s'étant entendus lors du premier bilan de ne pas s'attarder sur un vocabulaire inducteur de modèles.

Enfin, on notera une évolution des cadres de référence mobilisés de part et d'autre, l'enseignant par exemple montrant une disposition à changer sa routine de correction, une prise de conscience de l'importance de faire plus de place dans sa pratique aux relances et de prendre en compte les solutions erronées, et le chercheur la prise de conscience de l'importance de routines d'appui au processus de modélisation, (par exemple pour l'aspect de la validation qui est une étape centrale pour lui) et la réalisation que certaines des routines à installer sont être en rupture avec le fonctionnement usuel de l'enseignant (telle la correction différée). Dans ce qui suit, nous revenons sur le concept de ressources d'action.

### *5.2.3 Retour sur le concept de ressources d'action*

Par ressources d'action, avons-nous dit, nous entendons des ressources autres que les ressources interprétatives qui sont mobilisées par l'enseignant et le chercheur lorsqu'ils se placent dans une perspective d'intervention les amenant tous les deux à indiquer des principes d'action, suggérer des manières de faire, avancer des propositions d'aménagement des problèmes ou d'animation. Tout d'abord, à travers ce qui précède, nous voyons que ces ressources d'action renvoient à deux didactiques en jeu, une didactique praticienne pour l'enseignant et une didactique de recherche pour le chercheur. Ainsi, des perspectives didactiques différentes mais complémentaires sont mobilisées dans l'action et elles prennent la forme : de balises (guidant l'aménagement des problèmes ; l'animation en classe) ; de leviers d'action/ de manières de faire, de modalités (dans la formulation de problèmes, l'animation). Ces perspectives didactiques renvoient pour l'enseignant à un rationnel sous-jacent puisant à sa connaissance des élèves, à sa pratique d'enseignement des mathématiques qui le fait valoriser les routines, et pour le chercheur à un rationnel sous-jacent puisant à sa connaissance ou bien à sa perspective sur le processus de modélisation. Enfin, ces rationnels sous-jacents aux ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans la construction des problèmes et l'exploitation en classe de ces problèmes (tableaux 5.4 et 5.5) sont en en cohérence avec ceux guidant le choix/l'aménagement des problèmes, le retour/repérage sur l'activité des élèves, les principes et finalités poursuivies dans l'animation (tableaux 5.1, 5.2 et 5.3).

Comme pour les ressources interprétatives, les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur dans cette coconstruction sont en interaction, elles se croisent. À travers ce qui précède, on perçoit aisément trois sortes de croisement de ces ressources d'action (au demeurant des ressources d'élaboration ou d'animation) que nous définirons dans ce qui suit. Dans certains cas, on peut parler de *ressources d'action imbriquées* dans le sens où l'on assiste à une réappropriation par l'un des acteurs des *ressources d'action proposées par l'autre* telle qu'elle ou sous une autre forme (par exemple, «corriger graduellement» sera mobilisée par le chercheur pour prendre en compte la ressource «corriger systématiquement» de l'enseignant, ou différer la correction sera reprise par l'enseignant pour prendre en compte le processus de modélisation, relancer les élèves, considérer les bonnes comme les solutions erronées sont aussi des ressources qui seront reprises par l'enseignant).

Dans d'autres cas, ces *ressources d'action* mobilisées de part et d'autre se placent comme *en écho*, c'est-à-dire qu'enseignant et chercheur vont proposer une manière de faire proche, un levier d'action semblable (avec un rationnel en arrière fond toutefois souvent différent). Ces ressourcent se placent comme dans le prolongement les unes des autres (par exemple encourager à aller vers quelque chose de systématique dans la modalité proposée par l'enseignant versus forcer une évolution des stratégies des élèves et la généralisation dans la modalité proposée par le chercheur, ou encore nommer les modèles dans le retour collectif sur les solutions des élèves pour l'enseignant, versus nommer mais avec nuance pour le chercheur).

Enfin, ces *ressources d'action peuvent être en tension* comme au début de la démarche (scénario 1) lorsque le chercheur propose un retour sur les solutions des élèves, peu importe que celles-ci soient bonnes ou mauvaises, alors que l'enseignant privilégie un retour sur les bonnes solutions seulement.

Enfin, on notera que l'enseignant a mobilisé plus de ressources d'animation que le chercheur qui a mobilisé plus de ressources dans la construction des problèmes, cependant, à l'instar des sensibilités théorique et pratique, il n'y a pas ici aussi de chasse gardée, l'enseignant ayant pu contribuer plus qu'il ne l'envisageait pas à la construction des problèmes et le chercheur ayant pu s'impliquer/influer sur l'animation. En somme, l'analyse révèle que dans l'action, didactique praticienne et didactique de recherche peuvent se rejoindre, dans un mouvement de l'une vers l'autre qui transcende les attributions, les représentations voulant que les chercheurs soient les concepteurs, les enseignants les exécutants.

# CONCLUSION

L'objectif que nous poursuivions dans cette étude était de documenter les éclairages respectifs qu'enseignant et chercheur peuvent apporter à l'élaboration conjointe de situations d'enseignement exploitant des problèmes de dénombrement et visant le développement de la modélisation au premier cycle du secondaire. Un tel objectif prenait appui sur le fait que plusieurs recherches en didactique des mathématiques orientées vers la conception de situations ou séquences d'enseignement, en l'occurrence des recherches de type ingénierie didactique, ne prenaient vraiment pas en compte les perspectives des enseignants dans cette conception alors que des études indiquent que les enseignants disposent sur ces situations de ressources plus ou moins structurées pouvant éclairer les chercheurs sur le devenir de ces situations dans la pratique (Bednarz et al., 2001). Pour documenter les ressources susceptibles d'être mobilisées par l'enseignant et le chercheur, nous avons donc mis en place un dispositif de recherche collaborative dans lequel les activités réflexives aménagées ont sollicité les perspectives de l'enseignant et du chercheur sur : 1) les problèmes de dénombrement élaborés ensemble et à la base du processus de modélisation; 2) le processus de modélisation par les élèves en lien avec ces problèmes et leur exploitation; et 3) l'enseignement visant le développement de ce processus (reprenant en cela les trois volets de nos questions de recherche).

Rappelons que notre perspective sur le développement du processus de modélisation privilégiait (chapitre 2) dans l'activité de résolution de problèmes par les élèves la formulation de modèles dits « spontanés » et la validation par les élèves de ces modèles afin de les améliorer, de les raffiner et éventuellement de les généraliser. Le retour par les élèves sur leurs modèles était en ce sens pour le chercheur une composante importante, que ces modèles soient d'emblée appropriés ou non. Les deux scénarios que nous avons élaborés et expérimentés ont été bâtis à l'aide de problèmes élémentaires de dénombrement dont la résolution, comme nous l'aide de problèmes élémentaires de dénombrement dont la résolution, comme nous l'avons plusieurs fois souligné dans les pages qui précèdent, ne nécessitent presque pas de la part des élèves de pré requis conceptuels (ni algébriques, ni géométriques) et les engagent au cœur d'un processus où ils ont à formuler, valider, raffiner, généraliser les modèles spontanés qu'ils se donnent. En outre, l'intérêt de faire travailler la modélisation mathématique sur des problèmes de dénombrement est d'initier les élèves à ce processus sans leur laisser l'impression fausse que modéliser une situation ou un problème c'est toujours poser une équation, ou en venir à construire une représentation standard attendue (graphique, symbolisation...). En effet, certains des problèmes de dénombrement que nous avons proposés (scénario 2) ont permis par exemple aux élèves de modéliser et de dénombrer au moyen de suites numériques (ici les modèles prennent la forme de suites explicites ou de suites définies par récurrence) et de diverses notations intermédiaires. C'est là, nous pensons, l'originalité de notre approche qui contribue à déconstruire une conception restrictive du processus de modélisation, à tort souvent associée à la mise en équations (peu importe leur type) ou à la construction de graphiques.

Pour revenir à notre objectif de recherche qui était de documenter les éclairages de l'enseignant et du chercheur dans la co-construction de scénarios d'enseignement visant le développement de la modélisation, l'analyse nous a permis de mettre en évidence des ressources interprétatives et des ressources d'action mobilisées de part et d'autre. Par ressources interprétatives nous entendons des ressources permettant de donner un sens, de proposer une certaine lecture des aspects abordés dans ce travail conjoint d'élaboration de scénarios autour du développement du processus de modélisation, et par ressources d'action des ressources prenant la forme de balises, de suggestions, de manières de faire, de propositions d'aménagement ou d'animation de ces mêmes scénarios. Les ressources interprétatives ainsi que les ressources d'action mobilisées par l'enseignant et le chercheur puisent à des cadres de référence en interaction qui se précisent, s'affinent, évoluent au fil du temps. Ces cadres relèvent d'une didactique praticienne dans le cas de l'enseignant et d'une didactique de recherche dans le cas du chercheur. Didactique praticienne et didactique de recherche prennent appui sur un répertoire de connaissances différentes : dans le cas de l'enseignant, une connaissance des élèves de secondaire 1 (de leurs difficultés, intérêts, de leurs défis), des manuels (en lien avec la résolution du problèmes et les approches proposées), du curriculum (sous l'angle des compétences à développer, disciplinaires et transversales), des stratégies éprouvées puisant à son savoir d'expérience; dans le cas du chercheur, une connaissance du processus de modélisation et de la combinatoire. Elles prennent aussi appui sur des perspective didactiques différentes mais complémentaires (à travers un mode d'analyse des problèmes et des stratégies des élèves; une rationalité guidant l'aménagement des problèmes et les balises considérées, le retour sur l'activité et les stratégies des élèves, l'animation en classe) et une sensibilité pratique et théorique chez l'un et l'autre.

Notre étude montre surtout la richesse d'une mise en débat de ces didactiques, d'un croisement des regards de l'enseignant et du chercheur. Nous avons pu voir que dans l'analyse comme dans l'action, didactique praticienne et didactique de recherche peuvent se rejoindre, dans un mouvement de l'une vers l'autre qui transcende les attributions, les représentations voulant que les chercheurs soient les concepteurs et les enseignants les exécutants. Un tel croisement nous conforte dans notre conviction de départ sur la nécessité d'un dialogue entre chercheurs en didactique et praticiens enseignants pour faire avancer les connaissances, dans notre cas à propos du développement de la modélisation au début du secondaire.

Dans les lignes qui suivent, nous nous penchons sur quelques pistes ouvertes par le croisement de ces deux didactiques, des perspectives de l'enseignant et du chercheur et permettant le développement de la modélisation en secondaire 1. Nous reviendrons plus spécifiquement pour cela sur les trois volets considérés dans nos questions de recherche, en lien avec les problèmes, la résolution par les élèves et l'enseignement.

Quelles situations permettent le développement de la modélisation en secondaire 1? Il se dégage du croisement des deux regards quelques caractéristiques de telles situations sur lesquelles nous revenons. Pour l'enseignant et le chercheur il est fondamental que les problèmes proposés aux élèves pour travailler la modélisation ne suggèrent ou n'induisent pas de modèles a priori et ce à la fois dans les termes mêmes utilisés dans les énoncés et les illustrations utilisés en appui à l'énoncé (lorsque c'est le cas). Le choix de problèmes et leur formulation doivent être guidés par cette balise considérée comme centrale pour les deux acteurs. Cette caractéristique découle du constat de l'influence des modèles auxquels les élèves sont exposés avant la résolution sur leur engagement ultérieur dans les problèmes (constat fait lors de l'expérimentation du scénario 1). En outre, pour l'enseignant, ces situations doivent être claires, compréhensibles pour les élèves qui peuvent alors s'y engager, leur poser un défi raisonnable, leurs contextes pouvant à l'occasion être dépouillés de tous ces artifices qui n'ajoutent rien aux situations, et enfin ces situations peuvent à l'occasion ouvrir sur la manipulation et une attention particulière doit être portée à leurs illustrations qui doivent servir de support pour leurs données, les exemplifier. Quant au chercheur, les situations visant le développement de la modélisation devraient être raisonnablement ouvertes au risque d'être sinon des exercices d'application, permettre un passage à la généralisation qui doit être motivé dans l'énoncé (dont on doit voir la pertinence), et être vraisemblables pour les élèves qui peuvent s'y engager (rejoignant sur ce dernier point l'enseignant). Ce croisement des deux didactiques contribue ainsi à préciser un ensemble de caractéristiques guidant le choix et la formulation de problèmes de dénombrement féconds sur le plan des apprentissages des élèves et viables en pratique, ce que l'enseignant nomme de beaux problèmes (et qu'il identifiera dans le retour sur les deux scénarios). On l'aura compris, les caractéristiques retenues ici ne débouchent pas forcément sur des situations «réelles» ou sur des situations de la vie de tous les jours, loin s'en faut, l'important étant de donner aux élèves l'opportunité de résoudre des problèmes avec des modèles mathématiques, modèles que les élèves ont à construire, à réinventer en partant de leurs expériences répétées avec une famille de situations. De ce point de vue, cette perspective sur la modélisation rejoint toutes ces approches qui ont à cœur d'amener les élèves à faire du sens dans l'activité mathématique, à recourir à des modèles qu'ils interprètent convenablement car les ayant abstraits de modèles spontanés créés, puis revisités après plusieurs cycles de modélisation. À cet égard notre perspective sur la modélisation est mixte, empruntant certains éléments à la perspective de Gravemeijer (2007) avec la modélisation émergente, et d'autres à la perspective de Lesh et Harel (2003) dans laquelle la modélisation est vue comme une façon d'aborder la résolution de problèmes qui corrige certaines formes comme celles axées sur l'application de concepts théorique, ou le recours à des procédures (Gascón, 1995). Passons maintenant brièvement à l'activité de modélisation par les élèves telle qu'elle nous est apparue en les voyant travailler pour en souligner quelques enseignements importants.

Une des choses que nous (comme chercheur) avons apprises en conduisant cette recherche est l'existence d'un écueil au développement de la modélisation, soit ce que nous avons décrit comme des « connaissances pragmatiques » chez les élèves, certains d'entre eux valorisant à ce point « l'efficacité » qu'ils rejetaient d'emblée la stratégie par essais et erreurs, même en l'absence de tout autre angle d'attaque au problème à résoudre. Comme nous l'avons indiqué dans notre analyse, cette attitude des élèves s'explique pour nous par l'insistance de l'enseignant au début sur l'efficacité (un élément important du cadre pratique qui le guide comme nous l'avons vu lors de lors de l'analyse de l'entrevue préalable) qui dans notre perspective n'est pas une fin en soi. Là-dessus, l'enseignant changera d'avis et saisira l'opportunité de dire aux élèves l'importance de la période de « tâtonnement » et leur servira une belle métaphore, celle du compositeur, pour illustrer le processus cyclique de modélisation.

En lien avec ce processus, nous insisterons sur la phase de validation qui est tout un défi pour les élèves en ce sens qu'une dévolution est indispensable, les élèves devant prendre en charge cette validation dans un esprit d'ouverture à toutes les solutions proposées par leurs pairs, bonnes ou mauvaises, dans le seul but d'améliorer, de raffiner, de généraliser les modèles, stratégies, solutions des uns et des autres. Nous posons donc ici la question de la nécessaire négociation et émergence d'une « culture de modélisation » (Tanner et Jones, 1994) et d'une «communauté de validation» dans la classe (Cobb, Perlwitz et Underwood, 1994). À cet égard le rôle de l'enseignant est d'être à l'écoute, d'encadrer les échanges entre élèves (le débat organisé lui-même étant toute une gageure avec de jeunes élèves de secondaire 1), de les relancer pour les amener à revisiter leurs modèles, à les faire évoluer. C'est là, avec la question de l'institutionnalisation (une question laissée en rade dans cette étude), quelques défis que pose l'animation d'activités visant le développement de la modélisation au début du secondaire.

