UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

PRÉPARATION À LA DÉMONSTRATION ET AU FORMALISME SUPPLÉÉE AU COLLÉGIAL PAR LE COURS *MATHÉMATIQUES POUR LES SCIENCES*

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PAR

JULIA FULVI

AVRIL 2010

REMERCIEMENTS

Premièrement, je tiens à remercier M. Denis Tanguay pour sa grande disponibilité et son soutien tout au long de ce projet. Ses judicieux conseils et sa rigueur m'auront guidée et poussée à clarifier mes idées. Merci aussi aux membres de mon jury, M. Stéphane Cyr et Mme Caroline Lajoie, d'avoir accepté de lire et commenter ce mémoire.

Merci à Mme Marie-José Dutil, professeure au Collège Ahuntsic, pour avoir généreusement accepté de collaborer à ce projet d'étude.

Merci à mes collègues de bureau, Isabelle, Doris et Claudia, pour leurs conseils et soutien tout au long de ma maîtrise. Nos discussions à saveur didactique m'auront aidée à clarifier ma vision de la recherche. Un merci particulier à Isabelle, ma complice d'études universitaires, sans qui mon baccalauréat et ma maîtrise auraient été bien longs!

Finalement, je tiens à remercier les membres de ma famille pour leur soutien inconditionnel et leurs encouragements. Merci à mon frère Alexandre pour son soutien technique et « psychologique » tout au long de ma maîtrise. Merci à Sébastien pour ses talents informatiques, mais surtout pour son écoute, son aide et ses encouragements. Merci de m'avoir rassurée quand j'en avais besoin et d'avoir su me motiver quand je doutais de mon travail.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

Dans le cadre de ce projet de recherche, nous nous intéressons à ces quatrièmes cours obligatoires de mathématiques que plusieurs cégeps ont inclus dans leur programme de formation pré-universitaire *Sciences de la nature 200. B0*. Plus précisément, nous allons nous intéresser à la préparation en matière de démonstration et de formalisme offerte par ces cours pour affronter les exigences des mathématiques post-secondaires. Ces cours ont en effet pour objectif de préparer les étudiants aux mathématiques avancées des cours *Calcul intégral NYB* et *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle NYC*, mais aussi des cours de mathématiques à l'université, notamment au regard du formalisme accru et de la démonstration.

Pour évaluer cette préparation, nous allons, dans un premier temps, étudier ces attentes telles qu'elles se manifestent à travers le cours *Calcul intégral NYB*, deuxième cours de mathématiques obligatoire de la formation standard en sciences de la nature. Une fois ces attentes identifiées, les tâches proposées dans un de ces quatrièmes cours de mathématiques, soit le cours *Mathématiques pour les sciences* dispensé par le cégep Ahuntsic à la session hiver 2008, seront analysées. L'analyse des tâches proposées par *Mathématiques pour les sciences* nous permet de mettre en lumière les éléments de difficultés auxquels il confronte les étudiants.

En conclusion, les analyses des deux cours sont comparées pour évaluer si les éléments travaillés par *Mathématiques pour les sciences* correspondent à ceux sollicités en *Calcul intégral NYB*. Cette comparaison permet d'évaluer la préparation qui est effectivement offerte par le cours du cégep Ahuntsic pour affronter le cours collégial *NYB*. Notre étude va cependant plus loin puisque nous évaluons également la préparation que ces deux cours de niveau collégial offrent pour affronter les mathématiques universitaires. Plus précisément, nous tentons de voir, compte tenu de ce que la recherche nous dit des mathématiques avancées et de l'apprentissage de la preuve, si *Calcul intégral NYB*, appuyé par *Mathématiques pour les sciences*, constituent à eux deux une bonne transition vers les mathématiques universitaires, notamment les cours d'introduction à l'analyse réelle. Des pistes de réflexion et des améliorations possibles seront également présentées.

Mots clés : didactique des mathématiques, transition, démonstration, formalisme, calcul intégral.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 Importance de la démonstration en mathématique

Il est indéniable que la démonstration occupe une place de choix dans l'univers mathématique. Selon Hanna et Jahnke (1993), les occidentaux la considèrent comme une caractéristique essentielle des mathématiques et ce, depuis la Grèce Antique. L'importance accordée à la démonstration est en partie attribuable au fait qu'elle départage les mathématiques des sciences expérimentales (Arsac, 1988). En effet, alors que les sciences expérimentales ont usuellement recours à des processus de validation de nature inductive, la démonstration, le processus de validation le plus achevé des mathématiques, fait plutôt appel au raisonnement déductif. Cette particularité ne peut que confirmer l'importance de la démonstration au sein de l'édifice mathématique.

En plus d'établir une distinction entre les mathématiques et les autres sciences, la démonstration est au cœur de la réalité des mathématiciens. Effectivement, « chez les mathématiciens professionnels par exemple, l'importance de cet outil ne fait aucun doute : la rédaction de preuves constitue pour ces derniers l'une des parties essentielles de leur travail » (Cyr, 2006, p. 12). Même si un mathématicien comme Thurston (1994) relativise quelque peu la place que prend la démonstration dans la recherche mathématique, Alibert et Thomas (1991) abondent dans le sens de Cyr en affirmant que l'élaboration de démonstrations constitue l'un des aspects fondamentaux du travail des mathématiciens professionnels. La présence de la démonstration dans le quotidien des chercheurs en mathématiques vient donc elle aussi expliquer l'importance qui lui est conférée dans la discipline.

Les nombreux rôles remplis par la démonstration en mathématiques constituent un autre argument venant justifier la place prédominante qu'elle occupe dans l'univers mathématique. Outre son rôle de validation dont il a déjà été question précédemment, la démonstration permet également d'expliquer, de découvrir de nouvelles mathématiques, de systématiser, de communiquer, en plus d'offrir des défis intellectuels (Harel et Sowder, 2007, p. 811).

Le caractère distinctif de la démonstration face aux procédés de validation inductifs utilisés par les autres sciences, son importance dans la vie des mathématiciens professionnels ainsi que les divers rôles et buts auxquels elle est destinée confirment et justifient qu'elle est bel et bien une caractéristique essentielle de l'univers mathématique.

1.2 La démonstration, le rôle du contre-exemple et le principe du tiers-exclu

Il est difficile de traiter de la démonstration en mathématiques sans évoquer le principe du tiers-exclu, énonçant que toute proposition est soit vraie, soit fausse. Celui-ci est sous-jacent à l'activité mathématique, particulièrement à l'activité de démonstration, ce qui justifie l'attention que nous allons lui porter.

Le principe du tiers-exclu en mathématiques serait vraisemblablement issu de la philosophie de Parménide :

> La première voie de recherche dit que l'Être est et qu'il n'est pas possible qu'il ne soit pas. C'est le chemin de la certitude, car elle accompagne la vérité. L'autre c'est que l'Être n'est pas et que le Non-Être est. Cette voie est un sentier étroit où l'on ne peut rien apprendre. (Parménide, cité dans Hitt, 2004, p. 4)

et aurait gagné l'univers mathématique aux VI^{e}-V^{e} siècle avant J.-C. (Hitt, 2004). Bien que ce principe soit souvent traité implicitement en mathématiques, il n'en reste pas moins qu'il y joue un rôle clé. En effet, la réalisation de démonstrations par l'absurde repose directement sur ce principe issu de la philosophie grecque. Selon Hitt (2004),

> [...] pour prouver une affirmation de la forme « P » par un raisonnement par l'absurde, il faut supposer que « Non-P » est vraie, ainsi, de façon implicite, nous faisons la supposition qu'il n'existe pas une **« troisième option** », pour finalement arriver à une contradiction de la forme « Q et Non-Q » et pour conclure que « P » est alors vraie. (p. 8)

Dû à l'implication de ce principe dans l'activité de démonstration, il nous apparaît important de prendre en considération le principe du tiers-exclu de manière explicite. D'ailleurs, nous constaterons dans les sections subséquentes que les programmes de formation de l'école québécoise accorde une place non négligeable au principe du tiers-exclu, dans l'apprentissage de l'activité de démonstration par les élèves.

Le rôle du contre-exemple est aussi central lorsqu'on parle de démonstration en mathématique et spécifiquement lorsqu'on traite de son enseignement. Tel que le mentionne Balacheff (1987, p. 166), « la perception la plus répandue du contre-exemple, dans la classe de mathématique, est celle d'une catastrophe dont la conséquence est l'abandon pur et simple des positions conquises lors de la résolution du problème. » Le contre-exemple, suivant cette perception, prend donc le statut d'une erreur qu'il faut éviter à tout prix.

Cette vision du contre-exemple est beaucoup plus radicale que celle défendue par Lakatos. Celui-ci avance qu'un contre-exemple peut avoir de multiples conséquences puisqu'il peut, entre autres, rejaillir sur la conjecture émise, sur la preuve réalisée, sur les définitions utilisées ainsi que sur le contre-exemple lui-même (Balacheff, 1987). Suivant ces propos, le contre-exemple ne serait pas une « catastrophe », mais plutôt un élément complexe et riche duquel découle de multiples possibilités. Cette variété de retombées nous amène donc à dire qu'une importance particulière doit être accordée au contre-exemple et à ses conséquences aussi bien dans la discipline elle-même que dans la classe de mathématiques. En effet, selon Balacheff (1987, pp.171-172), « si un contre-exemple ne signifie pas le rejet pur et simple d'une conjecture, la légitimité des voies empruntées pour dépasser la contradiction qu'il atteste ne va pas de soi. Elle se trouve en fait au centre du débat de validation et de la remise en question des critères de validation eux-mêmes. »

Le principe du tiers-exclu et le contre-exemple sont si intimement liés à l'activité de démonstration qu'il s'avère donc essentiel de les prendre en considération dans ce mémoire.

D'ailleurs, selon Hitt (2004), la sensibilité au contre-exemple et le principe du tiers-exclu doivent faire partie intégrante de l'enseignement de la démonstration. Mais comment est abordée la démonstration en classe? Quels éléments de savoirs et de compétences sont sollicités chez les élèves?

1.3 Preuve et Démonstration

Avant de présenter la place qui est accordée à l'enseignement de la démonstration dans les programmes de formation de l'école québécoise, une précision doit être apportée sur le vocabulaire qui sera utilisé.

Comme chez Balacheff (1987), la présente recherche établit une distinction entre *preuve* et *démonstration*. Tout discours accepté par une communauté donnée et visant à communiquer le caractère de vérité d'une proposition ou d'un résultat sera considéré comme une preuve. Le terme démonstration est réservé, quant à lui, aux preuves qui sont acceptées par la communauté des mathématiciens et qui revêtent une forme particulière. Ces preuves doivent établir la vérité d'une proposition en organisant des énoncés, obtenus déductivement à partir d'axiomes ou d'énoncés précédemment démontrés, à l'aide d'un ensemble de règles logiques déjà déterminées. Cette distinction entre preuve et démonstration sera maintenue tout au long de cette étude.

Précédemment, il a été question de l'importance de la démonstration dans l'univers mathématique. Nous avons mis en lumière son implication dans la discipline ainsi que les divers rôles qu'elle y joue. De plus, certains concepts indissociables de la démonstration et de son enseignement ont été présentés au lecteur. Nous allons maintenant nous attarder à la place qui est allouée à l'apprentissage de la preuve et de la démonstration dans les programmes de formation de l'école québécoise.

Selon Hanna (1995), sachant l'importance de la démonstration dans l'univers mathématique, il serait essentiel que tout curriculum mathématique voulant représenter fidèlement la discipline accorde une place de choix à l'apprentissage de la preuve et de la démonstration. Une telle place lui est-elle accordée dans les curriculums mathématiques québécois?

1.4 Place de la preuve et de la démonstration dans les programmes de formation de l'école québécoise

Les programmes de formation de l'école québécoise prennent en considération dès le niveau primaire l'apprentissage de la preuve mathématique. C'est effectivement via les trois compétences qui composent le programme présecondaire que des habiletés liées à l'activité de preuve sont développées chez les élèves.

La compétence *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques* est celle qui cible le plus directement la preuve mathématique. En effet, celle-là a entre autres pour objectif de développer chez les élèves leur habileté à « recourir au raisonnement inductif et déductif » (MELS, 2006a, p. 122). Ceci est tout à fait en lien avec l'activité de démonstration puisque le raisonnement déductif est, selon plusieurs auteurs (Duval, 1991; Tanguay, 2005), l'essence de la démonstration mathématique. Cette compétence stipule également que les élèves doivent être en mesure de « justifier des actions ou des énoncés en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques » (MELS, 2006a, p. 130). On peut penser que cet appel aux justifications pourrait mener, dans bien des cas, à des arguments constituant des amorces de preuve. La compétence *Résoudre une situation-problème* contribue aussi à l'apprentissage de la preuve mathématique puisqu'elle tente de développer chez l'élève une aptitude à « valider la solution » (MELS, 2006a, p. 127) trouvée lors de la résolution du problème. Bien que la validation d'une solution et la justification d'un raisonnement ne passent pas nécessairement par la réalisation de démonstration rigoureuse, celles-ci contribuent à développer chez l'élève du primaire des aptitudes qui seront essentielles lors de la future réalisation de preuves mathématique plus formelles. Quant à la dernière des trois compétences du programme, *Communiquer à l'aide du langage mathématique*, elle contribue à développer chez l'élève une sensibilité à la rigueur et à l'activité de preuve en ciblant « l'apprentissage de l'explication précise et complète d'une démarche ou d'un raisonnement » (MELS, 2006a, p. 124).

Bien que les élèves de niveau primaire soient mis en contact avec certains éléments de la preuve mathématique, ce n'est qu'au niveau secondaire qu'un véritable enseignement de la preuve et de la démonstration s'amorce.

Dans les programmes de formation de niveau secondaire de l'école québécoise, l'apprentissage de la preuve et de la démonstration se fait principalement via la compétence *Déployer un raisonnement mathématique.* Effectivement, celle-ci met l'accent sur l'apprentissage de la preuve et de la démonstration puisqu'elle « [...] consiste à formuler des conjectures, à critiquer, à justifier ou à infirmer une proposition en faisant appel à un ensemble organisé de savoirs mathématiques » (MELS, 2006b, p. 20). Alors qu'au primaire, le travail amorcé sur la preuve reste au niveau de l'implicite, au secondaire, des activités concrètes sont axées sur ce sujet, et ce dès le premier cycle. En effet, une des composantes de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique* se voue entièrement à la réalisation de l'objectif « réaliser des démonstrations ou des preuves » (MELS, 2006b, p. 22).

Plusieurs types de raisonnements doivent être suscités de la part de l'élève. L'analogie, l'induction et la déduction doivent effectivement être mobilisées par l'apprenant tout au long du premier cycle du secondaire. Tout comme c'est le cas pour l'enseignement primaire, le niveau secondaire fait passer l'apprentissage de la preuve et de la démonstration par le développement du raisonnement déductif chez l'élève :

> Pour l'amener à développer sont raisonnement déductif, il convient de l'initier à certaines règles de base de la logique mathématique telles que :
>
> - Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux;
> - Un contre-exemple suffit pour démontrer qu'une conjecture est fausse;
> - Le fait que plusieurs exemples permettent de vérifier un énoncé mathématique ne suffit pas à prouver qu'il est vrai;
> - Une constatation ou des mesures à partir d'un dessin ne prouvent pas qu'une conjecture est vraie mais peuvent toutefois servir à en formuler une. (MELS, 2006b, p. 21)

Les règles de base qui ont été énoncées ci-dessus sont au cœur de l'activité de démonstration et font directement écho aux propos de Hitt (2004), desquels nous avons préalablement entretenu le lecteur. Nous avons en effet mentionné en § 1.2 l'importance qui doit être accordée au principe du tiers-exclu et au contre-exemple dans l'enseignement de la démonstration mathématique. Ces éléments ont indéniablement été pris en considération par le programme de formation du premier cycle de l'école secondaire québécoise.

Le domaine de la géométrie semble avoir été privilégié par le programme du premier cycle du secondaire pour développer le raisonnement déductif de l'élève. En effet, c'est en géométrie que l'élève est amené à se « [...] familiariser avec les définitions et les propriétés des figures qu'il utilise pour résoudre des problèmes à l'aide de déductions simples » (MELS, 2006b, p. 21). Le travail qui avait été amorcé au primaire sur le raisonnement déductif s'intensifie et se concrétise donc au niveau secondaire de manière à s'approcher des raisonnements mis en œuvre dans l'activité de démonstration.

Nous avons jusqu'à présent limité nos propos à la compétence *Déployer un raisonnement mathématique.* Cependant, il est important de ne pas négliger l'apport des deux autres compétences à l'apprentissage de la preuve et de la démonstration. Bien que cet apport ne soit pas aussi direct, il n'en reste pas moins que chacune des deux autres compétences est essentielle à l'exercice de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique.* Effectivement,

> l'élève met à profit certaines composantes de la compétence Résoudre une situation-problème lorsqu'il se prononce sur la véracité d'une conjecture, réalise une preuve, choisit parmi ses connaissances celles qui sont appropriées pour convaincre de l'efficience d'une solution, organise ou structure ses interventions et sa démarche, justifie son point de vue ou sa décision (MELS, 2007, p. 29).

La compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique* est également intimement liée à la compétence *Déployer un raisonnement mathématique* : « Le langage est l'outil par lequel l'élève amorce son raisonnement dans l'appropriation de la situation, au moment du décodage de l'information et de la formulation d'une conjecture » (MELS, 2007, p. 29). De plus, le langage est essentiel à l'élève pour communiquer son cheminement lors de la résolution d'un problème. Il est en fait le « véhicule [de la pensée de l'élève] puisqu'il permet d'exprimer le résultat du raisonnement en obéissant à des critères logiques ou dialogiques » (MELS, 2007, p. 29).

Au deuxième cycle de l'école secondaire, les attentes en matière de preuves et de démonstrations s'intensifient. Alors que le premier cycle vise à sensibiliser l'élève à la validation et à la justification d'un résultat ou d'une démarche, le deuxième cycle requiert de l'élève qu'il ait recours à des formes spécifiques de validation et de justification : la preuve ou la démonstration mathématique. Cette distinction est d'ailleurs apparente dans les critères d'évaluation de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*. Au premier cycle du secondaire, il est attendu de l'élève qu'il soit en mesure de faire une « structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente » et une « justification congruente des étapes d'une démarche pertinente » (MELS, 2006b, p. 22). Tandis que, au deuxième cycle, l'élève doit pouvoir produire une « structuration adéquate des étapes d'une preuve ou d'une démonstration adaptée à la situation » et une « justification congruente des étapes d'une preuve ou d'une démonstration adaptée à la situation » (MELS, 2007, p. 32). C'est donc au deuxième cycle du secondaire que la preuve et la démonstration mathématique semblent faire leurs entrées effectives dans le paysage mathématique des apprenants.

Une autre évolution concernant l'enseignement de la preuve et de la démonstration au deuxième cycle du secondaire concerne les types de raisonnements sollicités. En effet, le deuxième cycle fait appel à plusieurs types de raisonnements qui sont, pour la plupart, plus élaborés que ceux du premier cycle. En effet, l'élève va devoir « recourir à divers types de raisonnement (par induction, déduction, analogie, disjonction de cas, contradiction, etc.) pour préciser, valider, réajuster ou réfuter des conjectures » (MELS, 2007, p. 31). Le travail accompli sur la preuve et la démonstration semble donc se complexifier au deuxième cycle et commence à se rapprocher graduellement du travail accompli dans les mathématiques plus avancées.

Bien que tous les élèves du deuxième cycle du secondaire soient mis en contact avec la preuve mathématique, l'intensité et la forme de ces contacts varient selon la séquence choisie par l'élève. La *Séquence Culture, société et technique* suscite de la part des élèves la validation de conjectures à l'aide de preuves directes et indirectes, ainsi que l'usage de contre-exemples lors de la réfutation de conjectures. Le raisonnement déductif est présent dans la séquence puisque l'élève doit être en mesure de valider « [...] certaines conjectures par de courtes déductions s'appuyant notamment sur des savoirs géométriques » (MELS, 2007, p. 35). Les attentes s'intensifient dans la *Séquence Technico-sciences.* En plus de devoir réaliser différents types de preuves, l'élève qui suit cette séquence est mis en contact avec des situations lui permettant de « [...] déployer un raisonnement déductif structuré et de se familiariser avec la forme codifiée que requiert la démonstration » (MELS, 2007, p. 36).

La *Séquence Sciences naturelles,* quant à elle, demande de la part de l'élève un plus grand niveau d'abstraction, en plus de solliciter des preuves mathématiques de plus en plus structurées. En effet, les situations proposées à l'élève « [...] demandent une organisation cohérente, complète et efficiente des étapes qui permettent de dégager la structure du raisonnement » (MELS, 2007, p. 37). De surcroît, « plusieurs [des situations présentées à l'élève] l'incitent à s'appuyer sur des définitions, des propriétés, des relations et des théorèmes pour prouver d'autres conjectures » (MELS, 2007, p. 37).

Il semble donc que les trois séquences de formation composant le programme de deuxième cycle du secondaire contribuent à l'apprentissage de la preuve et de la démonstration, mais le niveau d'abstraction et d'organisation y varie selon les objectifs respectifs des séquences. En effet, la *Séquence Sciences naturelles*, préparant à des études avancées dans les domaines scientifiques, demande à l'élève de produire des preuves structurées et rigoureuses qui se rapprochent davantage de la démonstration mathématique. Ces attentes sont passablement éloignées de celles de la *Séquence Culture, société et technique*, puisque celle-ci requiert de l'élève la réalisation de déductions simples et non la production d'un enchaînement déductif complexe et structuré.

Les programmes de formation de l'école québécoise semblent donc faire débuter l'apprentissage de la preuve dès le niveau primaire. En effet, le développement du raisonnement déductif et les situations de validation font parties intégrantes de l'univers mathématique d'un élève de ce niveau de formation. L'enseignement de la preuve et de la démonstration se poursuit au premier cycle du secondaire. Des déductions simples dans le domaine de la géométrie sont suscitées chez l'élève qui est de plus initié au principe du tiers-exclu ainsi qu'au rôle et aux implications du contre-exemple. Le travail sur la preuve et la démonstration prend de l'ampleur au deuxième cycle du secondaire. Les types de raisonnement à déployer dans les situations de validation sont plus élaborés et la structure des preuves requises est plus complexe. L'apprentissage de la preuve et de la démonstration mathématique a donc une place de choix dans les programmes de formation de niveau primaire et secondaire de l'école québécoise. Mais, quelle place occupe la démonstration dans l'enseignement post-secondaire?

1.5 La démonstration dans les mathématiques avancées de niveau universitaire

La preuve et la démonstration ont également leur importance dans l'enseignement post-secondaire. En effet, elles occupent une place de tout premier plan dans les cours de mathématiques de niveau universitaire (pour des raisons d'organisation du texte, nous sautons pour l'instant par-dessus le niveau collégial, qui sera traité à la section suivante). Dans ces cours de mathématiques avancées, la réalisation de démonstration est souvent le but premier, en plus d'être un des uniques moyens pour évaluer la performance des étudiants (Weber, 2001). Les propos de Jones vont dans le même sens que ceux de Weber. Selon cet auteur, la démonstration au niveau universitaire est un sujet central tant par son apport à la discipline mathématique que par les connections qu'elle entretient avec d'autres domaines tels que les sciences naturelles (Jones, 2000).

Il n'est pas surprenant qu'une telle place soit accordée à la démonstration à ce palier de scolarisation puisque les mathématiques qui y sont enseignées ressemblent de plus en plus aux mathématiques meublant le quotidien des mathématiciens professionnels. En effet, « [...] les mathématiques enseignées à partir du lycée commencent à ressembler (et cela s'accentue au fur et à mesure de la scolarité) aux mathématiques des experts (mathématiciens professionnels), tant en ce qui concerne les savoirs que les pratiques attendues » (Robert, 1998, p. 141). Comme nous l'avons explicité précédemment, la démonstration est au cœur de l'activité du mathématicien, il va donc de soi que les mathématiques universitaires lui consacrent une place importante.

1.6 La démonstration dans les mathématiques de niveau collégial

Le lecteur aura compris que notre présentation ne suit pas la chronologie du cheminement scolaire parce que le niveau collégial est celui qui fera l'objet du présent projet de recherche : nous avons voulu le garder pour le dessert!

Le programme *Sciences de la nature 200.BO* est le profil de niveau collégial qui offre la formation mathématique la plus importante. En effet, il comprend obligatoirement trois cours distincts de mathématiques. Le premier cours (*NYA*) de la formation standard consiste en l'étude du calcul différentiel, le second (*NYB*) vise celle du calcul intégral, tandis que le troisième cours (*NYC*) cible l'apprentissage de l'algèbre linéaire et de la géométrie vectorielle. Cette formation s'inscrit dans le cadre des programmes préuniversitaires puisqu'elle vise à positionner le programme *Sciences de la nature* « [...] dans une véritable continuité avec les programmes d'études universitaires » (MEQ, 1998, p.15). En effet, ce profil à caractère scientifique a entre autres pour objectif de préparer les étudiants à des études avancées en mathématiques ou en sciences expérimentales. En prenant note de ces objectifs, il est pertinent de se questionner à savoir si les cours de mathématiques présents dans la formation standard du programme *Sciences de la nature* sont bel et bien en continuité avec les mathématiques universitaires. Cette continuité, nous allons en chercher la trace plus particulièrement en ce qui a trait à la démonstration. C'est notre expérience en tant qu'étudiante en mathématiques qui nous a poussés à retenir cet aspect. Lors de notre entrée au baccalauréat en mathématiques, après avoir complété la formation collégiale en *Sciences de la nature*, nos collègues ainsi que nous-mêmes avions eu besoin d'un moment d'adaptation avant de pouvoir répondre aux attentes des mathématiques avancées en matière de démonstration. Les compétences en démonstration que nous avions acquises jusqu'alors étaient insuffisamment développées pour faire face aux exigences des mathématiques universitaires.

Trois objectifs de la formation spécifique du programme *Sciences de la nature 200.BO* ciblent directement les apprentissages en mathématiques :

> 00UN Appliquer les méthodes du calcul différentiel à l'étude de fonctions et à la résolution de problèmes.
>
> 00UP Appliquer les méthodes du calcul intégral à l'étude de fonctions et à la résolution de problèmes.
>
> 00UQ Appliquer les méthodes de l'algèbre linéaire et de la géométrie vectorielle à la résolution de problèmes. (MEQ, 1998, p. 41)

La lecture de ces objectifs et des autres suggère dans un premier temps que les activités de preuve et de démonstration ne font pas partie intégrante des mathématiques de niveau collégial. En effet, la réalisation de preuve et de démonstration n'est nulle part explicitement mentionnée dans les objectifs communs à tous les étudiants du programme. De plus, le terme

Appliquer, utilisé dans la formulation des objectifs, fait davantage référence à l'utilisation d'algorithmes et de « recettes » qu'au déploiement d'un raisonnement mathématique. Le fait de privilégier l'application à l'élaboration d'un raisonnement est en contradiction avec les pratiques et les attentes du niveau universitaire.

Dans l'optique de raffiner notre analyse du programme d'étude collégial de *Sciences de la nature*, nous nous sommes tournées vers la description détaillée qui y est faite des trois objectifs en mathématique cités précédemment. Les précisions qui sont apportées aux deux premiers objectifs, objectifs liés aux cours portant sur le calcul différentiel et intégral, ne font aucune mention explicite de la preuve ou de la démonstration. Cependant, dans les deux cas, des éléments intimement liés à l'activité de démonstration sont présents. Effectivement, alors que le standard[1] « Justification des étapes du raisonnement » fait directement référence au rôle de validation de la démonstration, le standard « Utilisation d'une terminologie appropriée » (MEQ, 1998, pp. 88-89) vise à ce que l'étudiant développe sa rigueur mathématique, rigueur qui est d'ailleurs essentielle lors de la réalisation de démonstration. En ce qui concerne les détails du troisième objectif, en plus de comprendre les deux standards cités ci-dessus, une référence directe à la démonstration mathématique y est faite. En effet, une des composantes essentielles de l'objectif *Appliquer les méthodes de l'algèbre linéaire et de la géométrie vectorielle à la résolution de problème* consiste à « Démontrer des propositions » (MEQ, 1998, p. 90). Il semble donc possible, à la suite de l'analyse du programme d'étude, d'affirmer qu'à l'exception du cours portant sur l'algèbre linéaire et la géométrie vectorielle, la preuve et la démonstration ne font pas partie explicitement de ce qui est prévu dans le programme écrit de niveau collégial du MEQ.

Le constat qui a été réalisé via l'analyse du programme *Sciences de la nature 200.BO* est tout à fait en accord avec les propos de Tanguay (2003). Selon l'auteur, les deux premiers cours de la formation standard n'offrent aux étudiants que très peu de contacts avec la preuve et la démonstration mathématique. En effet, le cours de calcul différentiel privilégie les « [...] arguments informels et intuitifs pour les résultats qui portent sur un passage à la limite (dans

[1] « Le standard correspond au niveau de performance considéré comme le seuil à partir duquel on reconnaît qu'un objectif est atteint » (MEQ, 1998, p. 18).

la mesure où l'on n'a pas abordé les définitions en ε-δ) ». Quelques preuves sont sollicitées auprès des apprenants, mais celles-ci se « [ramènent] à des astuces calculatoires [...] » (Tanguay, 2003, p. 4). Le second cours du programme de *Science de la nature* met les étudiants davantage en contact avec la preuve :

> [...] un enchaînement de preuves un peu plus substantiel, avec : le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis (ou de la moyenne) et des accroissements finis généralisés (ou « de Cauchy »), la ou les règles de De L'Hospital, la formule de Taylor (avec restes de Lagrange), etc. et la preuve du théorème fondamental du calcul basé sur le théorème de la valeur moyenne. (Tanguay, 2003, p. 4)

Le cours portant sur l'algèbre linéaire et la géométrie vectorielle est, selon Tanguay, celui qui accorde la plus grande place à la preuve et à la démonstration mathématique.

> Dans le cours NYC (ancien 105) [troisième cours de la formation standard en Sciences de la nature] :
>
> - arguments calculatoires (qui demandent cependant une bonne maîtrise des sommations et indices) en algèbre matricielle et théorie des déterminants;
> - preuves géométriques avec les vecteurs : se ramènent la plupart du temps à une astuce de calcul;
> - éléments de visualisation combinés à des preuves calculatoires, dans la justification des formules de distances et d'angles (entre deux plans, une droite et un plan, etc.);
> - en théorie des espaces vectoriels abstraits, quelques preuves où une certaine maîtrise de la logique propositionnelle est requise, et où le rôle des définitions est mis de l'avant : sous-ensembles versus sous-espaces, équivalence des deux définitions de l'indépendance linéaire, « si β est une base, alors tout vecteur admet des coordonnées selon β uniques », etc. (Tanguay, 2003, p. 4)

Cette analyse des contenus permet de renforcer les constats préalablement émis à la suite de l'analyse du programme d'étude. Effectivement, bien que certains éléments relatifs à l'activité de preuve et de démonstration soient abordés dans le cadre des deux premiers cours de la formation standard, seul le troisième cours semble avoir pour objectif la réalisation de preuves et de démonstrations. D'ailleurs, les preuves qui sont suscitées dans le cadre de ce cours sont plus complexes et requièrent un plus grand niveau de formalisme que celles demandées dans les autres cours collégiaux.

Une nuance doit cependant être apportée aux analyses de programmes et de contenus qui ont été menées précédemment. Bien que l'activité de démonstration ne soit pas explicitement mentionnée dans les objectifs de chacun des cours de mathématiques obligatoires du profil *Sciences de la Nature*, nous croyons que la réalisation de preuves et de démonstrations est une exigence de plusieurs enseignants du niveau collégial. Probablement influencés par leur formation universitaire en mathématiques, les enseignants du cégep semblent s'attendre à ce que leurs élèves soient en mesure de construire des démonstrations mathématiques et ce, dans l'ensemble des cours de mathématiques de la formation. L'importance qui est accordée à l'activité de démonstration par les enseignants du niveau collégial a d'ailleurs été mise en lumière dans Corriveau et Parenteau (2005) et dans Corriveau (2007). En effet, des enseignants du cégep interrogés dans le cadre de ces études ont affirmé que la preuve est le concept mathématique avec lequel les élèves éprouvent le plus de difficulté. Ils affirment que les élèves sont incapables de lire et reproduire des preuves et qu'ils ne comprennent pas le rôle de la preuve dans l'édifice mathématique (Corriveau, 2007). Ces difficultés entourant la preuve mathématique sont une préoccupation importante pour les enseignants rencontrés, et ceci renforce notre hypothèse que la construction de preuves et de démonstrations au cégep est une compétence attendue par les enseignants, malgré que ça ne soit pas explicitement prescrit par les programmes.

1.7 La preuve et la démonstration dans les différents niveaux de scolarité

Dans les sections précédentes, nous avons analysé la place qui est accordée à l'enseignement de la preuve et de la démonstration dans les différents niveaux de scolarité. Cette étude a permis de relever plusieurs éléments importants desquels nous souhaitons maintenant entretenir le lecteur.

Tel qu'il a été mentionné précédemment, l'école secondaire québécoise semble être le niveau scolaire durant lequel un travail substantiel s'amorce sur l'apprentissage de la preuve et de la démonstration mathématique. En effet, le programme de formation, via la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*, cible le développement de plusieurs types de raisonnements dont le raisonnement déductif, qui est au cœur de l'activité de démonstration.

Le raisonnement déductif, principalement suscité en géométrie, est présent dès le premier cycle du secondaire. Dès ce cycle, des déductions simples sont attendues de l'élève. Au second cycle, les attentes augmentent puisque la mise en œuvre de raisonnements déductifs plus structurés et complexes est requise. Le niveau de formalisme mathématique nécessaire à l'élaboration de preuves est également accentué au second cycle. Le rôle et les impacts du contre-exemple en mathématique ainsi que le principe du tiers-exclu sont aussi des éléments liés à la preuve et à la démonstration qui sont implicitement présents dans les programmes de formation.

Il n'y a pas seulement l'école secondaire qui accorde une place de choix à la preuve mathématique, les mathématiques avancées de niveau universitaire consacrent elles aussi une place importante à la preuve. La réalisation de démonstrations est souvent le but premier des cours de mathématiques universitaires. Cependant, bien que l'école secondaire et l'université mettent la preuve mathématique au cœur de leur programme, le contexte de réalisation des preuves au niveau universitaire est bien différent de celui du niveau secondaire. Alors que les élèves du secondaire traitent principalement la preuve dans le domaine géométrique, les étudiants universitaires doivent réaliser des démonstrations dans plusieurs domaines des mathématiques avancées et ce, sans avoir de directives précises sur la voie à emprunter (Moore, 1994). Toujours selon Moore (1994), cette distinction entre les preuves demandées au niveau secondaire et les démonstrations attendues à l'université crée une transition abrupte qui peut s'avérer problématique pour plusieurs étudiants.

En plus du contexte de réalisation qui varie d'un niveau de scolarité à l'autre, la forme que revêtent les preuves mathématiques est elle aussi différente. Alors que la structure des preuves et des démonstrations au secondaire repose souvent sur un nombre restreint de déductions, les démonstrations de niveau universitaire ont des structures déductives beaucoup plus complexes. Le niveau de formalisme qui est requis dans de telles démonstrations est plus élevé que ce qui est demandé au niveau secondaire. De tels changements dans la forme empruntée par la preuve mathématique ne fait qu'augmenter la distance entre les preuves et les démonstrations attendues au secondaire et les démonstrations exigées au niveau universitaire. Cette distance constitue d'ailleurs une difficulté pour les étudiants.

Il semble donc y avoir un saut important entre le niveau secondaire et le niveau universitaire eu égard à la preuve mathématique. Mais qu'en est-il du niveau collégial? Tel qu'il a été mis en lumière antérieurement, seul le troisième cours de la formation standard du programme *Sciences de la nature*, cours ciblant l'apprentissage de l'algèbre linéaire et de la géométrie vectorielle, traite explicitement de la preuve et de la démonstration mathématique. Effectivement, bien que la preuve mathématique soit abordée de manière informelle dans les cours de calcul différentiel et intégral, le troisième cours de mathématiques, qui est normalement suivi lors de la deuxième année des études collégiales, est le seul à avoir comme objectif la réalisation de preuves et de démonstrations. Une recherche portant sur l'arrimage secondaire-collégial eu égard à la preuve mathématique a d'ailleurs été réalisée de manière à déterminer si ce troisième cours de la formation collégiale *Sciences de la nature* impliquait un travail bel et bien en continuité avec celui des années antérieures. Selon Corriveau (2007), les exigences du cours d'algèbre linéaire et de géométrie vectorielle en matière de formalisme et de démonstration sont supérieures à celles présentes au niveau secondaire et l'auteure évalue la préparation des étudiants comme insuffisante pour affronter ces exigences, ce qui crée des difficultés non négligeables chez plusieurs d'entre eux.