Nous pensons avec Doerr (2006) que l'animation d'activités de modélisation requiert de la part des enseignants la capacité : 1) d'anticiper chez les élèves les différentes façons d'interpréter, de comprendre un problème donné ainsi que les itinéraires possibles leur permettant de faire évoluer leurs premières idées, de raffiner, généraliser leurs modèles de départ; 2) d'être à l'écoute des modèles émergents des élèves, une écoute non évaluative cherchant à déterminer la justesse ou non des solutions des élèves; 3) de relancer les élèves, de les amener à faire des liens entre leurs modèles, stratégies ou solutions. Ainsi, on voit mieux toute l'importance du travail d'anticipation des modèles et stratégies possibles des élèves que nous avons entrepris lors de l'élaboration des scénarios qui n'est pas sans défis pour le chercheur, l'enseignant ayant eu à nous interpeller à l'occasion sur le caractère vraisemblable d'une symbolisation que nous utilisions, et les élèves nous ayant surpris par : le recours à l'arbre quand nous ne nous y attendions pas, la reconnaissance explicite par un élève de la suite de Fibonacci en lien avec le problème des tours. Cette capacité d'anticipation demande une profonde connaissance des élèves et une grande sensibilité à leurs modèles spontanés. Ceci nous mène à un défi relié, soit d'être capable de repérer dans l'action ces modèles émergents, ce qui exige de l'enseignant une délibération dans l'action comportant une part d'incertitude dans la mesure où les élèves savent se montrer imprévisibles, ingénieux.

Enfin, pour ce qui est de l'enseignement visant le développement de la modélisation en secondaire 1, il importe, c'est le constat conjoint auquel arrivent chercheur et enseignant, d'habituer les élèves à travailler des problèmes sur un temps plus long, le temps était un facteur important à la fois pour développer une persévérance des élèves dont on s'attend à ce qu'ils revisitent plusieurs fois leurs modèles. Dans le même ordre d'idée, l'enseignant indique une autre piste permettant d'intégrer dans l'enseignement une approche centrée sur la modélisation (qui nous semble un éclairage important en lien avec l'installation d'une culture de modélisation dans la classe), soit de « routiniser » les attentes liées au développement du processus de modélisation dans les phases de recherche ainsi que dans les retours, par exemple en lien avec le passage à la généralisation et la nécessaire dévolution par les élèves de la validation. En effet, des routines d'échange et d'appui au processus de modélisation sont indispensables, certaines de ces routines à installer pouvant être en rupture ou non avec le fonctionnement usuel de l'enseignant (telle la correction différée).

Pour conclure, nous mentionnons d'abord les limites de ce travail au regard de la généralisation des résultats obtenus, ensuite nous esquissons quelques pistes de recherches futures, et enfin nous indiquons des retombées plus larges de cette recherche dans la pratique des enseignants, à tout le moins au premier cycle du secondaire.

La principale limite de cette recherche qui s'apparente à bien des égards à une étude de cas unique, avec une dyade enseignant-chercheur, est dans le choix méthodologique porté sur un seul enseignant pour la mener. Rappelons que la raison principale pour laquelle nous avons décidé de travailler avec un enseignant est la reconnaissance de la complexité d'une recherche collaborative impliquant plusieurs enseignants, une telle recherche requérant de la part du chercheur une grande expérience de recherche ainsi qu'une très bonne connaissance de la réalité au secondaire que nous n'avons pas. Qui plus est, une recherche collaborative avec plusieurs participants enseignants aurait certainement sollicité de la part de ceux-ci, prenant là appui sur le travail que nous avons effectué, un éventail de ressources interprétatives et d'action, de routines, bref de cadres de référence qui sans doute auraient révélé une contrastante disparité avec la relative cohérence des cadres de référence mobilisés respectivement par l'enseignant et le chercheur dans cette recherche. Par conséquent, les résultats de cette recherche ont une portée limitée et il convient de souligner leur validité limitée, même si dans la description détaillée que nous avons faite du mode de fonctionnement de la dyade enseignant-chercheur et de l'analyse/interprétation des données, nous pensons avoir contribué à montrer une voie intéressante à suivre. Notre étude revêt donc un caractère exploratoire permettant d'entrevoir le défi de l'organisation et de l'analyse des données d'une recherche visant le développement de la modélisation en secondaire 1 et qui impliquerait plusieurs enseignants.

Une autre limite de cette recherche a trait au type de problèmes qui ont été exploités dans cette recherche. En effet, en dépit de tous les avantages que nous trouvons aux problèmes de dénombrement, il importe de reconnaître leur singularité dans le contexte de l'enseignement des mathématiques au début du secondaire au Québec où la combinatoire est abordée implicitement à travers les problèmes de probabilité, et donc n'est pas un objet explicite d'enseignement. Nos scénarios d'enseignement visant le développement de la modélisation au secondaire 1 ne tiennent donc pas en compte une variété de problèmes qui sont plus exploités par les enseignants, tels les problèmes d'arithmétique et de géométrie.

Les limites mises en évidence précédemment indiquent pour nous de toutes premières pistes de recherche. À court terme, nous aimerions étendre à d'autres situations non combinatoires l'exploitation de problèmes visant le développement du processus de modélisation, ce qui nous permettra de nous intéresser à d'autres perspectives didactiques sur la modélisation (un élargissement de perspective dans notre cas) et, surtout, de mettre en évidence les ressources interprétatives et d'action qu'enseignant et chercheur sont susceptibles de mobiliser dans l'élaboration de scénarios reposant sur des situations plus «réalistes» ou des situations mobilisant plus les savoirs mathématiques essentiels abordés en secondaire 1. À moyen terme, lorsque nous aurons plus d'expérience de recherche et une meilleure connaissance des milieux éducatifs au Québec, au secondaire et au primaire, nous voudrions mener des recherches collaboratives visant le développement de la modélisation impliquant plusieurs enseignants, voire des conseillers pédagogiques. De telles recherches pourraient permettre, entre autres, de mettre à l'épreuve l'hypothèse que nous formulions précédemment selon laquelle en convoquant plusieurs cadres de référence il est fort probable qu'on mettra en évidence des disparités qui contrasteront avec la relative cohérence des cadres de référence mobilisés respectivement par l'enseignant et le chercheur dans cette recherche Deux autres pistes de recherche, cette fois-ci reliées à des questions que nous avons soulevées dans les pages précédentes sans toutefois y répondre, ont trait d'une part à l'institutionnalisation : sur l'objet modélisation comme tel, nous souhaitons dans nos recherches à venir nous attarder davantage au rôle de celle-ci, à la nature qu'elle devrait recouvrir dans une approche centrée sur le développement de la modélisation, une institutionnalisation. D'autre part, en lien avec la théorisation amorcée ici, nous aimerons pousser plus loin le croisement des regards, le croisement des deux didactiques qui ici a seulement été explorée.

Le propos de la fin dans cette conclusion porte sur quelques retombées de notre recherche dans la pratique des enseignants.

Une retombée majeure de cette recherche pour les enseignants soucieux de renouveler leur approche de la résolution de problèmes en mathématiques, à tout le moins en première secondaire, éclaire les possibilités et promesses d'une approche centrée sur l'activité de modélisation par les élèves. En effet, travailler la modélisation au moyen de problèmes de dénombrement permet aux élèves : de développer un processus complexe tel la modélisation au moyen de mathématiques simples (les problèmes combinatoires qu'ils ont à résoudre n'exigeant presque pas de prérequis mathématiques); de donner libre cours à leur créativité (en ayant recours à des modèles et stratégies qui leur sont propres); de développer à la fois leur pensée critique, leur argumentation et leurs habilités communicationnelles en mathématiques (lors des retours en classe sur leurs modèles). L'approche que nous avons conjointement avec un enseignant dans cette étude peut ainsi contribuer à sensibiliser les enseignants sur l'importance des modèles spontanés qui nous révèlent les raisonnements mathématiques des élèves, d'importantes habiletés même chez les élèves jugés académiquement faibles qui sont en mesure d'arriver à des modèles intéressants, ingénieux, comme nous en avons fait l'expérience lors de cette recherche.

Une autre retombée importante de cette recherche a trait à l'apport des retours collectifs ou «plénières» et à la possibilité de faire émerger une problématique de modélisation en première secondaire. En effet, avant de clore les dernières plénières, lorsque nous avons interpellé les élèves sur la façon dont ils ont fonctionné (voulant dire par là l'approche centrée sur la modélisation), ils diront avoir aimé : chercher en équipe (ainsi ils peuvent s'assurer de ce qu'ils énumèrent, essayer différentes stratégies), trouver ou découvrir par eux-mêmes, échanger et valider avec d'autres, découvrir d'autres idées ou façons de faire dont on peut se servir avec d'autres problèmes. Ici, les réponses fournies par les élèves montrent que ces derniers valorisent le fait d'être « créateurs » de modèles, l'importance de la collaboration avec les pairs pour ce qui est de l'exigeante phase de validation. Nous avons là, sans doute, quelques indices de ce qu'ils retiennent de l'approche visant le développement de la modélisation. Une problématique de modélisation a émergé, avec une certaine prise de conscience par les élèves de quelques étapes du processus de modélisation. Ce qui n'est pas rien en secondaire 1! Enfin, autre retombée de cette recherche dans la pratique des enseignants, l'examen des retours montre également que ceux-ci sont un levier approprié d'aide à l'émergence d'une problématique de dénombrement en ce sens qu'ils (les retours) permettent d'amorcer une prise de conscience, une réflexion sur cette variété particulière de problèmes que sont les problèmes de dénombrement. Par exemple, si nous considérons les modèles et stratégies des élèves dans la résolution du problème du quadrillage, ces modèles nous renseignent sur différentes conceptualisations du modèle combinatoire des arrangements, et les procédures de dénombrement utilisées par les élèves reflètent la prise de conscience par plusieurs de la nécessité d'une systématisation dans le dénombrement avec de tels problèmes. Nous avons donc là des indices indiquant que ces retours constituent, sans doute, une voie prometteuse pour tous ceux qui sont intéressés par une initiation significative au dénombrement au début du secondaire. Dans une telle entreprise, une attention particulière devrait être portée sur l'évolution des élèves dans la complexification de leurs modèles à travers la réorganisation de situations de plus en plus complexes, des situations qu'il doit être possible de regrouper en classe selon leurs modèles combinatoires standards sous-jacents, et que les élèves ont à redécouvrir, à re-conceptualiser.

# RÉFÉRENCES


Arsac, G., Germain, G. et Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. Lyon : IREM de Lyon.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, vol 9/3*, 281-308.

Artigue, M. (2002a). Didactic engineering and the complexity of the learning processes in classroom situations. Dans C. Bergsten et al. (Dir.), *Research and action in the mathematics classroom, actes du MADIF2* (pp. 5-20). Linköping: SMDF.

Artigue, M. (2002b). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche en didactique aujourd'hui? *Revue Internationale des Sciences de l'Éducation, 8,* 59-72.

Astolfi, J. P.et Drouin, A. M. (1992). La modélisation à l'école élémentaire. Dans INRP (Dir.), *Enseignement et apprentissage de la modélisation en sciences* (p. 55-117). Paris : INRP.

Barrette, J. (2008). *Étude de l'explicitation de l'apprentissage informel chez des adultes dans le contexte d'une entreprise : un processus dialectique de construction située de la connaissance*. Thèse de doctorat en Éducation. Université du Québec à Montréal.

Barry, S. (2003). *Le développement de la capacité et du raisonnement combinatoire dans l'apprentissage des mathématiques*. Essai inédit, Université Laval.

Batanero, C., Godino, J. D. et Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Sintesis Editorial.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. et Godino, J. D. (1992). Analysis of students' errors and difficulties in solving combinatorial problems. Dans W. Geeslin et K. Graham (Dir.), *Proceedings of the Sixteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 1, p. 241-248). Durnham, NH: Université de New Hampshire.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. et Godino, J. D. (1997a). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, 181-199.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. et Godino, J. D. (1997b). Assessing combinatorial reasoning. Dans I. Gal et J. Garfield (Dir.), *The assessment challenge in statistics Education* (p. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute/I.O.S. Press.

Boutin, G. (2000). *L'entretien de recherche qualitatif.* Sainte-Foy : Presse de l'université du Québec.

Bednarz, N., Desgagné, S et Diallo, P. (2001). Approche collaborative de recherche : une illustration en didactique des mathématiques. Dans Ph. Jonnaert et S. Laurin (Dir.), *Les didactiques des disciplines : un débat contemporain*. Québec : Presses de l'Université du Québec.

Bednarz, N., Poirier, L., Desgagné, S. et Couture, C. (2001b). Conceptions de séquences d'enseignement en mathématiques : une nécessaire prise en compte des praticiens. Dans A. Mercier, J. Lemoyne et A. Roucher (Dir.), *Le génie didactique: usages et mésusages des théories de l'enseignement*. Bruxelles : De Boeck.

Bélair, J. (2004). Chaos et complexité, modèles et métaphores : quelles leçons pour l'enseignement des mathématiques? *Actes du colloque des didacticiens des mathématiques du Québec,* Université Laval (p. 135-145).

Berger, P. et Luckmann, T. (1986). *La construction sociale de la réalité*. Paris : Méridien Klincksieck.

Berry, J. et Davies, A. (1996). Written reports. Dans Haines et Dunthorne (Dir.), *Mathematics learning and assessment: sharing innovative practices*. London: Arnold.

Berthier, P. (1996). *L'ethnographie de l'école: éloge critique*. Paris: Economica, collection Anthropos.

Blum, W. et al. (2002). ICMI study 14: applications and modelling in mathematics education (document de discussion). *Educational studies in mathematics education, 51*, 149-171.

Blum, W. et Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 37-68.

Boaler, J. (2001). Mathematical modelling and new theories of learning. *Teaching mathematics and its applications, 20*(3), 121-127.

Boudon, R. (2003). *Raison, bonnes raisons*. Paris : PUF.

Boutin, G. (2000). *L'entretien de recherche qualitative*. Sainte-Foy : Presse de l'Université du Québec.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brown, R. (2002). Mathematical modelling in the international baccalaureate, teacher beliefs and technology usage. *Teaching mathematics and its applications, 21*(2), 67-74.

Burkhardt, H. (1984). Modelling in the classroom: how can we get it to happen?. Dans J. S. Berry, D. N. Burghes, I. D. Huntley, D. J. D. James et A. O. Moscardini (Dir.), *Teaching and applying mathematical modelling* (pp. 39-47). Chichester: Ellis Horwood.

Caron, F. et Muller, E. (2005). L'intégration de l'application et de la modélisation dans les mathématiques au secondaire et au collégial. Dans E. Simmt. et B. Davis (Dir.), *Actes de la 28e rencontre annuelle du Groupe Canadien d'Études en Didactique des Mathématiques* (GCEDM) (p. 63-80), Université Laval, Québec.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x, 19*, 43-72.

Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. In R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (Dir.), *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques (Saint-Sauves, 22-31 août 1995)*. Clermont Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

Couture, C. (2002). *Étude du processus de co-construction d'une intervention en sciences de la nature au primaire par une collaboration praticien-chercheur*. Thèse de doctorat inédit, Université du Québec à Chicoutimi.

Déchaux, J.-H. (2002). L'action rationnelle en débat : sur quelques contributions et réflexions récentes. *Revue française de sociologie, 43* (3), 557-581.