La transition abrupte, que nous avons décrite comme résultant des attentes en matière de démonstration et de formalisme au niveau universitaire, serait en fait identifiable dès le niveau collégial : un premier changement important en matière de démonstration et de formalisme est en effet présent lors du passage secondaire-collégial. Des nouvelles attentes font leur apparition au niveau collégial, pour par la suite s'accentuer au niveau universitaire ce qui, selon Corriveau (2007) et Robert (1998), est une source de difficultés pour les étudiants collégiaux et universitaires.

En plus des nouvelles exigences associées aux études post-secondaires, le manque de continuité dans l'enseignement de la preuve et de la démonstration constitue, selon nous, un autre élément venant compliquer la tâche des étudiants. En effet, le fait de devoir mettre sur la glace les apprentissages sur la preuve mathématique réalisés au secondaire pour ensuite les réutiliser une année et demie plus tard dans de nouveaux domaines, soit l'algèbre linéaire et la géométrie vectorielle, est ardu pour plusieurs. La première année des études collégiales en *Sciences de la nature* semble créer une cassure dans l'apprentissage de la preuve mathématique, apprentissage qui a débuté plusieurs années auparavant. Cette rupture va d'ailleurs à l'encontre de certaines études menées par le Conseil des collèges et le Conseil supérieur de l'éducation qui recommandent « [...] aux différents ordres du primaire à l'université, d'avoir une vision globale du système éducatif [...] » (Cité dans Corriveau, 2007, p. 2).

À la suite de ces constats, la préparation en matière de démonstration et de formalisme qui est offerte aux étudiants semble donc mal adaptée aux exigences des mathématiques avancées. Selon Selden et Selden (2007),

> [...] if students go beyond a few lower-division courses such as calculus or first differential equations, this usually involves constructing original proofs or proof fragments. But, often not much time can be devoted to helping students learn how to construct proofs. This might not lead to difficulties, if only students come to university understanding something about the nature of proof and already had some experience constructing simple proofs. Unfortunately, many student, even high-performing ones, do not.[2] (p. 1)

Suivant ces propos, une bonne compréhension de la nature et du rôle de la démonstration mathématique devrait donc être atteinte avant l'arrivée à l'université. Cependant, tel qu'avancé par les auteurs, plusieurs étudiants ne la possèdent pas, ceux-ci éprouvant des difficultés non négligeables avec l'activité de démonstration. Selon plusieurs études rapportées par Harel et Sowder (2007), certains étudiants universitaires sont toujours attachés aux modes de validation de nature empirique et éprouvent de la difficulté à départager les arguments valides de ceux qui sont erronés. Ce dernier point est d'ailleurs explicable par le fait que certains étudiants se fient davantage à l'apparence d'un argument, qu'à sa structure. La nature des arguments est aussi problématique. Effectivement, certains étudiants confondent axiome, définition et théorème. Les difficultés d'ordre logique sont également

---

[2] « [...] si les étudiants vont au-delà des cours d'introduction tels que les cours de calcul ou le premier cours d'équations différentielles, ceci implique habituellement la construction de preuves originales ou de fragments de preuves. Cependant, dans la majorité des cas, peu de temps peut être alloué à aider les étudiants à apprendre comment construire des preuves. Ceci pourrait ne pas être problématique si seulement les étudiants arrivaient à l'université en ayant déjà une compréhension de la nature de la preuve et s'ils avaient de l'expérience pour construire des preuves simples. Malheureusement, plusieurs étudiants, même parmi les plus performants, n'en ont pas. » (Selden et Selden, 2007, p. 1, notre traduction)

présentes chez plusieurs universitaires. La distinction entre une implication et sa réciproque, la prise en compte de quantifications (implicites ou explicites), sont des éléments de complexité pour certains étudiants (Harel et Sowder, 2007). Dans le même ordre d'idée, l'habileté à déterminer la négation de certaines affirmations renfermant des quantificateurs existentiels ou universels semble faire défaut à certains étudiants en mathématiques avancées (Durand-Guerrier et Njomgang-Ngansop, 2009). Ces difficultés d'ordre logique sont sans doute partiellement responsables des difficultés que les étudiants ont avec la démonstration par contradiction. Ce type de démonstration est problématique pour plusieurs apprenants qui n'en comprennent pas toujours la structure et se voient donc dans l'incapacité d'en produire (Harel et Sowder, 2007).

Il est donc possible d'avancer que bon nombre d'étudiants éprouvent des difficultés importantes face à l'activité de démonstration et ce, même au niveau universitaire. En nous référant aux propos de Selden et Selden (2007), nous croyons qu'un travail substantiel portant sur la démonstration mathématique devrait donc être réalisé préalablement à l'université. Cependant, la formation collégiale standard en *Sciences de la nature* ne semble pas être en mesure de fournir une telle préparation. En effet, l'activité de démonstration y est traitée dans seulement un cours, soit celui portant sur l'algèbre linéaire et la géométrie vectorielle et, tel que rapporté par Corriveau (2007), les exigences en matière de formalisme et de démonstration y sont nettement plus élevées que ce qui était de rigueur au niveau secondaire.

Dans l'optique de préparer les étudiants à ces nouvelles attentes, certains cégeps ont décidé d'ajouter à la formation standard des *Sciences de la nature* un quatrième cours obligatoire de mathématiques. Celui-ci est donné de manière concomitante au premier cours de mathématique de la formation standard, soit le cours de calcul différentiel. Il vise l'apprentissage des différents types de démonstrations en plus de familiariser les étudiants avec le formalisme requis par les mathématiques avancées. En ciblant ces éléments, le cours espère mieux préparer les étudiants aux exigences des cours de mathématiques collégiaux subséquents ainsi qu'aux mathématiques universitaires. Un tel cours cadre parfaitement avec le « Transition-to-proof course » tel que décrit par Selden et Selden (2007). Selon les auteurs, ces « cours de transition vers la preuve » tentent d'aider les étudiants à apprendre à réaliser des démonstrations plutôt que de mettre l'accent sur la découverte de nouvelles notions mathématiques. Selon Selden et Selden, de tels cours ont pour but d'adoucir la transition abrupte qui existe entre les mathématiques de niveau secondaire et celles de niveau universitaire. Le cours *Mathématiques pour les Sciences,* offert au Collège Ahuntsic, est l'un de ces « cours de transition vers la preuve ». C'est sur ce cours que portera la présente étude.

1.8 But de la recherche

Le présent projet de recherche a pour objectif principal d'évaluer la préparation aux nouvelles attentes, eu égard à l'activité de démonstration et au formalisme des mathématiques avancées, préparation offerte à travers les tâches proposées dans le cours *Mathématiques pour les sciences*. Pour répondre à cet objectif, un but intermédiaire et complémentaire a été fixé. En effet, l'évaluation de la préparation nécessite de préciser quelles sont ces nouvelles attentes des mathématiques avancées auxquelles nous tentons de former les étudiants. Bien que ces attentes aient fait l'objet de plusieurs études, telles que celle de Robert (1998), nous avons jugé qu'elles devaient être confrontées au contexte de l'enseignement collégial québécois. Pour des raisons que nous allons préciser au chapitre 3, nous avons choisi, pour cela, d'utiliser le cours *Calcul intégral NYB* comme point de focalisation. Ce cours nous permettra en effet de mettre en lumière les exigences en matière de démonstration et de formalisme auxquelles sont soumis les étudiants immédiatement après avoir suivi le cours de transition vers la preuve, et de déterminer si ce dernier prépare bien à ces exigences. Mais il nous permettra également, sur la base de ce qu'a établi la recherche en didactique des mathématiques, de relever si certains aspects complémentaires qui ne seraient pas abordés dans le cours *NYB* le seraient dans *Mathématiques pour les sciences*, et si la combinaison de ces deux cours constitue une bonne préparation au formalisme universitaire, tel qu'il est véhiculé par les premiers cours d'analyse, notamment.

Une fois les attentes du cours *NYB* mises en relief, l'analyse des tâches proposées par le cours *Mathématiques pour les sciences* pourra être effectuée. Cette analyse prendra en considération les éléments mis en lumière lors de notre étude préalable du cours *NYB*. Elle aura pour but de relever les difficultés liées à l'activité de démonstration et au formalisme inhérentes aux tâches proposées dans le cours *Mathématiques pour les sciences*.

À la suite de ces analyses, une comparaison entre les éléments de difficultés soulevés dans le cours *NYB* et ceux mis en lumière dans le cours du cégep Ahuntsic pourra être réalisée. Cette comparaison permettra d'établir si les éléments de difficultés propres aux mathématiques avancées correspondent bel et bien aux éléments travaillés dans les tâches proposées par *Mathématiques pour les sciences*. Elle permettra également de mettre en perspective ce qui est couvert à cet égard par le cours *NYB*. Nous cherchons donc à savoir si les cours de transition vers la preuve offerts par certains cégeps — dont le cours du cégep Ahuntsic constituera l'exemple de référence —, en combinaison avec le cours de *Calcul intégral NYB*, permettent d'aplanir la difficile transition vers les mathématiques avancées du point de vue de la démonstration et du formalisme.

Pour mener à bien cette recherche, l'élaboration d'une structure théorique précise est requise. Cette structure théorique, présentée au chapitre II, servira de fondements aux analyses subséquentes. Une fois le cadre théorique établi, la méthodologie utilisée pour mener à bien nos objectifs sera définie et présentée au chapitre III.

Les analyses décrites précédemment seront présentées dans les deux chapitres suivant la présentation méthodologique : le chapitre IV se consacrera à l'analyse du cours *Calcul intégral NYB*, tandis que l'analyse des tâches proposées dans le cours *Mathématiques pour les sciences* sera exposée au chapitre V.

Finalement, les conclusions de cette recherche seront présentées au chapitre VI.

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

2.1 Quels éléments expliquent la transition abrupte entre les preuves requises au secondaire et les démonstrations attendues dans les mathématiques avancées?

Au chapitre précédent, nous avons relevé qu'il y a une transition abrupte entre les preuves requises au niveau secondaire et les démonstrations sollicitées dans les niveaux collégial et universitaire. Cette difficile transition s'explique par plusieurs facteurs.

Premièrement, les contextes mathématiques dans lesquels est mise en jeu la validation diffèrent d'un niveau de scolarisation à l'autre. Alors que l'apprentissage de la preuve au secondaire prend place presque exclusivement dans le domaine de la géométrie, donnant par le fait même une représentation partielle de l'activité mathématique, les mathématiques avancées de niveaux collégial et universitaire nécessitent la construction de démonstrations dans plusieurs domaines tels l'analyse réelle, l'algèbre linéaire et la géométrie vectorielle.

Deuxièmement, la forme que revêtent les preuves mathématiques constitue également un facteur expliquant cette transition abrupte. Tandis que les preuves de niveau secondaire ne font souvent intervenir qu'un nombre restreint de déductions, les démonstrations attendues en mathématiques post-secondaires nécessitent un plus grand nombre de déductions, organisées de façon plus complexe. De plus, le niveau de formalisme mathématique requis aux niveaux collégial et universitaire surpasse grandement celui qui est usuellement exigé à l'école secondaire.

Finalement, plusieurs exigences des mathématiques avancées, exigences que nous expliciterons à la section suivante et qui seront illustrées lors de notre analyse du cours *Calcul NYB*, font leur apparition au niveau post-secondaire, ce qui complexifie les démonstrations attendues. Celles-ci doivent désormais s'inscrire, selon Robert (1998), dans le cadre de ce qu'elle appelle « la logique élémentaire ». « Il n'est pas question de s'arrêter au voir ou à des "à peu près" : le respect du principe du tiers exclu devient un enjeu incontournable pour les élèves [...] » (Robert, 1998, p. 146).

Face à ces constats, nous nous questionnons à savoir si les cours de transition vers la preuve offerts par certains cégeps permettent d'aplanir cette difficile transition. Pour effectuer une telle tâche, il est essentiel de déceler des éléments devant être pris en considération pour préparer les étudiants aux démonstrations attendues après le secondaire. Ces éléments constitueront notre cadre théorique.

Nous allons considérer en premier lieu les nouvelles exigences, particulièrement en ce qui concerne la démonstration mais également en ce qui a trait aux pratiques mathématiques générales, des mathématiques avancées[1]. Pour expliciter ces nouvelles exigences, nous allons nous référer aux travaux de Robert traitant de l'enseignement des mathématiques au lycée (qui correspond à notre Cégep) et dans les premières années d'université. Ceux-ci constitueront le cœur de notre cadre théorique, en plus d'être des éléments-clés de la grille d'analyse qui sera ultérieurement créée pour l'étude détaillée des tâches proposées dans les cours qui nous intéressent.

2.1.1 Nouvelles pratiques mathématiques attendues et nouvelles exigences en matière de démonstration

Selon Robert (1998), la distance qui sépare les mathématiques faites par les mathématiciens professionnels et les mathématiques scolaires s'amenuise à partir du lycée et ce, parce que les

---

[1] Bien que cela ne soit pas explicitement dit dans Robert (1998), et que nous sommes conscientes qu'il s'agit là de notre évaluation du texte de Robert, il nous apparaît que les mathématiques avancées dont cette auteure discute restent les mathématiques scolaires pratiquées par les étudiants du lycée et de l'université, que certains auteurs distinguent nettement des mathématiques pratiquées par les chercheurs (Arsac, 1988 ; Burton, 2004).

savoirs et les pratiques attendues commencent à présenter plusieurs similitudes. Les enseignants prennent en partie pour modèle les pratiques des mathématiques que Robert qualifie « d'expertes », ce qui a pour effet de complexifier les pratiques attendues des étudiants. Trois nouvelles pratiques mathématiques ont été retenues par l'auteure. Ces pratiques ont été identifiées à partir de données empiriques et de travaux de recherche. Nous les avons synthétisées des pages 150 à 153 de Robert (1998) comme suit :

1. *Du théorème aux applications : un grand champ de possibles*

   Les étudiants doivent être en mesure d'appliquer un théorème de nombreuses et de diverses façons et ce, même si le théorème est assez éloigné de certaines de ses applications. De plus, lorsque de nouvelles connaissances sont introduites, l'étudiant doit être en mesure de déceler si, grâce à elles, il est désormais possible de trouver de nouvelles applications à d'anciennes connaissances.

2. *Nouvelles notions qualifiées « d'abstraites » par les étudiants*

   Les étudiants sont pour la première fois en contact avec des notions dites formalisatrices, unificatrices et généralisatrices (FUG). Elles ont entre autres pour objectif de réorganiser des connaissances qui étaient jusqu'à maintenant dispersées. Ces notions, par exemple les espaces vectoriels en algèbre linéaire, sont une source importante de difficultés pour les élèves.

3. *Organisation des connaissances*

   D'une part, les enseignants s'attendent à ce que les étudiants soient en mesure de résoudre des problèmes nécessitant l'application directe de notions vues en cours. D'autre part, les étudiants doivent être capables de résoudre des problèmes où la combinaison de diverses notions (nouvelles ou anciennes, provenant d'un ou plusieurs domaines des mathématiques) est requise, sans nécessairement qu'il y ait des indications à cet effet. Cette idée est ainsi résumée par Robert : le besoin pour les étudiants d'avoir une certaine *flexibilité* dans l'utilisation de leurs connaissances.

Ces trois nouvelles exigences sur les pratiques attendues des étudiants au lycée et à l'université dressent un portrait global de la complexité à laquelle ceux-ci sont désormais confrontés.

Englobées dans ces nouvelles pratiques attendues, Robert a mis en évidence de nouvelles exigences en matière de démonstration et de formalisation qui viennent préciser la complexité faisant désormais partie du paysage académique des étudiants. En voici quelques-unes[2] que nous avons synthétisées des pages 146 à 150 de Robert (1998) :

1. *Des problèmes ignorés jusqu'alors*

   Au lycée et à l'université, les étudiants sont confrontés à de nouveaux types de problèmes qui ne leur sont pas familiers. Tel que mentionné dans Corriveau (2007), il s'agit de problèmes dont le niveau de décontextualisation et de généralité est supérieur à ce qu'ils ont rencontré précédemment. Ces problèmes regroupent entre autres des problèmes à caractère généraux faisant intervenir des éléments génériques et des problèmes où les méthodes usuellement utilisées ne peuvent plus s'appliquer de manière directe. Les problèmes d'existence et d'unicité qui font leur apparition au lycée en sont de bons exemples.

2. *Pluralité des arguments nécessaires à une démonstration*

   Il n'est pas rare qu'une démonstration fasse intervenir plusieurs arguments différents, arguments qui peuvent faire partie d'un même théorème ou de théorèmes différents. En plus de repérer ces divers arguments, l'étudiant doit connaître les conséquences de chacun de ces arguments dans la démonstration et doit comprendre comment les combiner.

3. *Répétition des arguments*

   Lors de la réalisation de certaines démonstrations, l'étudiant doit avoir recours à des raisonnements analogues, mais qu'il doit appliquer à des connaissances différentes.

---

[2] Nous expliquerons un peu plus loin pourquoi certaines exigences n'ont pas été retenues.

Par exemple, il est souvent nécessaire d'étudier la première et la deuxième dérivée d'une fonction pour pouvoir réaliser une étude complète de cette fonction.

4. *Sélection d'informations*

Dans certains cas, l'étudiant ne doit retenir qu'une portion d'un résultat puisque elle seule est nécessaire à la réalisation de la démonstration. Ce morcellement qui doit être fait de certains énoncés requiert une bonne compréhension de l'énoncé lui-même en plus de nécessiter, de la part de l'étudiant, une connaissance du rôle que joue cette portion d'énoncé dans l'ensemble de la démonstration.

5. *Changement de point de vue à introduire (sans indication)*

La réalisation d'une démonstration nécessite parfois la traduction d'un énoncé donné en une forme équivalente dévoilant davantage l'orientation de la démonstration. L'énoncé initial est démontré via la démonstration de sa nouvelle forme. Robert mentionne que les enseignants passent souvent sous silence ce changement d'angle d'attaque malgré le fait qu'un étudiant qui n'est pas familier avec de tels changements peut bloquer lors du démarrage ou de la poursuite d'une démonstration. Selden et Selden (2007) abondent dans le même sens que Robert (1998). Selon ces auteurs, plusieurs étudiants ont de la difficulté à savoir quelle représentation symbolique d'un concept doit être utilisée dans une démonstration. Alors que certaines représentations symboliques dévoilent entièrement la marche à suivre, d'autres masquent la démarche à effectuer. Par exemple, certains étudiants ne perçoivent pas que la représentation $re^{i\theta}$ d'un nombre complexe est plus efficace pour démontrer des propriétés de l'opération de multiplication dans l'ensemble des nombres complexes que la représentation $a + bi$ (Selden et Selden, 2007, p. 14). Un étudiant ayant recours à la « mauvaise » représentation pourrait se donner beaucoup de fil à retordre, ce qui pourrait le décourager ou même le bloquer dans le processus de validation.

6. *Repérer les quantificateurs implicites*
   Certains énoncés renferment des quantificateurs universels ou existentiels « cachés », c'est-à-dire des quantificateurs qui sont exprimés à l'aide du langage naturel plutôt que du langage symbolique, ou bien qui sont sous-entendus. La prise en compte de ces quantificateurs implicites est indispensable pour une compréhension adéquate des énoncés. Une attention particulière doit être portée à l'ordre des quantificateurs car celui-ci, comme le mentionne Robert, permet de répondre à la question « qui dépend de quoi ».

Ces exigences en matière de démonstration sont sans contredit une source de difficulté pour bon nombre d'étudiants. Selon Robert, ceux-ci auraient une préférence pour les procédés de nature algorithmique où souvent, les applications sont directes et ne nécessitent qu'une simple juxtaposition d'idées. Ces procédés, qui pouvaient peut être fonctionner au niveau secondaire, ne sont plus appropriés au niveau universitaire. En effet, une certaine complexité, complexité que nous avons tenté de cerner dans les paragraphes précédents, s'est introduite dans les mises en fonctionnement des connaissances nécessaires à la démonstration.

Ayant pris connaissance de ces phénomènes, nous ne pouvions faire autrement que de nous questionner à savoir si cette complexité décrite par Robert était bien prise en compte dans le cours de cégep sous étude. Plus précisément, est-ce que *Mathématiques pour les sciences*, cours de transition vers la preuve offert au cégep Ahuntsic, permet aux étudiants d'être confrontés, et éventuellement préparés, aux nouvelles exigences en matière de démonstration qui les attendent dans les cours de mathématiques collégiaux subséquents et dans les cours universitaires?

Il est important de mentionner que certaines exigences en matière de démonstration citées par Robert ont volontairement été laissées de côté dans le cadre de l'énumération réalisée précédemment. En effet, ayant choisi de concentrer notre étude sur les tâches proposées dans le cours et les démarches attendues associées, les exigences en matière de démonstration dont l'évaluation nécessiterait d'avoir accès aux productions réelles des étudiants ne sont pas appropriées à notre projet. C'est pourquoi certaines exigences directement liées aux stratégies privilégiées par les étudiants dans leur démarche de démonstration n'ont pas été mentionnées.

2.1.2 Développer et entretenir une « attitude de preuve »

Un des champs d'étude de Brousseau (1998) est le développement du processus de preuve chez les élèves de niveau primaire. Selon cet auteur (1998, p. 39), « faire des mathématiques ne consiste pas seulement à recevoir, apprendre et émettre des messages de mathématique corrects et pertinents (appropriés) ». En effet, l'enfant doit pouvoir utiliser les mathématiques pour produire des raisons justifiant le rejet ou l'acceptation d'une proposition, d'une stratégie ou d'un modèle. Brousseau (1998) affirme qu'une telle utilisation des mathématiques exige de l'enfant qu'il possède une « attitude de preuve ». Celle-ci n'est pas innée et ne peut être directement transmise par autrui. « [La] vérité exige une adhésion, une conviction personnelle, une intériorisation qui par essence ne peut être reçue d'autrui sans perdre justement sa valeur » (*op. cit.*, p. 39). De l'avis de l'auteur, l'attitude de preuve se développe et s'entretient via des situations didactiques particulières où des activités à caractère sociales accompagnent les activités individuelles.

Les expérimentations de Brousseau viennent renforcer ses propos puisque, tel que mentionné dans Tanguay (2000, p. 55), ces expérimentations « tendent à montrer que le jeune élève **ne cherche pas spontanément** à pousser sa compréhension jusqu'à la « preuve » quand la situation ne l'y engage pas [...] ». Effectivement, demander aux élèves d'expliquer des résultats « évidents ou acceptés » par tous pousserait, selon Brousseau, ceux-ci à appliquer une recette. C'est pour cette raison que l'auteur avance que l'explication doit plutôt être « nécessaire, techniquement et sociologiquement » (1998, p. 28).

Ces propos sont en accord avec ceux de Alibert *et al.* (1987) portant sur l'enseignement de la preuve au niveau universitaire. Ces auteurs avancent que « la fonctionnalité de la preuve ne peut apparaître réellement que dans une situation où l'incertitude constitue une variable fondamentale » (Alibert *et al.* 1987, p. 381). Ces situations sont souvent trop rares dans les mathématiques avancées, où l'on préfère demander aux étudiants de démontrer des énoncés déjà connus, qui sont posés comme des vérités préétablies. Enseigner la démonstration dans des contextes où ne se pose aucun « enjeu de vérité » (Grenier et Payan, 1998) peut avoir des impacts non-négligeables sur la perception que les étudiants auront du processus de validation mathématique. Cela pourrait amener l'étudiant à ne pas comprendre le rôle de la démonstration, reléguant celle-ci au statut de simple exercice. En effet, plusieurs étudiants en mathématiques avancées semblent éprouver un désintérêt face à la preuve mathématique. Celle-ci est perçue comme

> [...] un exercice de style propre à l'activité de l'enseignant, qu'il faut savoir reproduire devant lui sans en ressentir la nécessité profonde, les problèmes qu'elle vise à résoudre n'ont en général pas fait l'objet d'une véritable dévolution par l'enseignant, ni d'une appropriation par l'étudiant. (Alibert *et al.*, 1987, p. 380)

Les situations dans lesquelles est suscitée l'activité de démonstration jouent un rôle déterminant dans l'image que les étudiants auront du processus de validation mathématique et, par le fait même, de la discipline. Elles devraient donc être prises en considération par les enseignants universitaires.

Bien que Brousseau ait concentré sa recherche sur le développement de la preuve chez les élèves de niveau primaire, nous sommes d'avis, en nous rapportant aux travaux d'Alibert *et al.*, que l'attitude de preuve décrite précédemment est applicable à des niveaux de scolarisation supérieurs. Celle-ci devrait en effet être prise en considération par l'ensemble des intervenants en milieu scolaire.

En ce qui concerne le choix des éléments à privilégier pour susciter une attitude de preuve, nous nous rangeons derrière les propos de Tanguay (2000). En appliquant les recherches de Brousseau à la preuve de niveau secondaire, l'auteur avance que :

> [...] on peut affirmer sans trop de risque [que le résultat à prouver] doit être *non évident*, si possible *inconnu* de l'élève, et présenté de façon à ce que l'élève ressente sa *validation* sinon comme une *nécessité intérieure*, du moins comme un *défi personnel*, défi que pourra susciter et nourrir la situation. Le résultat doit se prêter à un raisonnement en tout ou en partie de l'ordre de la déduction, raisonnement à la portée de l'élève, mais sans lui être trop immédiatement accessible (2000, p. 55).

Ces éléments qui devraient être pris en considération au niveau secondaire auraient tout avantage à l'être également dans l'enseignement collégial, mais le sont-ils vraiment? À la lumière des constats énumérés antérieurement dans cette section, il est donc intéressant, et même nécessaire, de se demander si les tâches proposées aux étudiants dans les cours de transition vers la preuve, tels que *Mathématiques pour les Sciences,* suscitent une attitude de preuve, telle que décrite par Brousseau et Tanguay.

2.1.3 Raisonnement déductif et démonstration

Comme nous l'avons explicité précédemment, il est selon nous important que les tâches présentées aux étudiants suscitent chez eux ce que Brousseau appelle une attitude de preuve. Ce point n'est cependant pas le seul à considérer. La structure, au sens large, de la démonstration devrait également être examinée (Arsac, 1988). Selon Duval (1991), la structure de la démonstration est intimement liée à la structure du raisonnement déductif. En effet, « La simple utilisation de définitions et de théorèmes relève déjà de [la] pratique [du raisonnement déductif]. En outre, le raisonnement déductif présente cette particularité d'être intégré à d'autres formes de raisonnement comme, par exemple, le raisonnement par l'absurde » (Duval, 1991, pp. 233-234). À la suite de ces constats, nous nous rangeons derrière les propos de cet auteur et sommes d'avis qu'une des clés de l'apprentissage de la démonstration réside dans la compréhension du fonctionnement du raisonnement déductif.

Mais comment amener les élèves à comprendre le fonctionnement du raisonnement déductif? Selon Duval (1991), cette compréhension naîtrait de la prise de conscience des différences entre le raisonnement déductif et les autres types de raisonnement, particulièrement le raisonnement argumentatif. L'auteur affirme qu'il est difficile pour les élèves de départager raisonnements déductif et argumentatif puisque les différences de structures majeures entre ces deux types de raisonnement sont masquées par des ressemblances linguistiques. De plus, l'argumentation est profondément ancrée chez les élèves qui sont habitués d'y avoir recours pour convaincre un collègue ou bien pour analyser une thèse. Il n'est donc pas surprenant qu'ils le privilégient au détriment du raisonnement déductif.

Duval (1991) a réalisé une analyse cognitive des raisonnements argumentatif et déductif de manière à mettre en évidence leurs différences. Ces différences sont explicitées par l'entremise de deux passages, de nature différente, que l'auteur distingue dans le fonctionnement d'une démarche de raisonnement : le passage *inférence* et le passage *enchaînement*. Ces passages, ainsi que les différences entre l'argumentation et la démonstration, sont explicités ci-dessous.

Le passage *inférence*

Duval définit le passage *inférence* comme le passage, selon une règle (règle d'inférence), d'une ou plusieurs propositions d'entrée (les prémisses) vers une proposition de sortie (la conclusion). La règle d'inférence utilisée dans ce type de passage peut être explicite ou implicite.

Dans le cas du raisonnement déductif, la règle d'inférence, relevant d'une théorie locale (un corpus d'axiomes, de définitions, de théorèmes...), est explicite, ce qui a pour effet de dévoiler une organisation ternaire (prémisses, règle d'inférence, conclusion) nommée « pas de déduction ». Chacun des rôles pour les propositions qui interviennent dans un pas de déduction (prémisses, règle d'inférence, conclusion) est appelé *statut opératoire* par Duval. Il y a donc uniquement trois statuts opératoires possibles pour les propositions dans un raisonnement déductif.

Dans le cas du raisonnement argumentatif, la règle d'inférence est implicite et relève conjointement de la structure de la langue et des représentations des interlocuteurs. Les propositions n'ayant pas de statut opératoire précis, c'est donc le contenu sémantique des propositions qui détermine leur fonction dans l'argumentation.

De l'avis de Duval, le fait que le statut opératoire des propositions dans un pas déductif soit indépendant de leur contenu sémantique constitue une différence majeure avec le raisonnement argumentatif, dans lequel la fonction des propositions qui y interviennent est justement établie selon leur contenu.

Le passage *enchaînement*

Le raisonnement étant rarement constitué d'une seule inférence ou d'un seul argument, Duval (1991) définit le passage *enchaînement* comme « le lien entre deux pas de raisonnement » (p. 239).

Le passage enchaînement dans le raisonnement déductif ne nécessite l'intervention d'aucune relation sémantique. En effet, l'enchaînement de pas de déduction se fait par ce que Duval appelle le **recyclage** de propositions. Celui-ci consiste à ce qu'un pas de déduction prenne comme prémisse la conclusion d'un pas antérieur. Pour ce faire, la conclusion qui devient une prémisse peut être entièrement répétée ou une référence explicite peut y être faite.

En ce qui concerne le raisonnement argumentatif, l'enchaînement se fait par cumul d'arguments venant se renforcer mutuellement ou bien s'opposer. Duval précise qu'aucun recyclage de propositions n'est fait, mais qu'il s'agit plutôt d'une réinterprétation des propositions. Contrairement au raisonnement déductif, le passage enchaînement dans l'argumentation nécessite la présence de connecteur ou d'expressions (or, mais, raison de plus,...) qui servent à mettre en évidence l'apport du nouvel argument dans le raisonnement. Ces mêmes connecteurs sont utilisés dans le raisonnement déductif pour préciser le statut opératoire des propositions, et ils n'y ont donc, selon Duval, qu'un rôle non essentiel de clarification.

Difficultés liées à l'apprentissage du raisonnement déductif

Tel que nous l'avons mentionné précédemment, Duval (1991) considère qu'une difficulté majeure dans l'apprentissage du raisonnement déductif est qu'il est souvent confondu avec le raisonnement argumentatif. Percevoir les différences profondes entre ces deux types de raisonnement ne va pas de soi pour les élèves. La complexité sous-jacente reposerait autant sur la compréhension du passage *inférence* que sur celle du passage *enchaînement* selon Tanguay (2005).

Dans un premier temps, le fait que la structure ternaire du passage inférence soit rarement explicitée dans les démonstrations présentées aux apprenants ne fait qu'entretenir la confusion qui peut exister chez l'élève entre argumentation et démonstration. La prise de conscience de cette structure, qui est propre au raisonnement déductif, est nécessaire pour départager les deux types de raisonnement. Un second implicite contribuerait selon Tanguay (2005) à compliquer les choses. De l'avis de l'auteur, l'étape portant sur la vérification que chacune des conditions (prémisses) permettant l'application d'une règle d'inférence soit respectée est souvent, par des soucis d'ordre rédactionnel, reléguée au niveau implicite. Ceci masque le caractère opératoire des liens entre prémisses, règle d'inférence et conclusion : « [L'élève] ne perçoit que des relations symétriques de proximité sémantique entre des arguments retenus pour leur pertinence, leur vérité et leur communauté thématique » (Tanguay, 2005, p. 58).

En ce qui a trait au passage enchaînement, Tanguay (2005) avance que le repérage par l'étudiant du lien logique entre des propositions liées par le raisonnement, mais non contiguës dans le texte, est une difficulté non négligeable. Un tel repérage nécessite de l'élève qu'il se détache du contenu des propositions intervenant dans la démonstration pour se concentrer sur leur statut opératoire. L'élève doit comprendre quelles propositions peuvent jouer le rôle de prémisse, de règle d'inférence et de conclusion et ce, à chacune des étapes du raisonnement.

Les difficultés liées à l'activité de démonstration ne sont pas entièrement explicables par la confusion, chez certains élèves, entre argumentation et raisonnement déductif. En effet, aux propos tenus par Duval (1991) et Tanguay (2005), Corriveau (2007) ajoute que :

> La compréhension de ce qu'est le raisonnement déductif ne peut pas se limiter à une connaissance des théorèmes et définitions. Les étudiants doivent bien connaître conceptuellement les objets sur lesquels ils travaillent, ils doivent comprendre les relations entre ces objets et les propositions les impliquant et, finalement, ils doivent articuler leur discours selon les démarches du raisonnement (p. 17).

Nous adhérons à ces propos et nous restons dans la même ligne de pensée que les auteurs évoqués en ajoutant que la compréhension de la structure déductive passe selon nous par un travail sur des démonstrations ayant des structures déductives variées. Nous croyons qu'un travail qui se ferait uniquement sur des structures déductives « linéaires » ou semblables ne pourrait permettre aux élèves de comprendre pleinement la structure globale de la démonstration.

Nous entendons par structures déductives linéaires, une démonstration dont la structure se résume à une chaîne d'inférences. Pour illustrer notre propos, nous utiliserons un exemple portant sur les nombres complexes :

Démontrer que le conjugué de la somme de deux nombres complexes, z et w, est égal à la somme des conjugués de chacun des deux nombres, i.e. :

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

Pour ce faire, soit $z = a + bi$ et $w = c + di$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\overline{z+w} &= \overline{(a+bi)+(c+di)} \\
&= \overline{(a+c)+(b+d)i} \\
&= (a+c)-(b+d)i \\
&= a+c-bi-di \\
&= (a-bi)+(c-di) \\
&= \bar{z}+\bar{w}
\end{aligned}$$

Cette démonstration est une chaîne d'inférences qui est entièrement prise en charge par le calcul. Dans cette chaîne, le fait que la conclusion du pas de déduction précédent devient la prémisse du pas suivant découle en fait directement de la transitivité de l'égalité, et aucun autre élément ne vient se greffer à la chaîne.

Un apprentissage de la démonstration qui se résumerait à des structures déductives linéaires serait selon nous lacunaire et projetterait une image partielle de l'activité mathématique et ce, particulièrement si le raisonnement déductif mis en œuvre est pris en charge par le calcul. Le fait de restreindre l'apprentissage de la démonstration à des chaînes d'inférences pourrait nuire aux étudiants lors de leur arrivée dans les cours de mathématiques avancées. En effet, ceux-ci, n'ayant jamais été mis en contact avec des démonstrations dont les structures déductives sont complexes (un exemple d'une telle démonstration est présenté à la section 4.1.3), pourraient avoir de la difficulté à aborder les démonstrations qui leur sont proposées et pourraient ainsi s'entêter à appliquer la marche à suivre qui avait jusqu'à maintenant prévalue dans leur apprentissage des processus de validation mathématique. Cette marche à suivre s'avérant sans doute inefficace dans bon nombre de cas, aurait pour effet de bloquer les étudiants dans la construction de la démonstration, en plus d'être une source importante de frustration. Des démonstrations ayant des structures déductives plus complexes (arbres d'inférences plutôt que chaînes) doivent faire partie du paysage mathématique des étudiants. Le travail sur ces structures déductives complexes fournit aux étudiants une vision plus complète et globale de la démonstration, en plus de confronter les étudiants aux nouvelles exigences en matière de démonstration telles que ciblées par Robert (1998).

La prise en compte de ces divers éléments permet d'enrichir le questionnement entourant notre sujet de recherche. Il serait effectivement pertinent et même nécessaire de se demander si les tâches proposées dans le cours de transition vers la preuve offert au cégep Ahuntsic permettent aux étudiants de travailler sur des démonstrations ayant des structures déductives complexes et variées.

2.1.4 L'obstacle du formalisme

Il est vrai que la structure déductive de la démonstration constitue une difficulté de taille pour les étudiants. Cependant, d'autres difficultés se greffent à celle-ci. Une de ces difficultés est liée au formalisme mathématique. Nous entendons par formalisme mathématique le recours à une écriture symbolique et l'emploi d'une syntaxe propre à cette écriture. Sur la base d'analyses réalisées au niveau universitaire, Dorier (1998) a constaté qu'une des difficultés majeures chez les étudiants de ce niveau se manifeste quand ceux-ci ont « à faire fonctionner les concepts d'algèbre linéaire dans des cadres formels en dehors de tâches routinières où une technique précise peut être mise en place » (p. 211). Ce constat, qui peut selon l'auteur être appliqué à d'autres domaines des mathématiques avancées, relève de « l'obstacle du formalisme ». Selon Sierpinska :

> L'obstacle du formalisme se manifeste chez les étudiants qui opèrent sur la forme des expressions, sans considérer ces expressions comme faisant référence à autre chose qu'à elles-mêmes. Un des symptômes en est la confusion entre différentes catégories d'objets mathématiques; par exemple, les ensembles sont traités comme des éléments d'ensembles, les transformations comme des vecteurs, les relations comme des équations, les vecteurs comme des nombres, et ainsi de suite. L'obstacle du formalisme fait produire aux étudiants un discours qui a les apparences du discours utilisés par l'enseignant ou le manuel. Pour être efficace en tant qu'étudiant, ceux-ci vont souvent développer des automatismes. Un de ces automatismes est de construire une matrice et de la réduire à chaque fois qu'ils le peuvent, quelle que soit la question qui leur est demandée (Sierpinska *et al.*, 1999, p. 12; trad. Tanguay, 2002, p. 37).

Cette réalité décrite par Sierpinska a aussi été relevée par Alibert *et al.* (1987). En effet, les auteurs affirment qu'un nombre important d'étudiants universitaires produisent des textes de démonstration en tentant d'imiter les démonstrations réalisées par les enseignants et, par le fait même, en reléguant au second plan la compréhension des expressions impliquées dans la démarche. C'est la forme de ces expressions qui semble primordiale pour ces étudiants et non leur signification. Tel que le mentionne Alibert *et al.* (1987), il n'est pas rare que « le syntaxique [prenne] ainsi le pas sur le sémantique » (p. 379). Harel et Sowder (1998), pour leur part, parlent alors d'une « conception ritualiste de la preuve ».

Les recherches de Weber (2001) et Weber et Alcock (2004) abondent dans le même sens. Lors d'expérimentations portant sur la capacité des étudiants universitaires à construire des démonstrations mathématiques, Weber a remarqué que plusieurs étudiants débutaient une démonstration en transcrivant les énoncés donnés en une suite de symboles mathématiques. Ils s'acharnaient par la suite à manipuler ces symboles dans l'espoir d'obtenir le résultat cherché. Une construction de preuves basée sur ces techniques, nommée *production syntaxique de preuves*[3] par Weber, requiert très peu d'habiletés de la part des étudiants. Ceux-ci n'ont en fait qu'à énoncer et traduire symboliquement les définitions et les théorèmes associés aux concepts impliqués pour par la suite tenter de les mettre en relation. Bien que cette méthode soit efficace pour certaines démonstrations, elle est loin de pouvoir guider l'étudiant dans l'ensemble des démonstrations qu'il aura à affronter au niveau post-secondaire. C'est donc dire qu'un étudiant s'appuyant uniquement sur ces techniques de production de preuves éprouvera sans doute plusieurs difficultés dans les mathématiques avancées. En plus de s'avérer insuffisante et inefficace dans nombre de contextes, la *production syntaxique de preuves* semble souvent laisser l'étudiant sur son appétit. Selon Weber et Alcock (2004),

> A syntactically produced proof may be convincing to the prover, in the sense that they believe it is logically correct, without being at all explanatory. Indeed, the statement to be proven might not be about anything meaningful and may simply be understood as a string of symbols (p. 230)[4].

---

[3] Cette expression est la traduction que nous proposons de l'expression anglaise *syntactic proof production,* utilisée par Weber dans ces travaux.

[4] « Une preuve produite syntaxiquement peut être convaincante pour ceux qui l'élaborent, c'est-à-dire qu'ils la croient logiquement correcte, sans être le moindrement explicative. En effet, l'énoncé à prouver peut ne pas se rapporter à quelque chose de significatif et peut être simplement compris comme une chaîne de symboles » (Weber et Alcock, 2004, p. 230; notre traduction).

Corriveau (2007) se range derrière ces propos et ajoute que « [...] lors de la rédaction de démonstration, les étudiants agencent élégamment une suite de symboles sans réfléchir aux objets qu'ils représentent » (p. 20). Selon l'auteure, « l'insuffisance de sens contenu dans le langage formel peut, à raison, troubler plusieurs étudiants » (2007, p. 19).

En plus de la difficilement évitable perte de sens qui accompagne l'utilisation d'un symbolisme en mathématique, le fait qu'un même symbole puisse avoir différentes significations dans différents cadres (par exemple, l'exposant -1 dans les cadres fonctionnel et matriciel) constitue une autre source de difficulté pour plusieurs étudiants. Corriveau (2007) explique que « [...] même si le vocabulaire et certains symboles sont nouveaux, la plupart des symboles attribués aux objets nouvellement introduits ont des significations propres dans d'autres cadres plus familiers. Les règles de manipulation peuvent alors interférer avec les règles propres à d'autres cadres » (p. 21). Il ne s'agit pas ici de faire le procès du formalisme, qui augmente la rigueur et diminue les possibilités d'ambiguïté, mais bien de relever les dangers d'une centration trop exclusive sur le formalisme dans un enseignement donné.

Revenons maintenant au présent projet de recherche. Nous faisons l'hypothèse que dans les mathématiques avancées, démonstration et formalisme vont de pair. Donc, la prise en considération de ce que Dorier (1998) appelle l'obstacle du formalisme permet de parfaire notre vision de l'apprentissage de la démonstration. En effet, nous sommes d'avis que le formalisme requis dans les mathématiques avancées augmente le niveau de complexité des démonstrations demandées au niveau post-secondaire. Dans le cadre de notre projet, nous croyons que dès le niveau collégial, un certain formalisme devrait être mis en place et exploité via l'activité de démonstration. C'est pourquoi il est selon nous nécessaire d'évaluer l'importance accordée au formalisme dans les démonstrations demandées aux étudiants. Quels sont les nouveaux éléments de formalisme introduits dans les cours sous étude et quels sont leurs rôles dans les démonstrations demandées aux étudiants?

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

3.1 Description générale

Comme nous l'avons mentionné précédemment, il semble y avoir un saut important entre les attentes en matière de preuve et de démonstration du niveau secondaire et celles du niveau universitaire. Selon Corriveau (2007), ce saut serait en fait perceptible dès le passage secondaire-collégial. Pour aplanir cette transition abrupte, certains cégeps ont ajouté à leur formation en sciences un quatrième cours obligatoire de mathématiques. Ces quatrièmes cours sont offerts à la première session de la formation *Sciences pures et appliquées* et ont pour objectif de familiariser les étudiants avec les attentes des mathématiques avancées. Bref, ces cours cherchent à mieux préparer les étudiants aux exigences des cours de mathématiques collégiaux subséquents, soit les cours *Calcul intégral NYB* et *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle NYC*, ainsi qu'aux mathématiques universitaires. Devant ce constat, nous souhaitons analyser la préparation qui est effectivement offerte par de tels cours. Pour y arriver, un de ces cours a été ciblé, soit le cours *Mathématiques pour les sciences* dispensé par le cégep Ahuntsic.

Plus précisément, nous souhaitons évaluer si les tâches proposées dans le cours du cégep Ahuntsic font travailler la démonstration et le formalisme d'une façon analogue et comparable, avec des difficultés comparables, à ce qui est fait dans les cours de mathématiques subséquents. La réalisation de cet objectif implique l'étude des cours suivis par les étudiants après *Mathématiques pour les sciences*. En effet, il est essentiel de voir le niveau de difficulté qui sera rencontré et le type de tâches suscitant ces difficultés. L'étude de tous les cours de mathématiques de niveaux collégial et universitaire faisant suite au cours de transition vers la preuve étant un travail colossal dépassant largement le cadre d'un mémoire, nous avons dû nous restreindre en ciblant un seul cours. Mais lequel choisir?

Les cours de niveau universitaire ont immédiatement été écartés puisque le choix est très grand et qu'il varie d'une université à l'autre. De plus, et c'est sans doute le point le plus important, l'écart entre *Mathématiques pour les sciences* et les cours universitaires est trop grand ce qui rend la comparaison difficile, voire impossible. En effet, il y a au minimum deux cours, soit les cours collégiaux *NYB* et *NYC*, qui sont donnés entre le cours de transition vers la preuve et les cours de mathématiques donnés au baccalauréat. Opter pour un cours de niveau collégial est donc ce qui répond le mieux aux critères de faisabilité de cette étude.

Le cours *Calcul différentiel NYA* étant donné en concomitance avec *Mathématiques pour les sciences*, il a lui aussi été mis de côté. Les cours *NYB* et *NYC* sont donc les deux derniers en liste. Pour trancher, nous nous sommes appuyées sur notre expérience d'étudiante universitaire en mathématiques. Lors de nos études, mes collègues et moi-même avions évalué que le cours d'introduction à l'analyse était celui pour lequel nous étions le moins bien préparés. Notre observation de l'époque est d'ailleurs corroborée par la recherche. Plusieurs études (Artigue, 1991; Bloch, 2000) montrent effectivement que l'introduction à l'analyse est le domaine où la transition vers les mathématiques avancées est la plus difficile. Suivant ce constat, il était naturel de choisir *NYB* puisqu'il comporte plusieurs sujets connexes avec les cours d'analyse. En fait, il constitue en quelque sorte le cours « charnière » entre le cégep et les cours universitaires d'analyse. Nous reviendrons plus en détail à la section 3.2.1 sur le choix du cours *NYB*.

Tel que mentionné précédemment, les difficultés inhérentes à l'activité de démonstration et les principaux éléments de formalisme requis pour être en mesure de comprendre les démonstrations proposées dans *NYB* et de construire celles qui sont demandées seront relevés et serviront de points de repère pour évaluer la préparation offerte par *Mathématiques pour les sciences*. À la suite de cette analyse, une comparaison sera effectuée entre les éléments travaillés dans le cours *Mathématiques pour les Sciences* et les attentes du cours *Calcul intégral NYB*.

Ce rôle « charnière » joué par le cours *NYB* permettra cependant de pousser l'analyse un peu plus loin. Nous tenterons en effet de mettre en lumière, compte tenu de ce que la recherche nous dit des mathématiques avancées et de l'apprentissage de la preuve, dans quelle mesure ce cours permet d'affronter les mathématiques universitaires. Plus précisément, nous allons essayer de voir si le cours *NYB*, appuyé par *Mathématiques pour les sciences*, constituent à eux deux une bonne transition vers les mathématiques universitaires. Notre but d'analyse face au cours *NYB* est donc double : voir les éléments auxquels doivent préparer *Mathématiques pour les sciences*, mais aussi révéler les points déficients ou simplement non traités dans *NYB* et évaluer si *Mathématiques pour les Sciences* n'y suppléerait pas.

Avant de présenter plus en détail la méthodologie de la présente étude, une précision doit être apportée sur le vocabulaire. Nous entendons par « tâche » les énoncés d'exercices et de problèmes, tandis que nous utiliserons le terme « activité » pour traiter des actions posées par les élèves lors de la résolution d'une tâche. Cette distinction est inspirée de Robert (1998).

3.2 Évaluation des difficultés inhérentes à l'activité de démonstration et principaux éléments de formalisme liés aux mathématiques avancées

Pour cerner plus précisément les difficultés inhérentes à l'activité de démonstration et les principaux éléments de formalisme auxquels sont confrontés les étudiants en mathématiques avancées, et par conséquent les éléments qui doivent idéalement être travaillés dans le cours *Mathématiques pour les sciences* dans la mesure où un tel cours cherche à préparer à ces mathématiques avancées[1], nous avons choisi de cibler un cours. Le fait de cibler un cours précis permet, selon nous, de mieux répondre à notre objectif de recherche. Premièrement, une étude approfondie du cours choisi va nous permettre d'illustrer clairement les attentes auxquelles doivent se conformer les étudiants. Les attentes liées aux mathématiques avancées, bien qu'elles aient fait l'objet de plusieurs recherches en didactique des mathématiques (Robert, 1998 ; Luk, 2005), ont rarement été concrètement identifiées dans le contexte de l'enseignement collégial québécois. De plus, nous croyons que concentrer notre

---

[1] Nous verrons un peu plus loin que cet objectif est mentionné dans le plan du cours.

étude sur un nombre limité d'exigences relevé dans un seul cours nous évitera de nous perdre dans l'univers complexe et riche des mathématiques de niveau post-secondaire.

3.2.1 Le cours choisi et les raisons pour ce choix

Comme mentionné précédemment, le cours qui nous servira de révélateur quant aux principales difficultés auxquelles seront confrontés les étudiants en mathématiques avancées est le cours de niveau collégial *Calcul intégral NYB*. Plusieurs raisons ont motivé ce choix.

Premièrement, ce cours est obligatoire dans la formation collégiale *Sciences de la nature*. C'est donc dire que tous les étudiants en sciences devront faire ce cours. Nous avons privilégié un cours de niveau collégial plutôt qu'un cours universitaire dans le but de cibler les attentes qui touchent un maximum d'étudiants. En effet, la plupart des étudiants qui suivent une formation en sciences au collégial se dirigeront à l'université dans des domaines scientifiques, tels que les sciences de la santé, où les mathématiques jouent un rôle secondaire. Cependant, il faut de plus compter les étudiants qui poursuivront leurs études dans une discipline en dehors de l'univers scientifique, ou bien qui ne poursuivront pas d'études universitaires.

Deuxièmement, *Calcul intégral NYB* est le cours de mathématiques offert à la deuxième session de la formation collégiale qui suit celle où est donné *Mathématiques pour les sciences*. C'est, selon nous, un élément à ne pas négliger. Effectivement, les exigences qui seront mises en relief dans le cours *NYB* sont celles auxquelles seront directement confrontés les étudiants à la sortie de leur formation offerte par le cours de transition.

Troisièmement, le cours *NYB* traite de plusieurs sujets qui sont couverts et développés dans les cours universitaires d'analyse. En effet, le cours collégial prévoit une introduction aux suites et aux séries, sujets centraux en analyse, ainsi que la présentation de plusieurs théorèmes élémentaires d'analyse tels que le théorème de Rolle et le théorème de Lagrange (aussi appelé théorème des accroissements finis). Le cours *NYB* peut donc être vu comme un « cours charnière » faisant un lien entre les mathématiques collégiales et les cours universitaires d'introduction à l'analyse. Le fait que certains contenus de *NYB* font aussi partie des cours universitaires d'analyse nous amène à faire la réaliste hypothèse que beaucoup des difficultés repérées en *NYB* seront aussi des exigences de ces mathématiques universitaires.

Ce dernier point est d'ailleurs la principale raison ayant motivé le choix de *NYB*. À notre entrée à l'université, le cours d'introduction à l'analyse réelle est certainement celui ayant donné, à nos collègues-étudiants et nous-mêmes, le plus de fils à retordre. Le formalisme et les démonstrations qu'il requiert nous avaient causé bien des tracas. Notre situation de l'époque n'est cependant pas un cas isolé puisque les cours universitaires d'analyse ont la réputation d'être particulièrement difficiles. Cette réputation, qui est connue autant des étudiants que des professeurs et des chargés de cours, est d'ailleurs confirmée par plusieurs recherches en didactique des mathématiques. En effet, Ghedamsi (2008) et Bloch (2000), pour ne nommer qu'eux, mettent en relief la complexité de ce domaine mathématique qui est source de difficultés, et même d'échec, pour plusieurs étudiants. Bloch (2000) traite d'ailleurs de la difficile transition lycée-université eu égard à l'analyse réelle. L'auteure avance que « les raisonnements [mis en œuvre en analyse] sont en rupture avec ceux de l'algèbre et [qu'] il y a une augmentation du niveau de complexité des preuves [par rapport à ce qui est fait au secondaire] » (p. 58), ce qui expliquerait une partie des difficultés des étudiants face à ce domaine mathématique. Artigue (1991) abonde dans le même sens. Effectivement, selon l'auteure, l'apprentissage du début de l'analyse comporte plusieurs difficultés qui sont entre autres attribuables aux

> [...] difficulties due to the formalization in this field : first because it introduces structural definitions which may conflict in the students mind with more intuitive spontaneous conceptions, and secondly because it bases proofs on complex propositions involving quantifications which operate in a direction seemingly contrary to the dynamic flow of intuitive thought[2] (p. 196).

Le fait que les cours universitaires d'analyse soit une source importante de difficulté et la proximité qu'ils entretiennent avec le cours *NYB* viennent confirmer la pertinence d'avoir

---

[2] « [...] difficultés dues à la formalisation dans ce domaine : premièrement, parce qu'il introduit des définitions structurelles qui peuvent entrer en conflit avec des conceptions plus intuitives et spontanées des étudiants et deuxièmement, parce que les preuves s'appuient sur des propositions complexes impliquant des quantifications qui opèrent dans des directions contraires au flot dynamique de la pensée intuitive » (Artigue, 1991, p. 196; notre traduction).

sélectionné ce cours : le fait de cibler certaines des attentes des cours universitaires d'analyse, via l'étude d'un cours comportant des sujets connexes, ne peut que donner du poids à notre étude préalable.

Le choix du cours *NYB* peut sembler en contradiction avec ce qui est ressorti de l'étude du programme *Sciences de la nature,* réalisée antérieurement (voir § 1.6). Nous avions alors mis en lumière que ce cours ne possède aucun objectif ciblant explicitement la démonstration, contrairement au cours *d'Algèbre linéaire et de géométrie vectorielle NYC*. Cependant, nous croyons que les motifs mentionnés précédemment et les éléments du cours *NYB* qui seront analysés (voir section suivante) justifient notre choix.

3.2.2 Pourquoi analyser un manuel du cours *Calcul intégral NYB*?

Pour notre étude du cours *Calcul intégral NYB*, nous nous sommes appuyées sur un manuel de référence : *Calcul intégral 3^e^ édition* (Charron et Parent, 2004). Notre choix s'est porté sur cet ouvrage car il s'agit d'un manuel fréquemment utilisé par les établissements collégiaux, en particulier au Cégep Ahuntsic où se donne *Mathématiques pour les sciences*.

Nous sommes conscientes que l'analyse d'un cours via l'étude d'un manuel n'est que partiellement représentative du cours qui est effectivement donné. Cependant, nous y voyons un avantage. Tout le matériel contenu dans l'ouvrage, c'est-à-dire les thèmes mathématiques abordés et les exercices/problèmes proposés, n'est certainement pas toujours traité et les sélections de sujets et de tâches qui sont faites relèvent d'un choix de l'enseignant. De tels choix dépendent de l'enseignant, de la session, du cégep, des groupes, etc. Or, nous souhaitons analyser quelque chose de plus stable, d'indépendant de telles contingences. Et en outre, ces sujets ou tâches peut-être mis de côté en *NYB* se retrouveront certainement à l'université. Les difficultés et éléments de formalisme relevés dans ces éléments « peut-être négligés » sont donc tout aussi pertinents, car ils remplissent parfaitement notre visée, qui est de mettre en lumière les attentes en matière de démonstration et de formalisme des mathématiques avancées.

De plus, bien qu'aucun objectif du second cours de calcul de niveau collégial ne soit explicitement lié à l'activité de démonstration (voir § 1.6), nous croyons que l'analyse des sujets abordés par le recueil, sans tenir compte de leur présence ou absence dans le cours effectivement donné, nous permettra de relever plusieurs attentes des mathématiques avancées. Les manuels de calcul différentiel et intégral, et c'est d'ailleurs le cas de celui de Charron et Parent, accordent une place importante à l'activité de démonstration. Cependant, il est fréquent que ces portions plus théoriques et abstraites ne soient pas traitées par les enseignants qui insistent plutôt sur le développement des techniques calculatoires dans l'optique de répondre aux exigences du programme. Ce choix est, du point de vue de la formation, pour le moins discutable et ce n'est d'ailleurs pas, loin s'en faut, le choix de **tous** les enseignants[3]. En considérant le choix inverse, cela nous permet d'avoir accès à un maximum de démonstrations desquelles nous pourront relever plusieurs difficultés et éléments de formalismes pouvant servir de points de repère lors de l'analyse du cours *Mathématiques pour les sciences.*

3.2.3 Qu'est-ce qui sera analysé dans le manuel ?

L'analyse complète et exhaustive de l'ensemble des sections théoriques et des sections d'exercices étant une tâche de trop grande envergure dans le cadre d'un mémoire de maîtrise, nous avons décidé, compte tenu de notre but, de nous restreindre aux éléments se rapportant à l'activité de démonstration. Dans un premier temps, nous allons nous concentrer sur les tâches requérant la construction, par l'étudiant, de démonstrations. Ces tâches, et les activités qu'elles requièrent, seront analysées. Les tâches ne suscitant pas la mise en œuvre du raisonnement déductif et se limitant à l'application de techniques préalablement définies seront laissées de côté.

---

[3] Une enquête réalisée auprès d'enseignants du cégep, et rapportée dans Corriveau (2007), dévoile en effet que plusieurs des répondants semblent préoccupés par la difficulté des étudiants à lire et produire des démonstrations. Cette préoccupation semble centrale chez plusieurs enseignants et nous porte ainsi à croire qu'ils accordent une place non négligeable à l'activité de démonstration dans leurs cours.

Ces éléments ne sont pas les seuls retenus. Dans le but d'approfondir notre étude, nous allons également considérer certaines démonstrations présentées dans les sections théoriques du manuel. Ces démonstrations seront sélectionnées selon deux critères :

- En début de chapitre, le manuel indique les objectifs d'apprentissage ciblés dans les sections théoriques composant le chapitre. Si un objectif d'apprentissage vise explicitement la compréhension de certaines des démonstrations présentées dans une section théorique, celles-ci seront retenues pour faire l'objet d'une analyse détaillée.
- Les démonstrations de théorèmes centraux en analyse, tels que le théorème de Rolle et le théorème de Lagrange, seront également analysées. L'importance de ces théorèmes en mathématiques avancées et les difficultés particulières que renferment leurs démonstrations ont motivé notre choix de les inclure. Les difficultés et éléments de formalisme qu'elles comportent sont représentatifs des mathématiques universitaires, particulièrement celles des cours d'analyse.

C'est donc l'analyse des démonstrations retenues dans les sections théoriques et celles sollicitées par les tâches des sections d'exercices qui nous permettra de mettre en lumière les attentes des mathématiques avancées qui nous intéressent.

Notre analyse du cours *NYB* ira cependant un peu plus loin. Tel qu'annoncé précédemment (voir § 3.1), nous tenterons également de soulever les points forts et les points faibles du manuel face au formalisme et à la démonstration. Une telle analyse a pour objectif d'évaluer si la préparation qui cst offerte par le manuel constitue une bonne transition vers les mathématiques universitaires.

3.2.4 Comment seront analysées ces tâches et démonstrations?

Mettons maintenant en lumière les critères selon lesquels seront réalisées ces analyses. En nous appuyant sur les éléments présentés dans notre cadre théorique, les attentes en matière de démonstration et de formalisme des mathématiques avancées seront évaluées sous quatre principaux angles :

- Quelles nouvelles exigences[4] en matière de démonstration, telles que répertoriées par Robert (1998), sont sollicitées dans les tâches et démonstrations du cours *NYB* ?
- Les tâches du cour *Calcul intégral* suscitent-elles une attitude de preuve telle que définie par Brousseau (1998) et Tanguay (2000)?
- Quelle est la structure déductive des démonstrations analysées : s'agit-il de chaînes ou d'arbres d'inférences?
- Quels sont les éléments de formalisme auxquels sont confrontés les étudiants dans le cours *NYB*? Quels rôles ont ces éléments de formalisme?

Ces quatre questions ont été subdivisées en sous-questions ciblant chacune des éléments qui devraient selon nous être pris en considération. L'ensemble de ces questions constituera notre grille d'analyse. À l'aide de cette grille, qui permettra une analyse précise et détaillée, nous pourrons tracer un portrait global des diverses attentes en matière de démonstration et de formalisme sollicitées dans le manuel *Calcul intégral 3^e^ édition* (Charron et Parent, 2004).

3.2.5 Présentation de la grille d'analyse

L'élaboration de notre grille d'analyse a été fortement inspirée des outils d'analyse conçus par Robert (1998). L'auteure a élaboré six axes d'analyse permettant d'étudier les contenus des mathématiques post-secondaires : *le contexte mathématique*, *le scénario didactique proposé*, *l'analyse des tâches*, *les activités attendues des élèves*, *l'analyse des attentes de l'enseignant* et *les analyses a posteriori*. Parmi ces axes, trois ont été retenus pour constituer le squelette de notre grille : *le contexte mathématique*, *l'analyse des tâches* et *les activités attendues des élèves*. À ce squelette viendront se greffer plusieurs questions d'analyse se rapportant aux interrogations soulevées précédemment dans cette section. Les axes *le scénario didactique proposé*, *l'analyse des attentes de l'enseignant* et *les analyses a posteriori* n'ont pas été retenus dans cette recherche car ils ciblent l'étude de séquences d'enseignement, ce qui n'est pas l'objet de la présente recherche.

---

[4] Le terme « nouvelles exigences » est directement issu des travaux de Robert (1998). L'auteure caractérise de « nouvelles » les exigences qui font leur apparition au lycée et qui étaient absentes des mathématiques enseignées dans les niveaux scolaires précédents.

Il est important de mentionner que cette méthodologie de recherche est également inspirée de Corriveau (2007). En effet, cette auteure a utilisé la méthodologie développée par Robert pour évaluer l'arrimage secondaire-collégial eu égard à la démonstration et au formalisme. Les axes d'analyse que nous avons retenus sont les mêmes que Corriveau et certaines modifications apportées par cette auteure ont également été incorporées à notre présente grille d'analyse. Il serait donc plus juste de mentionner que la méthodologie utilisée est celle de Robert, mais adaptée par Corriveau. Puisque nos objectifs sont différents des visées de Corriveau, certains éléments en lien avec les questions soulevées précédemment ont été ajoutés à la grille de Corriveau.

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation et le contexte mathématique

Cet axe vise à spécifier la ou les notions qui sont ciblées par la tâche et permet de situer ces notions dans le corpus mathématique. Cet axe est essentiel puisqu'il permet « de toujours garder en vue l'environnement global d'une tâche, de ne pas faire d'analyses au seul niveau local, pour ne pas perdre les informations essentielles en termes de situations » (Robert, 1998, p. 176). Parmi les questions proposées par Robert, les questions suivantes ont été retenues :

- *Quelles sont les connaissances à mettre en fonctionnement ?*
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?*

À ces questions nous ajoutons la question suivante :

- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?*

Par le biais de cette question, nous tentons de déceler les domaines mathématiques dans lesquelles l'activité de démonstration sera sollicitée de la part de l'étudiant. Le domaine mathématique dans lequel se déroule la tâche a un impact non négligeable sur les démonstrations à élaborer et les éléments de formalisme qui devront être mis à contribution par l'étudiant.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

Cet axe vise à analyser l'énoncé qui est fourni aux étudiants. Cette analyse est purement mathématique et ne tient pas compte des activités possibles des étudiants. Encore une fois, certaines questions énoncées par Robert ont été retenues :

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?*
- *L'énoncé est-il ouvert*[5]*? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?*
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?*
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?*
    1. *Raisonnement par l'absurde*
    2. *Raisonnement par contraposée*
    3. *Raisonnement par récurrence*
    4. *Réfutation par un contre-exemple*

  À ces types de raisonnement fournis par Robert, nous en avons ajouté deux autres qui sont à notre avis susceptibles d'être requis des étudiants :

    5. *Raisonnement par exhaustion de cas*
    6. *Raisonnement déductif qui n'est pas d'un des types répertoriés précédemment*
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?*
- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?*
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?*

---

[5] Le terme « énoncé ouvert » aura, dans le cadre de ce travail, un sens plus vaste que celui qui est usuellement attribué en didactique des mathématiques à l'expression « problème ouvert » (voir par exemple Charnay, 1992, p. 1). Pour les besoins de cette recherche, un énoncé sera considéré comme « ouvert » à partir du moment où sa valeur de vérité doit être déterminée par l'étudiant.

À ces questions, retenues de Robert, nous ajoutons une question portant sur la structure déductive de la démonstration. Cette question nous a été inspirée de Corriveau (2007) :

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?*

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

Cet axe d'analyse vise à évaluer les activités qui sont attendues des étudiants, c'est-à-dire les activités qui sont idéalement souhaitées de leur part. Pour cet axe d'analyse, certaines questions formulées par Robert ont été retenues et sont présentées ci-dessous.

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?*
- *Quels théorèmes appliquer?*
- *Y a-t-il lieu d'introduire des étapes?*
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?*
- *Y a-t-il à répéter un argument?*
- *Y a-t-il un changement de point de vue à introduire (sans indication)?*
- *Y a-t-il une sélection d'informations à effectuer?*
- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?*
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?*
- *Y a-t-il un nouveau vocabulaire ou symbolisme à gérer?*

Les niveaux de mise en fonctionnement *technique*, *mobilisable* et *disponible* sont directement issus des travaux de Robert (1998). L'auteur définit le niveau technique par « [...] des mises en fonctionnement indiquées, isolées, mettant en jeu des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules, etc. Il s'agit donc de contextualisations simples, locales, sans étapes, sans travail préliminaire de reconnaissance, sans adaptations » (p. 165).

Le niveau des connaissances mobilisables se caractérise par des mises en fonctionnement encore indiquées, mais qui nécessite cependant de surpasser la simple application. En effet, l'étudiant doit adapter ces connaissances au contexte particulier de la tâche.

En ce qui concerne le niveau des connaissances disponibles, « [il] correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indication, d'aller rechercher soi-même dans ses connaissances ce qui peut intervenir » (p. 166).

Il est important de préciser qu'une analyse en terme de mise en fonctionnement des connaissances est possible uniquement en prenant en compte un niveau scolaire précis, et même où se situe la tâche dans l'organisation du cours considéré.

Pour notre analyse, la prise en compte de ces niveaux de mise en fonctionnement des connaissances est importante puisque la réalisation de démonstration passe selon nous par les niveaux des connaissances mobilisables et disponibles. En effet, l'activité de démonstration n'est pas une simple technique qu'on applique directement, elle nécessite l'articulation de différents arguments, articulation qui doit être faite par l'étudiant, souvent sans la moindre indication.

La présentation de nos trois axes d'analyse peut amener le lecteur à croire que ces axes sont disjoints. Cependant il n'en est rien. Tel que le mentionne Robert (1998), les analyses des deuxième et troisième axes peuvent difficilement être faites de manière isolée. D'ailleurs, Robert a choisi de présenter conjointement les axes 2 et 3 dans l'exemple d'analyse qui est proposé dans son étude. Bien que nous ayons décidé, par souci de clarté et pour faciliter la lecture, de conserver la séparation entre les trois axes d'analyse, nous tenons à aviser le lecteur que certaines réponses fournies aux questions du deuxième axe pourraient s'appuyer sur les activités qui sont attendues des étudiants (3^{e} axe d'analyse). En effet, nous croyons que pour dresser un portrait précis et complet de l'importance du formalisme mathématique dans une tâche, il est nécessaire de prendre en considération les activités attendues des étudiants. Le lecteur ne doit donc pas être surpris de retrouver, entre autres pour cette question, des éléments liés au troisième axe d'analyse.

Une deuxième version de notre grille d'analyse

L'outil d'analyse présenté ci-dessus est conçu pour analyser des tâches qui nécessitent, de la part de l'étudiant, la construction d'une démonstration. Il s'avère donc mal adapté à l'analyse de démonstrations qui sont présentées dans les sections théoriques du manuel à l'étude. C'est d'ailleurs ce que nous ont révélé nos premières tentatives d'analyses. Devant ce constat, la grille d'analyse présentée antérieurement a dû être modifiée pour répondre aux besoins de ce type de démonstrations. Les questions d'analyses présentées précédemment restent sensiblement les mêmes, mais leur répartition dans les différents axes a été modifiée. Effectivement, la démonstration étant présentée à l'étudiant, celui-ci n'a plus qu'à la lire et essayer d'en comprendre les différentes composantes et leur enchaînement. Il s'agit de la principale, et souvent la seule, activité qui soit attendue de lui. Cette situation a pour conséquence de rendre inapplicables les questions portant sur les mises en fonctionnement des connaissances et les activités attendues de la part de l'étudiant. Devant ce constat, nous avons décidé de fusionner les deuxième et troisième axes d'analyse.

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont la ou les connaissances mises en fonctionnement ?*
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* .
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?*

Deuxième et troisième axes d'analyse : Les tâches prescrites et les activités attendues des étudiants

- *Qu'est-ce qui est attendu de l'étudiant par la présentation de cette démonstration? Des indices facilitant la réalisation/compréhension de la tâche sont-ils fournis?*

La seconde question vient remplacer la question qui originellement portait sur le caractère ouvert ou fermé de l'énoncé et la présence d'indices orientant la résolution de la tâche. Cette question est non pertinente dans le contexte d'une démonstration présentée à l'étudiant.

- *L'énoncé du théorème comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes? Des étapes ont-elles été introduites dans la démonstration?*
- *S'agit-il d'un type de démonstrations qui était ignoré jusqu'alors?*

- *Quels types de raisonnements sont en jeu?*
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?*
- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?*
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?*
- *Quels théorèmes sont appliqués?*
- *Y a-t-il plusieurs arguments développés à la fois?*
- *Un argument est-il répété?*
- *Un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation est-il introduit (sans indication)?*
- *Une sélection d'informations est-elle effectuée?*
- *Une quantification est-elle à repérer?*

L'analyse du manuel du cours de calcul intégral sera réalisée à l'aide des outils d'analyse présentés précédemment. La première grille sera utilisée lors de l'analyse de tâches nécessitant la construction, par l'étudiant, de démonstrations, tandis que la seconde sera mise à profit pour analyser les démonstrations présentées dans les sections théoriques.

3.3 Méthodologie d'évaluation des difficultés inhérentes à l'activité de démonstration et au formalisme pour le cours *Mathématiques pour les sciences*

Une fois l'analyse du manuel du cours *Calcul intégral NYB* effectuée, l'évaluation des difficultés liées à l'activité de démonstration et des éléments de formalisme sollicités dans le cours du cégep Ahuntsic sera amorcée. Les deux grilles utilisées pour l'analyse du manuel du cours *NYB* seront réutilisées pour l'analyse du cours du cégep Ahuntsic. Le fait d'avoir recours aux mêmes outils pour analyser les deux cours nous permettra de pouvoir effectuer une comparaison entre les éléments relevés en *NYB* et ceux relevés en *Mathématiques pour les sciences*. Une telle comparaison se serait avérée difficile, voire impossible, si des grilles différentes avaient été utilisées d'un cours à l'autre.

Avant de décrire précisément comment sera évalué le cours du cégep Ahuntsic, il est indispensable de présenter celui-ci plus en détail. Nous soulèverons également les aspects du cours nous ayant motivées à le retenir pour notre étude.

3.3.1 Description globale du cours *Mathématiques pour les sciences*

Le cours *Mathématiques pour les sciences* est offert par le Collège Ahuntsic dans le cadre du programme *Sciences de la nature 200.BO,* profil *Sciences pures et appliquées.* En plus d'offrir les trois cours standard de mathématiques, soit les cours *Calcul différentiel NYA*, *Calcul intégral NYB* et *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle NYC*, cet établissement d'enseignement a décidé d'inclure dans le cursus des *Sciences pures et appliquées* un quatrième cours obligatoire de mathématiques. Ce cours est donné à la première session de la formation. L'étudiant est donc appelé à suivre ce cours en concomitance avec *Calcul différentiel NYA*.

Mathématiques pour les sciences vise, dans un premier temps, à montrer l'implication des mathématiques dans les sciences. Les mathématiques y sont en effet présentées comme le « langage des sciences et l'outil de généralisation et d'expression de modèles physiques, chimiques ou biologiques » (Plan de cours, hiver 2008, p. 2). Le cours cherche également à être « [...] l'instrument d'un approfondissement de la rigueur de la pensée scientifique par l'intermédiaire de la démonstration » (*idem*). C'est d'ailleurs ce but qui a retenu notre attention et qui a motivé le choix de ce cours pour notre étude. *Mathématiques pour les sciences* semble accorder une place de choix au procédé de validation mathématique puisqu'il est présent dans l'ensemble des thèmes abordés. Effectivement, les différentes méthodes de preuves sont traitées dans l'enseignement de la logique propositionnelle, de la théorie des ensembles, de l'analyse combinatoire, des probabilités, des suites et des séries, des vecteurs et des nombres complexes (voir rubrique « Déroulement du cours » à la section suivante).