De Lange, J. (1987). *Mathematics: insight and meaning*. Utrecht: Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijscomputercentrum, Rijksuniversiteit Utrecht.

Desgagné, S. (1994). À propos de la «discipline de classe» : analyse du savoir professionnel d'enseignantes et d'enseignant-e-s expérimentés du secondaire en situation de parrainer des débutants. Thèse de doctorat non publiée, Université Laval.

Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des Sciences de l'Éducation, 23* (2), 371-393.

Desgagné, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative : illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives, 18*, 77-105.

Desgagné, S. (2001). La recherche collaborative : nouvelle dynamique de recherche. Dans M. Anadon et M. L'Hostie (Dir.), *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation* (57-76). Les presses de l'Université Laval.

Desgagné, S. (2007). Le défi de coconstruction de «savoir» en recherche collaborative : autour d'une démarche de reconstruction et d'analyse de récits de pratique enseignante. Dans, M. Anadón (Dir.), *la recherche participative : multiples regards.* Québec : Presses de l'Université du Québec.

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, P. et Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des Sciences de l'éducation, 27*(1), 33-64.

DiSessa, A. H. (1983a). Phenomenology and the evolution of intuitions. Dans D. Gentner et A. L. Stevens (Dir.), *Mental models* (p. 15-33). London : Lawrence Erlbaum Associates.

DiSessa, A. H. (1983b). *Intuitions and knowledge* (Document non publié cité par Fischbein, 1987, p. 167, 173).

Doerr, H.M. (2006). Teachers' Ways of Listening and Responding to Students' Emerging Mathematical Models. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 255-268

Dossey, J. A., McCrone, S., Giordano, F. R. et Weir, M. D. (2002). *Mathematics methods and modeling for today's mathematics classroom: A contemporary approach for teaching grades 7-12*. Pacific Grove: Books/Cole.

Douady, R. (1984). De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle. *Les cahiers de didactique des mathématiques n$^o$ 6*, IREM de Paris 7.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres dialectique outil-objet. *Recherche en didactique des mathématiques, 7(2).*

Dubet, F. (1994). *Sociologie de l'expérience*. Paris : Seuil.

Dubois, J.G. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 37-57.

Dupin, J.-J. (1995). *Modèles et modélisation dans l'enseignement*. Quelques contraintes didactiques. Actes de la VIIIe École d'Été de Didactique des Mathématiques.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

English, L. D. (1993). Children's strategies for solving two-and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 255-273.

Erbert, C. L. (1993, 12-16 avril). *An assessment of prospective secondary teachers' pedagogical content knowledge about functions and graphs*. Communication faite à la rencontre annuelle de l'American Educational Research Association, Atlanta.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. et Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *5*, 193-197.

Fourez, G., Englebert-Lecomte, V. et Mathy, Ph. (1997). *Nos savoirs sur nos savoirs : un lexique d'épistémologie pour l'enseignement.* Bruxelles : De Boeck Université.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Riedel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education, China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Galbraith, P. (1999). *Important issues in applications and modelling*. Paper presented at the AAMT virtual conference, Adelaide.

Galbraith, P. L. et Clatworthy, N. J. (1990). Beyond standard models: meeting the challenge of modelling. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 137-163.

Gascón, J. (1995). La modélisation et l'étude de champs de problèmes. *Actes de la VIIIe École d'Été de didactique des mathématiques*.

Giddens, A. (1987). *La constitution de la société*. Paris : Presses universitaires de France.

Glaser, B. G. et Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine.

Glaymann, M. et Varga, T. (1975). *Les probabilités à l'école.* Lyon: CDIRIC

Godino, J. D, Batanero, C et Roa, R. (2003). *An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students*. Document inédit. Université de Grenade.

Godino, J. D, Batanero, C et Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 3-36.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and learning, 1*(2), 155-177

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *ICMI study 14: Modelling and applications in mathematics education* (pp. 99-108), Springer.

Grenier, D. et Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(1), 59-100.

Grenier, D. et Payan, C. (2003). Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*. Paris, 19 octobre 2002.

Grossman, P., Wilson, S. et Shulman, L. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. Dans M. Reynolds (Dir.), *Knowledge base for the beginning teacher* (pp. 23–36). Oxford: Pergamon Press.

Habermas, J. (1987). *Théorie de l'agir communicationnel* (Tomes 1-2). Paris : Fayard.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 187-205.

Host, V. (1980). Les opérations intellectuelles en activités d'éveil scientifiques. *Repères*, *58*, Paris : INRP.

Hoyles, C. (1992). Illuminations and Reflections – Teachers, Methodologies and Mathematics. Dans W. Geeslin et K. Graham (Dir.), *Proceedings of the Sixteenth PME Conference* (3-263 – 3-286). Durham, NH: University of New Hampshire.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Dir.), *Approaches to algebra*. Dordrecht: Kluwer academic publishers.

Jaworski (sous presse). Mathematics Teacher Education in a Global Context. Dans N. Bednarz, D. Fiorentini et R. Huang (Eds.), *The Professional Development of Mathematics Teachers: Experiences and Approaches developed in different countries*. Presses de l'université d'Ottawa.

Kaiser, G. et Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 302-310.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 3*(1), 111-127.

Maaβ, K. (2005). Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. *Teaching mathematics and its applications, 24*(2-3), 61-74.

Kyeleve, J. I. et Williams, J. S. (1996). *Measures of teachers attitudes towards mathematical modelling.* Communication présentée à la 20e rencontre du PME, Valence.

Laperrière, A. (1997). Les critères de scientificité des méthodes qualitatives. Dans, J. Poupart, J.P. Deslauriers, L.H. Groulx, A. Laperrière, R. Meyer et A.P. Pires (Dir.), l*a recherche qualitative : enjeux épistémologique* (p. 365-389). Montréal : Gaëtan Morin.

Laplace, P.-S. (1820). *Théorie analytique des probabilités*, Tome VII des œuvres complètes (3e édition). Paris. Réédition Jacques Gabay (1995).

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: mind, mathematics and culture in everyday life.* Cambridge: Cambridge University

Lave, J. (1991). Acquisition des savoirs et pratiques de groupe. *Sociologie et sociétés, 23*(1), 145- 162

Lave, J. et Wenger, E. (1990). *Situated learning: legitimate peripheral participation.* Palo Alto, CA: Institute of Research on Learning.

Leinhardt, G. et Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction. Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology, 77*, 247-271.

Leinhardt, G., Weldman, C., et Hammond, K. M. (1987). Introduction and integration of classroom routines by expert teachers. *Curriculum inquiry, 17*(2), 135-176.

Leinhardt, G. (1988). Expertise in instructional lessons: An example from fractions. Dans D. A. Grouws et T. J. Cooney (Dir.), *Perspectives on research on effective teaching* (p. 47-66). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Leinhardt, G. (1993). On teaching. Dans R. Glaser (Dir.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 4, pp. 1-54). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Leinhardt, G., Putnam, R. T., Stein, M. K. et Baxter, J. (1991). Where subject knowledge matters. Dans J. Brophy (Dir.), *Advances in research on teaching* (pp. 87-113). Greenwich, CT: JAI Press.

Maher, C. A., Martino, A. M. et Alston, A. A. (1993). Children's construction of mathematical ideas over time. Dans B. Atweh, G. Booker, M. Carss et C. Kanes (Dir.), *Proceedings of the Sixteenth Annual Conference Mathematics Education Research Group of Australia* (p. 7-39). Brisbane, Australie.

Maher, C. A. et Martino, A. M. (1996a). The development of the idea of mathematical proof: a 5-year case study. *Journal for research in mathematics Education*, *27*(2), 194-214.

Maher, C. A. et Martino, A.M. (1996b). Young children inventing methods of proof: the "gang of four". Dans L. Steffe, P. Cobb, G. Goldin et B. Greer (Dir.), *Theories of mathematical learning*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Maher, C. A. et Martino, A. M. (1997b). Conditions for conceptual change: from pattern recognition to theory posing. Dans H. Mansfield et N. H. Paterman (Dir.), *Young children and mathematics: concepts and their representations*. Sydney, Australia: Australian Association of Mathematics Teachers.

Maher, C. A. et Speiser, R. (1997a). How far can you go with block towers? Stephanie's intellectual development. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(2), 125-132.

Maher, C. A et Muter, E. M. (1998a). Recognizing isomorphism and building proof: revisiting earlier ideas. Dans S. Berenson et al. (Dir.), *Proceedings of the twentieth* *annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p.461-467). Raleigh, North Carolina: ERIC Clearinghouse for science, mathematics and environmental Education.

Maher, C. A et Martino, A. M. (1998). *Brandon's proof and isomorphism. Can teachers help students make convincing arguments?* (p. 77-101). Rio de Janeiro : Université de Santa Ursula.

Maher, C. A., Altson, A., Dann, E. et Steencken, E. (2000). Private University Project. Dans *Mathematics series content guide: a professional development workshop series for K-12 teachers of mathematics*. Cambridge, MA: Harvard Smithsonian Center for Astrophysics and the Robert B. Davis Institute for Learning.

Martinand, J.-L. (février 1992). Table ronde. Dans J. Colomb (Dir.), Recherches en didactique : contributions à la formation des maîtres. *Actes du colloque des didactiques* (p. 25-26). Paris : Institut National de Recherche pédagogique.

MELS (2003). *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle*. Québec : Bibliothèque Nationale du Québec.

MEQ. (1988). *Guide pédagogiques, primaire, fascicule K, Résolution de problèmes, Orientation générale*. Québec : Ministère de l'éducation, Direction générale des programmes, Direction de la formation.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Navarro-Pelayo, V. (1991). *La enseñanza de la combinatoria en bachillerato*.

Paillé, P. (1994). L'analyse par théorisation ancrée. *Cahier de recherche sociologique, 23*, 147-181.

Piaget, J. et Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses universitaires de France.

Piaget, J. et Inhelder, B. (1966). *La logique de l'enfant*. Paris: Presses universitaires de France.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. Doubleday: Princeton.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. Dans J. P. da Ponte et J. F. Matos (Dir.), *Proceedings of the Eighteenth PME Conference* (Vol. 1: 195-210). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Powell, A. B. et Maher, C. A. (2002). Inquiry into the interlocution of students engaged with mathematics: appreciating links between research and practice. Dans. S, Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant et K. Nooney (Dir.), *Proceedings of the twentieth annual meeting of the North-American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Athens, Georgie.

Powell, A. B. (2003). *"So let's prove it! » Emergent and elaborated mathematical ideas and reasoning in the discourse and inscriptions of learners engaged in a combinatorial task*. Thèse de doctorat inédit, Université de Rutgers, New Jersey.

Powell. A. B., Francisco, J. M. et Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 405–435

Pozzi, S., Noss, R. et Hoyles, C. (1998). Tools in practice, mathematics in use. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 105-122.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Thèse de doctorat inédit, Université de Grenade, Département de didactique des mathématiques.

Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2*(4), 505-528.

Roditi, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques : entre contraintes et liberté pédagogique.* Paris: Harmattan.

Sanchez, V. et Llinares, S. (2003). Four students' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*, 5-25.

Savoie-Zajc, L. (1996). Journal de bord. Dans A. Mucchielli (Dir.), *Dictionnaire des méthodes qualitatives en sciences humaines et sociales* (p. 116-117). Paris : Armand Colin.

Savoie-Zajc, L. (1997). L'entrevue semi-dirigée. Dans B. Gauthier (Dir.), *Recherche sociale. De la problématique à la collecte de données* (p. 263-286). Sainte-Foy, Québec : Presses de l'Université du Québec.

Savoie-Zajc, L. (2000). La recherche qualitative/interprétative en éducation. Dans T. Karsenti et L. Savoie-Zajc (Dir.), *Introduction à la recherche en éducation* (p. 127-140). Sherbrooke : Éditions du CRP.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Dans D. A. Grouws (Dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-371). New York: Mac Millan.

Schoenfeld, A. H. (2000). Models of the teaching process. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(3), 281-325.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner*. New York: Basic Books

Schön, D. A. (1987). *Educating the reflexive practitioner*. San Francisco: Jossey Bass.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4–14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*, 1-22.

Sierpinska, A. et Kilpatrick, J. (1998). *Mathematics education as a research domain: a search for identity*, ICMI. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sriraman, B. (2004). Reflective abstraction, uniframes and the formulation of generalizations. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 205-222.

Sriraman, B. et English, L. (2004). Combinatorial mathematics: research into practice. *The Mathematics Teacher, 98*(3), 182-191.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Newbury Park: Sage.

Strauss, A. et Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research: Grounded Theory Procedures and Techniques.* Newbury Park, CA: Sage Publications.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A paradigm of developmental Research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course. A theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics, 25*(1–2), 109–135.

Tanner, H. et Jones, S. (1994). Using peer and self-assessment to develop modelling skills with students aged 11 to 16: a socio-constructive view. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 413-431.

The Open University (1978). *Mathematics foundation course, mathematical modelling units 1 to 5*. Open University Press.

Traoré, K. (2007). *Des mathématiques chez des paysans?* Thèse de doctorat en Éducation soutenue en 2006 à la faculté d'Éducation de l'UQAM, sous le titre «étude des pratiques mathématiques développées en contexte par les Siamous au Burkina Faso». Montréal : Éditions Bande Didactique, collection «mathèse».

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9-35.

Van der Maren, J.-M. (1995). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.

Varga, T. et Dumont, M. (1973a). *Combinatoire, statistiques et probabilités de 6 à 14 ans : guide et commentaires*. Paris: O.C.D.L.

Varga, T. et Dumont, M. (1973b). *Combinatoire, statistiques et probabilités de 6 à 14 ans : fiches de travail*. Paris: O.C.D.L.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? Dans G. Harel et J. Confrey (Dir.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. New York: State University of New York Press.

Vermersch, P. (2000). *L'entretien d'explicitation*. Issy-les-Moulineaux :ESP.

Von Glasersfeld, E. (1989). Commentaires subjectifs par un observateur. Dans N. Bednarz et C. Garnier (Dir.), *Construction des savoirs*. Montréal : Agence d'ARC.

Von Glasersfeld, E. (1994, septembre). *L'interprétation constructiviste de l'épistémologie génétique*. Communication présentée au Troisième symposium d'épistémologie génétique, Aguas de Lindoia, Brésil.

Vrancken, D et Kuty. O. (Dir.). (2000). La sociologie et l'intervention. Enjeux et perspectives, Bruxelles : De Boeck Université.

Weber, M. (1971). *Économie et Société*. Paris: Plon.

Wengraf, T. (2001). *Qualitative research interviewing*. London: Sage Publications.

# APPENDICE A

# DOCUMENT DE PRÉSENTATION DU PROJET AUX ENSEIGNANTS

**Titre de la recherche** : Co-construction de situations d'enseignement en dénombrement visant le développement de la modélisation au premier cycle du secondaire

**Résumé de la recherche :** Notre travail de recherche part d'une préoccupation d'exploiter avec les élèves du début du secondaire la résolution de problèmes afin de développer le processus de modélisation en mathématiques chez ces derniers. Ce travail s'insère dans le développement de la compétence à résoudre des problèmes en mathématiques (MELS, 2003), le processus de modélisation en mathématiques rejoignant plusieurs des composantes de cette compétence: 1) décoder les données du problème pour en dégager les informations pertinentes, s'en faire une première représentation; 2) se construire un premier modèle du problème, sous forme par exemple de dessin, schéma, tableau, organisation systématique autre; 3) rendre compte aux autres de ce modèle et de la résolution du problème, partager l'information; 4) valider la solution obtenue et le caractère approprié du modèle; 5) généraliser au besoin. Dans la modélisation, pour les élèves, l'idée est donc de se représenter le problème en ayant recours à différents modèles possibles, d'y aller très graduellement dans ce processus

Nous cherchons ici à exploiter un type de problèmes particuliers, les problèmes ou situations problèmes de dénombrement, une classe de problèmes riches en mathématiques, qui permettent d'aborder ce processus de modélisation sans exiger de la part de l'élève de prérequis comme tels.

Pour permettre de développer de tels scénarios d'enseignement, une collaboration avec un enseignant du début du secondaire est essentielle. Il s'agit pour nous en effet de développer non seulement des scénarios riches du point de vue de l'apprentissage des élèves, mais aussi viables dans la pratique. De sorte que les savoirs professionnels de l'enseignant, sa connaissance des élèves, du groupe, de la pratique sont des éléments pour nous centraux. D'où l'idée de travailler dans une recherche collaborative avec un enseignant, en mettant à profit à la fois les contributions du chercheur et de l'enseignant.

L'objectif de la recherche pourrait s'énoncer ainsi:

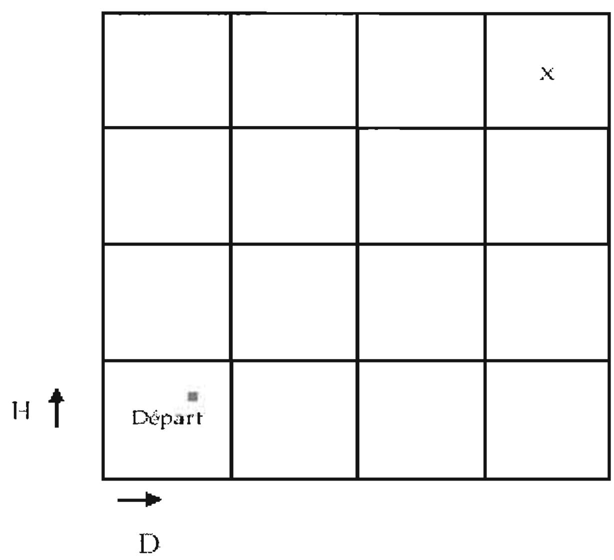
- construire conjointement avec un enseignant du secondaire des situations d'enseignement autour de l'exploitation de problèmes de dénombrement et visant le développement du processus de modélisation chez les élèves

Cette construction conjointe implique :

- le choix conjoint de problèmes ou situations problèmes de dénombrement riches à exploiter en classe
- l'élaboration conjointe de scénarios d'enseignement autour de ces problèmes ou situations problèmes
- un regard croisé sur ce qui se passe du côté des élèves dans ce processus de modélisation, le développement au besoin d'outils pour comprendre les apprentissages qui se réalisent
- un retour conjoint sur le scénario

**Exemple de problème de dénombrement** (Glaymann et Varga, 1975; reprise par Guay, Hamel et Lemay, 2005)

Dans le quadrillage ci-dessus, on place un pion dans la case de départ et on veut se rendre à la case X. Les seuls déplacements autorisés sont des déplacements d'une case vers la droite ou d'une case vers le haut. Combien y a-t-il de chemins allant de la case de départ à la case X? Comment peut-on être certain d'obtenir tous les chemins possibles? Justifier votre réponse. Qu'obtient-on dans le cas d'un autre quadrillage?



# APPENDICE B

## CANEVAS DE L'ENTREVUE PRÉALABLE, LETTRE DE CONSENTEMENT DES PARENTS

B1. Canevas de l'entrevue préalable

| **Thématiques abordées/ Questions à l'intérieur de chacune des thématiques** | **Balises théoriques** |
|---|---|
| 1. *Expérience professionnelle de l'enseignant*<br>▪ Combien d'années d'expérience comptes-tu comme enseignant de mathématiques au secondaire?<br>▪ As-tu toujours enseigné au secondaire ? À quels niveaux ? Toujours dans cette école, ou as-tu enseigné aussi dans d'autres écoles ?<br>▪ Peux-tu me parler un peu de ta formation ? As-tu au cours de tes années d'enseignement pris part à d'autres formations?<br>▪ As-tu été impliqué dans des modifications de programmes, des changements de manuels au cours de ta carrière ? dans des colloques ? dans d'autres activités qui touchent à l'enseignement des maths ? Lesquelles ? Peux-tu m'en parler un peu<br>▪ Travailles-tu en équipe avec d'autres enseignants ? À propos de quoi ?<br>▪ Depuis le début de ta carrière, si tu avais à me parler de ton expérience comme enseignant au secondaire, comment décrirais tu ton cheminement ?<br>▪ Y a t-il des choses qui ont changé dans ta façon de fonctionner avec les élèves ? de travailler avec eux ? | ▪ Son engagement professionnel, son implication, son rapport à la formation<br>▪ Ses ajustements de pratique<br>▪ Comment perçoit-il son développement professionnel, son évolution comme professionnel ? |
| 2. *À propos des valeurs de l'enseignant, son épistémologie professionnelle*<br>▪ Comment démarres-tu l'année avec tes groupes ? Qu'est-ce que tu cherches à installer avec eux quand tu démarres l'année ?<br>▪ Et par la suite, une fois que ceci est bien installé, que cherches tu à travailler ?<br>▪ En général, sur quoi mets-tu l'accent dans ton enseignement ? Quels sont les éléments importants pour toi ? les incontournables ?<br>▪ Et dans ton enseignement, plus spécifiquement en mathématiques, quels sont les éléments qui sont importants pour toi ? | ▪ Routines (Leinhardt)<br>▪ Buts et objectifs généraux poursuivis, leurs fondements éthiques ou philosophiques<br>▪ Rationnel sous-jacent de l'acteur compétent (Giddens), ce qui est central pour lui… |

| Thématiques abordées/ Questions à l'intérieur de chacune des thématiques | Balises théoriques |
|---|---|
| 3. *Son approche en enseignement des maths dans la classe/ sa pratique*<br>▪ J'aimerai ça comprendre un peu mieux comment tu fonctionnes : Peux-tu me donner un exemple de leçon en maths que tu donnes (tu peux choisir n'importe quoi, une que tu connais bien, que tu as déjà donné plusieurs fois ....)<br>▪ Comment alors choisis-tu les problèmes que tu abordes dans ce cas avec tes élèves ?<br>▪ Et comment les exploites-tu en classe quand tu reviens dessus ?<br>▪ Est-ce que tu fonctionnes toujours comme cela, ou est-ce qu'il y a des leçons qui peuvent être complètement différentes ? peux-tu me donner un exemple ?<br>▪ Au-delà de cet exemple, quels types de problèmes travailles-tu en général avec les élèves?<br>▪ Comment vois-tu cette année l'exploitation du manuel *Panoramaths* ? Comptes-tu recourir à d'autres manuels ou ressources ?<br>▪ Tu m'as dit que toi tu aurais choisir un autre manuel ? Pourquoi ?<br>▪ As-tu déjà travaillé des problèmes de dénombrement ?<br>▪ Comment vois-tu l'exploitation de ces problèmes avec les élèves ? Quel intérêt vois-tu avec de tels problèmes | La didactique praticienne de l'enseignant : ses approches, ses manières de fonctionner, choix de problèmes, manière de les exploiter...une certaine caractérisation de sa pratique |
| 4. *Son rapport aux élèves et à leur apprentissage des mathématiques*<br>▪ Lorsque tu reçois une copie d'élève dans un problème comme ceux dont tu m'as parlé tout à l'heure, qu'est-ce que tu regardes ?<br>▪ Quand tu reviens sur un devoir en classe, quelles sont les choses sur lesquelles tu insistes ?<br>▪ Est-ce que dans ton enseignement, tu as observé des difficultés des élèves en résolution de problèmes ? Lesquelles ?<br>▪ Et ailleurs, quelles sont selon toi les principales difficultés des élèves ? Quelles forces observes-tu chez eux par ailleurs ?<br>▪ Les groupes d'élèves que tu as cette année, ils sont comment ? Si tu avais à caractériser le groupe avec lequel (les groupes) on va travailler, tu dirais quoi à cette étape ? | La manière dont l'enseignant lit les travaux des élèves, le groupe, dont il revient sur les productions d'élèves. |

Pour conclure l'entrevue : Quelles sont tes attentes par rapport au projet ?

**Nota Bene** : Le but de cette entrevue est de mieux comprendre ce que l'enseignant fait, ce qu'il est comme professionnel pour pouvoir construire par la suite avec lui l'intervention.

## B2. Lettre de consentement des parents d'élèves

| Projet de recherche en enseignement des mathématiques visant le développement d'habiletés chez les élèves en résolution de problèmes |
| --- |

Chers parents,

Par la présente, nous venons solliciter votre autorisation pour la participation de votre enfant à un projet de recherche portant sur la résolution de problèmes en mathématiques. Cette recherche sera réalisée en collaboration avec l'enseignant de mathématiques de votre enfant, Monsieur XXX, et s'inscrit dans le programme régulier de mathématiques de secondaire 1. Elle vise avant tout à aider les enfants à développer des habiletés en résolution de problèmes en mathématiques. Les problèmes proposés aux enfants seront choisis avec la collaboration de l'enseignant et l'expérimentation, qui prendra place à la deuxième étape, s'étendra sur une durée maximale de 6 périodes. Nous veillerons, l'enseignant et moi, à ce que les activités expérimentées soient échelonnées et ne pénalisent aucunement votre enfant dont la participation est volontaire. Pour faciliter l'analyse avec l'enseignant des situations expérimentées et en évaluer les forces et limites, nous comptons filmer la réalisation des activités en classe.

Toutes les informations recueillies resteront confidentielles. Les vidéos et enregistrements ne seront utilisés que dans le cadre de cette recherche et détruits une fois que nous aurons terminé l'analyse de leur contenu.

Nous vous remercions de votre précieuse collaboration

Souleymane Barry, étudiant au doctorat en éducation, Université du Québec à Montréal
XXX, professeur de mathématiques, au ....

Si vous avez des questions concernant l'implication de votre enfant dans ce projet de recherche, vous pouvez me contacter Souleymane Barry au....

En cas de non respect des engagements cités précédemment, vous pouvez faire valoir votre situation auprès de mon comité de thèse, M$^{me}$ Nadine Bednarz, au (514) 987 3000 poste 3012 et M. Fernando Hitt, au (514) 987 3000 poste 1428, tous les deux professeurs au département de mathématiques de l'UQAM.

**AUTORISATION**

J'autorise mon enfant à participer en classe à l'activité de résolution de problèmes proposée :

Oui Non

J'accepte que mon enfant soit filmé alors qu'il travaille avec d'autres élèves dans la classe :

Oui Non

| | | |
| --- | --- | --- |
| .................................. | .................................. | ...................... |
| Nom de l'enfant | Signature du parent | Date |

**Veuillez retourner une copie du formulaire à l'enseignant de votre enfant.**

## APPENDICE C

## PROBLÈMES ET SCÉNARIOS, EXTRAITS RÉCIT COMMENTÉ 1, CANEVAS DES BILANS



---

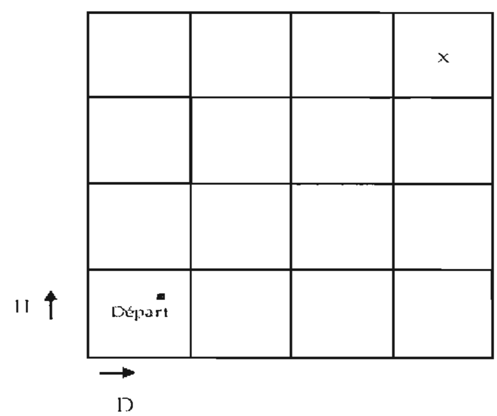
[134] Pour gagner de l'espace, nous avons dû réduire et simplifier les pages de titres originales.

## C.1 Les 5 problèmes discutés à la rencontre réflexive portant sur l'élaboration du 1^er^ scénario

1. ***Les codes d'un cadenas (voir aussi Panoram@maths, manuel A, vol 2, p. 51)***
   La combinaison pour ouvrir un cadenas est composée d'un code de trois chiffres, chaque chiffre pouvant être 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
   Un même chiffre peut se répéter deux ou même trois fois dans la combinaison.
   Quelles sont tous les codes possibles pour ouvrir ce cadenas?

2. ***Des codes avec des voyelles***
   Combien de codes de trois voyelles peux-tu former avec les voyelles I, U, O, A, E, Y, sachant :
   - on peut répéter les mêmes lettres?
   - Toutes les lettres de ce code doivent être différentes?

3. ***Déplacement d'un pion sur un quadrillage (adaptation de Glaymann et Varga, 1975)***
   Dans le quadrillage ci-dessous, on place un pion dans la case de départ et on veut se rendre à la case X. Les seuls déplacements autorisés sont des déplacements d'une case vers la droite ou d'une case vers le haut. Combien y a-t-il de chemins allant de la case de départ à la case X? Comment peut-on être certain d'obtenir tous les chemins possibles? Justifier votre réponse. Qu'obtient-on dans le cas d'un quadrillage rectangulaire?



### 4. *Le jeu de Lili : des marches à la suite de Fibonacci (adaptation de Glaymann et Varga, 1975)*

Lili monte quatre marches d'escalier, plusieurs fois de suite, et chaque fois d'une façon différente. Elle commence par gravir les marches une par une (ce qui peut se représenter par la notation 1111), puis elle recommence en montant une marche, puis deux à la fois, puis une (121).

Elle ne peut pas monter trois marches à la fois. De combien de façons différentes peut-elle monter ces marches?

En équipe, remplissez le tableau suivant :

| De combien de façons différentes Lili peut-elle monter l'escalier si elle ne peut monter plus de deux marches à la fois ? | | |
|---|---|---|
| *Nombre de marches* | *Façons de monter* | *Nombre de façons* |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 11 2 | 2 |
| 3 | 111 21 12 | 3 |
| 4 | | |

Que constatez-vous avec la suite des nombres qui figurent sur la dernière colonne de votre tableau? Pouvez-vous prolonger cette suite?

### 5. *Quatre personnes autour d'une table!*

*Première formulation :* (Glaymann et Varga, 1975)

De combien de façons peut-on placer quatre personnes autour d'une table ?

*Deuxième formulation :*

Les 4 enfants de Delphine rendent visite chaque fin de semaine à leur grand-père et à chaque visite ils jouent entre eux aux cartes autour d'une table sous l'œil vigilant de grand-père qui tient le bilan. Pour varier le plus possible les équipes, grand-père décide à chaque jeu de les placer différemment autour de la table. Mais l'un deux, Adrien, affirme déclare qu'il ya en tout 16 possibilités de les disposer ce que les autres refusent. Adrien a-t-il raison? Combien ya t'il en définitive de façon de les disposer autour d'une table?

Pistes d'exploration :

- Faut-il distinguer entre le voisin de droite et celui de gauche? (oui et non)
- Faut-il distinguer les places? (oui et non)
- Selon les cas, combien de problèmes faut-il envisager ? (4 cas)
- Utiliser un arbre de choix pour chaque cas

## C.2 Problèmes de la version 1 du scénario 1

***Étape 1 : situations introductives***

1. Les numéros 6, 7, 8 et 11, pages 29-30, Panoram@th manuel A vol 2
2. Les codes d'un cadenas

   La combinaison pour ouvrir un cadenas est composée d'un code de trois chiffres, chaque chiffre pouvant être 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Un même chiffre peut se répéter deux ou même trois fois dans la combinaison.