Ce désir de mettre l'emphase sur l'apprentissage de la démonstration et de la rigueur mathématique est très clairement perceptible dans les *objectifs intégrateurs* du cours, mentionnés dans le syllabus. L'objectif de formation « utiliser des raisonnements logiques afin de déduire, à partir d'énoncés donnés, une conclusion qui en est une conséquence » (Plan de cours, hiver 2008, p. 3) cible précisément la mise en œuvre d'un raisonnement déductif, au cœur même de l'activité de démonstration. Il ne s'agit cependant pas du seul objectif se rapportant à la démonstration mathématique. En effet, un *objectif de matière* cible le développement chez l'étudiant de sa capacité à « [...] exposer clairement un raisonnement logique en utilisant adéquatement les différentes méthodes de preuves ». Cette volonté de mettre la rigueur mathématique au cœur du cours est d'ailleurs illustrée dans d'autres objectifs tels que *l'objectif de formation* « acquérir une qualité d'exactitude dans l'expression mathématique écrite et parlée » et l'objectif de nature linguistique « reconnaître, utiliser et écrire correctement les symboles mathématiques. Acquérir les règles de lecture qui permettent de mathématiser un problème » (*idem*, p. 3). En plus de cibler directement la rigueur mathématique, le dernier objectif présenté fait écho à une des « nouvelles exigences » en matière de démonstration (Robert, 1998). La mathématisation d'un problème, en plus de demander aux étudiants l'utilisation d'un formalisme mathématique approprié, nécessite de ceux-ci un changement de point de vue ce qui constitue une difficulté non négligeable.

La connaissance des buts du cours ainsi que des objectifs qui le définissent nous confirment que *Mathématiques pour les sciences* met l'activité de démonstration et le développement de la rigueur mathématique au cœur de ses préoccupations. Il est donc approprié d'analyser la préparation offerte par un tel cours eu égard aux deux sujets qui nous intéressent.

3.3.2 Quelle version du cours *Mathématiques pour les sciences* sera analysée?

Plutôt que d'analyser le cours uniquement via son manuel de référence, nous avons décidé d'effectuer une analyse qui soit plus près du cours réellement reçu par les étudiants. Les objectifs poursuivis par notre analyse du cours *NYB* nous permettaient, et même nous incitaient, à étudier l'ensemble du manuel sans tenir compte des sujets et exercices effectivement ciblés par les enseignants donnant cette formation (voir § 3.2.2). Cependant, les visées de l'analyse du cours *Mathématiques pour les sciences* étant différentes, nous croyons que d'analyser uniquement le manuel, sans se préoccuper des choix faits par les enseignants, ne permet pas d'avoir une image juste et précise de la préparation qui est effectivement offerte par cette formation. En effet, le fait de ne pas aborder une portion du manuel, de consacrer plus de temps à une autre et de sélectionner telles ou telles tâches déterminent les difficultés et les éléments de formalisme auxquels seront confrontés les étudiants.

Dans l'optique d'étudier le cours qui est réellement suivi par les étudiants, nous avons demandé l'aide d'une enseignante ayant déjà donné le cours à plusieurs reprises. Cette enseignante, qui était en charge du cours à la session hiver 2008, a accepté de nous fournir la planification qu'elle a utilisée pour cette session. Cette planification comprend les lectures et les tâches qui ont été ciblées dans le manuel, en plus des évaluations et des exercices supplémentaires donnés aux étudiants. Le fait de prendre en considération la planification élaborée par l'enseignante nous permettra de tracer un portrait beaucoup plus réaliste du cours.

Déroulement du cours à la session hiver 2008

Le cours est divisé en quatre étapes couvrant chacun des thèmes distincts :

- Étape 1 : Logique propositionnelle et ensemble
- Étape 2 : Analyse combinatoire et probabilités
- Étape 3 : Suites et séries
- Étape 4 : Vecteurs et nombres complexes

Quinze heures de cours sont prévues pour chacune des quatre étapes.

Plusieurs documents fournis par l'enseignante viennent diriger et encadrer le déroulement de chacune de ces quatre étapes. Dans un premier temps, une feuille de route est remise à chaque étudiant au début de chaque étape. Celle-ci mentionne les lectures ainsi que les exercices qui doivent être faits pour chacune des séances de cours. Ces lectures et ces exercices sont pratiquement tous issus d'un manuel que doivent se procurer les étudiants. Ce manuel a été rédigé par Daniel Bourbonnais, un enseignant ayant déjà donné le cours *Mathématiques pour les sciences* à plusieurs reprises. En plus des exercices du manuel, l'enseignante fournit aux étudiants, pour certains des thèmes abordés, des exercices supplémentaires. En ce qui concerne les évaluations du cours, celles-ci sont séparées en trois volets : les quiz (des « évaluations individuelles de courte durée » (Plan de cours, hiver 2008, p. 17) portant sur des sujets précis traités en cours et dans les exercices), les activités et les examens. Chacune des étapes comporte deux quiz et un examen de fin d'étape. Pour préparer les étudiants aux examens, un document indiquant la matière couverte par l'évaluation est fourni, ainsi que certains exercices types susceptibles d'être demandés. En ce qui concerne les activités, trois sont données durant la session aux étudiants. Elles revêtent différentes formes et peuvent être réalisées individuellement ou en équipe. Il peut, par exemple, s'agir de lire un chapitre du livre *Le dernier théorème de Fermat* [6] et de répondre à un questionnaire ou bien de faire une chasse au trésor impliquant des coordonnées polaires. Ces activités ne ciblant pas la démonstration, nous ne les avons pas considérées dans cette recherche.

L'étude des tâches proposées aux étudiants et des démonstrations présentées dans les sections théoriques étant une tâche trop longue dans le cadre d'un travail de maîtrise, nous avons décidé de restreindre nos analyses aux tâches, données en devoir ou en contexte d'évaluation, ciblées par l'enseignante dans sa planification. Tout comme c'était le cas pour le cours *NYB*, seules les tâches nécessitant la construction d'une démonstration et donc, la mise en œuvre d'un raisonnement déductif, seront considérées. L'analyse de ces éléments nous fournira une image juste des difficultés inhérentes à l'activité de démonstration et aux éléments de formalisme avec lesquels doivent composer les étudiants suivant ce cours. L'idée de prendre le cours tel que donné par l'enseignante est d'avoir un cliché instantané du cours tel qu'il s'est donné à un moment, dans un contexte précis. Mais nous ne chercherons pas pour autant à retracer ou prendre en compte la vision particulière qu'aurait eue l'enseignante.

Pour analyser les tâches décrites précédemment, les outils d'analyse présentés précédemment seront utilisés.

---

[6] Singh, Simon. 1997. *Le dernier théorème de Fermat*. Paris : Hachette littérature, 304 p.

3.4 Méthodologie d'évaluation de la préparation offerte par le cours *Mathématiques pour les sciences*

Pour évaluer la préparation, eu égard à l'activité de démonstration et au formalisme, qui est offerte à travers les tâches du cours *Mathématiques pour les sciences*, les analyses effectuées dans ce cours devront être comparées à celles réalisées dans le cours *Calcul intégral NYB*. Notre but ultime est de comparer les difficultés ciblées dans ce cours avec les difficultés qui sont présentes dans les tâches du manuel du cours de *Calcul intégral NYB*.

Une fois cette comparaison réalisée, nous serons en mesure d'établir si *Mathématiques pour les sciences* travaille les éléments ciblés de façon analogue, avec des difficultés comparables, à ce qui est demandé en *NYB* et donc, d'évaluer si le cours du cégep Ahuntsic prépare bel et bien les étudiants aux attentes relevés dans le manuel du cours de calcul intégral. Nous pourrons également voir si certains des éléments requis en *NYB* sont omis par le cours du cégep Ahuntsic et si *Mathématiques pour les sciences* cible des éléments que nous n'avions pas relevés lors de notre étude préalable du cours *NYB*.

Ces premières analyses du manuel du cours *NYB* et *Mathématiques pour les sciences* seront par la suite mises en perspective par rapport à ce que la littérature nous dit des mathématiques avancées et de l'apprentissage de la preuve, ceci dans l'optique de voir si le cours *NYB*, appuyé par *Mathématiques pour les sciences*, joue bien son rôle de « charnière ». Plus précisément, nous tenterons d'évaluer si ces cours constituent une bonne transition vers les mathématiques universitaires. Nous conclurons avec ce que nous évaluons comme améliorations possibles ou souhaitables pour le cours *Mathématiques pour les sciences*.

CHAPITRE IV

ANALYSE DES EXIGENCES EN MATIÈRE DE DÉMONSTRATION ET DE FORMALISME SOLLICITÉES DANS UN MANUEL DU COURS *CALCUL INTÉGRAL NYB*

En utilisant notre grille d'analyse, nous avons passé au peigne fin l'ensemble du manuel du cours de mathématiques *NYB*. Les 27 tâches[1] ciblant l'activité de démonstration proposées dans les sections d'exercices ainsi que 10 des démonstrations présentées dans les sections théoriques ont été soumises à notre outil d'analyse. Ces 37 tâches et démonstrations ont été choisies selon les critères présentés précédemment (voir § 3.2.3).

L'objectif principal de cette étude est de cibler les difficultés inhérentes à la démonstration et au formalisme sollicitées dans un manuel type du cours collégial *Calcul intégral NYB*, cours que nous avons identifié comme « charnière » entre les mathématiques collégiales et les cours universitaires d'analyse. Les difficultés relevées serviront de points de repère lors de notre analyse du cours du cégep Ahuntsic. En effet, nous allons chercher à savoir si les difficultés présentes dans le cours *Mathématiques pour les Sciences* correspondent à celles que nous avons pointées dans le manuel du cours de *Calcul intégral*. En plus d'établir une liste des difficultés sollicitées en *NYB*, nous soulèverons dans les sections suivantes les lacunes du manuel de référence du cours quant au traitement du formalisme et de la démonstration. Rappelons que notre but d'analyse du cours *NYB* est double. En plus de révéler ce à quoi doit préparer *Mathématiques pour les sciences*, nous souhaitons mettre en

[1] Parmi les 587 tâches proposées dans le manuel de calcul intégral, 27 font intervenir l'activité de démonstration et ont donc été analysées dans la présente étude. Les autres tâches sont de nature calculatoire et consistent principalement en l'application de méthodes d'intégration.

lumière ce qui manque à *NYB* pour accomplir efficacement son rôle « charnière » avec les mathématiques universitaires.

Puisqu'un nombre important de démonstrations a été considéré et que plusieurs des difficultés identifiées étaient similaires d'une démonstration à l'autre, nous avons choisi de créer un corpus de démonstrations représentant le plus fidèlement possible le manuel, eu égard à l'activité de démonstration et au formalisme. Pour ce faire, nous nous sommes appuyées sur les différents éléments qui ont été présentés dans le *Cadre théorique* (voir chapitre II) de cette recherche. En effet, la complexité de la structure déductive des démonstrations, les éléments de formalisme qu'elles demandent, l'attitude de preuve qu'elles suscitent ainsi que les exigences, telles que définies par Robert (1998), qu'elles requièrent, ont été scrutés. Des similarités ont été observées et des regroupements, sur la base de ces critères, ont pu être établis. Bref, chacun des critères sera illustré, dans les sections subséquentes, par une démonstration directement issue du manuel. Il est important de préciser que chacune des démonstrations présentées dans ce chapitre n'est en fait que le représentant d'une catégorie de démonstrations sollicitant la difficulté que l'on cherche à illustrer et que d'autres démonstrations équivalentes auraient pu être utilisées.

Dans les pages suivantes, nous présentons les démonstrations retenues en précisant les difficultés qui y ont été ciblées.

4.1 Corpus de démonstrations issu du manuel *Calcul intégral*

Le premier élément considéré pour créer notre corpus est l'ensemble des exigences en matière de démonstration, exigences décrites par Robert (1998). La présence ou l'absence de ces exigences ainsi que la forme qu'elles prennent dans chacune des tâches et démonstrations analysées dans le manuel ont été notées. Nous présentons ci-dessous le résumé de ces analyses. Dans l'optique d'illustrer clairement nos propos, des exemples de démonstrations tirés du manuel sont fournis.

4.1.1 Nouvelles exigences en matière de démonstration

4.1.1.1 Pluralité d'arguments impliqués dans la démonstration

La plupart des démonstrations analysées font intervenir un petit nombre d'arguments. Effectivement, bon nombre de démonstrations se limitent à la mise en œuvre d'un seul théorème dont il suffit de vérifier les hypothèses pour justifier son application. La vérification est souvent directe ou nécessite la mise en œuvre d'arguments de nature algébrique ou d'arguments non démontrés qui sont tenus pour acquis. L'énoncé voulant qu'une fonction qui est continue et dérivable sur un intervalle le soit également sur chacun des sous-intervalles ainsi que l'énoncé affirmant que la somme de fonctions continues est continue, sont de bons exemples d'arguments qui sont invoqués comme des faits sans être justifiés. Nous croyons qu'il est important de préciser que des théorèmes dont la démonstration n'est pas fournie dans le manuel sont tout de même invoqués dans la démonstration d'autres théorèmes. Une telle utilisation d'arguments non mathématiquement vérifiés, bien que parfois nécessaire puisque la démonstration de certains théorèmes requiert des notions de niveau universitaire, soulève une question importante : qu'est-ce qui doit être démontré et qu'est-ce qui peut être tenu pour acquis? Cette question se rapporte directement à la nature même de l'activité de démonstration.

Malgré une abondance de démonstrations comportant un faible nombre d'arguments, nous avons relevé, parmi les 37 démonstrations analysées, quatre tâches qui se démarquaient nettement des autres par leur niveau de complexité.

- La démonstration du *Théorème fondamental du calcul* présentée à l'étudiant dans la section théorique 3.4, fait intervenir une grande variété d'arguments dont certains ont été traités dans le cours de *Calcul différentiel NYA* (cours préalable à *NYB*). Le fait que l'étudiant doive juxtaposer de nouvelles notions à des notions traitées dans des cours antérieurs constitue à nos yeux une difficulté non négligeable. La cohabitation de la notion de continuité et de dérivabilité, sujets couverts dans le premier cours de calcul de niveau collégial, avec la notion d'intégrale, nouvellement introduite dans le paysage mathématique de l'étudiant, requiert ce que Robert (1998) appelle une *flexibilité dans l'utilisation des connaissances* (voir § 2.1.1).

- Une tâche présentée aux étudiants dans la section *Problèmes Synthèses* du chapitre 3 a également été retenue. En plus de comporter un nombre important d'arguments, ceux-ci ne sont pas directement accessibles à l'étudiant. En effet, celui-ci doit décortiquer la situation et en comprendre les différentes composantes avant d'être en mesure de sélectionner les théorèmes qui devront être utilisés pour démontrer l'énoncé proposé. Pour y arriver, plusieurs apprenants auront sans doute recours au registre graphique. C'est cette manipulation de la situation qui est requise pour déceler les arguments à mettre en œuvre. Ces éléments nous ont poussées à sélectionner cette tâche. Il est important de mentionner que le niveau de difficulté de cette tâche fait en sorte qu'elle pourrait se retrouver dans un manuel de cours d'analyse universitaire.
- Deux autres tâches, l'exercice récapitulatif 24 et le problème synthèse 25, tous deux issus du chapitre 6, auraient pu être présentées dans cette section puisqu'elles comportent une pluralité importante d'arguments et qu'elles requièrent elles aussi une grande flexibilité dans l'utilisation des connaissances. Cependant, uniquement les deux premières tâches décrites précédemment seront présentées ci-dessous, les deux dernières tâches servant à illustrer d'autres éléments de difficultés qui sont explicités un peu plus loin dans le corpus (voir respectivement § 4.1.1.4 et § 4.1.3).

Théorème 3.10 : Théorème fondamental du calcul (Charron et Parent, 2004, p. 134-135)

L'énoncé du théorème et la démonstration qui suit ont été retranscrits tels quels du manuel.

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$.

1ère *partie*. Si $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, où $x \in I$, alors $A(x)$ est une primitive de $f(x)$, c'est-à-dire $A'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$.

2e *partie*. Si $F(x)$ est une primitive quelconque de $f(x)$, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, où a et $b \in I$.

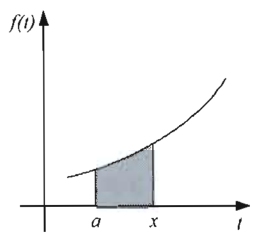
Démonstration du théorème fondamental du calcul

Nous allons démontrer ce théorème dans le cas particulier où f est une fonction non négative sur I.

1ère partie

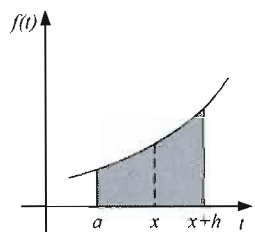
Soit $a \in I$ et $x \in I$, tel que $a < x$.

Ainsi, $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ représente l'aire de la région ci-contre.



Soit $h > 0$, tel que $(x + h) \in I$.

Ainsi, $A(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$ représente l'aire de la région ci-contre.



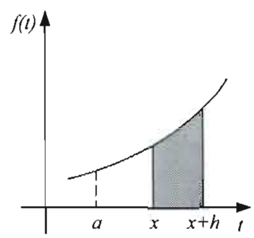
Nous avons donc

$$A(x+h) - A(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)dt \quad \text{(théorème 3.6[2])}$$

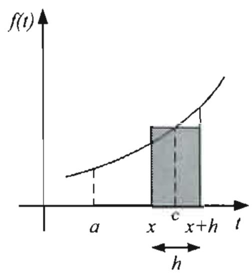
[2] « Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et $c \in \,]a, b[$, alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ » (Charron et Parent, 2004, p. 130)

qui représente l'aire de la région ci-contre.



Par le théorème de la moyenne pour l'intégrale définie[3], nous avons

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)h, \qquad \text{où } c \in [x, x+h].$$



Ainsi,

$$A(x+h) - A(x) \quad = f(c)h$$

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \quad = f(c) \quad \text{(en divisant par } h\text{)}$$

Dans le cas où $h < 0$, nous procédons de façon analogue. Alors,

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \quad = \lim_{h\to 0} f(c) \quad \text{(en prenant la limite de chaque membre de l'équation)}$$

$$A'(x) \quad = \lim_{h\to 0} f(c) \quad \text{(par définition de } A'(x)\text{)}$$

$$A'(x) \quad = \lim_{c\to x} f(c) \quad \text{(car si } h \to 0, \text{ alors } c \to x\text{)}$$

[3] « Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors il existe au moins un nombre $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. » (Charron et Parent, 2004, p. 133)

$$A'(x) \quad = f(x) \text{ (car } f \text{ est continue)}$$

d'où $A(x)$ est une primitive de $f(x)$.

■

2e partie

Soit $a \in I$ et $b \in I$, tel que $a \leq b$.

Puisque $F(x)$ est également une primitive de $f(x)$, alors

$$A(x) \quad = F(x) + C \quad \text{(corollaire 2[4], chapitre 1)}$$

Ainsi

$$A(a) \quad = F(a) + C \quad \text{(en posant } x = a\text{)}$$

$$0 \quad = F(a) + C \quad \left(\text{car } A(a) = \int_a^a f(t)dt = 0\right)$$

donc

$$C = -F(a)$$

Alors

$$A(x) = F(x) - F(a) \quad \big(car\ C = -F(a)\big)$$

ainsi

$$A(b) = F(b) - F(a) \quad (en\,posant\ \ x = b)$$

d'où

[4] « Si f et g sont deux fonctions telles que 1) f et g sont continues sur $[a,b]$; 2) $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in]a,b[$; alors $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = g(x) + C$, où C est une constante réelle. » (Charron et Parent, 2004, p. 25)

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \ \ (car \ A(b) = \int_a^b f(t)dt\ )$$

■

Analyse de la démonstration du théorème fondamental du calcul

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement?* Les principales connaissances à mettre en fonctionnement concernent les notions de continuité, de dérivabilité et de primitive d'une fonction. La représentation graphique de l'intégrale définie est également un élément important qui est exploité dans la démonstration. Plusieurs propriétés des intégrales doivent aussi être connues.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les notions de continuité et de dérivabilité ont été traitées dans le cours *Calcul différentiel NYA*. Par contre, la notion de primitive d'une fonction fait son apparition dans le cours *Calcul intégral NYB*. Un premier contact a été fait au chapitre 2 puisque l'intégral indéfinie a été présentée. Le travail sur cette notion se poursuit au chapitre 3 avec l'introduction de l'intégrale définie.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine de l'analyse.

Deuxième et troisième axes d'analyse : Les tâches prescrites et les activités attendues des étudiants

- *Qu'est-ce qui est attendu de l'étudiant par la présentation de cette démonstration? Des indices facilitant la réalisation/compréhension de la tâche sont-ils fournis?* On attend de l'étudiant qu'il lise et comprenne le théorème et la démonstration qui lui sont présentés. Pour l'aider dans sa tâche, certaines intégrales définies ainsi que le théorème de la moyenne de l'intégrale, un des éléments intervenant dans la démonstration, sont représentés graphiquement.

- *L'énoncé du théorème comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes? Des étapes ont-elles été introduites dans la démonstration?* Le théorème fondamental du calcul comporte deux étapes, les parties 1 et 2, qui sont liées entre elles. Effectivement, la démonstration de la partie 2 fait intervenir à deux reprises la définition donnée à la partie 1, $A(x) = \int_a^x f(t)dt$. En ce qui concerne la démonstration du théorème, outre la prise en compte des cas $h > 0$ et $h < 0$, aucune étape n'a été introduite.
- *S'agit-il d'un type de démonstrations qui était ignoré jusqu'alors?* Il s'agit de la première démonstration ciblant la notion d'intégrale définie.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* En plus du raisonnement déductif, une disjonction de cas doit être prise en considération par l'étudiant. Celui-ci doit comprendre que la démonstration qui est effectuée pour la partie 1 du théorème se limite au cas où $h > 0$ et donc, qu'une démonstration analogue devrait également être réalisée pour le cas $h < 0$. Une phrase dans la démonstration précise d'ailleurs ce point : « dans le cas où $h < 0$, nous procédons de façon analogue » (Charron et Parent, 2004, p. 135). La prise de conscience de l'existence de deux cas distincts est essentielle pour que la démonstration s'applique au cas le plus général possible.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme est très important dans cette tâche et il constitue un élément de difficulté non négligeable. Le premier élément à prendre en considération est l'expression $A(x) = \int_a^x f(t)dt$. Celle-ci comporte trois variables, *a*, *x* et *t*, dont le rôle et le sens doivent être départagés par l'étudiant. La présence de la variable *x* comme borne supérieure de l'intégrale définie plutôt que comme variable d'intégration causera sans doute des difficultés chez plusieurs étudiants. La variable muette *t*, introduite pour l'opération d'intégration, est également un point qui risque de troubler certains apprenants qui ne comprendraient pas son rôle dans l'énoncé du théorème. Le second élément de formalisme qui a retenu notre attention est l'introduction de l'élément $A(x+h)$. Cet élément qui n'est pas présent dans l'énoncé du théorème a été introduit dans la démonstration sans qu'aucune justification où explication ne soit apportée. L'étudiant devra donc poursuivre la lecture de la démonstration pour en comprendre l'utilité. L'étape de la démonstration où l'on prend la limite de chacun des membres

de l'équation $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(c)$ constitue le troisième élément de formalisme ayant retenu notre attention. Pourquoi avoir pris la limite de chacun des membres de l'équation? L'égalité reste-t-elle vraie? Plusieurs étudiants se poseront sans doute ces questions puisqu'aucune justification ou explication ne vient éclairer cette étape de la démonstration. L'introduction de la notion de limite occasionne d'autres difficultés telles que le travail avec les paramètres de la limite. En effet, l'expression $\lim_{h\to 0} f(c)$ deviendra $\lim_{c\to x} f(c)$ et l'étudiant devra avoir une bonne compréhension de la situation pour pouvoir saisir l'équivalence entre les deux expressions. La traduction formelle en termes de limites des notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction est également un élément de complexité qui doit être pris en considération. Ces « définitions formelles », qui ont été vues dans le cours mathématiques *NYA*, doivent être repérées et comprises par l'étudiant. Le dernier élément de formalisme concerne l'inégalité $a \leq b$. Cette inégalité pourrait causer problème à certains étudiants qui ne comprendraient pas pourquoi elle n'affecte pas la généralité de la démonstration proposée.

- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?* L'intégrale définie ayant fait son apparition au chapitre 3, le symbolisme lié à cette notion est somme toute nouveau pour l'apprenant. Celui-ci doit travailler avec ce symbolisme et en comprendre le sens, notamment son interprétation graphique, puisque celle-ci est utilisée pour représenter plusieurs expressions dans la démonstration. En ce qui concerne le vocabulaire utilisé, le terme « primitive », introduit au chapitre précédent, est utilisé à quelques reprises dans la démonstration. Il est par contre défini de façon symbolique dans l'énoncé du théorème, $A'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$, ce qui, à notre avis, facilite la tâche de l'étudiant.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration n'est pas particulièrement compliquée. Elle est pratiquement linéaire. Cependant, nous croyons que le niveau élevé de formalisme qui est requis à plusieurs endroits dans la démonstration compliquera grandement la tâche de l'étudiant, occultant par le fait même la simplicité de la structure déductive.

- *Quels théorèmes sont appliqués?* Le théorème 3.6, le théorème de la moyenne pour l'intégrale définie et le corollaire 2 du chapitre 1.
- *Y a-t-il plusieurs arguments développés à la fois?* Un nombre important d'arguments sont mis en œuvre dans la démonstration de ce théorème. En plus des théorèmes mentionnés précédemment, la définition symbolique de continuité et de dérivabilité d'une fonction sont également utilisés. La propriété de l'intégrale définie disant que $\int_a^a f(t)dt = 0$ intervient aussi dans la démonstration. Des arguments de nature un peu plus intuitive sont également présents. En effet, le maintien de la relation d'égalité lorsqu'on prend la limite de chacun de ses membres ainsi que les façons distinctes de préciser les paramètres d'une limite sont des arguments moins formels, qui sont en fait posés comme vrais sans vraiment être justifiés ou expliqués. Il est aussi important de mentionner que le théorème 3.6 impliqué dans la démonstration est présenté aux étudiants sans être démontré. Seule une représentation graphique leur est fournie pour illustrer le phénomène.
- *Un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation est-il introduit (sans indication)?* L'introduction de l'élément $A(x+h)$ occasionne un changement de point de vue puisque cet élément n'était pas originellement présent dans l'énoncé du théorème. Celui-là est d'ailleurs essentiel à la réalisation de la démonstration de la partie 1 puisqu'elle repose sur la différence $A(x+h) - A(x)$. La traduction de l'énoncé « $A(x)$ est une primitive de $f(x)$ » en une expression symbolique peut également être considérée comme un changement de point de vue introduit dans la démonstration. En effet, c'est la version symbolique de cet énoncé, $A'(x) = f(x)$, qui oriente la démonstration. Cependant, la version symbolique de l'énoncé étant donnée à l'étudiant dans l'énoncé même du théorème, cela nous amène à dire que le changement de point de vue est donné explicitement à l'étudiant. Des changements de registres de représentation sont également décisifs pour comprendre la démonstration puisque, comme nous l'avons déjà mentionné, certaines expressions sont représentés graphiquement pour faciliter la compréhension de l'étudiant.
- *Un argument est-il répété?* Aucune répétition d'arguments n'est effectuée dans la démonstration.

- *Une sélection d'informations est-elle effectuée?* Aucune sélection d'informations n'est à effectuer.
- *Une quantification est-elle à repérer?* L'étudiant doit comprendre que a est quelconque dans I, mais fixé pour le temps de la démonstration, que x est variable et que t est une variable muette qui prend toutes les valeurs entre a et x.

Problème synthèse 21, chapitre 3 (p. 172)

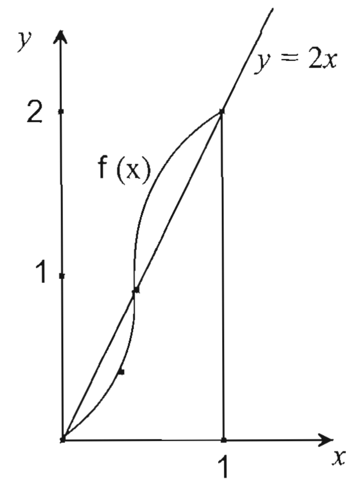
Soit f une fonction continue sur $[0,\ 1]$ et dérivable sur $]0,\ 1[$ telle que $f(0) = 0$ et $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Démontrer qu'il existe au moins une valeur $c \in]0, 1[$ telle que $f'(c) = 2$.

Réponse attendue au problème synthèse 21, chapitre 3

La solution n'apparaissant pas dans le corrigé du manuel, nous avons dû élaborer notre propre solution. Bien que nous ne pouvons être certains qu'il s'agisse de la solution qui était visée par le manuel, nous sommes d'avis qu'elle est tout aussi valable puisqu'elle fait intervenir uniquement des notions traitées dans le recueil. De plus, même si notre solution était plus complexe que celle espérée par les auteurs du manuel, les difficultés inhérentes à l'activité de démonstration et les éléments de formalisme qu'elle comporte serviraient aussi bien l'objectif principal de ce corpus. Rappelons que cet objectif est de mettre en lumière les difficultés liées à la démonstration qui sont contenues dans les mathématiques avancées de niveau collégial et même de niveau universitaire.

On considère f continue sur $[0 ; 1]$ et dérivable sur $]0 ; 1[$, telle que $f(0) = 0$ et son intégrale sur $[0 ; 1]$ vaut 1. On doit montrer que la dérivée de f atteint la valeur 2 au moins une fois dans $]0 ; 1[$.

D'abord, le résultat est intuitivement accessible (mais pas pour autant facile, même intuitivement!). On voit bien que si le taux d'accroissement de f ne prend pas la valeur 2, le graphique de f restera, sur [0 ; 1], ou bien partout au-dessus de celui de $g(x) = 2x$ (la droite de pente 2), ou bien partout en dessous. Mais alors, l'intégrale de f sur [0 ; 1] sera respectivement plus grande, ou plus petite que celle de g, qui vaut bien sûr 1 : problème ! Il faut donc nécessairement que le graphique de f croise la droite $y = 2x$ quelque part entre 0 et 1, disons en un certain point $(x_0\,;2x_0)$. Si nous arrivons à montrer cela, il suffira alors d'appliquer le théorème de Lagrange à f entre (0 ; 0) et $(x_0\,;2x_0)$.



Considérons la fonction $F(x)=\int_0^x g(t)-f(t)\ dt=\int_0^x 2t-f(t)\ dt$. On a alors $F(0) = 0$ et :

$$F(1)=\int_0^1 2t-f(t)\ dt=\int_0^1 2t\ dt-\int_0^1 f(t)\ dt=1-1=0.$$

F est continue sur [0 ; 1] et dérivable sur]0 ; 1[puisque f l'est (intégrer une fonction augmente son ordre de dérivabilité de 1). On peut donc appliquer le Théorème de Rolle à F, ce qui signifie qu'il existe au moins une valeur x_0 dans]0 ; 1[où la dérivée de F s'annule. Mais la dérivée de F, par le théorème fondamental du calcul, c'est $2x - f(x)$. Il existe donc x_0 dans]0 ; 1[tel que $0 = F'(x_0) = 2x_0 - f(x_0)$, c'est-à-dire tel que $f(x_0) = 2x_0$. Appliquant le théorème de Lagrange à f entre 0 et x_0, on obtient que :

$$\exists c\in\left]0\,;x_0\right[\ \text{ tel que } f'(c)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{2x_0-0}{x_0}=2.$$

Comme $0 < c < x_0 < 1$, c est bien la valeur cherchée. ■

Analyse du problème synthèse 21, chapitre 3

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Pour mener cette tâche à terme, l'étudiant doit maîtriser les notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction. De plus, il doit comprendre ce que signifie $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Cette compréhension est nécessaire puisque la démonstration repose en grande partie sur cet élément. Selon nous, le recours aux représentations graphiques de ces différentes notions, bien que non essentiel, est un grand atout. Il permet une meilleure appropriation de la situation en donnant à l'étudiant la possibilité de visualiser les différentes composantes de la tâche (f continue et dérivable sur [0, 1], $f(0) = 0$, l'intégrale de f sur [0, 1] vaut 1 et $f'(c) = 1$), en plus de voir comment elles interagissent entre elles. C'est de cette analyse de la situation que découlera l'utilisation de plusieurs théorèmes centraux en analyse tel que le théorème de Lagrange, le théorème de Rolle et le théorème fondamental du calcul.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Chacune des notions mises à contribution dans cette tâche a été présentée et travaillée dans des sections antérieures du manuel.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Elles se rapportent au domaine de l'analyse.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est fermé puisque sa valeur de vérité est connue. Aucun indice n'est fourni.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Il s'agit d'un type de problèmes qui avait été ignoré jusqu'alors. Le nombre d'arguments à invoquer, leur nature ainsi que la complexité de l'analyse préalable de la situation qui est requise pour pouvoir débuter la construction de la démonstration sont nouveaux pour l'étudiant.

- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement déductif élaboré est à mettre en jeu.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme occupe une place non négligeable dans cette démonstration. Premièrement, en tenant pour acquis que les notations que nous avons utilisées dans notre solution sont effectivement attendues de la part des étudiants, la notation de la fonction F nécessite l'utilisation d'une variable muette t dont le rôle peut échapper à l'étudiant. Deuxièmement, l'utilisation du théorème de Rolle et du théorème de Lagrange dans la même tâche peut, selon nous, causer quelques difficultés liées à l'élément c qui est impliqué dans l'énoncé de chacun de ces théorèmes. En effet, un étudiant pourrait croire que l'élément c dont il est question dans le théorème de Rolle correspond à l'élément c du théorème de Lagrange puisqu'ils sont tous deux représentés par le même symbole. Cette ambiguïté est accentuée davantage par la présence d'un troisième élément c, soit le point de l'intervalle $[0, 1]$ où la dérivée de la fonction f vaut 2. Pour départager ces trois éléments c, l'étudiant doit prendre conscience de ce que chacun représente. Cette prise de conscience lui permettra de réaliser que l'élément c du théorème de Lagrange correspond ici à celui qui est mentionné dans l'énoncé de la tâche. Pour éviter toute confusion, l'étudiant devra utiliser le théorème de Rolle en prenant soin de nommer différemment l'élément c initialement mentionné dans l'énoncé de ce théorème (dans la solution présentée, l'élément c lié au théorème de Rolle a été rebaptisé x_0). La présence d'un même symbole dans trois contextes demande à l'étudiant une gestion efficace et une compréhension impeccable des éléments qui sont représentés par ce symbole dans chacun des cas.
- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?* Chacun des éléments de symbolisme impliqué dans l'énoncé de la tâche a déjà été utilisé par l'étudiant dans des exercices proposés antérieurement dans le manuel.
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?* Outre un quantificateur existentiel écrit en langage naturel, aucun autre élément n'est implicite dans l'énoncé.

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est complexe, il s'agit en fait d'un arbre d'inférences.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est disponible. Aucune indication n'est fournie à l'étudiant pour l'aider dans la résolution de la tâche. Il doit analyser la situation qui lui est présentée et puiser dans son bagage de connaissances pour déceler les éléments susceptibles d'intervenir dans la démonstration.
- *Quels théorèmes appliquer?* Le théorème de Rolle, le théorème de Lagrange et le théorème fondamental du calcul sont à appliquer.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Un nombre considérable d'arguments est à développer dans cette tâche. En plus des trois théorèmes mentionnés précédemment, l'étudiant doit avoir recours à l'affirmation qu'intégrer une fonction augmente son ordre de dérivabilité de 1, à certaines propriétés des intégrales définies en plus d'utiliser des arguments de nature algébrique. La nature des arguments à employer doit également être soulevée. Alors que la majorité des démonstrations analysées dans le manuel mettent en œuvre un théorème auquel s'adjoint quelques arguments simples et souvent calculatoires, la présente tâche requiert l'intervention de trois théorèmes centraux en analyse dont la mise en jeu et la combinaison surpasse grandement la réalisation de manipulations algébriques. La pluralité d'arguments à développer et leurs natures n'est pas le seul point à prendre en considération. En effet, nous croyons que le véritable défi de cette tâche consiste à trouver les arguments qui doivent être mis à contribution. L'étudiant doit analyser la situation en profondeur pour dévoiler les théorèmes qui devront être utilisés pour démontrer l'énoncé. Ces théorèmes ne sont pas facilement accessibles et requièrent une analyse préalable importante de la situation. Parmi tous les problèmes étudiés, un seul autre requiert de l'étudiant qu'il réalise une telle analyse. Celui-ci est

présenté un peu plus loin dans ce corpus (voir section *Complexité de la structure déductive*).

- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de point de vue doit être effectué par l'étudiant. Celui-ci doit momentanément délaisser la fonction f qui lui est présentée dans l'énoncé de la tâche pour porter son attention sur la fonction F qui a été construite à l'aide de la fonction f et de la fonction g, qui doit être introduite par l'étudiant. La construction de F repose sur la compréhension de la situation, plus précisément sur le fait que le graphique de f doit inévitablement croiser le graphique de g sur l'intervalle $[0, 1]$ pour que l'intégrale de f sur cet intervalle vaille 1. Un recours aux représentations graphiques est également pertinent dans cette démonstration. Tel que nous l'avons mentionné antérieurement, cette tâche n'est pas facilement accessible intuitivement et ce, d'autant plus si elle est étudiée algébriquement. Les expressions impliquées dans l'énoncé de la tâche sont simples, mais leurs interactions restent selon nous complexes à percevoir. C'est pourquoi nous avançons que, bien qu'elles ne soient pas nécessaires, l'utilisation de représentations graphiques pour représenter les éléments mentionnés dans l'énoncé de la tâche peut constituer une porte d'entrée dans la situation pour l'étudiant. Elles peuvent permettre de prendre contrôle de la situation en dévoilant comment les différents éléments interagissent. Une telle prise de conscience dévoile des pistes à exploiter lors de la construction de la démonstration et s'avère donc être un élément déclencheur efficace.
- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* Les fonctions g et F doivent être introduites par l'étudiant. De plus, la notation de la fonction F, telle que nous l'avons définie, nécessite l'introduction d'une variable muette, t.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* Les quantificateurs existentiels compris dans l'énoncé du théorème de Rolle et du théorème de Lagrange doivent être pris en considération par l'étudiant.

- *Y a-t-il un nouveau vocabulaire ou symbolisme à gérer?* La présence dans une même tâche de trois éléments distincts représentés par un unique et même symbole, *c,* est une première pour l'étudiant qui devra les départager et les gérer adéquatement.

Pour analyser la démonstration du théorème fondamental du calcul et la démonstration attendue au problème synthèse 21 du chapitre 3, deux grilles différentes ont été utilisées. En effet, la grille d'analyse qui est utilisée pour étudier les démonstrations présentées aux étudiants dans les sections théoriques du manuel comporte uniquement deux axes, tandis que celle utilisée pour les démonstrations qui doivent être élaborées par l'étudiant en comporte trois. Les fondements de cette différence ayant été traités au chapitre *Méthodologie* (voir § 3.2.5), nous n'y consacrerons pas davantage d'explication. Étant donné qu'il s'agissait des premières analyses à l'aide de chacun des deux modèles de grilles, nous avons présenté, pour chacune des deux analyses, la grille complète sans qu'aucune modification ne lui soit apportée. Cependant, pour les analyses subséquentes, les questions de notre grille ne s'appliquant pas à la tâche sous analyse seront retirées. L'objectif de ce « tri » est de mettre en lumière les éléments caractéristiques de chacune des tâches en évitant de surcharger l'analyse avec des questions dont les réponses n'amènent aucun nouveau regard sur la démonstration étudiée.

4.1.1.2 Répétition d'arguments

Parmi toutes les démonstrations analysées dans le manuel du cours de *Calcul intégral NYB*, trois[5] ont nécessité la répétition d'un argument. L'analyse d'une de ces tâches est présentée ci-dessous.

Problème synthèse 19, chapitre 1 (p. 48)

Soit f une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

---

[5] En plus du Problème synthèse 19 présenté dans cette section, la démonstration du théorème 2.2 (Charron et Parent, 2004, p. 61) et la démonstration attendue au Problème synthèse 22 du chapitre 5 (*idem*, p. 278) ont requis une répétition d'arguments.

a) Démontrer que si f' a k zéros distincts, alors f a au plus $k+1$ zéros distincts.

b) Si f'' est définie et a k zéros distincts, déterminer le nombre maximal de zéros que f possède.

c) Si $f^{(n)}$ est définie et a k zéros distincts, déterminer le nombre maximal de zéros que f possède.

Réponse attendue au problème synthèse 19, chapitre 1

La démarche de la sous-question a) est inspirée du solutionnaire du manuel *Calcul intégral Mathématique 203, 2e édition* (Charron et Parent, 1997, p. 337). Certains détails, tels que la vérification des hypothèses du théorème de Rolle, y ont cependant été ajoutés pour affiner la démonstration fournie par le manuel. En ce qui concerne les solutions des sous-questions b) et c), elles ont été rédigées par l'auteur de cette recherche. L'utilisation que nous avons faite de l'énoncé démontré en a) nous porte à croire que les solutions que nous avons fournies sont bel et bien celles attendues.

a) Démontrons, par l'absurde, que f a au plus $k+1$ zéros distincts. Supposons que f a $k+2$ zéros distincts : $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{k+2}$.

En appliquant le théorème de Rolle à f sur chaque intervalle $[z_1, z_2], [z_2, z_3], \ldots, [z_{k+1}, z_{k+2}]$ (il est possible d'appliquer le théorème de Rolle, car f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc sur chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, et $f(z_1) = f(z_2) = \ldots = f(z_{k+2}) = 0$), alors

$$\exists c_1 \in]z_1, z_2[\text{ tel que } f'(c_1) = 0$$
$$\exists c_2 \in]z_2, z_3[\text{ tel que } f'(c_2) = 0$$
$$\vdots$$
$$\exists c_{k+1} \in]z_{k+1}, z_{k+2}[\text{ tel que } f'(c_{k+1}) = 0;$$

donc f' possède $k+1$ zéros distincts, ce qui contredit les hypothèses.

D'où f a au plus $k+1$ zéros distincts.

■

b) Si f' est continue et différentiable sur $\mathbb{R}$ et que f'' a k zéros distincts, alors il est possible d'appliquer l'énoncé démontré en a) à la fonction f'' et on obtient ainsi que f' a au plus $(k+1)$ zéros distincts. En réappliquant l'énoncé a) à la fonction f', on obtient que f a au plus $((k+1)+1)=(k+2)$ zéros distincts. Pour appliquer l'énoncé a) à f', f doit être continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Un raisonnement identique à celui utiliser en b) est ici mis en œuvre. En appliquant l'énoncé démontré en a) à $f^{(n)}$, puis à $f^{(n-1)}$, puis $f^{(n-2)}$, ... et finalement à f', on obtient que f a un maximum de $(k+n)$ zéros distincts.

Analyse du problème synthèse 19, chapitre 1

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Les connaissances à mettre en fonctionnement sont les notions de continuité et de dérivabilité. L'étudiant doit comprendre les implications de l'énoncé « [...] f' a k zéros distincts [...] ». Une interprétation graphique de cet énoncé est aussi utile pour comprendre pleinement la tâche. L'étudiant dont on désire une compréhension maximale devrait faire le lien entre un zéro de la fonction f' et le fait que la fonction f possède une tangente horizontale en ce même point. Cet élément n'est par contre pas essentiel pour résoudre la tâche, puisque l'étudiant pourrait se contenter d'appliquer machinalement le théorème de Rolle sans en saisir pleinement les dessous. Une connaissance de la méthode de preuve par l'absurde est également requise.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* La continuité et la dérivabilité d'une fonction sont des notions qui ont été introduites en *NYA*. Leur interprétation graphique a également été abordée dans ce cours. Le théorème de Rolle a été introduit dans la section théorique 1.2 du manuel. Cependant, puisque plusieurs tâches proposées aux étudiants dans des sections d'exercices précédant la section *Problèmes Synthèses* mettaient en jeu le théorème de Rolle, nous ne considérons plus cette notion comme nouvelle pour l'apprenant. En ce qui concerne la méthode de preuve utilisée, celle-ci est connue des étudiants puisque la démonstration du

théorème de l'unicité d'un zéro (voir § 4.1.1.3), qui est présentée dans une section théorique du chapitre 1 précédant la section *Problèmes synthèses*, la met en œuvre.

- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine de l'analyse.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte trois sous-questions qui sont liées. En effet, la question b) utilise l'énoncé démontré en a) tandis que la sous-question c) est la généralisation des questions a) et b).
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* La valeur de vérité de l'énoncé à démontrer à la sous-question a) est connue. Aucun indice n'est fourni à l'étudiant. Pour ce qui est des sous-questions b) et c), nous croyons que, bien que cela ne soit pas mentionné explicitement dans l'énoncé, l'étudiant pensera à utiliser l'énoncé a) pour réaliser les tâches demandées.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Ce type de problème est nouveau pour l'étudiant. Bien que cette tâche comporte certaines ressemblances avec le problème synthèse 18[6] qui la précède dans le manuel (il s'agit de deux démonstrations du type « démontrer que si... alors il y a au plus... »), les connaissances qui y sont mises en jeu sont très différentes. Il est important de mentionner que le problème synthèse 18 est traité plus en détail à la section *Nécessité d'une écriture quantifiée* (voir § 4.1.1.5). Le lecteur peut donc s'y référer.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Pour réaliser la démonstration en a) un raisonnement par l'absurde doit être mis en œuvre. En ce qui concerne les sous-questions b) et c), un raisonnement par analogies doit être utilisé. En effet, l'étudiant doit voir qu'il existe des similitudes entre ces sous-questions et la sous-question a).

---

[6] « Nous appelons a une valeur fixe d'une fonction f, si $f(a) = a$. Démontrer que si f est dérivable et que $f'(c) \neq 1\ \forall c \in \mathbb{R}$, alors la fonction f possède au plus une valeur fixe. » (Charron et Parent, 2004, p. 48)

Les arguments qui ont été mis en œuvre pour construire la démonstration de l'énoncé a) peuvent, et doivent, être réutilisés pour réaliser les tâches b) et c).

- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Les notations fonctionnelle et ensembliste sont impliquées dans l'énoncé et la démonstration. Les éléments de complexité liés au formalisme utilisé dans le théorème de Rolle doivent être pris en considération. Ces éléments ont d'ailleurs été explicités dans l'analyse de la démonstration du théorème de Rolle (voir § 4.1.4.1). Il est également important de prendre conscience de la complexité de l'écriture liée à la notation des $k+2$ zéros de la fonction f présents dans la démonstration effectuée en a). Une fois ces zéros déterminés et nommés, $k+1$ intervalles doivent être créés. Par la suite, le théorème de Rolle sera appliqué sur chacun de ces intervalles obtenant ainsi $k+1$ valeurs, soit une valeur par intervalle, notées c_i, pour lesquelles la dérivée de la fonction f sera nulle. Ces différentes valeurs c_i devront être nommées adéquatement ce qui représente une difficulté. La gestion de ces $k+2$ zéros et de ces $k+1$ valeurs c_i demande une bonne gestion des indices utilisés dans les notations, ce qui est complexe pour plusieurs étudiants de niveau collégial.
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier ou de quantificateurs cachés?* Un quantificateur écrit en langage naturel est à prendre en considération dans l'énoncé de la tâche : « [...] f a **au plus** [c'est nous qui soulignons] $k+1$ zéros distincts ». La compréhension de cette quantification est primordiale puisque le raisonnement par l'absurde utilisé dans la démonstration repose justement sur la négation de cette quantification.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple et linéaire. La démonstration repose en fait sur l'application du théorème de Rolle. Il est selon nous important de mentionner que le schéma déductif ne semble pas tout à fait adéquat pour représenter une démonstration faisant intervenir un raisonnement par l'absurde. En effet, le pas déductif mettant au jour la contradiction est difficilement représentable dans un schéma déductif. De plus, un en-tête doit être ajouté au schéma de manière à poser clairement la négation du résultat que l'on cherche à

démontrer. Puisque toutes les déductions découlent de cette négation, il serait très difficile de comprendre un schéma déductif n'ayant pas explicité cet élément. Ce type de modifications apporté au schéma déductif d'un raisonnement par l'absurde est d'ailleurs explicité dans l'analyse de la démonstration du théorème de l'unicité d'un zéro (voïr § 4.1.1.3).

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Aucune indication ne vient encadrer la réalisation de la démonstration à la sous-question a). Nous croyons qu'un étudiant ayant fait et réussi le problème synthèse 18 aura sans doute un indice sur la voie à suivre pour réaliser la démonstration demandée en a). En effet, le recours au raisonnement par l'absurde sera sans doute plus facile à voir pour un étudiant qui y a déjà été confronté dans la tâche précédente. Malgré les indices sur la méthode à utiliser pour réaliser la démonstration, nous croyons que le recours au théorème de Rolle doit entièrement être découvert par l'étudiant, ce qui demande une bonne analyse et compréhension de la situation. Devant ce constat, nous avons décidé de classer les mises en fonctionnement des connaissances requises dans cette tâche au niveau disponible.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité très restreinte d'arguments doit être développée pour réaliser la démonstration en a) : la continuité et la dérivabilité de f sur un sous-intervalle de $\mathbb{R}$ ainsi que le théorème de Rolle. Pour les sous-questions b) et c), l'énoncé démontré en a) doit être utilisé pour compléter la tâche.
- *Y a-t-il à répéter un argument?* Une répétition d'argument est nécessaire. En effet, l'énoncé démontré en a) et le raisonnement mis en œuvre pour réaliser cette démonstration doivent être réutilisés dans les sous-questions b) et c). Dans le cas de la sous-question b), l'énoncé a) doit être appliqué une première fois à la fonction f'' de manière à déterminer le nombre maximal de zéros distincts de la fonction f', puis une seconde fois à la fonction f' pour finalement trouver le nombre maximal de zéros distincts de la fonction f. Dans le cas de la sous-question c), une répétition est

encore nécessaire puisque l'énoncé a) doit être appliqué successivement aux fonctions $f^{(n)}$, $f^{(n-1)}$, $f^{(n-2)}$, $f^{(n-3)}$, …, f' pour trouver le nombre maximal de zéros distincts de la fonction f.

- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* L'utilisation d'un raisonnement par l'absurde dans la démonstration de l'énoncé a) nécessite un changement de point de vue puisque la démonstration porte sur la négation de l'énoncé plutôt que sur l'énoncé lui-même. Les sous-questions b) et c) requièrent également un changement de point de vue. Il consiste à faire de f' la fonction à laquelle on applique le théorème de Rolle. L'étudiant ne doit pas voir les fonctions f et f' de l'énoncé a) comme des objets fixes. Il doit comprendre que l'énoncé a) établit **un lien** entre le nombre maximal de zéros distincts d'une fonction et le nombre de zéros distincts de sa dérivée. Un étudiant ayant une vision plutôt statique de l'énoncé a) aurait de la difficulté à utiliser l'énoncé avec d'autres fonctions que celles indiquées explicitement, soit f et f'.
- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* Pour réaliser la démonstration de l'énoncé a), $k+2$ zéros distincts, nommés z_1 à z_{k+2}, doivent être introduits par l'étudiant.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* En plus du quantificateur écrit en langage naturel dans l'énoncé de la tâche, les quantifications liées à l'utilisation du théorème de Rolle doivent être prises en considération par l'étudiant.
- *Y a-t-il un nouveau vocabulaire ou symbolisme à gérer?* Un symbolisme doit être géré par l'étudiant. Tel que nous l'avons mentionné précédemment, la gestion des $k+2$ zéros, des $k+1$ intervalles créés à partir de ces zéros, ainsi que des $k+1$ valeurs c_i associées à ces intervalles, demande beaucoup de la part de l'étudiant, qui n'est souvent pas habitué à gérer un nombre aussi important de symboles et d'indices.

4.1.1.3 Sélection d'informations

La sélection d'informations telle que décrite par Robert (1998) consiste à disséquer un théorème avant de l'utiliser pour ne retenir que ce qui est utile pour la construction de la démonstration en cours. Puisque les théorèmes couverts dans le cours *NYB* sont, pour la majorité, composés de quelques hypothèses menant à une seule conclusion, ceux-ci peuvent difficilement être décomposés et utilisés en « pièces détachées » dans une démonstration. C'est selon nous ce qui explique la quasi-absence de cette difficulté dans les démonstrations étudiées. Seulement trois des démonstrations analysées requièrent une sélection d'informations.

- La démonstration du théorème *Unicité d'un zéro* présentée dans la section théorique 1.2 doit être faite en deux parties, soit la démonstration de l'existence du zéro et, ensuite, la démonstration que celui-ci est unique. À ce titre, l'information (hypothèses, théorèmes à appliquer) pertinente à chacune des parties doit être sélectionnée pour mener à bien les deux démonstrations. La démonstration du théorème *Unicité d'un zéro* est d'ailleurs présentée un peu plus bas.
- La seconde démonstration pouvant nécessité une sélection d'informations est celle requise à l'exercice récapitulatif 24 du chapitre 6. Cette démonstration correspond en fait à une portion de la démonstration d'un théorème qui a été présentée antérieurement dans le manuel. Un étudiant ayant remarqué cette situation pourra sélectionner les parties de la démonstration qui s'appliquent au contexte de l'exercice récapitulatif 24 et ainsi produire la démonstration demandée. L'analyse complète de cette démonstration n'est pas fournie dans la présente section, mais nous invitons le lecteur à aller la consulter à la section *Changement de point de vue* (voir § 4.1.1.4).
- La démonstration requise au problème synthèse 25 du chapitre 6 nécessite elle aussi une sélection d'informations. En effet, on ne doit y faire intervenir qu'une portion d'un théorème. C'est à l'étudiant de disséquer celui-ci adéquatement pour ne mentionner que ce qui a un impact dans la tâche. L'analyse complète de ce problème est présentée un peu plus loin (voir § 4.1.3).

Il est à noter que nous n'avons pas retenu comme sélection d'informations l'utilisation d'une des deux parties du *théorème fondamental du calcul*. Selon nous, le fait que l'énoncé du théorème soit présenté en deux parties distinctes indique implicitement à l'étudiant que chacune des ces parties pourra être utilisée individuellement. Cette indication évite à l'étudiant d'avoir recours à une sélection d'informations.

Théorème 1.5 : Unicité d'un zéro

Le théorème et la démonstration qui suit sont retranscrits tels quels du manuel (p. 21).

Si f est une fonction telle que

1) f est continue sur $[a, b]$;
2) f est dérivable sur $]a, b[$;
3) $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires;
4) $f'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$,

alors il existe un et un seul nombre $z \in]a, b[$ tel que $f(z) = 0$.

Démonstration du théorème unicité d'un zéro

Le théorème se démontre en deux parties.

a) Démontrons d'abord l'existence d'au moins un zéro.
Puisque 1) f est continue sur $[a, b]$ et 2) $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe au moins un $z \in]a, b[$ tel que $f(z) = 0$ (corollaire, page 17).
b) Démontrons, par l'absurde, l'unicité de ce zéro.
Supposons qu'il existe dans $[a, b]$ un second zéro différent de z.
Soit $z_1 \in]a, b[$ tel que $z < z_1$ et $f(z_1) = 0$.
Appliquons le théorème de Rolle à f sur $[z, z_1]$.
1) f est continue sur $[z, z_1]$, car f est continue sur $[a, b]$;
2) f est dérivable sur $]z, z_1[$, car f est dérivable sur $]a, b[$;
3) $f(z) = 0$ et $f(z_1) = 0$, d'où $f(z) = f(z_1)$.
Alors $\exists c \in]z, z_1[$ tel que $f'(c) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse 4 du théorème, donc $f(z_1) \neq 0$.
D'où il existe un et un seul nombre $z \in]a, b[$ tel que $f(z) = 0$.

■

Analyse de la démonstration du théorème unicité d'un zéro

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Les connaissances à mettre en fonctionnement sont les notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction f. La connaissance de l'interprétation graphique de ces notions est également un atout puisqu'elle sera utile pour comprendre pleinement les énoncés qui interviennent dans la démonstration. Le lien qui unit dérivée nulle et tangente horizontale est également un élément qui peut grandement faciliter la compréhension de cette démonstration. De plus, une connaissance de la méthode de preuve par l'absurde est requise.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les notions de continuité et de dérivabilité ont déjà été traitées dans le cours *NYA*. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires[7] et le théorème de Rolle ont été introduits dans des pages précédentes du manuel. La méthode de preuve par l'absurde est, quant à elle, déjà connue des étudiants. De plus, une capsule historique portant sur la preuve par l'absurde est présentée tout juste avant le théorème unicité d'un zéro.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine de l'analyse.

Deuxième et troisième axe d'analyse : Les tâches prescrites et les activités attendues des étudiants

- *Qu'est-ce qui est attendu de l'étudiant par la présentation de cette démonstration? Des indices facilitant la réalisation/compréhension de la tâche sont-ils fournis?* On attend de l'étudiant qu'il lise et comprenne le théorème et sa démonstration. Aucun indice n'est fourni.

---

[7] « Si f est une fonction telle que :

1) f est continue sur $[a, b]$;
2) $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires,

alors il existe au moins un nombre $c \in\,]a, b[$ tel que $f(c) = 0$. » (Charron et Parent, 2004, p. 17)

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes? Des étapes ont-elles été introduites dans la démonstration?* L'énoncé comporte une seule étape. En ce qui concerne la démonstration, deux étapes sont introduites : on démontre l'existence d'un zéro pour ensuite démontrer que celui-ci est unique.
- *S'agit-il d'un type de démonstrations qui était ignoré jusqu'alors?* Le théorème est un problème d'existence, problème qui ne fait pas partie du paysage mathématique des élèves du secondaire. Il est également question d'unicité dans ce théorème, ce qui complexifie davantage la tâche pour les étudiants.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu*? Un raisonnement par l'absurde est en jeu.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* La présence d'intervalles fermé, $[a, b]$, et ouvert, $]a, b[$, dans l'énoncé du théorème constitue un élément de complexité non négligeable. Puisque cet élément est traité en profondeur à la section *Éléments de formalisme* (§ 4.1.4.1), nous y référons le lecteur. La démonstration par l'absurde de l'unicité du zéro renferme certains éléments de complexité que nous voulons traiter. Elle nécessite l'introduction d'un objet, soit un second zéro, nommé z_1, qui diffère de z. De plus, il est établi sans explication que $z < z_1$ ce qui constitue, à nos yeux, une difficulté. Effectivement, certains étudiants pourraient croire que cette inégalité restreint les cas pour lesquels la démonstration présentée est valable. L'affirmation $z < z_1$ est un élément de complexité syntaxique qui demandera à l'étudiant une certaine réflexion. Celui-ci doit comprendre que la généralité de la démonstration n'est pas limitée par un tel énoncé puisque les deux zéros présents sur l'intervalle $]a, b[$ peuvent toujours être nommés de façon à ce que l'inégalité $z < z_1$ soit respectée.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est relativement simple et linéaire. Très peu de pas déductifs sont requis. Par contre, la présence d'un raisonnement par l'absurde complexifie la réalisation d'un schéma déductif représentant la démonstration. En effet, tel que mentionné antérieurement, le pas déductif dévoilant la contradiction est difficilement représentable dans le schéma. De plus, la négation du résultat que l'on cherche à démontrer doit être indiquée en en-tête du schéma. Cet

ajout est essentiel pour être en mesure de comprendre les déductions qui découlent de cette nouvelle hypothèse. Dans le but d'illustrer nos propos, nous présentons à la figure 4.1 le schéma déductif de la démonstration qui est présentée dans le manuel. Pour rester fidèle à ce qui est présenté dans le recueil, seules les règles d'inférence qui sont mentionnées par les auteurs ont été intégrées à la représentation.

Un schéma déductif possible pour la démonstration de l'unicité de ce zéro, telle qu'elle est présentée dans le manuel

Supposons qu'il existe dans $[a, b]$ un second zéro différent de z. Soit $z_1 \in]a, b[$ tel que $z < z_1$ et $f(z_1) = 0$.

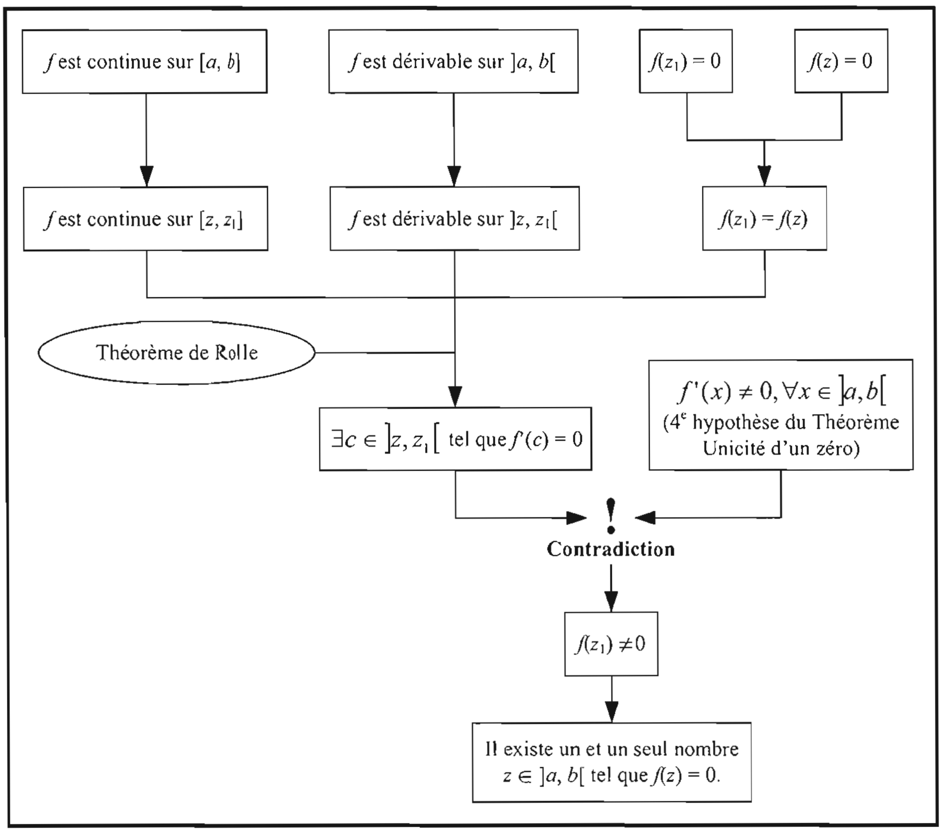


Figure 4.1 Schéma déductif possible pour le théorème d'unicité d'un zéro

Le schéma déductif illustré précédemment représente la démonstration qui figure dans le manuel. On remarque que plusieurs déductions sont présentées sans la moindre explication. De plus, certains pas déductifs sont en fait le « résumé » de petites chaînes déductives. Ceci est par exemple le cas du pas déductif présenté à la figure 4.2 :

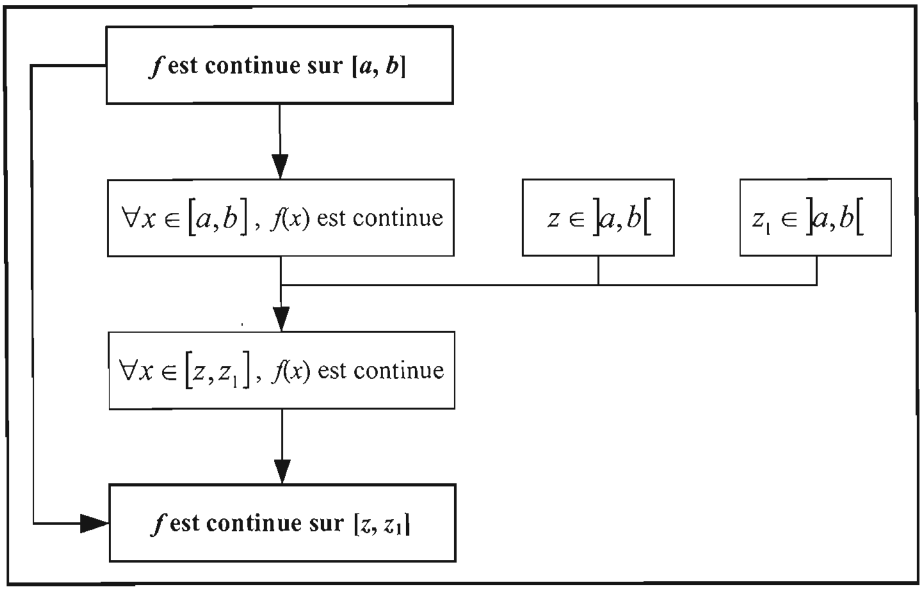


Figure 4.2 Chaîne déductive masquée

Une telle synthèse d'une chaîne déductive masque une partie du raisonnement à l'étudiant, altérant peut-être ainsi la compréhension globale qu'il aura de la démonstration. Devant ce phénomène, une question qui nous avait préoccupés dans nos analyses précédentes refait surface (voir § 4.1.1.1 : *Pluralité d'arguments impliqués dans la démonstration*) : quels éléments doivent être démontrés et lesquels peuvent être tenus pour acquis?

- *Y a-t-il plusieurs arguments développés à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est développée : corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, propriété de continuité et de dérivabilité d'une fonction sur un intervalle ainsi que le théorème de Rolle. Notons que le corollaire du théorème de la valeur intermédiaire doit être compris par les étudiants, mais qu'aucune démonstration de cet énoncé ne leur est fournie dans le manuel. Une illustration de la véracité du corollaire pour la fonction polynomiale $f(x) = 13 - x - x^5 - 5x^2 - 4x$ leur est par contre présentée à la page 17, qui est celle où le corollaire est énoncé la première fois.

- *Un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation est-il introduit (sans indication)?* La méthode de preuve par l'absurde requiert un changement de point de vue puisque la démonstration s'opère désormais sur la négation de l'énoncé et non sur l'énoncé lui-même. Un passage au registre graphique peut s'avérer utile pour que l'étudiant comprenne pleinement le théorème à démontrer ainsi que les éléments qui entrent en jeu dans la preuve.
- *Une sélection d'informations est-elle effectuée?* Une sélection d'informations est effectuée au niveau de l'énoncé de manière à partager la démonstration en deux étapes : la démonstration de l'existence d'un zéro et la démonstration de l'unicité de ce zéro.
- *Une quantification est-elle à repérer?* Des quantificateurs existentiels écrits en langage naturel sont à prendre en considération. De plus, l'énoncé du théorème comporte un quantificateur existentiel « particulier » puisque le théorème précise qu'il existe « un et un seul nombre z » tandis qu'ordinairement, le quantificateur existentiel signifie qu'il existe **au moins un élément** remplissant une condition donnée. Le caractère d'unicité qui est adjoint au quantificateur existentiel doit être pris en considération puisque la démonstration b) y est directement rattachée, celle-ci reposant en effet entièrement sur la négation de ce quantificateur (preuve par l'absurde). Un quantificateur universel est aussi présent sous forme symbolique dans l'énoncé. Celui-ci doit être bien interprété par les étudiants, puisque la contradiction obtenue dans la preuve par l'absurde repose sur ce quantificateur universel.

4.1.1.4 Changement de point de vue introduit sans indication

Cette exigence en matière de démonstration, qui fait son apparition dans les mathématiques avancées, est sans aucun doute celle qui est la plus sollicitée dans les démonstrations analysées. En effet, près des deux tiers des démonstrations étudiées nécessitent un changement de point de vue. Lors de l'analyse des démonstrations du manuel rédigé par Charron et Parent, nous avons décidé de considérer comme un changement de point de vue toutes modifications, réécritures ou ajouts qui étaient faits aux données fournies explicitement dans l'énoncé. Après avoir analysé l'ensemble des 37 démonstrations du manuel, nous avons remarqué que certaines caractéristiques étaient communes à plusieurs changements de point de vue, ce qui nous a permis de créer trois sous-catégories :

1. *Changement de point de vue réalisé par l'introduction d'un nouvel objet.* Cette forme de changement de point de vue est, selon nous, la plus complexe puisqu'elle nécessite une compréhension approfondie de la situation. L'étudiant ne peut débuter l'élaboration de la démonstration directement avec les données qui lui sont fournies. Il doit plutôt les étudier et les combiner pour tenter d'en déduire un nouvel élément lui permettant d'accomplir la démonstration demandée. Dans la majorité des cas, l'élaboration d'un tel objet demande de l'étudiant qu'il ait déjà en tête un canevas de la démonstration à effectuer. Des changements de point de vue de cette sous-catégorie ont été identifiés dans 8[8] des 37 démonstrations analysées.

2. *Changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche.* Cette modification peut aussi bien consister en la réalisation de manipulations algébriques sur une expression donnée pour l'exprimer sous une forme différente, mais équivalente (il peut par exemple s'agir de transformer une fonction rationnelle en somme de fractions partielles pour permettre l'opération d'intégration), qu'en la mathématisation d'un énoncé donné en langage naturel. Une telle mathématisation d'énoncé nécessite l'utilisation d'un formalisme mathématique, ce qui constitue une difficulté supplémentaire pour l'étudiant. Des changements de point

[8] En plus de la démonstration du théorème de Lagrange présentée dans cette section, les démonstrations suivantes ont requis un changement de point de vue de la première sous-catégorie : corollaire de Lagrange (Charron et Parent, 2004, p. 25), exercice 6 de la section 1.2 (*idem*, p. 26), théorème fondamental du calcul (*idem*, p. 134), exercice 6 de la section 3.1 (*idem*, p. 118), exercice récapitulatif 2 du chapitre 3 (*idem*, p. 166), théorème 5.1 (*idem*, p. 251) et problème synthèse 25 du chapitre 6 (*idem*, p. 366).

de vue de cette sous-catégorie ont été identifiés dans 13[9] des 37 démonstrations analysées.

3. *Changement de point de vue nécessité par la méthode de preuve utilisée.* Pour cette forme de changement de point de vue, c'est le choix de la méthode de preuve qui impose une nouvelle manière d'approcher la démonstration à élaborer. Des changements de point de vue de cette sous-catégorie ont été identifiés dans 5[10] des 37 démonstrations analysées.

C'est l'analyse des 37 démonstrations sélectionnées dans le manuel qui nous a permis de créer les trois sous-catégories présentées ci-dessus. La construction de ces sous-catégories a permis de raffiner l'exigence « changement de point de vue » décrite par Robert (1998) ce qui bonifiera sans doute notre analyse du cours *Mathématiques pour les sciences.* Chacune de ces formes de changement de point de vue a été observée à plusieurs reprises et un exemple de chacune est présenté ci-dessous.

Changement de point de vue réalisé par l'introduction d'un nouvel objet.

Théorème 1.6 : Théorème de Lagrange

Le théorème, la démonstration ainsi que la représentation graphique qu'elle comporte sont retranscrits tels quels du manuel (p. 22-23).

---

[9] En plus de la démonstration de l'exercice 5 de la section 5.4 présentée dans cette section, les démonstrations suivantes ont requis un changement de point de vue de la deuxième sous-catégorie : problème synthèse 19 du chapitre 1 (*idem*, p. 48), théorème 2.2 (*idem*, p. 61), exercice récapitulatif 4 du chapitre 2 (*idem*, p. 101), théorème fondamental du calcul (*idem*, p. 134), problème synthèse 19 du chapitre 3, (*idem*, p. 171), exercice 7 de la section 4.1(*idem*, p. 184), exercice 9 de la section 4.3 (*idem*, p. 209), problème synthèse 22 du chapitre 5 (*idem*, p. 278), théorème 6.9 (*idem*, p. 301), exercice 4 de la section 6.2 (*idem*, p. 309), exercice récapitulatif 24 du chapitre 6 (*idem*, p. 363) et problème synthèse 3 du chapitre 6 (*idem*, p. 363).

[10] Outre la démonstration de l'exercice récapitulatif 24 du chapitre 6 présentée dans cette section, les démonstrations suivantes ont nécessité un changement de point de vue de la troisième sous-catégorie : théorème de Rolle (*idem*, p. 19), théorème d'unicité d'un zéro (*idem*, p. 21) et les problèmes synthèse 18 et 19 du chapitre 1 (*idem*, p. 48).

Si f est une fonction telle que

1) f est continue sur $[a, b]$;
2) f est dérivable sur $]a, b[$;

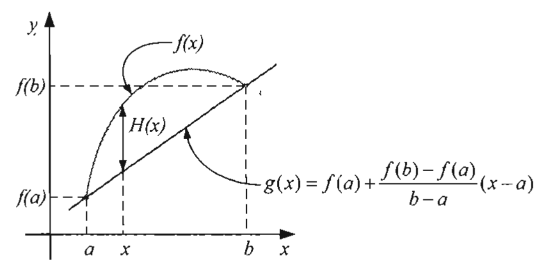
alors il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Démonstration du théorème de Lagrange

Définissons une nouvelle fonction $H(x)$ qui correspond à la distance verticale entre la courbe de f et la sécante d'équation $g(x)$ passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Soit $H(x) = f(x) - g(x)$, pour $x \in [a, b]$

ainsi $H(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$ (voir le Test préliminaire, n°8.)



Vérifions si H satisfait les hypothèses du théorème de Rolle.

1) H est continue sur $[a, b]$, car la somme de deux fonctions continues est continue.
2) H est dérivable sur $]a, b[$, car la somme de fonctions dérivables est dérivable.
3) $H(a) = 0$ et $H(b) = 0$, d'où $H(a) = H(b)$.

Selon le théorème de Rolle, il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que $H'(c) = 0$.

Or

$$H'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ainsi

$$H^{'}(c) = f^{'}(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$0 = f^{'}(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \; (car \; H^{'}(c) = 0)$$

d'où $f^{'}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

■

Analyse de la démonstration du théorème de Lagrange

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement?* Les notions de continuité, de dérivée et de sécante sont particulièrement importantes pour comprendre la démonstration du théorème. L'étudiant doit également comprendre ce qu'est la distance verticale entre le graphique d'une fonction et une droite sécante au graphique de la fonction. Cette distance verticale est au cœur de la démonstration. L'interprétation graphique de ces divers éléments est aussi nécessaire puisqu'elle permet une compréhension approfondie de la situation et des énoncés en jeu.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* À l'exception du théorème de Rolle qui a été introduit pour la première fois dans la section théorique du manuel, les autres notions ont déjà été couvertes dans le cours de *Calcul Différentiel NYA*.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine de l'analyse.