   Quelles sont tous les codes possibles pour ouvrir ce cadenas?
3. Des codes avec des voyelles

   Combien de codes de trois voyelles peux-tu former avec les voyelles I, U, O, A, E, Y, sachant :
   - on peut répéter les mêmes lettres?
   - Toutes les lettres de ce code doivent être différentes?

***Étape 2 : Déplacement d'un pion sur un quadrillage (adaptation de Glaymann et Varga, 1975)***

***Étape 3 : Quatre personnes autour d'une table à quatre places (troisième formulation)***
À deux, Alexandre et Maria sont assis à une table (à quatre places) et essayent de résoudre le problème «des chemins sur un quadrillage», mais apparemment ils ont du mal à s'entendre! XXX et YYY qui ne sont pas loin, s'asseyent à leur côté et les écoutent afin de pouvoir les départager. Cameron qui aime plaisanter affirme qu'il ya 16 façons de disposer Alexandre, Maria, YYY et XXX autour de la tumultueuse table ! Ce qui laisse perplexe Maxime qui se met aussitôt à dénombrer le nombre de façons de disposer quatre personnes autour d'une table. Que devra répondre Maxime à Cameron? Cameron a-t-il raison ou comme à son habitude plaise-t-il seulement?

## C.3 Version 1 du cahier de l'élève préparé par l'enseignant (reproduction adaptée[135])

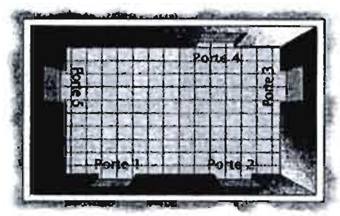
Novembre 2006
Activité de beaux problèmes
Cahier du secrétaire
Version finale

IMPORTANT : Indiquer toutes vos démarches!

---

### Problème 1

Il y a 5 portes pour entrer ou sortir d'une pièce. Détermine le nombre de façons d'entrer et de sortir de cette pièce si l'on ne peut pas sortir et entrer par la même porte.

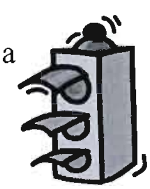



### Problème 2

Sur la ligne de départ, 6 coureurs automobiles prennent place. Si tous les coureurs terminent la course et qu'il n'y a pas d'ex aequo, combien de résultats différents est-il possible d'obtenir à la ligne d'arrivée?

### Problème 3

Un des modèles de feux de circulation est composé de trois cercles disposés à la verticale. Combien de possibilités s'offraient à l'inventeur de ce modèle de feux de circulation quant à la position des couleurs des trois cercles?



### Problème 4

À l'aide des chiffres 3, 4 et 5, on forme tous les nombres de trois chiffres possibles sans répéter le même chiffre dans un nombre.

a) Énumère tous les nombres que l'on peut former.
b) Est-il vrai que tous les nombres formés sont divisibles par 3? Explique ta réponse.

### Problème 5

La combinaison pour ouvrir un cadenas est composée d'un code de trois chiffres, chaque chiffre pouvant être 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Un même chiffre peut se répéter deux ou même trois fois dans la combinaison. Quelles sont tous les codes possibles pour ouvrir ce cadenas?

---

[135] Pour gagner de l'espace, nous avons dû réduire et simplifier les pages de titres originales.

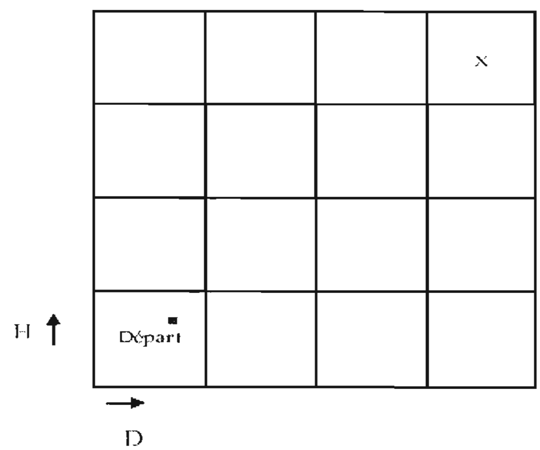
**Problème 6**

Combien de codes de trois voyelles peux-tu former avec les voyelles I, U, O, A, E, Y, sachant :

a) on peut répéter les mêmes lettres?
b) Toutes les lettres de ce code doivent être différentes?

**Problème 7 : Déplacement d'un pion sur un quadrillage**

Dans le quadrillage ci-dessous, on place un pion dans la case de départ et on veut se rendre à la case X. Les seuls déplacements autorisés sont des déplacements d'une case vers la droite ou d'une case vers le haut. Combien y a-t-il de chemins allant de la case de départ à la case X? Comment peut-on être certain d'obtenir tous les chemins possibles? Justifier votre réponse. Qu'obtient-on dans le cas d'un quadrillage rectangulaire?




**Problème 8**

À deux, Alexandre et Maria sont assis à une table (à quatre places) et essayent de résoudre le problème «des chemins sur un quadrillage», mais apparemment ils ont du mal à s'entendre! XXX et YYY qui ne sont pas loin, s'asseyent à leur côté et les écoutent afin de pouvoir les départager. Cameron qui aime plaisanter affirme qu'il y a 16 façons de disposer Alexandre, Maria, YYY et XXX autour de la tumultueuse table ! Ce qui laisse perplexe Max qui se met aussitôt à dénombrer le nombre de façons de disposer quatre personnes autour d'une table. Que devra répondre Max à Cameron? Cameron a-t-il raison ou comme à son habitude plaise-t-il seulement?

Pistes d'exploration :

- Faut-il considérer que les places occupées peuvent être différentes?
- Une place étant occupée autour de cette table, doit-on distinguer celui qui est assis à gauche de celui qui est assis à droite de cette place?

## C.4 Problèmes de la version 2 du scénario 1

**1, 2, 3** précédents

**4.** La combinaison pour ouvrir un cadenas est composée d'un code de trois chiffres, chaque chiffre pouvant être 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Un même chiffre peut se répéter deux ou même trois fois dans la combinaison.

1) Quelles sont tous les codes possibles pour ouvrir ce cadenas?

2) Parmi ces codes, quels sont ceux qui sont composés de chiffres différents

**5.** Problème du quadrillage précédent.

## C.5 Reproduction adaptée du scénario 2 (version 1)

---

**Scénario 2 (version 1)**

**SUITES ET DÉNOMBREMENT EN SECONDAIRE 1**

Modéliser au moyen de suites combinatoires
Dénombrer au moyen de suites numériques

Par

Souleymane Barry
Université du Québec à Montréal
Avril 2007

---

### 1. Introduction

Le présent et deuxième scénario est construit à l'aide de quatre problèmes de dénombrement. À travers les problèmes proposés aux élèves, les objectifs poursuivis sont : les amener à voir l'intérêt à modéliser certaines situations au moyen des suites «combinatoires» (des arrangements avec possibilité de répétitions); puis dénombrer au moyen de suites numériques (autres que des suites arithmétiques).

Dans ce scénario, les suites numériques ne sont pas abordées pour elles-mêmes, mais dans la perspective où elles prolongent un travail intermédiaire de modélisation et servent à dénombrer. Une telle alternative, nous l'espérons, permettrait de limiter les méfaits d'une certaine approche des suites numériques au secondaire qui consiste privilégier un vocabulaire consacré (régularité, règle, rang, terme, raison, suites arithmétiques) qui est source de beaucoup de confusions, difficultés chez les élèves (par exemple avec le rang d'un terme). Il s'agit donc pour nous, de proposer des mises en situations non classiques (par exemple régularités autres qu'arithmétiques) qui ne reposent pas sur un vocabulaire consacré (et en ce sens débouchent sur des applications directes) et qui permettent aux élèves de modéliser et ultimement dénombrer au moyen de suites numériques.

Enfin, rappelons que la perspective dans laquelle nous nous inscrivons en lien avec le développement du processus de modélisation par les élèves privilégie dans l'activité de résolution de problèmes la formulation de modèles dits «spontanés» ou «informels» et, la validation intergroupes de ces modèles et ce dans le dessein de permettre aux équipes «auteures» de ces modèles de revisiter leurs productions pour les raffiner, les améliorer, au besoin les généraliser. Il importe de souligner que dans la dynamique de validation que nous cherchons à installer, à l'instar de notre première expérimentation avec le scénario 1, le retour sur les différents modèles construits par les élèves se fait peu importe que ceux-ci fonctionnent ou pas (c'est-à-dire même lorsque les modèles construits ne permettent pas d'arriver à la bonne réponse). Ainsi, les modèles qui marchent sont revisités en termes de plus grande efficacité, d'optimisation des démarches ou stratégies qui les sous-tendent, des liens qu'ils pourraient entretenir avec les autres modèles discutés. Et les modèles qui ne marchent pas sont revisités sous l'angle de leurs limites, des aspects mêmes qui les mettent en défaut, des voies et moyens envisageables pour les rendre plus efficaces, mais aussi, si le temps le permet, de la même manière que les modèles qui d'emblée marchent.

Dans la suite, nous présentons le déroulement du scénario, les étapes et activités successives proposées ainsi que les consignes qui accompagnent le travail des élèves. Pour ce scénario, contrairement au premier, un seul problème sera proposé par période pour donner plus de temps pour la recherche et le retour sur un problème.

## 2. Étapes et activités du scénario

La classe est organisée en équipes de 2 élèves. La phase de recherche se fait d'abord en équipes, puis des échanges sont autorisés entres équipes dans le but de permettre une première validation, ensuite chaque équipe doit mettre au propre sa solution, en prenant soin de bien indiquer la démarche utilisée ainsi que les justifications qui appuient la démarche. Toutes les productions sont récupérées en fin de période et un tri est fait par l'enseignant et le chercheur afin de déterminer les solutions qui seront discutées à la prochaine période qui débute par un retour collectif sur le problème résolu et se prolonge avec la recherche d'un nouveau problème et la mise au propre de la solution de ce dernier. Ainsi de suite jusqu'au dernier problème du présent scénario. Une durée maximale de 5 périodes de 1h 18mn chacune est prévue pour la totalité du scénario 2. *Toutefois, le scénario pourrait être raccourci par la suppression du problème 4 qui est là comme un extra certes important, mais non indispensable. À discuter!!!*

### *2.1 Étape 1 : Mise en route du scénario et recherche d'un premier problème*

Cette première étape est l'occasion de rappeler aux élèves les consignes globales quant au fonctionnement attendu lors de la phase de recherche (collaboration en équipe, fonction des cahiers blanc et bleu, justifier sa démarche, écrire lisiblement la solution qui peut être mise sur acétate) et celle de validation (communiquer clairement sa démarche et se prononcer avec des arguments fondés sur les démarches des autres : la démarche est-elle claire ? Fonctionne-t-elle? Comment la rendre meilleure? Est-elle semblable ou différente des autres?). La période se poursuit par la recherche du problème 1 suivant et sa termine par la mise au propre par les équipes des solutions trouvées.

**Problème 1 :** le jeu de Boris (adaptation de Varga et Dumont, 1975)

Pour se rendre au premier étage, Boris emprunte l'escalier qui compte 7 marches. Les marches étant assez hautes, il ne peut monter 3 marches à la fois. Pour s'amuser, il essaye de gravir ces marches de différentes façons.

De combien de façons différentes peut-il monter ces marches?

Peux-tu trouver une manière de calculer rapidement le nombre de façons de monter un escalier, quelque ce soit le nombre de marches de l'escalier?

Consigne pour la recherche : quand le travail en équipes sur ce problème est bien engagé, suggérer l'idée d'un tableau à 3 colonnes (nombre de marches, façons de monter, nombre de façon) pour aider à organiser les différentes données, repérer la régularité et énoncer la méthode de calcul. Laisser la liberté d'organiser autrement les données. Rappeler que les 2 questions du problème.

*Étape 2 : Retour sur le Problème 1 et recherche du problème 2*

Cette étape débute par le retour collectif sur le problème 1. Elle se poursuit avec la recherche du problème 2 suivant et la mise au propre des solutions trouvées

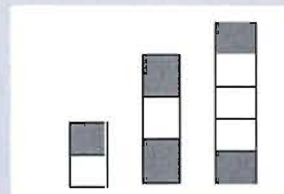
**Problème 2** : des tours et des chiffres

Le jeu consiste à construire des tours de hauteurs différentes avec des cubes emboitables de couleurs rouges et blanches.

La consigne est que dans une tour les cubes rouges n'apparaissent pas à des places voisines.

Combien de tours de hauteurs différentes pouvez-vous ainsi construire?

Trouvez une méthode pour trouver le nombre de tours, et ce quelque soit la hauteur de la tour?



Consignes pour la recherche : Là aussi suggérer un tableau, mais laisser la liberté d'organiser autrement les données. Rappeler que le matériel fourni donne seulement une idée des types de tours à construire. Rappeler que les 2 questions du problème.

*2.2 Étape 3 : Retour sur le Problème 2 et recherche du problème 3*

Comme précédemment, cette étape débute par le retour collectif sur le problème 2. Elle se poursuit avec la recherche du problème 3 ci-dessous et la mise au propre des solutions trouvées par les différentes équipes.

**Problème 3 :** (adaptation de Panoramaths, manuel A, vol 2, p. 132)

Dans le cadre d'un échange international, 12 personnes provenant de pays différents se rencontrent pour la première fois. Comme le veut la coutume, chaque personne serre la main de toutes les autres et se présente

Combien de poignées de mains différentes les 12 personnes échangeront-elles lors de cette rencontre?

Trouvez une méthode pour trouver le nombre de mains échangées, et ce quelque soit le nombre de personnes participants à ce type d'échange international?


Consignes pour la recherche : advenant une symbolisation des personnes par des «points», attirer l'attention des élèves sur la disposition des points qui doit permettre un calcul exact du nombre de poignées de mains («éviter les situations de 3 points alignés»); Advenant aussi que le travail des élèves s'avérait périlleux, on pourrait donner la consigne qui consiste à recourir à un tableau avec quelques cas, puis de remplir ce tableau en y indiquant le nombre de personnes, dans chaque cas le nombre total de poignées de mains échangées et enfin le calcul qui permet de mettre en évidence la régularité en faisant la différence entre chacun des termes consécutifs figurant dans le tableau.

### *2.3 Étape 4 : Retour sur le Problème 3 et recherche du problème 4*

Cette étape débute avec le retour collectif sur le problème 3 et se poursuit avec la recherche du problème 4 et la mise au propre des solutions. Le problème 4 proposé ici est conçu comme une activité extra, c'est-à-dire qu'il permet de voir si les élèves peuvent transférer la démarche, ou dit autrement de voir comment le travail de modélisation sur des problèmes de dénombrement se poursuit avec une situation riche du point de vue d'une introduction à de l'algèbre par la modélisation à l'aide de suites.

**Problème 4 : le problème du restaurateur Marcel** (Bednarz, 1995)

Marcel le propriétaire du restaurant dispose de tables simples dans son restaurant qu'il place l'une à côté de l'autre pour pouvoir placer ses clients lorsqu'ils arrivent. Il dispose ainsi de différentes tables de toutes sortes de grandeurs : des grandes, des petites, des moyennes, etc. (*voir* ci-dessous)

Marcel aimerait bien ne pas avoir à compter à chaque fois les clients qui arrivent pour décider autour de quelle table il les place. Pourrez-vous l'aider à trouver une manière de calculer vite le nombre de clients qu'on peut asseoir autour d'une table, et ce quelque soit la grandeur de la table?