Deuxième et troisième axes d'analyse : Les tâches prescrites et les activités attendues des étudiants

- *Qu'est-ce qui est attendu de l'étudiant par la présentation de cette démonstration? Des indices facilitant la réalisation/compréhension de la tâche sont-ils fournis?* On attend de l'étudiant qu'il lise et comprenne le théorème et la démonstration qui lui sont présentés. Pour l'aider dans son travail, le manuel fournit à l'étudiant un certain nombre d'indices venant éclairer différents aspects de la démonstration. Premièrement, avant d'introduire la démonstration, une explication et une illustration graphique de l'énoncé du théorème sont offertes à l'étudiant. Par la suite, dans la démonstration, la fonction H est définie symboliquement, mais aussi verbalement et graphiquement. Une représentation graphique de la fonction est fournie et il est expliqué à l'étudiant que cette fonction représente la distance verticale entre le graphique de f et la sécante au graphique de f passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Bien que des éclaircissements soient apportés sur la nature de la fonction H, le manuel n'explique pas pourquoi cette fonction doit être construite pour réaliser la démonstration. Pourquoi doit-on étudier la distance verticale entre la courbe de f et la sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$? Cette question reste sans réponse dans le manuel. Deuxièmement, une référence à un autre problème proposé précédemment dans le manuel, la question 8 du test préliminaire (p. 3 du manuel), est faite. Ce problème ciblant précisément la construction de l'équation d'une sécante, l'étudiant peut s'y référer pour avoir plus de détails sur cette équation qui intervient dans la démonstration.

- *S'agit-il d'un type de démonstrations qui était ignorés jusqu'alors?* Ce théorème requiert la démonstration de l'existence d'un élément particulier ce qui n'est pas un type de problèmes qui est usuellement couvert au niveau secondaire. Cependant le théorème de Rolle et le théorème de l'unicité d'un zéro, qui sont présentés avant le théorème de Lagrange dans le manuel, sont eux aussi des problèmes d'existence. Il ne s'agit donc plus d'un premier contact pour l'étudiant avec ce type de démonstrations.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* La tâche nécessite la compréhension et l'utilisation des notations fonctionnelle et ensembliste. Le fait que la fonction soit continue sur un intervalle fermé, $[a, b]$, mais dérivable sur un intervalle ouvert, $]a, b[$, constitue un élément d'ambiguïté pour l'étudiant (voir § 4.1.4.1).
- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?* Outre la « distance verticale » qui peut être un terme ambigu pour certains étudiants, aucun nouvel élément de symbolisme ou de vocabulaire n'est introduit dans la tâche.

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est linéaire et relativement simple. Par contre, comme la démonstration est centrée sur la fonction H, fonction qui doit être construite expressément pour réaliser la démonstration, un en-tête doit être apposé au schéma déductif. Cet en-tête sert à définir clairement la fonction H dans le but de faciliter la compréhension des pas déductifs impliquant cette fonction. Sans cette précision, le schéma déductif, qui est simple en soi, serait difficile à comprendre puisque l'élément H n'y aurait pas été explicité précisément. Il semblerait donc que, dans le cas présent, le schéma déductif soit mal adapté pour représenter clairement la démonstration du théorème.
- *Y a-t-il plusieurs arguments développés à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments doit être développée pour la réalisation de la démonstration : le théorème de Rolle et le calcul de la dérivée de la fonction H. De plus, pour construire H, trois notions sont mises à contribution, soit la distance verticale entre deux fonctions, la définition d'une sécante et son équation. Pour utiliser le théorème de Rolle, la fonction H doit être continue et dérivable (les deux premières hypothèses du théorème), ce qui est justifié par l'énoncé que la somme de deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle donné crée une fonction qui est continue et dérivable sur ce même intervalle. Cet énoncé est tenu pour acquis sans qu'aucune justification n'en soit fournie.
- *Un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation est-il introduit (sans indication)?* Dans cette démonstration un changement de point de vue important est opéré. En effet, la démonstration ne se fait pas à partir de la fonction f qui est mentionnée dans l'énoncé du théorème, mais bien à partir d'une fonction H qui a été construite à partir de f. Cette fonction est introduite dès le départ puisque toute la démonstration repose sur elle. Tel que nous l'avons mentionné précédemment, l'intuition qui a mené à la construction de cet élément n'est pas explicitée dans le manuel, cette explication est plutôt laissée à la charge de l'étudiant. Pour comprendre d'où est issue cette fonction, l'étudiant doit voir que le point c où $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est en fait le point où la distance verticale entre la sécante au graphique de f passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et le graphique de f est

maximale. De cette observation, il est possible de comprendre la nature de la fonction H et de voir que la distance maximale est réalisée par le point où la dérivée de la fonction H s'annule. Une fois la fonction H posée, la démonstration découle assez facilement. Dans la mesure où la fonction H est donnée, du point de vue de la réalisation de la démonstration, cela ne constitue pas vraiment une difficulté pour l'étudiant. Par contre, la difficulté vient pour l'étudiant qui veut pousser plus loin, et comprendre comment la fonction H a été trouvée.

- *Une quantification est-elle à repérer?* Un quantificateur existentiel écrit en langage naturel est à prendre en considération dans l'énoncé du théorème et dans la démonstration.

Changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche.

Exercice 5, section 5.4 (p. 262)

Démontrer, en utilisant la méthode de surface de révolution, que l'aire S de la surface latérale d'un cône de rayon r et de hauteur h est donnée par $S = \pi r l$, où $l = \sqrt{r^2 + h^2}$.

Réponse attendue à l'exercice 5, section 5.4

Cette solution a été élaborée par l'auteur de cette recherche en prenant soin d'utiliser la méthode mentionnée dans la tâche.

Soit f la droite passant par l'origine et le point (h, r), $f(x) = \frac{r}{h}x$, $\forall x \in [0, h]$. La rotation de la courbe autour de l'axe des x engendre la surface latérale d'un cône de rayon r et de hauteur h. L'aire S de cette surface peut être calculée à l'aide du théorème 5.3[11], démontré dans le manuel, puisque $f(x) \geq 0$ sur $[0, h]$ et $f'(x) = \frac{r}{h}$ est continue sur $[0, h]$. On obtient donc

[11] « Soit une fonction f, telle que $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ et telle que f' est continue sur $[a, b]$. L'aire S de la surface engendrée par la rotation de la courbe autour de l'axe des x est donnée par $S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ ou par $S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ (notation de Leibniz). » (Charron et Parent, 2004, p. 259)

$$S = \int_0^h 2\pi\left(\frac{r}{h}x\right)\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{2\pi r}{h}\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\int_0^h xdx$$

$$= \frac{2\pi r}{h}\sqrt{\frac{h^2+r^2}{h^2}}\int_0^h xdx$$

$$= \frac{2\pi r\sqrt{h^2+r^2}}{h^2}\int_0^h xdx$$

$$= \frac{2\pi r\sqrt{h^2+r^2}}{h^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^h$$

$$= \frac{2\pi r\sqrt{h^2+r^2}}{h^2}\cdot\frac{h^2}{2}$$

$$= \pi r\sqrt{h^2+r^2}$$

$$= \pi r l.$$

■

Analyse de l'exercice 5, section 5.4

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement?* La connaissance du cône ainsi que certaines de ses propriétés sont essentielles. Plus précisément, l'étudiant doit savoir qu'un cône peut être obtenu par la révolution d'une droite autour d'un axe. Cet élément est essentiel puisque la construction de l'équation de la droite génératrice du cône est le point de départ de la démonstration. Une fois cette étape accomplie, l'étudiant n'a plus qu'à utiliser la formule issue du théorème 5.3. Pour ce faire, il doit s'assurer que la fonction f remplie bien les hypothèses du théorème, ce qui nécessite la mise en œuvre des notions de continuité et dérivabilité d'une fonction. Une connaissance des propriétés des intégrales définies est aussi requise.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Le cône est un sujet qui a déjà été couvert au secondaire. De plus, la construction d'un cône via la rotation d'une droite a été couverte implicitement dans la section d'exercices 5.4. En effet, l'exercice précédent l'exercice 5 demande à l'étudiant de représenter graphiquement la surface engendrée par la révolution d'une droite autour de l'axe des x. La formule 5.3 a été présentée dans la section théorique 5.4. Les propriétés de l'intégrale définie ont été énoncées au chapitre 3 du manuel.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au calcul intégral.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est fermé puisque sa valeur de vérité est connue. La méthode à utiliser pour résoudre la tâche est précisée dans l'énoncé de la tâche. De plus, un indice implicite, le fait que la surface latérale d'un cône puisse être obtenue par la révolution d'une droite autour d'un axe, est fourni à l'exercice précédent.
- *S'agit-il d'un type de problème qui était ignorés jusqu'alors?* Il s'agit de la première démonstration impliquant le théorème 5.3 sur l'aire d'une surface de révolution.

- *Quels types de raisonnements sont en jeu*? Le raisonnement déductif déployé dans cette démonstration est pris en charge par le calcul.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme est important au sein de cette tâche. Dans un premier temps, l'étudiant doit être en mesure d'exprimer la surface latérale d'un cône de rayon r et de hauteur h comme résultant de la rotation autour de l'axe des x, d'une droite dont il doit trouver lui-même l'équation, ainsi que les bornes pertinentes pour les variables en cause. De plus, l'étudiant doit pouvoir manipuler le symbolisme lié à la formule donnée dans le théorème 5.3.
- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?* Un nouvel élément de vocabulaire est utilisé dans cette tâche, la notion de surface de révolution a été introduite dans la section théorique 5.4.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est une chaîne d'inférences.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est mobilisable. Des indices orientant la construction de la démonstration sont fournis à l'étudiant, cependant celui-ci doit déterminer seul l'équation de la droite génératrice du cône.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité d'arguments est à développer : le théorème 5.3, le théorème fondamental du calcul, des propriétés de l'intégrale définie et des arguments de nature algébrique.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de point de vue est requis puisque l'étudiant doit exprimer mathématiquement, par la révolution d'une droite autour d'un axe, le cône qui est décrit dans l'énoncé de la tâche. Un recours au registre graphique pour visualiser la droite génératrice du cône peut s'avérer utile.
- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* L'équation de la droite f doit être construite par l'étudiant.

- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* L'étudiant doit noter que, dans le contexte de la tâche, la droite *f* est définie pour les valeurs de *x* entre 0 et *h*.

Changement de point de vue nécessité par la méthode de preuve utilisée.

Deux méthodes de preuves particulières ont été observées dans le manuel du cours *NYB*, soit la preuve par l'absurde et la preuve par disjonction de cas. Puisqu'un exemple d'analyse de tâche faisant intervenir un raisonnement par l'absurde a déjà été présenté (voir § 4.1.1.3) nous n'allons pas en exposer un autre ci-dessous. Cependant, une démonstration mettant en œuvre une disjonction de cas sera présentée.

Exercice récapitulatif 24, chapitre 6 (p. 363)

Démontrer, à l'aide du critère de l'intégrale, que la série de Riemann diverge pour $0 < p \leq 1$ et converge pour $p > 1$.

La démonstration qui est demandée à l'étudiant à l'exercice récapitulatif 24 lui a déjà été présentée à la section théorique 6.3 du chapitre 6. En effet, l'énoncé de cet exercice est, à un détail près, l'énoncé du théorème sur la série de Riemann (théorème 6.15[12]). Ce théorème ainsi que sa démonstration ont été explicités en détail à l'étudiant qui, pour résoudre la tâche, n'aura qu'à recopier la démonstration présentée dans la section théorique. Une seule adaptation doit être apportée par l'étudiant. La démonstration fournie par le manuel est valable pour $p \in \mathbb{R}$, tandis que l'exercice récapitulatif vise les valeurs réelles et positives de p. L'apprenant devra donc laisser de côté le cas $p < 0$, qui est inclus dans la démonstration du théorème 6.15.

Devant ce constat, nous avons choisi d'analyser la tâche comme une démonstration qui doit être lue et comprise par l'étudiant plutôt qu'une démonstration qui doit être construite par lui.

---

[12] « Soit une série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, où $p \in \mathbb{R}$. Si $p \leq 1$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge. Si $p > 1$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge. » (Charron et Parent, 2004, pp. 316-317)

Réponse attendue à l'exercice récapitulatif 24, chapitre 6

La réponse attendue n'est nulle autre que la démonstration du théorème 6.15 qui est donnée par le manuel. Seul le cas $p < 0$ a été exclu (Charron et Parent, 2004, pp. 316-317). Nous reproduisons ci-dessous cette démonstration telle quelle.

Cas où $p = 1$

Lorsque $p = 1$, la série de Riemann s'écrit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

Ainsi nous obtenons la série harmonique qui diverge.

Cas où $p = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^0} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^0} \neq 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^0}$ diverge (théorème 6.13[13]).

Cas où $p > 0$ et $p \neq 1$

Utilisons le critère de l'intégrale[14] avec $f(x) = \frac{1}{x^p}$ sur $[1, +\infty$.

Cette fonction est positive et continue sur $[1, +\infty$ et elle est décroissante sur $[1, +\infty$ car $f'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}} < 0, \forall x \in [1, +\infty$.

De plus,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^p} dx$$

---

[13] « Soit une série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ quelconque. Si $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ converge, alors $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. Si $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$, alors $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ diverge. » (Charron et Parent, 2004, p. 311)

[14] « Soit $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, où $a_k > 0$, et f une fonction positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty$ telle que $f(k) = a_k$ pour tout $k \geq 1$. Si $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge. Si $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge. » (Charron et Parent, 2004, p. 313)

$$= \lim_{M \to +\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^M = \lim_{M \to +\infty} \left[\frac{M^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right]$$

Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} +\infty \ si\ 0 < p < 1, \\ \frac{1}{p-1} \ si\ p > 1. \end{cases}$

Donc, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ diverge si $0 < p < 1$ et converge si $p > 1$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge si $0 < p < 1$ et converge si $p > 1$.

Ainsi nous pouvons conclure que la série de Riemann diverge pour $0 < p \leq 1$ et converge pour $p > 1$.

■

Analyse de l'exercice récapitulatif 24, chapitre 6

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement?* La compréhension de cette démonstration repose sur deux éléments-clés : la connaissance de la structure d'une série de Riemann en fonction des différentes valeurs de p et la connaissance de certains critères de convergence des séries tels que le critère du terme général (théorème 6.13), le critère de l'intégrale et la divergence de la série harmonique.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* La série de Riemann ainsi que les critères de convergence énumérés précédemment ont été introduits à la section théorique 6.3. La série harmonique et son caractère divergent ont été présentés à la section théorique 6.2 du manuel. Ces sujets ont tous été traités dans les sections d'exercices attenantes aux sections théoriques dans lesquelles ils ont été introduits. À la suite de ce constat, nous croyons que ces notions ne constituent plus un élément nouveau pour l'apprenant.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine de l'analyse.

Deuxième et troisième axes d'analyse : Les tâches prescrites et les activités attendues des étudiants

- *Qu'est-ce qui est attendu de l'étudiant par la présentation de cette démonstration? Des indices facilitant la réalisation/compréhension de la tâche sont-ils fournis?* Bien que l'objectif de la tâche qui est visé par le manuel semble être la construction d'une démonstration, nous croyons que la présence de la démonstration dans la section théorique 6.3 poussera davantage l'étudiant à lire et tenter de comprendre le raisonnement qui lui est présenté plutôt que d'essayer de construire la démonstration par lui-même. Dans la démonstration qui est présentée dans le manuel, aucun indice n'est fourni pour faciliter la compréhension.
- *L'énoncé du théorème comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes? Des étapes ont-elles été introduites dans la démonstration?* L'énoncé comporte deux étapes : la démonstration que la série de Riemann diverge pour $0 < p \leq 1$ et la démonstration que la série de Riemann converge pour $p > 1$. Pour réaliser ces démonstrations, trois cas distincts devront être étudié : $p = 0$; $p = 1$; $p > 0$ et $p \neq 1$.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement par disjonction de cas est mis en jeu à deux reprises au sein de la démonstration. En effet, dès le commencement, une première disjonction de cas est effectuée : $p = 0$; $p = 1$; $p > 0$ et $p \neq 1$. Par la suite, lors de l'étude du cas $p > 0$ et $p \neq 1$, une seconde disjonction de cas donne naissance aux deux sous-cas : $0 < p < 1$ et $p > 1$.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Pour comprendre entièrement la démonstration qui lui est présentée, l'étudiant doit maîtriser le symbolisme associé aux sommations et aux limites. La notation symbolique de la série de Riemann est un élément pouvant occasionner des difficultés chez certains étudiants. En effet, la présence du symbole n et du symbole p dans la sommation, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, pourrait troubler certains étudiants qui auraient de la difficulté à percevoir le rôle de chacun. De plus, la notation liée aux trois cas à étudier dans la démonstration doit être comprise par l'apprenant : il doit comprendre la pertinence, l'exhaustivité et la non redondance des trois cas étudiés.

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La démonstration repose sur trois cas [$p = 0$; $p = 1$; $p > 0$ et $p \neq 1$], qui sont étudiés de manière parallèle. Les deux premiers cas mettent en œuvre des enchaînements déductifs linéaires et peu complexes. Le troisième cas, $p > 0$ et $p \neq 1$, est un peu plus complexe puisqu'il requiert une disjonction de cas; en effet le cas $0 < p < 1$ et $p > 1$ doivent être dissociés pour déterminer précisément la convergence/divergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$. Une fois l'étude des cas complétée, les conclusions générales de la démonstration peuvent être déduites.
- *Quels théorèmes sont appliqués?* Plusieurs théorèmes sont appliqués dans cette démonstration : Divergence de la série harmonique, critère du terme général (théorème 6.13), critère de l'intégrale et le théorème fondamental du calcul.
- *Y a-t-il plusieurs arguments développés à la fois?* Outre les théorèmes mentionnés précédemment, la définition d'intégrale impropre, la définition d'une fonction décroissante ainsi que certains arguments de nature algébrique sont mis en œuvre dans cette démonstration.
- *Un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation est-il introduit (sans indication)?* En plus de la double disjonction de cas qui doit être introduite sans indication[15], l'étude de la série de Riemann dans le cas où $p > 0$ et $p \neq 1$ nécessite un autre changement de point de vue. En effet, la convergence/divergence de la série dans ces circonstances est déterminée via la convergence/divergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ qui a été introduite pour appliquer le critère de l'intégrale. Il s'agit d'un *changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche.*
- *Une sélection d'informations est-elle effectuée?* L'adaptation qui doit être faite de la démonstration fournie par le manuel à la section théorique 6.3 repose sur une

[15] Nous considérons que l'utilisation d'une disjonction de cas pour réaliser une démonstration est un changement de point de vue car l'étudiant doit, plutôt que de considérer le référentiel en entier, morceler celui-ci pour traiter séparément différentes parties. Cette étape demande à l'étudiant de prendre du recul par rapport à la situation qui lui est présentée et ce, pour comprendre quels cas devront être considérés et comment ceux-ci devront être traités dans la démonstration.

sélection d'informations. En effet, l'étudiant doit exclure le cas $p < 0$ qui est présent dans cette démonstration puisque l'exercice récapitulatif 24 n'en fait pas mention.

- *Une quantification est-elle à repérer?* Une quantification universelle doit être repérée lors de la définition de la fonction f et de sa dérivée. En effet, l'étudiant doit comprendre que la fonction f, $f(x) = \frac{1}{x^p}$, est définie $\forall x \in [1, +\infty$ et qu'il en va de même pour $f'(x)$. Une quantification implicite est également à prendre en considération dans les conclusions de la démonstration. L'étudiant doit comprendre que la série de Riemann converge $\forall p \in]1, +\infty$ et diverge $\forall p \in]0, 1]$.

4.1.1.5 Nécessité d'une écriture quantifiée

Parmi l'ensemble des démonstrations analysées, la place accordée aux quantificateurs est, dans la majorité des cas, minime. Effectivement, très peu de quantifications implicites ont été repérées. Quelques quantificateurs exprimés symboliquement ont été utilisés dans l'énoncé de certains théorèmes et doivent donc être bien interprétés par l'étudiant. Malgré la présence timide des quantificateurs, nous avons relevé deux types de démonstrations où leur impact est non négligeable.

Premièrement, les démonstrations faisant intervenir un raisonnement par l'absurde nécessitent une compréhension approfondie des quantifications utilisées dans l'énoncé à prouver. Bien qu'un exemple de raisonnement par l'absurde ait été présenté précédemment (voir § 4.1.1.3), nous avons décidé d'expliciter un second exemple ci-dessous dans lequel la démonstration repose entièrement sur la négation de la quantification utilisée dans la tâche.

Problème synthèse 18, chapitre 1 (p. 48)

Nous appelons a une valeur fixe d'une fonction f, si $f(a) = a$. Démontrer que si f est dérivable et que $f'(c) \neq 1 \ \forall c \in \mathbb{R}$, alors la fonction f possède au plus une valeur fixe.

Réponse attendue au problème synthèse 18, chapitre 1

Cette démarche est inspirée du solutionnaire du manuel *Calcul intégral Mathématique 203, 2e édition* par Charron et Parent, page 337. La vérification de la continuité et de la dérivabilité de la fonction *f* sur l'intervalle [*a*, *b*] y a par contre été ajoutée de manière à compléter la démonstration qui était présentée dans le corrigé du manuel.

Démontrons, par l'absurde, que *f* possède au plus une valeur fixe. Supposons que *f* possède deux valeurs fixes distinctes, *a* et *b*, c'est-à-dire $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

Nous savons, par l'énoncé de la tâche, que la fonction est dérivable sur ℝ et donc, sur chacun des sous-intervalles de ℝ. De plus, *f* est continue sur ℝ puisqu'elle est dérivable sur cet ensemble (une fonction ayant un point de discontinuité n'est pas dérivable en ce point). Comme *f* est continue sur ℝ, elle le sera également sur chacun des sous-ensembles de ℝ.

En appliquant le théorème de Lagrange à *f* sur [a, b], $\exists c \in]a, b[$ tel que

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &= \frac{b - a}{b - a} \quad (car\ f(b) = b\ et\ f(a) = a) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse. D'où *f* possède au plus une valeur fixe.

■

Analyse du problème synthèse 18, chapitre 1

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement?* Les connaissances à mettre en fonctionnement sont les notions de continuité et de dérivabilité. La notion de point fixe doit également être mise en fonctionnement pour réaliser la tâche. Plus précisément, l'étudiant doit voir le lien qui unit une fonction ayant une dérivée unitaire en un point et une fonction ayant au moins deux points fixes. Ce lien passe par la compréhension du théorème de Lagrange qui devra être mis en fonctionnement pour construire la démonstration. De plus, puisque la démonstration requise nécessite un raisonnement par l'absurde, l'étudiant doit connaître cette méthode de démonstration et savoir l'utiliser.

- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les notions de continuité et de dérivabilité ont déjà été vues dans le cours de mathématiques *NYA*. Le théorème de Lagrange a été introduit dans la section théorique 1.2 du chapitre 1 du manuel. Il a donc été nouvellement introduit dans le paysage mathématique des étudiants. Par contre, il a été utilisé dans plusieurs des problèmes qui sont proposés dans les sections précédentes. En ce qui concerne la notion de point fixe, celle-ci est introduite dans l'énoncé de la tâche. Elle constitue donc une nouvelle notion pour l'étudiant.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine de l'analyse.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* La valeur de vérité de l'énoncé à démontrer est connue. Aucun indice n'est fourni.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Il s'agit d'un nouveau type de problèmes.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement par l'absurde est utilisé pour réaliser la démonstration.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Les notations fonctionnelle et ensembliste sont impliquées dans l'énoncé du théorème. En plus des éléments de formalisme inhérents au théorème de Lagrange (voir § 4.1.1.4), la définition symbolique d'un point fixe doit également être prise en considération. Bien que cette définition ne soit pas symboliquement très compliquée, il n'en reste pas moins qu'elle constitue, de par sa nouveauté, une difficulté supplémentaire.

- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?* La notion de point fixe et sa définition symbolique sont introduites dans l'énoncé de tâche.
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier ou de quantificateurs cachés?* Un quantificateur écrit en langage naturel, « [...] alors *f* possède **au plus** [c'est nous qui soulignons] une valeur fixe », doit être pris en considération. Une compréhension de cette quantification est nécessaire puisque le raisonnement par l'absurde repose sur sa négation.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est relativement simple. Elle repose sur l'application d'un théorème, soit le théorème de Lagrange.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est disponible. En effet, aucun indice n'est fourni à l'étudiant pour l'aider à construire la démonstration. Celui-ci doit trouver lui-même les outils à utiliser pour arriver à ses fins. De plus, aucune tâche similaire n'a été donnée dans les sections théoriques ou dans les sections d'exercices précédentes.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité très restreinte d'arguments doit être développée : la continuité et la dérivabilité d'une fonction sur un sous-intervalle ainsi que le théorème de Lagrange. Celui-ci est d'ailleurs au cœur de la démonstration. Les autres arguments qui interviennent dans la démonstration servent à vérifier que les hypothèses du théorème sont bien vérifiées avant de l'appliquer.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* La méthode de preuve par l'absurde requiert un changement de point de vue puisque la démonstration s'opère désormais sur la négation de l'énoncé et non sur l'énoncé lui-même. L'étudiant doit aussi exprimer en

langage mathématique l'expression « valeur fixe d'une fonction » ce qui constitue un changement de point de vue. Celui-ci est cependant indiqué dans l'énoncé.

- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* Pour réaliser la démonstration par l'absurde, deux valeurs fixes, a et b, doivent être introduites.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* Les quantifications liées au théorème de Lagrange sont à repérer. De surcroît, un quantificateur universel écrit symboliquement doit être traité.

Le second type de démonstrations ayant retenu notre attention, eu égard à l'utilisation qui est faite des quantificateurs, sont les tâches nécessitant la définition d'un domaine de validité pour certaines expressions. L'exercice récapitulatif 24 du chapitre 6 qui a été présenté précédemment (voir § 4.1.1.4) en est un bon exemple. Plusieurs expressions sont fournies dans la démonstration et l'utilisation des quantificateurs est nécessaire, si l'on souhaite se conformer à un certain degré de formalisme, pour préciser les valeurs pour lesquelles ces expressions sont considérées.

La démonstration du théorème 6.9, dont l'analyse est présentée ci-dessous, est un autre bon exemple de l'utilisation des quantificateurs pour expliciter les valeurs d'une expression pour lesquelles une caractéristique particulière est observée. Il est important de noter que l'utilisation des quantificateurs qui y est faite est, selon nous, plus complexe et subtile que dans l'exercice récapitulatif 24 du chapitre 6. Effectivement, dans le théorème 6.9, les quantifications se rapportent à un objet, N, qui doit être introduit par l'étudiant. Cet ajout est essentiel pour exprimer formellement le fait que les termes des deux séries décrites dans la démonstration vont être égaux à partir d'un certain rang. En plus de bien illustrer l'utilisation des quantificateurs suscitée par le manuel Charron et Parent, nous croyons que la démonstration du théorème 6.9 représente parfaitement un des rôles que peuvent avoir les quantificateurs dans les mathématiques avancées et, particulièrement dans les cours d'analyse universitaire. C'est pour ces raisons que nous avons choisi de présenter l'analyse complète de la démonstration du théorème 6.9.

Théorème 6.9, chapitre 6 (p. 301)

Si nous ajoutons ou retranchons un nombre fini de termes à une série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$, alors la série obtenue converge si $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ converge et elle diverge si $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ diverge.

Démonstration attendue du théorème 6.9

Le manuel ayant laissé à la charge de l'étudiant l'élaboration de la démonstration du théorème 6.9 et aucune solution n'étant fournie dans le corrigé, nous nous sommes vues dans l'obligation de construire notre propre démonstration. C'est d'ailleurs cette dernière qui est présentée ci-dessous. Nous sommes entièrement conscientes que le niveau de formalisme employé dans notre démonstration est plus élevé que celui habituellement utilisé au niveau collégial. En effet, il répond davantage aux attentes, en matière de formalisme, des cours universitaires d'analyse que des cours de calcul de niveau collégial. D'ailleurs, la démonstration que nous avons élaborée a été inspirée de celle fournie dans le manuel *Introduction à l'analyse réelle* (Labelle et Mercier, 1993, p. 241) de niveau universitaire. Bien qu'une démonstration plus intuitive aurait pu être construite, nous croyons que l'analyse de notre démonstration cadre parfaitement avec l'objectif principal de notre corpus : mettre en lumière des difficultés inhérentes à l'activité de démonstration et des éléments de formalisme suscités dans les mathématiques avancées. Rappelons que *Mathématiques pour les sciences* vise à préparer les étudiants à la rigueur des mathématiques avancées et cette tâche est, selon nous, un excellent exemple des exigences requises à ce niveau.

Soit $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$ la série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ après qu'un nombre fini de termes lui ait été ajouté ou retranché. On peut supposer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_i = b_i \ \forall i \geq N$. En effet, si M termes ont été ajoutés, il suffit d'intercaler M termes nuls parmi les a_i pour chacun des termes b_i correspondant à un terme ajouté; et si M termes ont été retranchés il suffit d'intercaler M termes nuls parmi les b_i pour chacun des a_i correspondant à un terme retranché.

Puisque la convergence ou non d'une série est déterminée par la limite, quand n tend vers l'infini, des sommes partielles S_n, nous allons considérer de telles sommes partielles pour de grandes valeurs de n.

Soit, donc,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \ , \qquad avec\, n \geq N.$$

On a alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} b_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} b_i + \sum_{i=N+1}^{n} b_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} b_i + \sum_{i=N+1}^{n} a_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N} a_i + C\right) + \sum_{i=N+1}^{n} a_i \ , \qquad \text{où } C \in \mathbb{R} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + C. \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + C\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + C$$

- Si $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = T, T \in \mathbb{R}$, et $\lim_{n\to+\infty} S_n = K,$ où $K = T + C$ signifiant que $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$ converge également.

- Si $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ diverge, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \pm\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$ signifiant que $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$ diverge également.

■

Analyse de la démonstration du théorème 6.9

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Une connaissance de la notion de série et plus particulièrement de la convergence d'une série est nécessaire pour construire cette démonstration. L'étudiant doit également avoir une bonne connaissance des notions de sommation et de limite.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Outre la notion de série qui a été présentée à l'étudiant quelques pages avant le théorème 6.9, les notions mises en fonctionnement dans cette tâche sont déjà connues des étudiants.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Cette tâche se rapporte au domaine de l'analyse.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* La valeur de vérité de l'énoncé est connue. Aucun indice facilitant la construction de la démonstration n'est fourni explicitement.
- *S'agit-il d'un type de problème qui était ignorés jusqu'alors?* Il s'agit de la première démonstration qui est laissée à la charge de l'étudiant impliquant la notion de série.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* À la fin de la démonstration, une disjonction de cas est à prendre en considération par l'étudiant. En effet, celui-ci doit considérer le cas où $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ converge et celui où la série diverge.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme est particulièrement important dans cette tâche. L'étudiant doit connaître et gérer le symbolisme associé à la notion de série. Plus précisément, il doit être en mesure d'utiliser la définition symbolique de convergence d'une série. Une des difficultés majeures dans cette démonstration concerne l'introduction de plusieurs éléments. Premièrement, l'apprenant doit nommer la série ayant subi des modifications, dans la

réponse fournie ci-dessus celle-ci a été nommée $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$ [16]. Deuxièmement, l'étudiant doit introduire les éléments *M* et *N* et leurs créations demandent une bonne compréhension de la situation. Effectivement, il doit décoder que si un nombre fini *M* de termes sont retranchés ou ajoutés dans la série, c'est donc qu'il existe un rang dans la série à partir duquel celle-ci n'a pas été modifiée. Le rang *N* représente cette frontière départageant la portion de la série ayant subi des modifications de celle restant inchangée. Le fait que le nombre *M* soit fini doit amener l'étudiant à comprendre qu'il peut ajuster les indices et renommer les termes (en ajoutant au besoin des termes nuls) de façon à faire correspondre les a_i et les b_i à partir d'un certain rang. Finalement, l'apparition de la constante réelle *C* lors du passage de $\sum_{i=1}^{N} b_i$ à $\sum_{i=1}^{N} a_i$ constitue un troisième point qui, selon nous, peut causer problème à certains étudiants. Le rôle et l'importance de cette constante sera sans doute difficile à percevoir pour certains étudiants, qui ne comprendraient pas qu'elle permet de compiler les termes, en nombre fini, ajoutés ou retranchés à la série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$.

- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?* Le symbolisme et le vocabulaire associés aux séries est nouveau pour l'étudiant.
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier ou de quantificateurs cachés?* L'élément frontière *N* est implicite dans l'énoncé. En effet, celui-ci doit être déduit du fait qu'un **nombre fini** de termes a été ajouté ou retranché à la série de départ[17].
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple et linéaire.

---

[16] Malgré le fait que l'introduction de cette notation ne soit peut-être pas absolument essentielle pour mener la démonstration à terme, nous croyons qu'elle représente un élément de formalisme fréquemment utilisé dans les cours universitaire d'analyse et qu'il était, par conséquent, intéressant de l'inclure dans notre démonstration.

[17] Il est important de préciser que nous sommes conscientes qu'il peut exister des démonstrations ne nécessitant pas l'introduction d'un tel élément. Cependant, le recours fréquent à cette façon de faire dans les cours universitaires d'analyse justifie, selon nous, la pertinence d'inclure l'analyse de cet élément de formalisme dans le cadre de ce travail.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est disponible. Une analyse approfondie de l'énoncé est requise et plusieurs éléments doivent être introduits pour mener la démonstration à terme.
- *Y a-t-il lieu d'introduire des étapes?* Deux étapes doivent être introduites à la toute fin de la démonstration puisque l'étudiant doit prendre en considération deux cas : $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ converge et $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ diverge.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments doit être développée : définition de convergence d'une série, propriétés des sommations et propriétés des limites.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de point de vue est à effectuer. Effectivement, l'étudiant doit délaisser la série pour s'attarder à la suite des sommes partielles. C'est la convergence ou la divergence de cette suite qui dicte le comportement de la série.
- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* Quatre éléments doivent être introduits par l'étudiant : la notation de la série modifiée, $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$, les entiers N et M ainsi que la constante réelle C.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* Si un certain degré de formalisme est visé dans la rédaction, l'introduction de l'élément N nécessite alors l'utilisation d'un quantificateur existentiel et d'un quantificateur universel. L'utilisation de ceux-ci sont nécessaires pour exprimer en langage mathématique le comportement des deux séries.

4.1.2 Attitude de preuve

Parmi toutes les tâches analysées, aucune ne suscite un travail sur l'attitude de preuve, au sens où nous avons vu que Brousseau (1998) et Tanguay (2000) le décrivent, à la section 2.1.2. La valeur de vérité de chacun des énoncés à démontrer est à chaque fois connue de l'étudiant. Le fait qu'aucun doute ne plane sur la validité des énoncés fait en sorte que ce n'est pas une *nécessité intérieure* qui pousse l'étudiant à se lancer dans un processus de validation, mais plutôt une directive qui l'y incite. De plus, plusieurs des tâches proposées dans les sections d'exercices du manuel fournissent des directives explicites sur les outils qui doivent être utilisés pour construire la démonstration. Des directives implicites sont également sous-entendues. En effet, plusieurs des tâches n'étaient en fait qu'une variante d'exemples résolus dans les sections théoriques. La présence d'indices explicites et implicites dans un bon nombre de tâches ainsi que le caractère fermé des énoncés à démontrer pourrait dénaturer l'activité de démonstration mathématique en la limitant à une application de recettes préalablement présentées.

4.1.3 Complexité de la structure déductive

Les démonstrations étudiées présentent, dans la majorité des cas, des structures déductives simples et linéaires. De plus, très peu de pas déductifs sont nécessaires pour mener la démonstration à terme. Malgré cette prédominance des chaînes d'inférences au détriment des structures en arbres, quelques démonstrations présentent des structures déductives plus élaborées. C'est d'ailleurs le cas de l'exercice récapitulatif 24 du chapitre 6 (voir § 4.1.1.4) et du problème synthèse 21 du chapitre 3 (voir § 4.1.1.1). Outre ces deux tâches, le problème synthèse 25 du chapitre 6 comporte également une structure déductive en arbre. L'analyse de ce problème est donnée ci-dessous. Il est important de préciser que cette tâche est, à nos yeux, davantage de niveau universitaire que de niveau collégial. En effet, le nombre d'arguments impliqués dans la démonstration, leurs natures ainsi que leur enchaînement fait en sorte que le niveau de complexité est ici nettement plus élevé que celui des autres tâches rencontrées dans le manuel. Malgré ce fait, la présentation de l'analyse de cette tâche reste pertinente à nos yeux puisqu'elle illustre les difficultés présentes dans certaines démonstrations d'un cours universitaire d'analyse. Rappelons que le but des cours de mathématiques de la formation collégiale de *Sciences de la nature* est de préparer les étudiants à des études universitaires en sciences et donc, aux difficultés qu'ils peuvent y rencontrer.