Consignes pour la recherche : justifier la méthode trouvée pour aider Marcel à calculer vite le nombre de clients à asseoir autour d'une table quelconque!

### *2.4 Étape 5 : Retour global*

Cette étape clôture le scénario 2. Il débute avec le retour sur le problème 4, ensuite un retour global est fait en partant du premier problème résolu. L'idée est d'amener les élèves à exprimer les liens qu'ils font rétrospectivement entre les différents problèmes, mais aussi de les inviter à une sorte de bilan d'apprentissage en lien avec la façon dont nous avons fonctionné, ce qu'ils ont aimé, ce qu'ils n'ont pas aimé, l'intérêt qu'ils trouvent au processus de modélisation dans la résolution de problèmes.

## C.6 Reproduction adaptée du scénario 2 (version 2)

Scenario 2 (version 2)

**Du dénombrement aux suites**

Par
Souleymane Barry
Université du Québec à Montréal
Avril 2007

### 1. Introduction

Le présent et deuxième scénario est construit à l'aide de trois problèmes de dénombrement. Comme avec le premier scénario, l'objectif poursuivi est le développement par les élèves du processus de modélisation avec des prolongements possibles sur les suites numériques qui figurent au programme en secondaire 1.

Rappelons que la perspective dans laquelle nous nous inscrivons en lien avec le développement du processus de modélisation par les élèves privilégie dans l'activité de résolution de problèmes la formulation de modèles dits «spontanés» ou «informels» et, la validation intergroupes de ces modèles et ce dans le dessein de permettre aux équipes «auteures» de ces modèles de revisiter leurs productions pour les raffiner, les améliorer, au besoin les généraliser. Il importe de souligner que dans la dynamique de validation que nous cherchons à installer, à l'instar de notre première expérimentation avec le scénario 1, le retour sur les différents modèles construits par les élèves se fait peu importe que ceux-ci fonctionnent ou pas (c'est-à-dire même lorsque les modèles construits ne permettent pas d'arriver à la bonne réponse). Ainsi, les modèles qui marchent sont revisités en termes de plus grande efficacité, d'optimisation des démarches ou stratégies qui les sous-tendent, des liens qu'ils pourraient entretenir avec les autres modèles discutés. Et les modèles qui ne marchent pas sont revisités sous l'angle de leurs limites, des aspects mêmes qui les mettent en défaut, des voies et moyens envisageables pour les rendre plus efficaces, mais aussi, si le temps le permet, de la même manière que les modèles qui d'emblée marchent.

D'après ce qui précède, afin de ne pas court-circuiter le développement du processus de modélisation, il est important d'éviter d'orienter trop vite le travail des élèves vers les suites qui ne doivent pas juste apparaître comme un traitement numérique, décontextualisé, des problèmes proposés. Toutefois, l'enseignant pourra ensuite exploiter les situations abordées, pour poursuivre avec les suites numériques.

Un autre objectif poursuivi à travers les situations proposées est, nous l'espérons, de limiter les méfaits d'une certaine approche des suites numériques au secondaire qui consiste à privilégier un vocabulaire consacré (régularité, règle, rang, terme, raison, suites arithmétiques) qui est source de beaucoup de confusions, difficultés chez les élèves (par exemple avec le rang d'un terme). Il s'agit donc pour nous, de proposer des mises en situations non classiques (par exemple régularités autres qu'arithmétiques) qui ne reposent pas sur un vocabulaire consacré (débouchant sur des applications directes et en ce sens peu riche du point de vue du processus de la modélisation) et qui permettent aux élèves de modéliser et, éventuellement, de dénombrer au moyen de suites numériques.

Dans ce qui suit, nous présentons le déroulement du scénario, les étapes et activités successives proposées ainsi que les consignes qui accompagnent le travail des élèves

## 2. Étapes et activités du scénario

La classe est organisée en équipes de deux élèves. La phase de recherche se fait d'abord en équipes, puis des échanges sont autorisés entres équipes dans le but de permettre une première validation, ensuite chaque équipe doit mettre au propre sa solution, en prenant soin de bien indiquer la démarche utilisée ainsi que les justifications qui appuient la démarche. Toutes les productions sont récupérées en fin de période et un tri est fait par l'enseignant et le chercheur afin de déterminer les solutions qui seront discutées à la prochaine période qui débute par un retour collectif sur le problème résolu et se prolonge avec la recherche d'un nouveau problème et la mise au propre de la solution de ce dernier. Ainsi de suite jusqu'au dernier problème du présent scénario. Une durée maximale de 5 périodes de 1h 18mn chacune est prévue pour la totalité du scénario 2.

Pour ce scénario, contrairement au premier, un seul problème sera proposé par période pour donner plus de temps pour la recherche et le retour sur un problème.

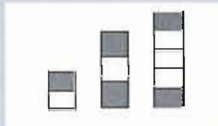
La dernière étape, la quatrième, clôture le scénario 2. Il débute avec le retour sur le problème 3, ensuite un retour global est fait en partant du premier problème résolu. L'idée à travers ce retour global est d'amener les élèves à verbaliser les liens qu'ils font rétrospectivement entre les différents problèmes, mais aussi d'inviter les élèves à une sorte de bilan d'apprentissage en lien avec la façon dont nous avons fonctionné, ce qu'ils ont aimé, ce qu'ils n'ont pas aimé, l'intérêt qu'ils trouvent au processus de modélisation dans la résolution de problèmes.

*Étape 1 : Mise en route du scénario et recherche d'un premier problème*

Cette première étape est l'occasion de rappeler aux élèves les consignes globales quant au fonctionnement attendu lors de la phase de recherche (collaboration en équipe, fonction des cahiers blanc et bleu, justifier sa démarche, écrire lisiblement la solution qui peut être mise sur acétate) et celle de validation (communiquer clairement sa démarche et se prononcer avec des arguments fondés sur les démarches des autres : la démarche est-elle claire ? Fonctionne-t-elle? Comment la rendre meilleure? Est-elle semblable ou différente des autres?). La période se poursuit par la recherche du problème 1 suivant et se termine par la mise au propre par les équipes des solutions trouvées.

**Problème 1** : des tours et des chiffres

L'activité consiste en équipe à trouver toutes les tours d'une certaine hauteur que l'on peut faire avec deux couleurs (par exemple, rouge et blanche), deux cubes de même couleur, les rouges, ne pouvant être côte à côte. Combien de tours de hauteurs différentes pouvez-vous ainsi construire?



Si on reprenait cette activité avec une autre classe...sans avoir à recompter à chaque fois, pourrais-tu trouver une manière de faire pour calculer le nombre de tours différentes que l'on peut faire, qui marcherait pour n'importe quelle hauteur de tour? Explique.

Consignes pour la recherche :

- faire varier ici la hauteur des tours d'une équipe à l'autre...de manière à justifier par la suite le passage à la généralisation;
- pour aider à organiser les données suggérer un tableau, mais laisser aux élèves la liberté d'organiser autrement les données. Rappeler que le matériel fourni donne seulement une idée des types de tours à construire. Rappeler les 2 questions du problème.

*2.5 Étape 2 : Retour sur le Problème 1 et recherche du problème 2*

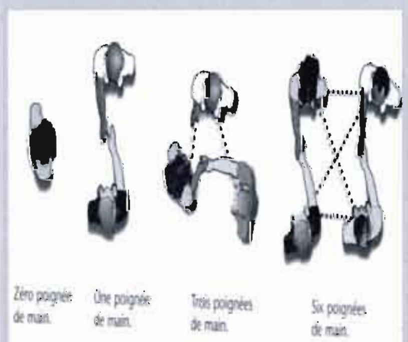
Cette étape débute par le retour collectif sur le problème 1. Elle se poursuit avec la recherche du problème 2 suivant et la mise au propre des solutions trouvées.

**Problème 2 :** (adaptation de Panoramaths, manuel A, vol 2, p. 132)

Dans le cadre d'un échange international, 12 personnes provenant de pays différents se rencontrent pour la première fois. Comme le veut la coutume, chaque personne serre la main de toutes les autres et se présente

Combien de poignées de mains différentes les 12 personnes échangeront-elles lors de cette rencontre?

Et s'il y avait plus de 12 personnes? Pouvez-vous trouver une manière de faire pour calculer le nombre de poignées de mains différentes qui vont s'échanger, et qui marcherait pour n'importe quel nombre de personnes présentes à la rencontre? Expliquez-nous...




Consignes pour la recherche :

- advenant une symbolisation des personnes par des «points», attirer l'attention des élèves sur la disposition des points qui doit permettre un calcul exact du nombre de poignées de mains («éviter les situations de 3 points alignés»);
- dans l'éventualité où le travail des élèves s'avérait périlleux, on pourrait donner la consigne qui consiste à recourir à un tableau avec quelques cas, puis de remplir ce tableau en y indiquant le nombre de personnes, dans chaque cas le nombre total de

poignées de mains échangées et enfin le calcul qui permet de mettre en évidence la régularité en faisant la différence entre chacun des termes consécutifs figurant dans le tableau;
- rappeler les deux volets du problème.

### *2.6 Étape 3 : Retour sur le Problème 2 et recherche du problème 3*

Comme précédemment, cette étape débute par le retour collectif sur le problème 2. Elle se poursuit avec la recherche du problème 3 ci-dessous et la mise au propre des solutions trouvées par les différentes équipes.

**Problème 3 :** le jeu de Boris (adaptation de Varga et Dumont, 1975)

a) Pour s'amuser, Boris monte l'escalier qui est chez lui plusieurs fois de suite, et chaque fois d'une façon différente. Les marches étant très hautes, il ne peut monter 3 marches à la fois. Si l'escalier a 7 marches, de combien de façons différentes peut-il monter ces marches? Montre-moi.

b) Boris communique son jeu à un ami, Jean, qui a chez lui un escalier différent (ayant un nombre différent de marches). À ton avis, si on essayait de trouver le nombre de façons différentes de monter l'escalier qu'a Jean, trouverait-on la même chose? Explique-moi.

c) Le jeu se répand! Toute la classe de Boris se met à y jouer...avec toutes sortes d'escaliers de hauteur différente (qui n'ont pas tous le même nombre de marches). Ils aimeraient bien pouvoir dire vite le nombre de façons différentes qu'ils ont de monter, sans avoir à compter à chaque fois tout ce que l'on peut trouver pour chacun des escaliers Peux-tu aider la classe de Boris et trouver une manière de faire pour calculer rapidement le nombre de façons de monter un escalier, qui marcherait pour n'importe quel nombre de marches de l'escalier? Ton message expliquant cette manière de calculer le nombre de façons peu importe le nombre de marches de l'escalier leur sera envoyé.

Consigne pour la recherche :
- quand le travail en équipes sur ce problème est bien engagé, suggérer l'idée d'un tableau à 3 colonnes (nombre de marches, façons de monter, nombre de façon) pour aider à organiser les différentes données, repérer la régularité et énoncer la méthode de calcul;
- laisser la liberté d'organiser autrement les données. Rappeler que les 3 questions du problème.

### *2.7 Étape 4 : Retour sur le problème 3 et retour global*

voir le dernier paragraphe, à la page 2.

## C.7 Reproduction adaptée du scénario 2 (version finale)

Scenario 2 (version finale)
**Du dénombrement aux suites**
Par
Souleymane Barry
Université du Québec à Montréal
Avril 2007

## 1. Introduction

Le présent et deuxième scénario est construit à l'aide de trois problèmes de dénombrement. Comme avec le premier scénario, l'objectif poursuivi est le développement par les élèves du processus de modélisation avec des prolongements possibles sur les suites numériques qui figurent au programme en secondaire 1.

Rappelons que la perspective dans laquelle nous nous inscrivons en lien avec le développement du processus de modélisation par les élèves privilégie dans l'activité de résolution de problèmes la formulation de modèles dits «spontanés» ou «informels» et, la validation intergroupes de ces modèles et ce dans le dessein de permettre aux équipes «auteures» de ces modèles de revisiter leurs productions pour les raffiner, les améliorer, au besoin les généraliser. Il importe de souligner que dans la dynamique de validation que nous cherchons à installer, à l'instar de notre première expérimentation avec le scénario 1, le retour sur les différents modèles construits par les élèves se fait peu importe que ceux-ci fonctionnent ou pas (c'est-à-dire même lorsque les modèles construits ne permettent pas d'arriver à la bonne réponse). Ainsi, les modèles qui marchent sont revisités en termes de plus grande efficacité, d'optimisation des démarches ou stratégies qui les sous-tendent, des liens qu'ils pourraient entretenir avec les autres modèles discutés. Et les modèles qui ne marchent pas sont revisités sous l'angle de leurs limites, des aspects mêmes qui les mettent en défaut, des voies et moyens envisageables pour les rendre plus efficaces, mais aussi, si le temps le permet, de la même manière que les modèles qui d'emblée marchent.

D'après ce qui précède, afin de ne pas court-circuiter le développement du processus de modélisation, il est important d'éviter d'orienter trop vite le travail des élèves vers les suites qui ne doivent pas juste apparaître comme un traitement numérique, décontextualisé, des problèmes proposés. Toutefois, l'enseignant pourra ensuite exploiter les situations abordées, pour poursuivre avec les suites numériques.

Un autre objectif poursuivi à travers les situations proposées est, nous l'espérons, de limiter les méfaits d'une certaine approche des suites numériques au secondaire qui consiste à privilégier un vocabulaire consacré (régularité, règle, rang, terme, raison, suites arithmétiques) qui est source de beaucoup de confusions, difficultés chez les élèves (par exemple avec le rang d'un terme). Il s'agit donc pour nous, de proposer des mises en situations non classiques (par exemple régularités autres qu'arithmétiques) qui ne reposent pas sur un vocabulaire consacré (débouchant sur des applications directes et en ce sens peu riche du point de vue du processus de la modélisation) et qui permettent aux élèves de modéliser et, éventuellement, de dénombrer au moyen de suites numériques.

Dans ce qui suit, nous présentons le déroulement du scénario, les étapes et activités successives proposées ainsi que les consignes qui accompagnent le travail des élèves.

## 2. Étapes et activités du scénario

La classe est organisée en équipes de deux élèves. La phase de recherche se fait d'abord en équipes, puis des échanges sont autorisés entres équipes dans le but de permettre une première validation, ensuite chaque équipe doit mettre au propre sa solution, en prenant soin de bien indiquer la démarche utilisée ainsi que les justifications qui appuient la démarche. Toutes les productions sont récupérées en fin de période et un tri est fait par l'enseignant et le chercheur afin de déterminer les solutions qui seront discutées à la prochaine période qui débute par un retour collectif sur le problème résolu et se prolonge avec la recherche d'un nouveau problème et la mise au propre de la solution de ce dernier. Ainsi de suite jusqu'au dernier problème du présent scénario. Une durée maximale de 5 périodes de 1h 18mn chacune est prévue pour la totalité du scénario 2.

Pour ce scénario, contrairement au premier, un seul problème sera proposé par période pour donner plus de temps pour la recherche et le retour sur un problème.

La dernière étape, la quatrième, clôture le scénario 2. Il débute avec le retour sur le problème 3, ensuite un retour global est fait en partant du premier problème résolu. L'idée à travers ce retour global est d'amener les élèves à verbaliser les liens qu'ils font rétrospectivement entre les différents problèmes, mais aussi d'inviter les élèves à une sorte de bilan d'apprentissage en lien avec la façon dont nous avons fonctionné, ce qu'ils ont aimé, ce qu'ils n'ont pas aimé, l'intérêt qu'ils trouvent au processus de modélisation dans la résolution de problèmes.

### *2.8 Étape 1 : Mise en route du scénario et recherche d'un premier problème*

Cette première étape est l'occasion de rappeler aux élèves les consignes globales quant au fonctionnement attendu lors de la phase de recherche (collaboration en équipe, fonction des cahiers blanc et bleu, justifier sa démarche, écrire lisiblement la solution qui peut être mise sur acétate) et celle de validation (communiquer clairement sa démarche et se prononcer avec des arguments fondés sur les démarches des autres : la démarche est-elle claire ? Fonctionne-t-elle? Comment la rendre meilleure? Est-elle semblable ou différente des autres?). La période se poursuit par la recherche du problème 1 suivant et se termine par la mise au propre par les équipes des solutions trouvées.

**Problème 1** : des tours et des chiffres

L'activité consiste en équipe à trouver toutes les tours d'une certaine hauteur que l'on peut faire avec des blocs blanc et rouges. Cependant, on impose une condition : deux blocs de même couleur, rouges par exemple, ne peuvent être côte à côte.

a) Combien de tours différentes de hauteur 5 blocs pouvez-vous ainsi construire?

b) Combien de tours différentes de hauteur 6 blocs pouvez-vous ainsi construire?

c) Si on reprenait cette activité avec une autre classe...sans avoir à recompter à chaque fois, pourrez-vous trouver une manière de faire pour calculer le nombre de tours différentes que l'on peut faire, qui marcherait pour n'importe quelle hauteur de tour? Expliquez.

Consignes pour la recherche :

- pour aider à organiser les données suggérer un tableau, mais laisser aux élèves la liberté d'organiser autrement les données. Rappeler que le matériel fourni donne seulement une idée des types de tours à construire.
- rappeler les 3 questions du problème.

### 2.9 *Étape 2 : Retour sur le Problème 1 et recherche du problème 2*

Cette étape débute par le retour collectif sur le problème 1. Elle se poursuit avec la recherche du problème 2 suivant et la mise au propre des solutions trouvées.

**Problème 2 :** (adaptation de Panoramaths, manuel A, vol 2, p. 132)

Dans le cadre d'un échange international, 10 personnes provenant de pays différents se rencontrent pour la première fois. Comme le veut la coutume, chaque personne serre la main de toutes les autres et se présente.

a) Combien de poignées de mains différentes les 10 personnes échangeront-elles lors de cette rencontre?

b) Et s'il y avait plus de 10 personnes? Pouvez-vous trouver une manière de faire pour calculer le nombre de poignées de mains différentes qui vont s'échanger, et qui marcherait pour n'importe quel nombre de personnes présentes à la rencontre? Expliquez-nous.

Consignes pour la recherche :

- advenant une symbolisation des personnes par des «points», attirer l'attention des élèves sur la disposition des points qui doit permettre un calcul exact du nombre de poignées de mains («éviter les situations de 3 points alignés»);
- dans l'éventualité où le travail des élèves s'avérait périlleux, on pourrait donner la consigne qui consiste à recourir à un tableau avec quelques cas, puis de remplir ce tableau en y indiquant le nombre de personnes, dans chaque cas le nombre total de poignées de mains échangées et enfin le calcul qui permet de mettre en évidence la régularité en faisant la différence entre chacun des termes consécutifs figurant dans le tableau;

- rappeler les deux volets du problème.

*2.10 Étape 3 : Retour sur le Problème 2 et recherche du problème 3*

Comme précédemment, cette étape débute par le retour collectif sur le problème 2. Elle se poursuit avec la recherche du problème 3 ci-dessous et la mise au propre des solutions trouvées par les différentes équipes.

**Problème 3 :** le jeu de Boris (adaptation de Varga et Dumont, 1975)

a) Pour s'amuser, Boris monte l'escalier qui est chez lui plusieurs fois de suite, et chaque fois d'une façon différente. Les marches étant très hautes, il ne peut monter 3 marches à la fois. Si l'escalier a 7 marches, de combien de façons différentes peut-il monter ces marches? Montre-moi.

b) Boris communique son jeu à un ami, Jean, qui a chez lui un escalier différent (ayant un nombre différent de marches). À ton avis, si on essayait de trouver le nombre de façons différentes de monter l'escalier qu'a Jean, trouverait-on la même chose? Explique-moi.

c) Le jeu se répand! Toute la classe de Boris se met à y jouer...avec toutes sortes d'escaliers de hauteur différente (qui n'ont pas tous le même nombre de marches). Ils aimeraient bien pouvoir dire vite le nombre de façons différentes qu'ils ont de monter, sans avoir à compter à chaque fois tout ce que l'on peut trouver pour chacun des escaliers Peux-tu aider la classe de Boris et trouver une manière de faire pour calculer rapidement le nombre de façons de monter un escalier, qui marcherait pour n'importe quel nombre de marches de l'escalier? Ton message expliquant cette manière de calculer le nombre de façons peu importe le nombre de marches de l'escalier leur sera envoyé.

Consigne pour la recherche :

- quand le travail en équipes sur ce problème est bien engagé, suggérer l'idée d'un tableau à 3 colonnes (nombre de marches, façons de monter, nombre de façon) pour aider à organiser les différentes données, repérer la régularité et énoncer la méthode de calcul;
- laisser la liberté d'organiser autrement les données. Rappeler que les 3 questions du problème.

*2.11 Étape 4 : Retour sur le problème 3 et retour global*

Voir le dernier paragraphe, à la page 2.

## C.8 Extraits du récit de la première semaine d'expérimentation

| Extraits *(Le 16-11-06)* | Éléments de réflexion (Chercheur) | Annotations (Enseignant) |
|---|---|---|
| Je me suis rendu à l'école à l'heure prévue, 10h 08mn, l'enseignant est venu me chercher à l'entrée pendant que j'étais entrain de remplir le cahier de visites comme c'est chaque fois le protocole dans cette école. L'enseignant m'a remis la clé de la classe pour que je l'y devance, lui devant retourner à son bureau pour prendre son horloge (??). J'arrive dans la classe, commence à m'installer avec mon équipement. L'enseignant revient prendre sa trousse car il n'a trouvé personne comme il pensait et on échange un peu. Il me demande si je vais filmer aujourd'hui, je lui dis que principalement j'ai amené la caméra histoire de la planter là dans le décor de la classe dès le début de notre activité et donc familiariser les élèves avec. Il décide de rester un peu, pour accueillir les élèves et ensuite aller prendre rapidement ce qu'il doit prendre à son bureau. | J'imagine comme à l'habitude, pour ne pas changer brusquement ses routines…**(C1)** | Demander la coopération d'un élève est une excellente façon de lui donner de l'importance. La complicité aide à l'accueil dans la classe. **(D1)** |
| Les élèves entrent. J'ai pris la place d'un élève qui me regarde m'installer et pour faire avaler mon «envahissement» je lui demande s'il s'y connaît avec une caméra, s'il peut m'aider à fixer les pattes du trépied…il coopère bien et m'aide même un moment à visser la caméra sur le trépied. Je lui demande s'il peut me laisser m'asseoir à sa table, à côté de la caméra, et de bien m'excuser. Il accepte et se déplace.<br>XXX parle à la classe, leur explique que nous allons travailler comme ils savent déjà pendant 3 périodes des problèmes en la présence de monsieur Barry qui est là. Je dis bonjour à la classe qui répond en chœur «bonjour» ! Un accueil chaleureux comme pour la première fois. | | Rappeler la durée du projet leur permet de se situer dans le temps. Ils savent qu'on n'improvise pas. C'est sécurisant pour eux. **(D2)** |

## C.9 Canevas rencontre bilan 1

### CANEVAS RETOUR SUR LE SCÉNARIO 1

*Il s'agit d'un bilan à deux sur le scénario 1, le processus de son élaboration, l'animation du scénario, les stratégies observées chez les élèves et des pistes d'intervention pour le scénario 2.*

**1) La phase de recherche des problèmes**

- Quels sont les défis que pose le travail d'équipe lors de la résolution de problèmes?
- Comment expliques-tu l'«acharnement» (le mot est de toi dans mes notes) des élèves de la classe 103 avec le problème des voitures?
- Rétrospectivement que penses-tu de la dernière question du problème de quadrillage? Tu disais qu'elle était peut-être de trop ! penses-tu toujours la même chose ? Pourquoi? Aimes-tu les problèmes longs ? Que penses-tu des situations-problèmes proposés par le Ministère ?
- Comment vois-tu l'expérience de devoir éviter d'aider les élèves lors de la recherche? Tu m'as dit à une ou deux reprises que tu préférais que je sois seul à circuler entre les équipes, tellement tu étais tenté de les aider.

**2) Les productions des élèves**

- Quelles stratégies repères-tu chez les élèves ? Ces stratégies ont-elles varié d'un problème à un autre? (Retour sur le problème 2, avec des productions des élèves autres que celles utilisées lors de la plénière dans chacun des 2 groupes)
- Aimes-tu la stratégie d'énumération? Pourquoi ? Comment mettrais-tu les consignes pour amener les élèves à aller plus loin?

**3) L'animation du scénario**

- Comment vois-tu les rôles respectifs du chercheur et de l'enseignant dans l'animation du scénario?
- Quel rôle veux-tu que le chercheur joue pour les élèves?
- Comment partir des solutionnées erronées, quoi faire?
- Tu sembles prudent pour ce qui est des comparaisons entre élèves. Pourquoi vouloir les éviter? Comment en tirer profit?
- Quelle sens, quelle importance donnes-tu à la validation?
- La dernière plénière dans le dernier groupe (la 103) a été selon moi la plus riche en termes de débats, de discussions entre les élèves. Comment vois-tu la mise en débat des élèves?
- Quoi retenir à la fin de ce premier scénario? Quelles sont les éléments que tu aimerais que les élèves retiennent? Et toi-même, comment penses-tu utiliser cette expérimentation pour ton enseignement? Que penses-tu d'une version revisitée du scénario 1? Moi, je pense à donner le problème du code en référant au code Davinci...

- Comment vois-tu le scénario 2 à la lumière du premier? As-tu des recommandations à faire? Quelles limites du scénario 1 si elles existent devrai-t-on dépasser?
- Comment comptes-tu poursuivre entre temps ? Pour veiller au grain, à ce que nous avons semé dans les deux groupes...

**4) Questions plus larges**

- Comment vois-tu globalement l'expérimentation? Dans tes annotations du parles de constats que tu as pu faire dans ta pratique. As-tu d'autres choses à ajouter?
- La dynamique dans une classe où il ya plus de filles, qu'est-ce qui en fait la particularité? Comment amener les filles à plus d'engagement?
- Un des constats auxquels tu arrives dans tes annotations, c'est l'importance des relances, de bien interroger les élèves, pour les pousser à aller plus loin. Tu faisais même allusion à la méthode Socratique ! Quels sont tous les aspects qu'on fait travailler chez les élèves en leur renvoyant leurs questions?
- Je me souviens que tu soulignais l'importance de dire aux élèves nos vrais buts, c'était quand on envisageait le retour sur le problème des voiture et nous ne voulions pas une réponse qui biaise la suite. Dans quels cas parles-tu aux élèves franchement? Dans quels buts?
- Tu sembles aimer les métaphores. Quelle place accordes-tu aux métaphores dans ton enseignement?

## C.10 Canevas bilan final

**CANEVAS RETOUR SUR LES SCÉNARIO 2 et 1**

*Il s'agit d'un bilan en deux volets: 1) un retour sur le scénario 2, les problèmes exploités, les stratégies et solutions des élèves, le retour sur ces dernières lors des plénières et 2) un retour global sur les deux scénarios, ce qu'ils éclairent eu égard à un enseignement visant le développement de la modélisation chez les élèves. Le retour global est aussi une occasion de revisiter le cadre de référence de l'enseignant a postériori, en pensant aux éléments qui étaient ressortis de l'entrevue de départ et ceci afin de mieux cerner sa didactique praticienne, ses balises propres.*

### 1. Retour sur le scénario 2

-Que penses-tu des 3 problèmes du scénario 2? Étaient-ils adaptés? Y en a t-il que tu reprendrais? D'autres non, pourquoi?
-Si tu les reprenais dans un prochain scénario, changerais-tu la consigne, la mise en situation, ou garderais-tu la même? Pourquoi?
-Prenons le dernier problème du scénario 2 : le problème des escaliers. Comment vois-tu les solutions des élèves? Les stratégies qu'ils ont développées?
-Et le retour sur les solutions des élèves: à ton avis, sur quoi mettrais-tu l'accent, maintenant que tu l'as vécu ?

### 2. Retour global sur les 2 scénarios

-Rétrospectivement, en lien avec ton enseignement, quelles qualités trouves-tu aux problèmes de dénombrement que nous avons proposés aux élèves à travers nos 2 scénarios? Quelles limites leur trouves-tu ?
-Du début à la fin de l'expérimentation, la manière de travailler ces problèmes en classe a t-elle bougé? Dans quel sens?
-Dans tes dernières annotations tu parles des acquis de l'expérimentation 1. Peux-tu revenir sur ces acquis? Quels sont-ils? Que veux-tu dire?
-Penses-tu que la façon dont les élèves ont travaillé lors de l'expérimentation du scénario 2 a aussi à voir avec le travail (disons hors-expérimentation) que tu fais avec eux depuis de l'année? Dans quelle mesure ?
-Les élèves ont-ils évolué depuis le début de cette expérimentation dans la résolution des problèmes? En quoi, sur quels aspects?
-Si tu te replaces par rapport au début de l'expérimentation, quel bilan tires-tu de cette expérience? Est-ce qu'il y a des choses qui ont changé dans la façon dont tu vois maintenant le travail en résolution de problèmes avec tes élèves? Plus spécifiquement le travail de modélisation?
-Au final, quand je pense à tes attentes du début exprimées lors de notre première entrevue, as-tu l'impression d'avoir appris des choses en lien avec le dénombrement pour lequel tu disais que tu ne te considérais pas ferré? En lien avec le processus de modélisation? D'autres apprentissages?
-À la lumière de notre expérience, comment vois-tu un enseignement visant le développement de la modélisation en secondaire 1? Ya-t-il selon toi des conditions gagnantes? Des écueils à éviter?
-Que penses-tu globalement de notre collaboration?

# APPENDICE D

# QUELQUES PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

Sur la ligne de départ, 6 coureurs automobiles prennent place. Si tous les coureurs terminent la course et qu'il n'y a pas d
combien de résultats différents est-il possible d'obtenir à la ligne d'arrivée?

(1,1),(1,2),(1,3),(1,4) ...
(2,1),(2,2),(2,3) ...

2 : 1
3 : 2
4 : 3
5 : 4
...
10 : 3
11 : 2

12 : 1

37 résultats

Sur la ligne de départ, 6 coureurs automobiles prennent place. Si tous les coureurs terminent la course et qu'il n'y a pas d'ex aequo,
combien de résultats différents est-il possible d'obtenir à la ligne d'arrivée?

| Position | |
|---|---|
| 1 | 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 |
| 2 | 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 |
| 3 | 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 |
| 4 | 4 4 5 5 6 6 3 3 5 5 6 6 3 3 4 4 6 6 5 5 4 3 3 |
| 5 | [illegible] |
| 6 | [illegible] |

21 × 6 = 126 ; 126 × 6 = 756

Sur la ligne de départ, 6 coureurs automobiles prennent place. Si tous les coureurs terminent la course et qu'il n'y a pas d'ex ae
combien de résultats différents est-il possible d'obtenir à la ligne d'arrivée?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

RÉPONSE: 6 possibilités

Sur la ligne de départ, 6 coureurs automobiles prennent place. Si tous les coureurs terminent la course et qu'il n'y a pas d'ex aequo,
combien de résultats différents est-il possible d'obtenir à la ligne d'arrivée?