Problème synthèse 25, chapitre 6 (p. 366)

a) Démontrer que la suite $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ est convergente.

b) La suite $\{a_n\}$ précédente converge vers une constante appelée constante d'Euler. Déterminer approximativement cette constante.

Réponse attendue du problème synthèse 25, chapitre 6

Cette solution a été élaborée par l'auteur de la présente recherche. Elle est inspirée d'une démonstration présentée dans le manuel *Introduction à l'analyse réelle* (Labelle et Mercier, 1993, p. 247). Nous pouvons donc avancer sans trop de crainte que les difficultés et les éléments de formalisme qu'elle comporte sont représentatifs de ce qui est suscité au niveau universitaire.

a) Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in [1, +\infty$ et P une partition régulière de $[1, n]$, où n est un nombre naturel supérieur à 1, $P = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\text{-}1, n\}$.

Par le théorème fondamental du calcul, $\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln|x||_1^n = \ln n$. Essayons de borner cette intégrale en utilisant la somme des aires des rectangles inscrits et la somme des aires des rectangles circonscrits à la courbe.

En calculant la somme des aires des rectangles circonscrits à la courbe f sur l'intervalle $[1, n]$, on obtient :

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx < 1 \cdot (2-1) + \frac{1}{2} \cdot (3-2) + \frac{1}{3} \cdot (4-3) + \cdots + \frac{1}{n-1} \cdot (n-(n-1))$$

Puisque $n > 1$, cela équivaut à écrire :

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n},$$

et donc aussi :

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \Leftrightarrow$$

$$0 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n.$$

En calculant la somme des aires des rectangles inscrits sous le graphique de f dans l'intervalle $[1, n]$, nous obtenons :

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n,$$

et

$$1 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Donc, la suite $\{a_n\}$ est bornée inférieurement par 0, et supérieurement par 1.

Est-ce que la suite $\{a_n\}$ est monotone?

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n \quad &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right) \\ &\qquad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Soit $g(x) = \ln x$, une fonction continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$. En appliquant le théorème de Lagrange à $g(x)$, nous obtenons :

$$\frac{\ln(n+1) - \ln n}{1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = g^{'}(c), \text{où } c \in]n, n+1[.$$

Puisque $g^{'}(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in]n, n+1[$ et que cette fonction est décroissante, on a

$$\frac{1}{n+1} < g^{'}(c) < \frac{1}{n}$$

et

$$\frac{1}{n+1} < ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \ .$$

Puisque $\frac{1}{n+1} < ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, nous pouvons déduire que :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0 \, ,$$

signifiant que la suite $\{a_n\}$ est donc monotone.

Nous avons démontré que la suite $\{a_n\}$ est monotone et bornée et donc, par le théorème 6.5[18], nous savons que cette suite est convergente.

■

---

[18] « Théorème 6.5 : Si la suite $\{a_n\}$ est monotone et bornée, alors la suite $\{a_n\}$ converge. En particulier :

1) si la suite $\{a_n\}$ est croissante et bornée supérieurement, alors la suite converge vers la borne supérieure B;
2) si la suite $\{a_n\}$ est décroissante et bornée inférieurement, alors la suite converge vers la borne inférieure b. » (Charron et Parent, 2004, p. 292)

b) Cette sous-question ne sera pas traitée, car les auteurs du manuel s'attendent à ce que l'étudiant utilise un outil technologique pour y répondre.

Analyse du problème synthèse 25, chapitre 6

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement?* La clé de cette démonstration réside dans la notion de convergence d'une suite. Plus précisément elle repose sur le théorème 6.5, qui constitue le squelette de la démonstration. L'application du théorème 6.5 fait intervenir les notions de majorant et de minorant d'une suite ainsi que la notion de suite monotone. Ces notions doivent être maîtrisées par l'étudiant pour qu'il soit apte à construire la démonstration qui lui est demandée.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* La notion de suite et les notions qui s'y rattachent ont été présentées aux étudiants à la section théorique 6.1, en plus d'être travaillées à la section d'exercices 6.1 ainsi que dans la section *Exercices récapitulatifs* du chapitre 6. Les notions qui sont utilisées pour démontrer que la suite est bornée et monotone ont également été abordées dans les chapitres antérieures.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine de l'analyse.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte deux sous-questions indépendantes. La présente analyse se limite à l'étude de la sous-question a).
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est fermé puisque l'étudiant sait qu'il doit démontrer la convergence de la suite $\{a_n\}$. Aucun indice n'est donné.
- *S'agit-il d'un type de problème qui était ignorés jusqu'alors?* La nature des notions impliquées, la pluralité des arguments utilisés ainsi que la complexité de la structure déductive en font un tout nouveau type de problème pour l'étudiant. Cependant, la

démonstration de la convergence d'une suite donnée à l'aide du théorème 6.5 a été travaillée brièvement dans la section théorique 6.1, mais avec des suites moins complexes que celle présentée dans cette tâche.

- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme occupe ici une place non négligeable. L'étudiant doit comprendre les notations fonctionnelle et ensembliste pour réaliser cette tâche. Plusieurs éléments doivent être introduits ce qui lui demande une excellente compréhension de la situation. La manipulation d'inéquations est également une habileté requise. L'intégrale de la fonction f doit être bornée et des manipulations algébriques doivent être faites sur les inéquations ainsi créées.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est complexe. Il s'agit en fait d'un arbre d'inférences puisqu'avant de démontrer que la suite $\{a_n\}$ est convergente, l'étudiant doit démontrer que la suite est monotone et qu'elle est bornée. Ces deux démonstrations se font de manière parallèle.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est disponible. Aucune indication ne vient orienter la démarche.
- *Y a-t-il lieu d'introduire des étapes?* Deux étapes sont nécessaires pour démontrer l'énoncé. Effectivement, l'étudiant doit démontrer que la suite $\{a_n\}$ est bornée et qu'elle est aussi monotone, avant de démontrer qu'elle est convergente.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Un nombre important d'arguments est à développer dans cette tâche. Pour démontrer que la suite $\{a_n\}$ est bornée, l'étudiant doit avoir recours à l'approximation de l'aire d'une région par le calcul de la somme des aires de rectangles inscrits et circonscrits au graphique de f sur un intervalle donné, au théorème fondamental du calcul, à la définition d'une suite bornée ainsi qu'à certains arguments de nature algébrique. En ce qui concerne la démonstration de la monotonie de la suite $\{a_n\}$, l'étudiant doit faire intervenir la définition d'une suite monotone, le théorème de Lagrange, la décroissance de la

fonction $g'(x)$ (l'étudiant doit comprendre comment faire intervenir la fonction $g(x) = \ln x$ et le lien entre sa dérivée et les termes de la suite), le fait que celle-ci est bornée sur l'intervalle $]n, n+1[$ ainsi que plusieurs arguments de nature algébrique. La démonstration que la suite $\{a_n\}$ est bornée et la démonstration qu'elle est monotone sont faites parallèlement. Une fois ces deux éléments démontrés, il est possible de déduire, à l'aide du théorème 6.5, que la suite $\{a_n\}$ est convergente. Il est selon nous important de mentionner que le théorème 6.5 a été présenté sans démonstration aux étudiants. Ce théorème n'est accompagné d'aucune justification ou représentation. À notre avis, cette lacune dénature quelques peu l'activité de démonstration et soulève des questions fondamentales : les arguments intervenant dans une démonstration doivent-ils avoir été démontrés au préalable ou certains peuvent-ils être utilisés sans démonstration? Si c'est le cas, quels arguments peuvent être considérés comme vrais sans faire l'objet de justifications?

- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Des changements de point de vue sont nécessaires pour réaliser cette démonstration. Dans un premier temps, l'étudiant doit détourner son attention de la suite $\{a_n\}$ pour se concentrer sur la fonction $f(x)$ qu'il aura introduite. C'est effectivement en bornant l'intégrale de la fonction f qu'il réussira à borner la suite $\{a_n\}$. Dans un second temps, la démonstration de la monotonie de la suite $\{a_n\}$ nécessite l'introduction de la fonction $g(x)$. L'étudiant doit, l'espace d'un instant, mettre de côté l'expression $a_{n+1} - a_n$ pour construire la fonction $g(x)$ qui lui permettra de conclure que la suite est bel et bien monotone. L'étude de la fonction $g(x)$ est une étape-clé de la démonstration et nécessite un changement d'objet d'étude. En plus de ces changements de points de vue, nous aimerions souligner que, bien que non essentiel, le recours au registre graphique peut s'avérer utile pour construire la démonstration et ce, particulièrement lorsque l'étudiant veut démontrer que la suite $\{a_n\}$ est bornée.
- *Y a-t-il une sélection d'informations à effectuer?* Une sélection d'informations est à effectuer par l'étudiant lors de l'application du théorème 6.5. Alors que l'énoncé du théorème mentionne les valeurs vers lesquelles converge une suite dans différents cas, l'étudiant ne doit utiliser que l'énoncé général du théorème, à savoir « si une

suite $\{a_n\}$ est monotone et bornée, alors elle converge ». La valeur vers laquelle converge une telle suite n'est pas un élément qui doit être pris en considération pour la démonstration de la sous-question a).

- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* Deux objets doivent être introduits par l'étudiant, soit les fonctions $f(x)$ et $g(x)$. La prise en compte de ces fonctions est un défi de taille pour l'étudiant qui doit délaisser la suite $\{a_n\}$ pour introduire des éléments lui permettant de déduire des comportements de cette suite. Une fois la fonction f créée, un formalisme entourant le calcul de l'intégrale de cette fonction doit être mis en place : introduire une partition régulière P de manière à pouvoir calculer la somme des aires des rectangles inscrits et la somme des aires des rectangles circonscrits à la courbe.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* Une quantification est à utiliser pour exprimer le domaine de définition de la fonction f.

4.1.4 Éléments de formalisme présents dans les démonstrations étudiées

Lors de nos analyses des démonstrations proposées par le manuel de Charron et Parent, nous avons porté une attention particulière aux différents éléments de formalisme requis pour comprendre ou réaliser ces démonstrations. L'objectif était de repérer les principaux éléments de formalisme ciblés par le manuel. Après avoir étudié l'ensemble des démonstrations proposées, nous avons remarqué que certains éléments de formalisme intervenaient dans plusieurs tâches. Les éléments qui revenaient le plus souvent ont été retenus et sont présentés ci-dessous. Pour les illustrer efficacement, nous avons décidé de présenter, pour chaque élément, une démonstration faisant intervenir celui-ci.

4.1.4.1 Présence d'intervalles ouverts et d'intervalles fermés

Cet élément de formalisme a principalement été relevé dans les tâches et les démonstrations que nous avons étudiées au chapitre 1 du manuel. Un des objectifs de ce chapitre est de présenter aux étudiants des théorèmes centraux en analyse, tels que le théorème de Rolle analysé ci-dessous. Ceux-ci ont souvent pour hypothèses qu'une fonction doit être continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. La présence de ces intervalles soulèvera, selon nous, un questionnement chez certains étudiants qui tenteront de comprendre pourquoi une telle nuance doit être apportée.

Parmi les 37 tâches et démonstrations analysées, 13[19] ont fait intervenir cet élément de formalisme.

Théorème 1.4 : Théorème de Rolle et sa démonstration[20] (p. 19)

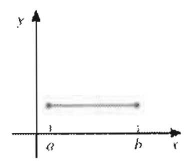
THÉORÈME 1.4 THÉORÈME DE ROLLE

Si f est une fonction telle que
1) f est continue sur $[a, b]$;
2) f est dérivable sur $]a, b[$;
3) $f(a) = f(b)$,
alors il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve

1^er^ cas : $f(x) = k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Si f est une fonction constante sur $[a, b]$,
alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$,
d'où $f'(c) = 0$ quel que soit $c \in]a, b[$.



2^e^ cas : $f(x) \neq k$.

D'après le théorème des valeurs extrêmes, f possède un minimum absolu et un maximum absolu sur $[a, b]$.

Puisque f n'est pas égale à une fonction constante et que $f(a) = f(b)$, f possède donc un maximum absolu ou un minimum absolu sur $]a, b[$.

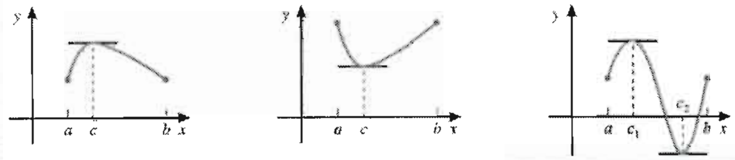
---

[19] En plus du théorème de Rolle présenté dans cette section, les démonstrations suivantes mettent en jeu le même élément de formalisme : théorème unicité d'un zéro (Charron et Parent, 2004, p. 21), théorème de Lagrange (*idem*, p. 22), corollaire du théorème de Lagrange (*idem*, p. 25), exercices 6 et 10 (*idem*, p. 28), exercices récapitulatif 10 et 11 (*idem*, p. 46) , problèmes synthèse 16, 17, 18 et 19 (*idem*, p. 48) et problème synthèse 25 (*idem*, p. 366).

[20] Le théorème de Rolle et sa démonstration ont été numérisés du manuel (Charron et Parent, 2004, p. 19) afin de montrer précisément les représentations graphiques qui accompagnent la démarche proposée.

Soit $c \in]a, b[$, tel que $(c, f(c))$ est un point de maximum (ou de minimum) ; ainsi, $f'(c) = 0$ d'après le théorème 1.3.

Représentations graphiques



Analyse de la démonstration du théorème de Rolle

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Les connaissances à mettre en fonctionnement sont la notion de continuité et de dérivabilité ainsi que leur interprétation graphique. L'étudiant doit également être en mesure de saisir le lien qui unit une dérivée nulle et une tangente horizontale.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les définitions de fonction constante, de fonction continue et de fonction dérivable ont été vues dans le cours de calcul différentiel (*NYA*). Par contre, les deux théorèmes qui sont utilisés dans la démonstration, soit le théorème des valeurs extrêmes[21] et le théorème 1.3[22], ont été introduits dans le manuel tout juste avant le théorème de Rolle.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine de l'analyse.

---

[21] « Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c)$ soit égale au maximum absolu de f sur $[a, b]$, et il existe également au moins un $d \in [a, b]$ tel que $f(d)$ soit égale au minimum absolu de f sur $[a, b]$. » (Charron et Parent, 2004, p. 17)

[22] « Si f est une fonction telle que : 1) f est continue sur $[a, b]$; 2) f est dérivable sur $]a, b[$; 3) $c \in]a, b[$, où $(c, f(c))$ est un point de maximum (ou un point de minimum) absolu ou relatif de f, alors $f'(c) = 0$. » (Charron et Parent, 2004, p. 18)

Deuxième et troisième axe d'analyse : Les tâches prescrites et les activités attendues des étudiants

- *Qu'est-ce qui est attendu de l'étudiant par la présentation de cette démonstration? Des indices facilitant la réalisation/compréhension de la tâche sont-ils fournis?* On attend de l'étudiant qu'il lise et comprenne le théorème et la démonstration qui lui sont présentés. Pour l'aider à visualiser et comprendre le théorème, des représentations graphiques de fonctions répondant aux hypothèses du théorème de Rolle lui sont présentées.
- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes? Des étapes ont-elles été introduites dans la démonstration?* L'énoncé comporte une seule étape. En ce qui concerne la démonstration, deux étapes sont introduites, soit la démonstration du cas $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$, et la démonstration du cas $f(x) \neq k$.
- *S'agit-il d'un type de démonstrations qui était ignoré jusqu'alors?* Le théorème est un problème d'existence, problème qui ne fait pas partie du paysage mathématique des élèves du secondaire.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Une disjonction de cas est requise.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Les notations fonctionnelle et ensembliste sont impliquées dans l'énoncé du théorème. Un élément de complexité lié au formalisme utilisé est sans aucun doute l'utilisation d'un intervalle fermé pour la continuité et d'un intervalle ouvert pour la dérivabilité de f. Les fondements de cette nuance sont complexes et dépassent, selon nous, la compréhension de plusieurs étudiants. Plusieurs étudiants passeront sans doute outre ce « détail », qui est pourtant d'une importance non-négligeable puisqu'il vise à formuler le théorème dans le cas le plus général possible. Un second élément de formalisme venant complexifier cette démonstration est la façon de présenter mathématiquement les deux cas qui doivent être pris en considération par l'étudiant. Dans un premier temps, l'apprenant doit étudier le cas où f est une fonction constante, c'est-à-dire le cas où $f(x) = k$. Cette définition symbolique de la fonction constante peut être ambiguë pour certains étudiants, qui ne seraient pas capables de départager le rôle des symboles x, qui est une variable, et k, qui n'en est pas une. De plus, le passage

de l'expression $f(x) = k$ à l'expression $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ est une étape nécessitant une bonne compréhension. En effet, l'étudiant doit déduire de la définition de la fonction constante la valeur de sa dérivée pour chacun des éléments de son domaine de définition. Cette déduction peut aussi bien s'appuyer sur le calcul explicite de la dérivée de f que sur la représentation graphique de la fonction constante f. Le passage qui est par la suite effectué entre les expressions $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ et $f'(c) = 0$ quel que soit $c \in]a, b[$ est, à nos yeux, une autre source de difficulté. L'étudiant ne doit pas croire qu'il s'agit ici d'un simple changement de variable où x est remplacé par c. Il doit plutôt comprendre que c est **fixé**, mais que cette valeur fixée peut être n'importe laquelle des valeurs comprises dans l'intervalle $]a, b[$. En ce qui concerne le deuxième cas à étudier, $f(x) \neq k$, l'étudiant doit comprendre que la fonction f ne peut pas valoir k pour chacun des éléments de son domaine de définition, cependant, il est possible que $f(x) = k$ pour certains éléments de $[a, b]$.

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est relativement simple. La démonstration du théorème requiert la démonstration de deux cas précis et la structure de chacune de ces « sous-démonstrations » est simple et linéaire. L'étudiant doit cependant comprendre pourquoi la preuve est scindée en deux cas et pourquoi le résultat invoqué dans le deuxième cas ne s'applique pas en toute généralité.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments doit être développée : définition de la fonction constante, théorème des valeurs extrêmes et théorème 1.3. Ces deux théorèmes sont d'ailleurs présentés aux étudiants sans toutefois être accompagnés d'une démonstration ou d'une preuve. Le manuel prend soin d'illustrer les théorèmes, mais aucune argumentation n'est proposée à l'étudiant. Une telle utilisation de théorèmes non démontrés peut s'avérer « dangereuse » puisqu'un apprenant peut en déduire qu'il est correct d'utiliser des arguments non fondés lors de la construction d'une démonstration. De plus, l'utilisation de tels arguments soulève une question importante : lorsqu'on fait une démonstration, quels arguments doivent être démontrés et lesquels peuvent être tenus pour acquis?

- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Outre la disjonction de cas qui doit être effectuée sans indication, aucun changement de point de vue n'est à introduire. Par contre, bien que cela ne soit pas discuté dans le manuel, un passage au registre graphique est requis puisque certaines étapes de la démonstration sont illustrées par des représentations graphiques qui doivent être décodées par l'étudiant. Une pleine compréhension de la démonstration du théorème de Rolle proposée par le manuel passe donc par la compréhension des énoncés et des représentations graphiques qui composent la démonstration, ainsi que des liens qui unissent ces énoncés à leur représentation graphique.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* Un quantificateur existentiel écrit en langage naturel est à prendre en considération dans l'énoncé du théorème. De plus, il est précisé dans l'énoncé qu'il « existe **au moins un** nombre c [c'est nous qui soulignons] » ce qui est déjà sous-entendu par le quantificateur existentiel. Cette précision supplémentaire facilite la tâche aux étudiants qui auraient une mauvaise compréhension des quantificateurs. Certains quantificateurs écrits en langage naturel sont également présents dans la démonstration et doivent être pris en considération. De plus, un quantificateur universel est sous-entendu. En effet, pour le premier cas, lorsqu'il est écrit que $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$, il est implicite que cette égalité est vraie $\forall x \in [a, b]$.

4.1.4.2 Pluralité de symboles littéraux (variables, paramètres, constantes...)

Le second élément de formalisme ayant capté notre attention est la présence, dans une même tâche, de plusieurs symboles littéraux ayant des rôles et statuts différents. Cet élément de formalisme a été observé dans 14[23] des 37 tâches et démonstrations étudiées. Le théorème de

[23] Outre les démonstrations traitées explicitement dans cette section, les démonstrations suivantes font intervenir le même élément de formalisme : théorème unicité d'un zéro (Charron et Parent, 2004, p. 21), corollaire du théorème de Lagrange (*idem*, p. 25), problèmes synthèse 11 et 19 (*idem*, pp. 47-48), théorème fondamental du calcul (*idem*, p. 134), problème synthèse 21 (*idem*, p. 172), théorèmes 5.1, 5.2 et 5.3 (*idem*, pp. 251, 255 et 259), exercice 5 (*idem*, p. 262), théorème 6.9 (*idem*, p. 301) et exercice récapitulatif 24 (*idem*, p. 363).

Rolle qui a été présenté précédemment en est un bon exemple, puisque les symboles x, c et k doivent être bien interprétés pour que la démonstration soit pleinement comprise. La tâche qui est analysée ci-dessous est un autre excellent exemple. Elle renferme plusieurs symboles, x, n, M et a. Les difficultés sous-jacentes sont également liées à l'élément de formalisme *Calculs, manipulation des formules* qui est traitée un peu plus loin dans le corpus (voir § 4.1.4.6).

Problème synthèse 22, chapitre 5 (p. 278)

Démontrer que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$, où $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Réponse attendue du problème synthèse 22, chapitre 5

La solution n'apparaissant nulle part dans le manuel, nous avons dû élaborer notre propre démonstration. Pour ce faire, nous avons utilisé des notions présentées antérieurement dans le manuel. Ceci nous permet d'affirmer que cette solution pourrait être attendue d'un étudiant de niveau collégial.

Il est possible d'écrire $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M x^n e^{-x} dx$ (définition de l'intégrale impropre fournie à la section théorique 5.5, page 266). La tâche revient donc, dans un premier temps, à évaluer l'intégrale $\int_0^M x^n e^{-x} dx$ pour ensuite calculer la limite de l'expression obtenue lorsque $M \to +\infty$.

1. Pour évaluer l'intégrale, nous allons utiliser la formule de réduction explicitée au chapitre 4 (p. 183) : $\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\, dx$, où $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

$$\begin{aligned}\int_0^M x^n e^{-x} dx &= (-x^n e^{-x})|_0^M + n\int_0^M x^{n-1} e^{-x}\, dx \\ &= -M^n e^{-M} + n\int_0^M x^{n-1} e^{-x}\, dx\end{aligned}$$

$$= -M^n e^{-M} + n\left[(-x^{n-1}e^{-x})|_0^M + (n-1)\int_0^M x^{n-2}e^{-x}\,dx\right]$$

$$= -M^n e^{-M} + n(-M^{n-1}e^{-M}) + n(n-1)\int_0^M x^{n-2}e^{-x}\,dx$$

$$= -M^n e^{-M} - nM^{n-1}e^{-M} + n(n-1)\left[(-x^{n-2}e^{-x})|_0^M + (n-2)\int_0^M x^{n-3}e^{-x}\,dx\right]$$

$$= -M^n e^{-M} - nM^{n-1}e^{-M} - n(n-1)M^{n-2}e^{-M} + n(n-1)(n-2)\int_0^M x^{n-3}e^{-x}\,dx$$

$$\vdots$$

$$= -M^n e^{-M} - nM^{n-1}e^{-M} - n(n-1)M^{n-2}e^{-M} - \cdots - n(n-1)(n-2)\ldots 2M\cdot e^{-M} + n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\int_0^M x^0 e^{-x}\,dx$$

$$= -M^n e^{-M} - nM^{n-1}e^{-M} - n(n-1)M^{n-2}e^{-M} - \cdots - n(n-1)(n-2)\ldots 2M\cdot e^{-M} + n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1(-e^{-x})|_0^M$$

$$= -M^n e^{-M} - nM^{n-1}e^{-M} - n(n-1)M^{n-2}e^{-M} - \cdots - n(n-1)(n-2)\ldots 2M\cdot e^{-M} + n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1[-e^{-M} + 1]$$

$$= -M^n e^{-M} - nM^{n-1}e^{-M} - n(n-1)M^{n-2}e^{-M} - \cdots - n(n-1)(n-2)\ldots 2M\cdot e^{-M} - n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1(e^{-M}) + n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$$

2. Évaluons maintenant la limite de l'expression trouvée en 1.

$$
\begin{aligned}
\lim_{M\to+\infty}\int_0^M x^n e^{-x}dx &= \lim_{M\to+\infty}[-M^n e^{-M} - nM^{n-1}e^{-M} - n(n-1)M^{n-2}e^{-M} - \cdots \\
&\qquad - n(n-1)(n-2)\ldots 2M\cdot e^{-M} \\
&\qquad - n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1(e^{-M}) \\
&\qquad + n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1] \\
&= \lim_{M\to+\infty}(-M^n e^{-M}) + \lim_{M\to+\infty}(-nM^{n-1}e^{-M}) \\
&\qquad + \lim_{M\to+\infty}(-n(n-1)M^{n-2}e^{-M}) + \cdots \\
&\qquad + \lim_{M\to+\infty}(-n(n-1)(n-2)\ldots 2M\cdot e^{-M}) \\
&\qquad + \lim_{M\to+\infty}\left(-n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1(e^{-M})\right) \\
&\qquad + \lim_{M\to+\infty}(n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1) \\
&= n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 \\
&= n!
\end{aligned}
$$

car en appliquant la règle de l'Hospital à i reprises, on trouve que $\lim_{M\to+\infty}\left(-M^i e^{-M}\right) = 0, \forall i \in [0,n]$.

■

Analyse du problème synthèse 22, chapitre 5

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Une connaissance de la notion d'intégrale impropre est essentielle pour réaliser la tâche puisqu'il s'agit du point de départ de la démonstration. La notion d'intégrale impropre est sous-tendue par les notions de limite et d'intégrale définie et leurs propriétés, qui doivent aussi être connues des étudiants. La connaissance de la formule de réduction de $\int x^n e^{ax}\,dx$ est aussi utile pour construire la démonstration. Cependant, un étudiant pourrait décider de ne pas utiliser directement la formule fournie au chapitre 4 pour plutôt évaluer l'intégrale à l'aide de la technique d'intégration par parties. C'est d'ailleurs cette méthode qui a été mise à profit pour déterminer la formule de réduction utilisée. Pour la solution explicitée précédemment, nous avons choisi d'utiliser la formule de réduction directement, car on peut s'attendre à ce que les étudiants ne cherchent pas à la redémontrer et l'utilise telle quelle.

- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* La définition d'intégrale impropre a été présentée à la section théorique 5.5 du manuel. Il s'agit donc d'une nouvelle notion. Cependant, précisons qu'une section complète d'exercices de nature calculatoire, section précédant les *Problèmes synthèses*, porte sur cette notion. En ce qui concerne la notion de limite et d'intégrale définie, la première est connue depuis le cours *Calcul différentiel NYA* tandis que la seconde a été présentée au chapitre 3. La formule de réduction est quant à elle donnée à la section théorique 4.1 du manuel.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au calcul intégral.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* La valeur de vérité de l'énoncé est connue. Aucun indice n'est fourni dans l'énoncé.
- *S'agit-il d'un type de problème qui était ignorés jusqu'alors?* Il s'agit de la première démonstration portant sur la notion d'intégrale impropre.
- *Quel est l'importance du formalisme dans la tâche?* Cette tâche requiert l'utilisation de plusieurs éléments de symbolisme. En effet, l'étudiant doit être en mesure de manipuler adéquatement le symbolisme lié à l'intégrale définie, celui lié à la notion de limite ainsi que le symbolisme présent dans la formule de réduction utilisée. La combinaison de ces éléments complique la tâche de l'étudiant qui doit départager le rôle des lettres a, x, n et M dans la tâche. De plus, le grand nombre d'étapes requises demande à l'étudiant une gestion efficace et organisée des différentes composantes entrant en jeu dans l'évaluation de l'intégrale $\int_0^M x^n e^{-x} dx$ ainsi que dans

l'évaluation de $\lim_{M \to +\infty} \int_0^M x^n e^{-x} dx$. Pour construire la démonstration demandée, l'étudiant doit également connaître la signification du symbole factoriel.

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est linéaire et simple. Cependant, nous croyons que la gestion difficile du symbolisme et l'intervention de certains arguments à répétition viendront masquer la simplicité de la structure déductive.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Les mises en fonctionnement des connaissances sont de niveau disponible. Aucun outil n'est fourni à l'étudiant qui doit puiser dans son bagage de connaissances pour mener à terme la démonstration.
- *Y a-t-il lieu d'introduire des étapes?* Pour résoudre cette tâche, nous avons choisi d'introduire deux étapes : l'évaluation de l'intégrale $\int_0^M x^n e^{-x} dx$ dans un premier temps et l'évaluation de la limite du résultat obtenu dans un second temps. Précisons qu'il est possible de combiner ces deux étapes en une seule. Cependant, nous croyons que, dû à la lourdeur du symbolisme à gérer et à la longueur des expressions à considérer, la partition de la solution en deux étapes facilite la tâche à l'étudiant en l'empêchant d'être « étourdi » par l'abondance de symboles.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est à développer : définition de l'intégrale impropre, formule de réduction de $\int x^n e^{ax}\, dx$, théorème fondamental du calcul, propriétés des limites (si f et g admettent des limites finies en a alors
$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g;$$
si f admet une limite finie en a et si k est une constante réelle, alors
$$\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x)),$$
la règle de L'Hospital ainsi que des arguments de nature algébrique.
- *Y a-t-il à répéter un argument?* Plusieurs arguments doivent être répétés : la formule de réduction, le théorème fondamental du calcul ainsi que la règle de L'Hospital.

- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de point de vue est nécessaire puisque l'étudiant doit transformer l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ en une autre forme, soit $\lim_{M \to +\infty} \int_0^M x^n e^{-x} dx$.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* Un quantificateur universel a été introduit dans la démonstration.

4.1.4.3 Recours à des représentants génériques de prime abord arbitraires

Plusieurs démonstrations étudiées font intervenir des éléments génériques, qui pourront sembler à l'étudiant de prime abord arbitraires, desquels certaines déductions sont réalisées. Ces déductions sont par la suite généralisées à l'ensemble des éléments, mais cette généralisation n'ira pas de soi pour tous les étudiants. De plus, de tels représentants doivent souvent être introduits par l'étudiant ce qui constitue une difficulté supplémentaire. Parmi les 37 tâches et démonstrations considérées, 8[24] font intervenir cet élément de formalisme. En voici un exemple.

Corollaire du théorème de Lagrange : Corollaire 1

Le théorème et la démonstration qui suivent sont tous deux issus du manuel (p. 25).

Si f est une fonction telle que

1) f est continue sur $[a, b]$;
2) $f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[$,

alors $\forall x \in [a, b], f(x) = C$, où C est une constante réelle.

---

[24] Outre la démonstration du corollaire du théorème de Lagrange présentée dans cette section, les démonstrations suivantes font intervenir le même élément de formalisme : théorème unicité d'un zéro (Charron et Parent, 2004, p. 21), problème synthèse 19 (*idem*, pp. 48), théorème fondamental du calcul (*idem*, p. 134), théorèmes 5.1, 5.2 et 5.3 (*idem*, pp. 251, 255 et 259) et théorème 6.9 (*idem*, p. 301).

Démonstration du Corollaire du théorème de Lagrange

Soit $x_1 < x_2$, deux nombres quelconques de $[a, b]$. Appliquons le théorème de Lagrange à f sur $[x_1, x_2]$. Puisque f est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$, car $[x_1, x_2]$ est inclus dans $[a, b]$, alors il existe un nombre $c \in]x_1, x_2[$ tel que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \ \ (car\ f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[\ )$$

$$f(x_2) - f(x_1) = 0\,.$$

Donc

$$f(x_2) = f(x_1)\,,$$

d'où $f(x) = C, \forall x \in [a, b]$ puisque x_1 et x_2 étaient quelconques.

■

Analyse de la démonstration du corollaire du théorème de Lagrange

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont la ou les connaissances mises en fonctionnement ?* Les connaissances à mettre en fonctionnement sont les notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Le théorème de Lagrange a nouvellement été introduit aux étudiants tandis que les autres notions ont déjà été traitées dans le cours *Calcul différentiel NYA*.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine de l'analyse.

Deuxième et troisième axe d'analyse : Les tâches prescrites et les activités attendues des étudiants

- *Qu'est-ce qui est attendu de l'étudiant par la présentation de cette démonstration? Des indices facilitant la réalisation/compréhension de la tâche sont-ils fournis?* Il est attendu que l'étudiant lise et comprenne le théorème et sa démonstration. Aucun indice ou explication informelle n'est fourni.
- *S'agit-il d'un type de démonstrations qui était ignoré jusqu'alors?* Il s'agit de la première démonstration du manuel nécessitant l'utilisation du théorème de Lagrange.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* La tâche nécessite la compréhension et l'utilisation de la notation fonctionnelle et de la notation ensembliste. La démonstration de ce théorème requiert l'insertion de deux éléments. En effet, deux nombres quelconques x_1 et x_2 de $[a, b]$ doivent être introduits dès le début de la démonstration. Ceci soulèvera sans doute des questions chez certains étudiants qui voudront comprendre d'où sont issus ces éléments et quel est leur rôle. La notation choisie dans le manuel, x_1 et x_2, peut selon nous causer des problèmes à certains étudiants qui croiront que ces deux éléments sont fixés. Effectivement, la notation « x adjoint d'un indice » est souvent utilisée pour représenter **un** élément précis dans un intervalle. Cependant, dans le cas présent, l'étudiant doit comprendre que les éléments x_1 et x_2 peuvent représenter n'importe quels nombres de $[a, b]$ et donc, que le raisonnement qui est présenté est valable pour tous les couples d'éléments composant cet intervalle. De cette constatation, l'étudiant peut déduire que pour chacun des éléments du domaine de la fonction, la valeur de l'ordonnée associée sera la même. Pour exprimer symboliquement cette affirmation, une constante C doit être introduite. Les étudiants doivent alors comprendre que la valeur de cette constante C est en fait la valeur de l'ordonnée de chacun des points du domaine de f. C'est le caractère arbitraire mais générique des éléments x_1 et x_2 qui permet de généraliser les conclusions effectuées sur $[x_1, x_2]$ à tout $[a, b]$. Comme auparavant, la présence d'intervalles ouverts et fermés est source de complexité.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple et linéaire.

- *Y a-t-il plusieurs arguments développés à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments doit être développée : propriété de continuité et dérivabilité d'une fonction et le théorème de Lagrange. Tel qu'il a été relevé dans l'analyse de la démonstration du théorème de l'unicité d'un zéro, la continuité et la dérivabilité d'une fonction sur un sous-intervalle n'est justifiée que par la continuité et la dérivabilité de cette fonction sur l'intervalle incluant le sous-intervalle.
- *Un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation est-il introduit (sans indication)?* La démonstration est centrée sur deux nombres quelconques de $[a, b]$, introduits sans indication. L'étudiant doit momentanément mettre de côté les données de l'énoncé pour se réorienter vers les deux éléments introduits. L'application du théorème de Lagrange se fait d'ailleurs avec ces éléments. Pour répondre à la question, l'étudiant doit comprendre que pour démontrer que la fonction f est constante, il faut démontrer que la variation en ordonnée de la fonction f est nulle et ce, peu importe les éléments du domaine choisis.
- *Une quantification est-elle à repérer?* Un quantificateur existentiel est écrit en langage naturel. Les autres quantificateurs de la démonstration sont écrits symboliquement. De plus, l'étudiant doit comprendre que la démonstration s'applique à toute paire d'éléments x_1 et x_2 de $[a, b]$.

4.1.4.4 Travail sur les inégalités

La manipulation d'inéquations est une habileté qui est sollicitée dans 6[25] des 37 tâches et démonstrations proposées dans le manuel étudié. Nous l'incluons dans la rubrique *Éléments de formalisme* à cause du travail syntaxique qu'elle suppose. Plus précisément, l'étudiant est appelé à borner une expression donnée. La découverte de borne supérieure ou inférieure n'est pas toujours une tâche facile à accomplir, encore moins quand l'étudiant doit lui-même

[25] Outre la démonstration présentée dans cette section, les démonstrations suivantes font intervenir le même élément de formalisme : exercice 10 (Charron et Parent, 2004, p. 28), problèmes synthèse 16 et 17 (*idem*, pp. 48), problème synthèse 20 (*idem*, p. 171) et problème synthèse 25 (*idem*, p. 366).

comprendre qu'une telle borne doit être introduite dans la démonstration. Ce travail sur les inégalités est, selon nous, plus que pertinent puisqu'il prépare à « affronter » les définitions en $\varepsilon - \delta$ qui sont une partie importante des cours universitaires d'analyse. Les démonstrations demandées dans ces cours d'initiation à l'analyse réelle reposent souvent sur ces définitions en $\varepsilon - \delta$ et demande à l'étudiant de manipuler les inégalités qu'elles comportent.