Rep: 36 résultats

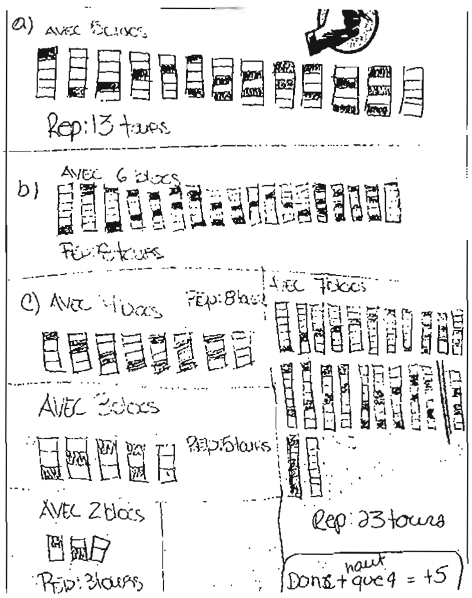
Sur la ligne de départ, 6 coureurs automobiles prennent place. Si tous les coureurs terminent la course et qu'il n'y a pas d'ex aequo
combien de résultats différents est-il possible d'obtenir à la ligne d'arrivée?

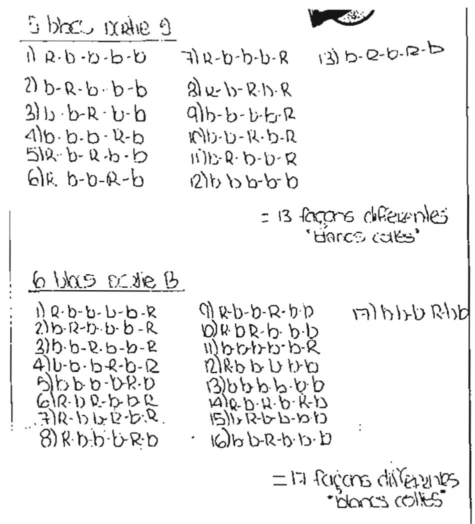
1 -> 123456
2 -> 123456
3 -> 123456
4 -> 123456
5 -> 123456
6 -> 123456
6×6 = 36

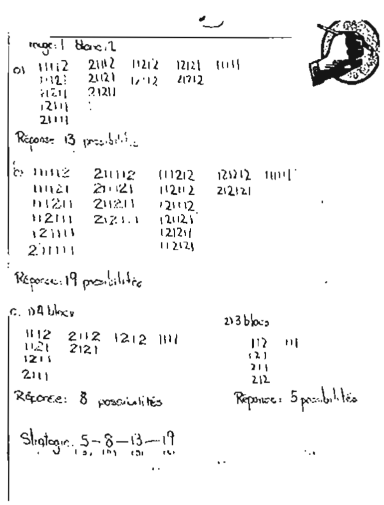
Réponse. 36 possibilités

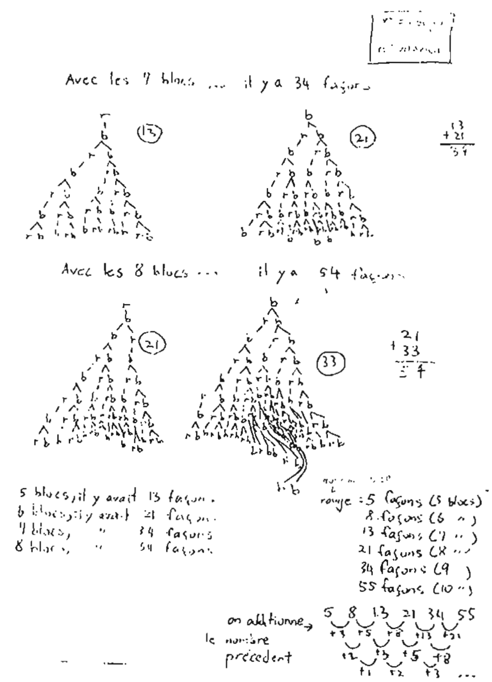
Problème des voitures
(Problème 2, scénario I)

Problème des tours
(Problème 1, Scénario 2)



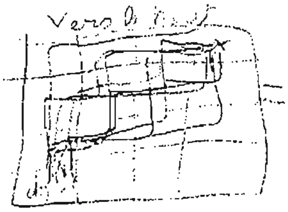



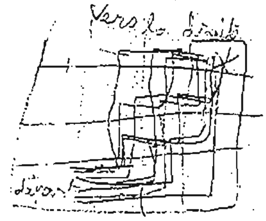
**Déplacement d'un pion sur un quadrillage**

Dans le quadrillage ci-dessous, on place un pion dans la case de départ et on veut se rendre à la case X. Les seuls déplacements autorisés sont des déplacements d'une case vers la droite ou d'une case vers le haut. Combien y a-t-il de chemins allant de la case de départ à la case X? Comment peut-on être certain d'obtenir tous les chemins possibles? Justifier votre réponse. Qu'obtient-on dans le cas d'un quadrillage rectangulaire?

du départ si vous allez vers la droite il y a 10 possibilités, si vous allez vers le haut il y a 10 autres possibilités aler vous devez faire : 10+10=20 et cela est la réponse



Vers le haut = 10



Vers la droite = 10

10+10=20

**Déplacement d'un pion sur un quadrillage**

Dans le quadrillage ci-dessous, on place un pion dans la case de départ et on veut se rendre à la case X. Les seuls déplacements autorisés sont des déplacements d'une case vers la droite ou d'une case vers le haut. Combien y a-t-il de chemins allant de la case de départ à la case X? Comment peut-on être certain d'obtenir tous les chemins possibles? Justifier votre réponse. Qu'obtient-on dans le cas d'un quadrillage rectangulaire?

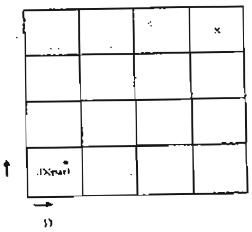
| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 9 | 13 |
| 3 | 6 | 10 | 14 |
| 2 | 7 | 11 | 15 |
| 1 départ | 8 | 12 | 16 |

- 1,8,12,16,15,14,13
- 1,2,3,4,5,9,13
- 1,2,7,11,10,14,13
- 1,2,3,6,10,14,13
- 1,2,7,6,10,14,13
- 1,2,7,6,10,9,13
- 1,2,7,6,5,9,13
- 1,2,3,6,10,9,13
- 1,2,3,6,10,14,13
- 1,2,3,4,5,9,13
- 8,7,6,10,14,13
- 1,8,7,6,10,9,13
- 1,2,3,6,5,9,13
- 1,8,7,11,10,14,13
- 1,8,7,6,10,14,13
- 1,8,7,11,10,9,13

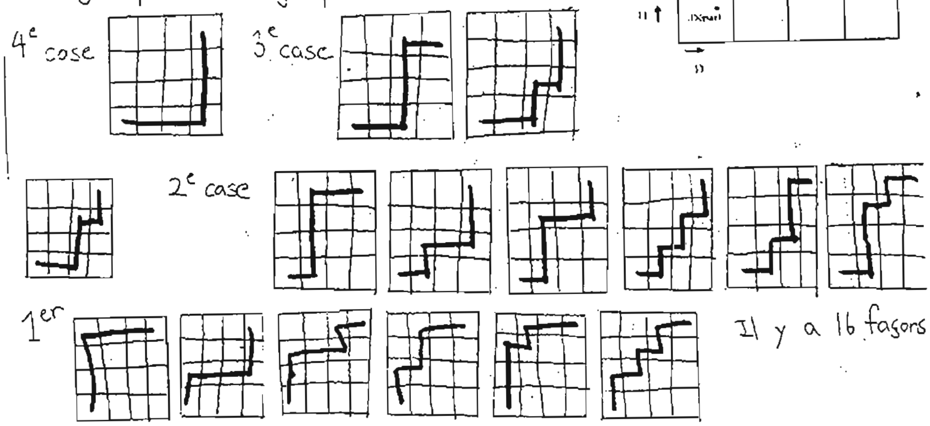
16 chem

**Déplacement d'un pion sur un quadrillage**

Dans le quadrillage ci-dessous, on place un pion dans la case de départ et on veut se rendre à la case X. Les seuls déplacements autorisés sont des déplacements d'une case vers la droite ou d'une case vers le haut. Combien y a-t-il de chemins allant de la case de départ à la case X? Comment peut-on être certain d'obtenir tous les chemins possibles? Justifier votre réponse. Qu'obtient-on dans le cas d'un quadrillage rectangulaire?



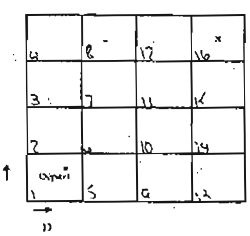
une ligne qui s'en va jusqu'à

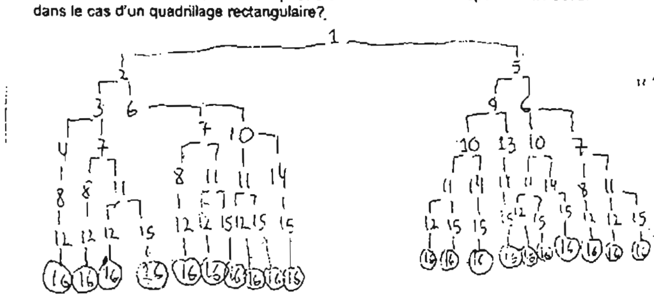



Il y a 16 façons

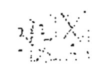
**Déplacement d'un pion sur un quadrillage**

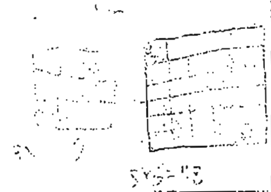
Dans le quadrillage ci-dessous, on place un pion dans la case de départ et on veut se rendre à la case X. Les seuls déplacements autorisés sont des déplacements d'une case vers la droite ou d'une case vers le haut. Combien y a-t-il de chemins allant de la case de départ à la case X? Comment peut-on être certain d'obtenir tous les chemins possibles? Justifier votre réponse. Qu'obtient-on dans le cas d'un quadrillage rectangulaire?





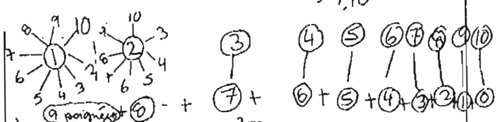
rép: 20 possibilités





Problème des poignées de mains
(Problème 2, Scénario 2)

a) # personne : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 → 9, 10




1 personne donne la poignée à tous ses coéquipiers.

2 personne donne la poignée à tous ses coéquipiers sauf la 1re personne.

3 personne donne la poignée à tous ses coéquipiers sauf la 1re et 2ème personne.

nombre de poignées données : 45

b) manière : x = nmb. pers. init.

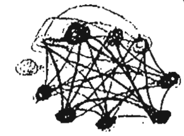
ex : 11 personnes $(x-1)+(x-2)+(x-3)+(x-4)+(x-5)+(x-6)+(x-7)+(x-8)+(x-9)\ldots+(x-11)$ = rép.

10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = rép.

rép. : 55 poignées données pour 11 personnes

secrétaire

a)

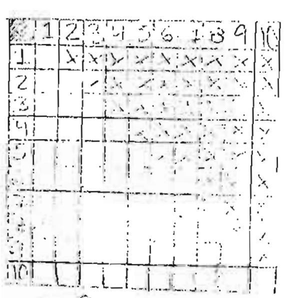


● = 9
● = 8
● = 7
● = 6
● = 5
● = 4
● = 3
● = 2
● = 1

Réponse : 45 poignées de mains

b) Si on a exemple 20 personnes, la première va serrer la main à 19 personnes, puis la 2e personne va en serrer 18 et ainsi de suite.

a)



Oui

a) Solution : [illegible] 1 + 2 + 3 + 4

Conclusion : [illegible]

Voilà !!!

a)

| personnes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| poignées de mains | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

total : 45 poigné de main

b) Oui, le nombre de poigné de mais plus le nombre de personne vas donner le nombre de poigné de main du nombre suivant (ex : 2 p. + 1 poigné = 3 poigné de main)

| personne | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| poigné de main | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 |
| | +2 | +3 | +4 | +5 | +6 | +7 | +8 | +9 | +10 | |

| 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|
| 66 | 78 | 91 | 105 |
| +11 | +12 | +13 | +14 |

$\boxed{\text{15 personnes = 105 poigné de main}}$

Probleme du Bous
(Problème 3, Scénario 2)

a) 1+1+1+1+1+1+1 = 7
2) 1+2+[illegible]+2 = 7
3) 2+2+2+1 = 7
4) 2+1+1+[illegible] = 7
5) [illegible] = 7
6) 1+2+[illegible] = 7
7) 2+1+2+1+[illegible] = 7
[illegible] = 7
[illegible] = 7
[illegible] = 7
2+1+2+2 = 7
2+2+1+2 = 7

[illegible]+2+2+1 = 7
[illegible]1+1+1+2+2 = 7
[illegible]+1+2+1+2 = 7
2+2+1+1+1 = 7
8) 1+2+2+1+1 = 7
2+2+1+1 = 7
2) 1+2+2+1+1 = 7
1+1+1+2+2 = 7
22) 2+1+1+2 = 7

a) = 21 possibités

1 = bon de 1
2 = bon de 2

b) 4 marches

1+1+1+1 = 4
2+2 = 4
2+1+1 = 4
1+2+1 = 4
1+1+2 = 4

5 façons

c)

---

(A) Par long essai erreur on est parvenus à 21 façons:
(2) = BOND DE 2   (1) = BOND DE 1.

| | | |
|---|---|---|
| 2 2 2 1 | 111112 | 12112 |
| 2 1 2 2 | 22111 | 21121 |
| 1 2 2 2 | 12211 | 22111 |
| 1 2 1 1 1 1 | 11221 | 11212 |
| 2 1 1 1 1 1 | 11122 | |
| 1 1 2 1 1 1 | 21112 | |
| 1 1 1 2 1 1 | 12121 | |
| 1 1 1 1 2 1 | | |

(B) Non. Tout dépend du nombre de marches (VOIR NUMÉRO C).

Avec la SUITE DE FIBONNACI:

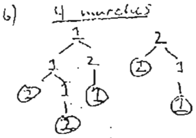
(C) 2 MARCHES = 2 POSSIBILITÉS (UNE FOIS DE PLUS)
3 " = 3 POSSIBILITÉS
4 " = 5 POSSIBILITÉS
5 " = 8 POSSIBILITÉS
6 " = 13 POSSIBILITÉS
7 " = 21 POSSIBILITÉS.

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21)

---

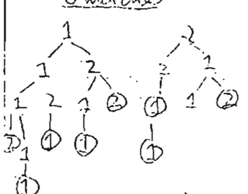
a) 21 possibilités

b) 4 marches



5 possibilités

5 marches



8 possibilités

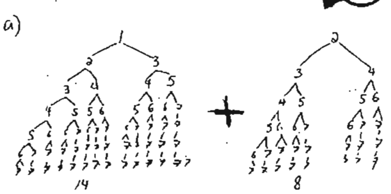
6 marches = 13 possibilités

c) c'est la suite de Fibonacci

5+8 = 13
8+13 = 21

---

a)



22 possibilités

B) le résultat ne sera pas pareil, car si il y a plus de marche c'est évident qu'il y aura plus de possibilités, mais la démarche pour trouver le résultat sera la même.

c)