Exercice 6, section 1.2 (p. 28)

Utiliser le théorème de Lagrange pour démontrer que :

a) $\tan x > x$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$
b) $e^x \geq x + 1$, où $x \in [0, +\infty$
c) $\text{Arc}\tan x < x$, où $x \in]0, +\infty$
d) $(1+x)^n > (1+nx)$, où $n > 1$ et $x > 0$

Puisque les quatre éléments de la question impliquent des raisonnements analogues, nous présenterons l'analyse d'un seul, les analyses des autres étant similaires. Notre choix s'est porté sur la sous-question d) car la fonction sur laquelle doivent travailler les étudiants nécessite davantage de réflexion que pour les items a, b ou c.

Réponse attendue de l'exercice 6, section 1.2

La réponse ci-dessous est tirée du solutionnaire du manuel (p. 371). Cependant, la vérification des hypothèses ainsi que certaines précisions ont été ajoutées pour compléter la solution. Les éléments qui ont été ajoutés figuraient dans le corrigé de la sous-question a), mais ont été laissés de côté par les auteurs du manuel dans les sous-questions subséquentes, sans doute par souci d'alléger la présentation.

Soit $f(x) = (1+x)^n - 1 - nx$ sur $[0, x]$, où $x \in]0, +\infty$.

1) f est continue sur $[0, x]$, où $x \in]0, +\infty$, car f est une somme de fonctions continues sur cet intervalle.
2) f est dérivable sur $[0, x]$, car $f'(x) = n\,(1+x)^{n-1} - n$ est définie sur l'ensemble des nombres réels quand $n > 1$.

Les hypothèses du théorème de Lagrange étant vérifiées, $\exists c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

$$\frac{(1 + x)^n - 1 - nx - 0}{x - 0} = n(1 + c)^{n-1} - n$$

$$\frac{(1 + x)^n - 1 - nx}{x} > 0 \ (car\ (1 + c)^{n-1} > 1),$$

d'où $(1+ x)^n > (1+ nx)$, $\forall x \in]0, +\infty$.

■

Analyse de l'exercice 6, section 1.2

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont la ou les connaissances mises en fonctionnement ?* Les connaissances à mettre en fonctionnement sont les notions de continuité et de dérivabilité. L'étudiant doit être en mesure de comprendre le théorème de Lagrange et de l'utiliser dans ce contexte. Une compréhension des inégalités, et plus précisément une intuition des bornes (inférieures ou supérieures) possibles pour une fonction donnée, sur un intervalle donné, est requise.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* La notion de fonction continue et de fonction dérivable ont été vues en *Calcul différentiel NYA*. Par contre, le théorème de Lagrange a été introduit dans la section théorique du manuel adjacente à la section d'exercices de laquelle est tirée cette tâche. La notion de borne, bien que connue des étudiants, est utilisée ici dans un contexte de démonstration ce qui peut être nouveau.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine de l'analyse.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte quatre sous-questions indépendantes, mais nécessitant la mise en œuvre de raisonnements similaires.
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* La véracité de l'inégalité à démontrer n'est pas questionnée dans la tâche : la valeur de vérité de l'énoncé est connue. Des indices facilitant la résolution de la tâche sont également fournis. En effet, le théorème qui doit être utilisé pour résoudre le problème est explicitement mentionné dans l'énoncé. De plus, dans la section théorique du manuel, un exemple[26] très similaire à l'exercice 6 est résolu. Il semblerait donc qu'on présente la marche à suivre à l'étudiant en espérant que celui-ci l'applique à d'autres inégalités dans la section d'exercices.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Le raisonnement déductif est en jeu dans la tâche, mais il est pris en charge par le calcul.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Les notations fonctionnelle et ensembliste sont utilisées dans la tâche. La présence de plusieurs formes d'intervalles est un élément de complexité. En effet, la fonction *f* est continue sur un intervalle fermé et dérivable sur un intervalle ouvert. De plus, le fait que l'inégalité $x > 0$ soit exprimée avec la notation ensembliste dans la solution, $x \in]0, +\infty$, peut être une difficulté pour certains. L'utilisation de l'inégalité, qui intervient lorsque $(1+c)^{n-1}$ est borné inférieurement par 1, est aussi un élément qui peut s'avérer problématique pour certains étudiants qui ne comprendraient pas pourquoi il est nécessaire de passer d'une égalité à une inégalité. Borner l'expression $(1+c)^{n-1}$ par 1 ne va pas du tout de soi : cela demande à l'étudiant d'avoir une bonne compréhension de la notion d'exposant et de prendre simultanément en considération les valeurs possibles de c et de n. Ce jeu sur les bornes et les inégalités est loin d'être évident pour un étudiant de niveau collégial. D'ailleurs, il est important de préciser que le

[26] « Exemple 2 : Utilisons le théorème de Lagrange pour démontrer que $(x + \ln x) < x, \forall x \in]1, +\infty$. » (Charron et Parent, 2004, pp. 23-24)

corrigé n'explique pas pourquoi $(1+c)^{n-1}$ peut être borné par 1. Une telle explication aurait, selon nous, profité à l'étudiant.

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple et linéaire. En fait, elle repose sur un argument principal, soit le théorème de Lagrange.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est mobilisable. Bien que le théorème à utiliser soit mentionné dans l'énoncé de la tâche et que la recette à suivre ait été présentée dans la section théorique 1.2, la fonction qui doit être utilisée dans la démonstration n'est pas connue de l'étudiant, qui doit la construire lui-même. C'est cet élément qui a motivé notre choix de classer cette tâche au niveau des mises en fonctionnement mobilisables et non techniques.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments doit être développée : le théorème de Lagrange, l'énoncé qui affirme que la somme de fonctions continues est continue ainsi que l'existence d'une borne inférieure pour l'expression $(1+c)^{n-1}$.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de point de vue est requis puisque la démonstration se déroule autour d'une fonction f qui doit être construite par l'étudiant.
- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* Une fonction f doit être construite par l'étudiant.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* Un quantificateur existentiel, $\exists c$, et un quantificateur universel, $(1+x)^n > (1+nx) \quad \forall x \in]0,+\infty$, sont à prendre à considération.

Avant de traiter les autres éléments de formalisme ayant retenu notre attention, nous voudrions faire une brève parenthèse à propos de la tâche ci-dessus. Plutôt qu'un travail d'organisation déductive et logique, ce qui est retenu ici comme travail sur la démonstration met avant tout en jeu des techniques très calculatoires nécessitant d'avoir au préalable une bonne intuition des fonctions en jeu. Selon nous, ce choix d'exercice porte les étudiants à croire que l'activité de démonstration se limite à la réalisation de manipulations algébriques sur des objets, tels que la fonction *f*, ayant été introduits dans la démonstration de façon pratiquement magique.

4.1.4.5. Travail sur les limites et les infinitésimaux

La notion de limite et le formalisme qui s'y rattache sont exploités dans plusieurs démonstrations étudiées (5[27] parmi les 37 analysées). Bien que la définition de limite en $\varepsilon - \delta$ ne soit pas utilisée au niveau collégial et que tout ce qui concerne un passage à la limite soit principalement traité sur un mode intuitif et informel, un travail syntaxique non négligeable est à prendre en considération. Effectivement, un travail syntaxique avec les paramètres (bornes d'intégration, limite vers quoi on fait tendre la variable libre...) et avec les éléments infinitésimaux (notation de Leibniz ou autre) ont été relevés lors de l'analyse du manuel. Par exemple, dans la démonstration du théorème fondamental du calcul (voir § 4.1.1.1), la notion de limite est à utiliser. L'étudiant doit comprendre pourquoi il est nécessaire de prendre en considération la limite d'une expression donnée. Une fois cette étape franchie, l'étudiant doit modifier les paramètres de la limite, ce qui demande une bonne compréhension de la situation. Une démonstration présentée au chapitre 5 suscite également de l'étudiant qu'il travaille avec la notion de limite. Tout comme pour la démonstration du théorème fondamental du calcul, la limite apparaît vers la fin de la démonstration sans être justifiée. Cette justification n'est sans doute pas évidente pour plusieurs étudiants qui tenteront de comprendre pourquoi celle-ci à été introduite. L'analyse de cette démonstration est présentée ci-dessous.

---

[27] Outre les démonstrations traitées explicitement dans cette section, les démonstrations suivantes font intervenir le même élément de formalisme : problème synthèse 19 (Charron et Parent, 2004, p. 171), théorèmes 5.2 et 5.3 (*idem*, pp. 255 et 259).

Théorème 5.1 (p. 251)

Soit une fonction f, telle que f' est continue sur $[a, b]$. La longueur L de la courbe joignant les points $R(a, f(a))$ et $S(b, f(b))$ est donnée par $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ ou par $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ (notation de Leibniz).

Démonstration du théorème 5.1[28]

La démonstration du théorème 5.1 présentée ci-dessous est issue du manuel (p. 252).

Preuve

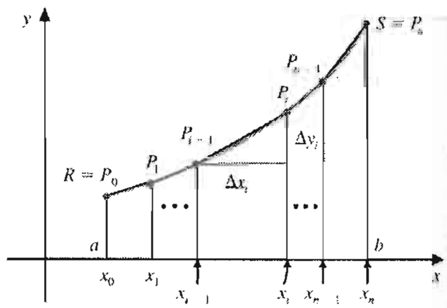
Soit $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, une partition de $[a, b]$ et $P_i(x_i, y_i)$, les points correspondants sur la courbe de f.

La distance entre P_{i-1} et P_i est donnée par

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

et la longueur approximative ΔL_i de l'arc $P_{i-1}P_i$ est donnée par

$\Delta L_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$, où $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.



Étant donné que f est continue et dérivable sur $[a, b]$, f possède les mêmes propriétés sur chaque $[x_{i-1}, x_i]$; ainsi, par le théorème de Lagrange, il existe un nombre $c_i \in\,]x_{i-1}, x_i[$ tel que

$$(f(x_i) - f(x_{i-1})) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

ainsi $\qquad \Delta y_i = f'(c_i)\,\Delta x_i$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \Delta L_i &\approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i)\,\Delta x_i)^2} \\ &\approx \sqrt{[1 + (f'(c_i))^2]\,(\Delta x_i)^2} \\ &\approx \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi} \quad L &= \lim_{(\max \Delta x_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x_i \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \quad \text{(par définition de l'intégrale définie)} \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \end{aligned}$$

[28] Cette démonstration a été numérisée du manuel pour montrer la représentation graphique utilisée par Charron et Parent.

Analyse de la démonstration du théorème 5.1

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Pour comprendre la démonstration, l'étudiant doit connaître la formule de la distance entre deux points du plan cartésien. La compréhension de la notion de partition d'un intervalle et de son expression symbolique est également nécessaire. Ces deux éléments servent à construire une approximation de la longueur de la courbe qui est ensuite optimisée. Cela nécessite un recours aux notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction, qui sont mises à profit pour appliquer le théorème de Lagrange. La définition de l'intégrale définie et des infinitésimaux qui y interviennent doivent également être maîtrisés.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Outre la distance entre deux points qui a été traitée au niveau secondaire et qui a fait l'objet d'un rappel en introduction du chapitre 5, les autres notions ont été présentées pour la première fois aux étudiants dans les chapitres 1 à 4 du manuel. Chacune de ces notions a été travaillée dans les différentes sections d'exercices et n'est donc plus considérée comme une nouveauté.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine de l'analyse.

Deuxième et troisième axes d'analyse : Les tâches prescrites et les activités attendues des étudiants

- *Qu'est-ce qui est attendu de l'étudiant par la présentation de cette démonstration? Des indices facilitant la réalisation/compréhension de la tâche sont-ils fournis?* Il est attendu de l'étudiant qu'il lise la démonstration et qu'il en comprenne les différentes parties ainsi que leur articulation. Pour l'aider dans cette tâche, des indices sont fournis. Dans un premier temps, en introduction du théorème 5.1, le manuel présente une méthode utilisée par les Grecs pour estimer la circonférence d'un cercle. Cette méthode « consistait à inscrire, dans le cercle, un polygone de *n* côtés et à calculer son périmètre. On peut établir que plus *n* est grand, plus le périmètre du polygone s'approche de la longueur de la circonférence du cercle »

(Charron et Parent, 2004, p. 251). À la suite de cette présentation, il est indiqué qu'une méthode analogue sera utilisée pour calculer la longueur de courbes planes, fournissant ainsi à l'étudiant l'idée générale de la démonstration de la formule énoncée dans le théorème 5.1. Dans un second temps, une représentation graphique est donnée à l'étudiant. Elle permet de donner un sens à plusieurs éléments de symbolisme utilisés dans la démonstration.

- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement déductif doit être mis en jeu pour saisir la démonstration qui est présentée mais celui-ci est en quelque sorte pris en charge par les calculs, qui s'enchaînent linéairement. De plus, nous croyons qu'un raisonnement par analogie peut être mis à contribution pour mieux comprendre l'idée générale de la démonstration. Effectivement, une analogie avec la méthode historique présentée en introduction du théorème 5.1 peut amener l'étudiant à mieux comprendre l'introduction de la partition P ainsi que l'approximation linéaire qui est faite de la longueur de la courbe.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme occupe une grande place dans l'énoncé du théorème ainsi que dans sa démonstration. Dans l'énoncé, il est intéressant de remarquer que deux notations ont été utilisées pour exprimer la dérivée de la fonction f qui intervient dans la formule de la longueur de courbes planes : $f'(x)$ et $\frac{dy}{dx}$ (notation de Leibniz). Bien que la notation de Leibniz ait été présentée dans le cours de mathématiques *NYA* et rappelée à l'étudiant au chapitre 1 du manuel, elle est rarement utilisée par Charron et Parent. D'ailleurs, malgré la présence de la notation de Leibniz dans l'énoncé du théorème, la démonstration n'y a pas recours, faisant plutôt intervenir la notation $f'(x)$. La démonstration du théorème comporte plusieurs symboles. Une partition P est introduite, $P = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$, des points de la courbe f correspondant à cette partition sont nommés, $P_i(x_i, y_i)$. La distance entre ces points est également définie et exprimer symboliquement à l'aide des symboles Δx_i et Δy_i. Cette distance correspond à une approximation linéaire, nommée ΔL_i, de la longueur de la courbe de f sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. La compréhension de chacun de ces éléments est nécessaire pour comprendre la démonstration dans son ensemble. L'amélioration de l'approximation de la longueur de la courbe de f nécessite l'utilisation de la notion de

limite, ce qui peut être difficile à comprendre pour certains étudiants. L'écriture symbolique de la longueur L de la courbe,

$$L = \lim_{(\max \Delta x_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\, \Delta x_i,$$

comporte plusieurs éléments de formalisme qui doivent être décryptés par l'étudiant pour comprendre pleinement comment cette expression représente la longueur de la courbe de f et non plus une approximation.

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration n'est pas particulièrement complexe, cependant certains arguments doivent être développés de façon parallèle. C'est le cas pour l'expression de la longueur approximative ΔL_i de l'arc $P_{i-1}P_i$ et l'expression de Δy_i à l'aide du théorème de Lagrange.
- *Y a-t-il plusieurs arguments développés à la fois?* Une pluralité plutôt restreinte d'arguments est développée dans la démonstration : la continuité et la dérivabilité de f sur $[a, b]$ garantissant que f possède aussi ces propriétés sur chacun des sous-intervalles de $[a, b]$, le théorème de Lagrange et la définition de l'intégrale définie sont explicitement mentionnés dans la démonstration. Cependant, plusieurs arguments ont selon nous été omis. C'est le cas de la vérification des hypothèses du théorème de Lagrange. En effet, pour appliquer ce théorème, f doit être continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ et dérivable sur $]x_{i-1}, x_i[$ ce qui est justifié, dans la démonstration, par la continuité et la dérivabilité de f sur $[a, b]$. Cependant, l'énoncé du théorème 5.1 mentionne uniquement que «f' est continue sur $[a, b]$» (p. 251). Selon nous, il aurait été important de préciser que la continuité de f sur $[a, b]$ est déduite du fait que f' existe sur $[a, b]$ et que toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur ce même intervalle.
- *Un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation est-il introduit (sans indication)?* Un changement de point de vue est requis en ce sens que l'étudiant ne doit pas se concentrer directement sur la longueur totale de la courbe f entre les points $R(a, f(a))$ et $S(b, f(b))$, mais plutôt introduire une partition de $[a, b]$ dans l'optique de trouver une approximation linéaire de la courbe f sur chacun des sous-intervalles introduits par la partition P. C'est en améliorant cette approximation

linéaire que l'étudiant pourra déduire la longueur L de la courbe sur $[a, b]$. Pour comprendre pleinement la démonstration, l'étudiant doit être en mesure d'interpréter les informations fournies dans le registre symbolique pour ensuite les transposer dans le registre graphique. En effet, plusieurs des éléments présentés algébriquement sont également représentés graphiquement ce qui nécessite de la part de l'étudiant qu'il coordonne les deux registres de représentation.

- *Une quantification est-elle à repérer?* Outre les quantificateurs inhérents aux théorèmes de Lagrange, aucune autre quantification n'est à repérer.

4.1.4.6. Calculs, manipulation des formules

Notre grille d'analyse nous a permis de créer, jusqu'à présent, un corpus de démonstrations illustrant les difficultés inhérentes à l'activité de validation mathématique qui sont présentes dans le manuel *Calcul intégral* (Charron et Parent, 2004). Bien que le groupe de démonstrations présenté illustre bel et bien le recueil analysé, un type de démonstrations est passé dans les mailles de notre filet. Effectivement, les démonstrations s'apparentant à la réalisation de calculs, mais portant sur des éléments généraux, n'ont toujours pas été traitées. Ces démonstrations qui consistent principalement à établir la validité de formules d'intégration ou de formules de sommation sont concentrées dans trois des six chapitres du manuel. Malgré le fait que ces démonstrations comportent certains des éléments de difficultés discutés précédemment, telles que des *changements de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche*, les similitudes qu'elles entretiennent avec la réalisation d'un simple calcul nous ont poussées à regrouper ces démonstrations dans une catégorie à part. Dans ce type de démonstrations, le raisonnement est pris en charge par le calcul, tout en laissant de côté l'aspect déductif du processus de validation mathématique. À nos yeux, de telles tâches sont d'excellents moyens de faire travailler les manipulations algébriques chez les étudiants. Ce type de travail est d'ailleurs nécessaire car, tel que rapporté par Corriveau (2007), la réalisation de calcul dans un contexte algébrique est problématique pour un bon nombre d'étudiants de niveau collégial. Bien que ces tâches permettent aux étudiants d'améliorer leur capacité à gérer et manipuler des expressions algébriques, elles ne constituent cependant pas de véritable défi sur le plan du raisonnement déductif. Pour étayer nos propos, deux tâches, parmi les 12[29] répondant à ces caractéristiques, sont présentées ci-dessous.

Exercice 7, section 4.1 (p. 184)

Démontrer la formule de réduction donnée et utiliser cette formule pour trouver les intégrales demandées.

a) $\int ln^n x\, dx = x\, ln^n\, x - n \int ln^{n-1} x\, dx$, où $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\int ln^3 x\, dx$

b) $\int cos^n x\, dx = \frac{cos^{n-1} x\, sinx}{n} + \frac{n-1}{n} \int cos^{n-2} x\ dx$, où $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$;
$\int cos^4 x\, dx$ et $\int cos^5 x\, dx$.

c) $\int sec^n x\, dx = \frac{sec^{n-2} x\, tanx}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int sec^{n-2} x\ dx$, où $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$;
$\int sec^4 x\, dx$ et $\int sec^5 x\, dx$.

d) $\int sec^n x\, dx = \frac{sec^{n-2} x\, tanx}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int sec^{n-2} x\ dx$, où $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$;
$\int sec^4 x\, dx$ et $\int sec^5 x\, dx$.

Réponse attendue à l'exercice 7, section 4.1

La réponse qui est fournie ci-dessous est tirée du corrigé du manuel (p. 400). Cependant, par souci de clarté, la réponse a) sera détaillée de manière à dévoiler plus précisément la démarche qui doit être élaborée par l'étudiant. Les réponses b), c) et d) sont, quant à elles, directement issues du solutionnaire. Aucun détail supplémentaire ne sera ajouté puisque seules certaines étapes calculatoires n'y sont pas explicitées. Les idées centrales de chacune des réponses sont données, présentant la voie qui doit être empruntée pour résoudre la tâche.

a) En utilisant l'intégration par parties et en posant $u = (\ln x)^n$ et $dv = dx$, on obtient la formule de réduction suivante :

---

[29] Outre les démonstrations traitées dans cette section, les démonstrations suivantes font intervenir le même élément de formalisme : exercice récapitulatif 10 (Charron et Parent, 2004, p. 46), problèmes synthèse 11 et 17 (*idem*, pp. 47- 48), exercice 7 (*idem*, p. 76), exercice récapitulatif 4 (*idem*, p. 101), exercice récapitulatif 2 (*idem*, p. 166), exercice 9 (*idem*, pp. 209), problème synthèse 22 (*idem*, p. 278), problème synthèse 3 (*idem*, p. 363) et problème synthèse 22 (*idem*, p. 365).

$$\begin{aligned}\int ln^n x\,dx &= uv - \int v\,du \\ &= x(\ln x)^n - \int x \cdot \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}\,dx \\ &= x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx\end{aligned}$$

■

En appliquant cette formule de réduction à l'intégrale $\int ln^3 x\,dx$, on obtient :

$$\int ln^3 x\,dx = x(\ln x)^3 - 3\int (\ln x)^2\,dx\ .$$

Réappliquons la formule de réduction à $\int (\ln x)^2\,dx$.

$$\int ln^3 x\,dx = x(\ln x)^3 - 3\left[x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx\right]$$

Finalement, réappliquons la formule de réduction à $\int \ln x\,dx$.

$$\begin{aligned}\int ln^3 x\,dx &= x(\ln x)^3 - 3\left[x(\ln x)^2 - 2\left[xln\,x - \int 1\,dx\right]\right] \\ &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6xln\,x - 6x + C\ .\end{aligned}$$

b) Il faut poser $u = cos^{n-1}x$ et $dv = \cos x\,dx$, et remplacer $sin^2 x$ par $(1 - cos^2 x)$ dans la nouvelle intégrale;

$$\int cos^4 x\,dx = \frac{cos^3 x\ \sin x}{4} + \frac{3\cos x \sin x}{8} + \frac{3x}{8} + C;$$

$$\int cos^5 x\,dx = \frac{cos^4 x \sin x}{5} + \frac{4\cos^2 x \sin x}{15} + \frac{8\sin x}{15} + C.$$

c) Il faut poser $u = sec^{n-2}x$ et $dv = sec^2x\,dx$, et remplacer tan^2x par $(1 - sec^2x)$ dans la nouvelle intégrale;

$$\int sec^4x\,dx = \frac{sec^2x\tan x}{3} + \frac{2}{3}\tan x + C;$$
$$\int sec^5x\,dx = \frac{sec^3x\tan x}{4} + \frac{3secx\,tanx}{8} + \frac{3\,ln|secx + tanx|}{8} + C.$$

d)

$$\int tan^nx\,dx = \int tan^{n-2}x\,tan^2x\,dx$$
$$= \int tan^{n-2}x\,(1 - sec^2x)dx$$
$$= \int tan^{n-2}x\,sec^2x\,dx - \int tan^{n-2}x\,dx$$
$$= \frac{tan^{n-1}x}{n-1} - \int tan^{n-2}x\,dx\,.$$

■

$$\int tan^4x\,dx = \frac{tan^3x}{3} - \tan x + x + C;$$
$$\int tan^7x\,dx = \frac{tan^6x}{6} - \frac{tan^4x}{4} + \frac{tan^2x}{2} - \ln|\sec x| + C\,.$$

Analyse de l'exercice 7, section 4.1

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement?* L'étudiant doit comprendre ce qu'est une formule de réduction et être capable de calculer une intégrale en utilisant l'intégration par parties. La connaissance de certaines identités trigonométriques est également requise.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les notions de formule de réduction et d'intégration par parties ont été présentées aux étudiants dans la section théorique

précédant la section d'exercices 4.1. En ce qui concerne les identités qui interviennent dans le calcul des différentes intégrales, elles étaient déjà connues des étudiants et lui ont été rappelées au tout début du chapitre 4.

- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine du calcul intégral.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte quatre sous-questions qui sont indépendantes l'une de l'autre.
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est fermé puisque sa valeur de vérité est connue. Bien que l'énoncé de la tâche ne fournisse aucun indice facilitant la résolution du problème, le titre de la section d'exercices 4.1, *intégration par parties*, constitue un indice qui orientera les étudiants dans la réalisation de la tâche. De plus, dans la section théorique 4.1, des exemples[30] de calcul de formules de réduction sont fournis à l'étudiant.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement déductif pris en charge par le calcul est mis en œuvre dans cette démonstration.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme occupe une place non négligeable dans cette tâche. Dans un premier temps, l'étudiant est appelé à travailler avec des fonctions générales qui sont en fait les représentantes de toute une classe de fonctions. Il doit être en mesure de départager les rôles des symboles x et n qui composent ces fonctions. Une compréhension erronée de ceux-ci peut compliquer la tâche de l'étudiant puisque celui-ci pourrait avoir de la difficulté à repérer le symbole représentant la variable d'intégration. Un second élément qui doit être étudié est le formalisme associé à l'intégration par parties. Le partitionnement de la fonction à intégrer en deux fonctions, nommées u et dv, peut compliquer le

---

[30] « Exemple 2 : Déterminons une formule de réduction pour $\int sin^n\, x\, dx$ où $n \in \{2,3,4, \ldots\}$. » (Charron et Parent, 2004, p. 183)

travail de certains étudiants. En plus de devoir déterminer correctement ces deux fonctions, l'étudiant doit comprendre comment les organiser pour effectuer une intégration par parties.

- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?* Le terme *formule de réduction* est nouveau pour l'étudiant, qui doit en connaître la définition pour pouvoir résoudre la tâche.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple et linéaire.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Les mises en fonctionnement des connaissances oscillent entre le niveau technique et mobilisable. En effet, des exemples de détermination de formules de réduction ayant déjà été données dans la section théorique, plusieurs stratégies de calcul sont présentées aux étudiants, qui n'auront qu'à les réappliquer pour résoudre certaines des sous-questions de la tâche. Cependant, puisque certaines des sous-questions nécessitent de l'étudiant qu'il découvre par lui-même les modifications à apporter à l'intégrande, nous considérons que, globalement, le niveau de mise en fonctionnement de la tâche est légèrement plus élevé que le niveau technique.
- *Quels théorèmes appliquer?* Outre des identités trigonométriques et le théorème validant l'intégration par parties, aucun théorème particulier n'est à appliquer.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Très peu d'arguments sont sollicités dans cette démonstration : l'intégration par parties, deux identités trigonométriques ainsi que certains arguments de nature algébrique.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* La réalisation des différentes intégrales requiert de l'étudiant qu'il modifie l'intégrande de départ pour obtenir une forme qui soit plus facilement intégrable. L'utilisation d'identités trigonométriques et de la technique d'intégration par parties sont des modifications auxquelles il doit avoir recours.

- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* Dans les sous-questions où l'intégration par parties doit être utilisée, les expressions à associer à u et dv doivent être introduites.
- *Y a-t-il un nouveau vocabulaire ou symbolisme à gérer?* Le symbolisme lié à l'intégration par parties doit être compris, en particulier ce qui doit être associé à u et à dv en termes de fonction de x et d'infinitésimaux dx, en lien avec la notation de Leibniz.

Exercice 6, section 3.1 (p. 118)

Démontrer que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, en évaluant $\sum_{i=1}^{k}[i^2 - (i-1)^2]$ de deux façons différentes.

Réponse attendue de l'exercice 6, section 3.1

La réponse fournie est tirée du solutionnaire du manuel (p. 388).

1ère façon

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}[i^2 - (i-1)^2] &= \sum_{i=1}^{k}[i^2 - (i^2 - 2i + 1)] \\ &= \sum_{i=1}^{k}[2i - 1] \\ &= \sum_{i=1}^{k} 2i - \sum_{i=1}^{k} 1 \text{ (théorème 3.1[31])} \\ &= 2\left(\sum_{i=1}^{k} i\right) - k \text{ (théorème 3.2[32])}\end{aligned}$$

2e façon

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}[i^2 - (i-1)^2] &= [1^2 - 0^2] + [2^2 - 1^2] + [3^2 - 2^2] + \cdots \\ &\quad + [(k-1)^2 - (k-2)^2] + [k^2 - (k-1)^2] \\ &= k^2 \text{ (en simplifiant).}\end{aligned}$$

[31] « $\sum_{i=1}^{k}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \pm \sum_{i=1}^{k} b_i$ » (Charron et Parent, 2004, p. 113)

[32] « $\sum_{i=1}^{k} ca_i = c\sum_{i=1}^{k} a_i$, où $c \in \mathbb{R}$ » (Charron et Parent, 2004, p. 113)

En comparant les résultats obtenus, nous avons

$$\begin{aligned} 2\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} i\right) - k &= k^2 \\ 2\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} i\right) &= k^2 + k \\ \textstyle\sum_{i=1}^{k} i &= \frac{k^2 + k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

■

Analyse de l'exercice 6, section 3.1

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* La principale connaissance à mettre en fonctionnement est la notion de sommation. L'étudiant doit en comprendre la signification, connaître ses propriétés et être capable d'utiliser le symbolisme associé. De plus, il doit avoir une bonne compréhension de la notion d'égalité. En effet, l'étudiant doit être en mesure de voir que les expressions $2\left(\sum_{i=1}^{k} i\right) - k$ et k^2 sont deux formes distinctes représentant en fait le même nombre.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Le symbole de sommation a été introduit à la section 3.1 du chapitre 3. Mais il n'est pas exclu que l'étudiant y ait eu accès auparavant, par exemple dans ses cours de statistiques au secondaire.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Cette notion se rapporte au domaine des mathématiques discrètes ou des statistiques.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'étudiant sait que l'égalité présentée est vraie, d'autant plus que celle-ci a déjà été démontrée, mais d'une manière différente, dans la section théorique 3.1. L'énoncé de la tâche fournit également la marche à suivre pour réaliser la démonstration puisqu'il y est mentionné que l'étudiant doit évaluer de deux façons différentes l'expression $\sum_{i=1}^{k}[i^2 - (i-1)^2]$. En plus de cet indice, une démonstration pratiquement identique est exposée à l'étudiant dans la section théorique. En effet, il y est démontré que $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ en évaluant de deux façons différentes l'expression $\sum_{i=1}^{k}[i^3 - (i-1)^3]$. La recette à appliquer est donc présentée à l'étudiant, qui n'aura alors qu'à l'utiliser directement.

- *S'agit-il d'un type de problème qui était ignorés jusqu'alors?* Trouver la sommation des *i* premiers nombres et en fournir une preuve est un type de problème qui est mentionné dans le programme de formation du premier cycle du secondaire de l'école québécoise. Ce problème est travaillé dans un contexte plus géométrique et veut amener l'élève à généraliser la situation qui lui est proposé à l'aide d'une règle algébrique (MELS, 2006b, p. 31). Il se peut donc que certains étudiants de niveau collégial aient déjà été en contact au secondaire avec ce type de problème. Cependant, le niveau de formalisme requis dans la démonstration qui est demandée ici constitue une nouvelle approche du problème pour l'étudiant.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Outre un raisonnement déductif plutôt élémentaire et mené par le calcul, aucun autre type de raisonnement n'est en jeu.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme est important dans la tâche. L'étudiant doit travailler avec le symbole de sommation et comprendre la signification de ses différentes composantes : le terme général ainsi que les bornes supérieure et inférieure. L'étudiant doit être capable de développer la somme $\sum_{i=1}^{k}[i^2 - (i-1)^2]$ et de voir que tous les termes, sauf k^2, s'annuleront par télescopage.
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier ou de quantificateurs cachés?* L'étudiant doit comprendre que l'expression à démontrer, $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, est vraie $\forall k \in \mathbb{N}$.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est relativement simple. Il s'agit en fait de deux chaînes d'inférences (une chaîne pour chacune des façons d'exprimer $\sum_{i=1}^{k}[i^2 - (i-1)^2]$) qui se rejoignent pratiquement à la fin de la démonstration, plus précisément lorsqu'il est affirmé que $2\left(\sum_{i=1}^{k} i\right) - k = k^2$, pour n'en former

qu'une seule. De plus, il est important de mentionner que la structure déductive a déjà été présentée à l'étudiant à la section théorique 3.1. La structure de la démonstration ayant été dévoilée à l'apprenant, celui-ci n'a plus qu'à se concentrer sur les manipulations algébriques.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Pour les raisons déjà discutées, les mises en fonctionnement sont de niveau technique.
- *Quels théorèmes appliquer?* Les théorèmes 3.1 et 3.2 sont à appliquer.
- *Y a-t-il lieu d'introduire des étapes?* Deux étapes sont nécessaires pour accomplir la tâche puisque l'étudiant doit évaluer l'expression qui lui est donnée de deux façons différentes.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de point de vue est nécessaire pour réaliser la démonstration. L'étudiant doit délaisser l'expression à démontrer pour travailler sur une toute autre expression, $\sum_{i=1}^{k}[i^2 - (i-1)^2]$, qui lui est fournie dans l'énoncé de la tâche. Cette expression semble « sortie d'un chapeau » puisqu'aucune justification ou explication ne l'accompagne. À notre avis, un tel changement de point de vue imposé sans justification aux étudiants envoie une fausse image de l'activité de démonstration, celle-ci se limitant à la réalisation de calcul algébrique à partir d'une expression qui, de prime abord, ne présente aucun lien avec l'expression qui doit être démontrée.
- *Y a-t-il un nouveau vocabulaire ou symbolisme à gérer?* Les étudiants doivent gérer le symbolisme lié à la sommation qui pourrait être nouvelle pour certains.

4.1.5 Commentaires généraux sur les catégories et démonstrations présentées dans ce corpus

Avant de conclure sur notre corpus de démonstrations, nous tenons à soulever un point important concernant les catégories présentées et les démonstrations illustrant chacune d'elles. Bien que la présentation puisse laisser croire que les différents éléments étudiés (nouvelles exigences en matière de démonstration, attitude de preuve suscitée, complexité de la structure déductive et les principaux éléments de formalisme présents dans le manuel) soient entièrement disjoints, il n'en est rien. D'une part, certaines des catégories sont intimement liées à l'une de leurs consœurs. C'est par exemple le cas de la catégorie *Changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche* (voir § 4.1.1.4), qui nécessite souvent le recours à divers *Éléments de formalismes*. En effet, ce type de changement de point du vue qui peut prendre la forme de la réécriture en langage mathématique d'une affirmation donnée en langage naturel, nécessite une formalisation mathématique faisant ainsi intervenir plusieurs éléments de formalisme, dont ceux que nous avons relevés dans notre corpus. Un autre exemple est le lien qui unit fréquemment la catégorie *Complexité de la structure déductive* et l'exigence *Pluralité des arguments impliqués*. Effectivement, il n'est pas rare que les démonstrations nécessitant la mise en œuvre d'un nombre important d'arguments possèdent des structures déductives plus complexes[33]. Ceci est le cas de trois des quatre tâches (le problème synthèse 21 du chapitre 3 ainsi que l'exercice récapitulatif 24 et le problème synthèse 25 du chapitre 6) qui ont été traitées à la section *Pluralité des arguments impliqués*. D'autre part, malgré le fait que nous nous sommes efforcées d'illustrer par une démonstration différente chacune des catégories, une seule démonstration fait souvent intervenir plusieurs difficultés distinctes. La démonstration du théorème de l'unicité d'un zéro en est un bon exemple. Dans notre corpus, cette démonstration a été présentée pour illustrer la *Sélection d'informations*; cependant, bien d'autres difficultés sont présentes dans cette démonstration : *Pluralité d'arguments impliqués*, *Changement de point de vue nécessité par la méthode de preuve utilisée*, *Nécessité d'une écriture quantifiée* et l'élément de formalisme *Présence d'intervalles ouverts et d'intervalles fermés*.

[33] Nous avons cru bon de préciser que, bien que ce lien entre *Complexité de la structure déductive* et *Pluralité d'arguments impliqués* soit fréquent, il n'est cependant pas direct. En effet, une démonstration s'apparentant à un calcul et faisant intervenir un nombre important d'arguments de nature algébrique comporterait une pluralité d'arguments tout en ayant une structure déductive simple et linéaire.

4.2 Bilan de l'analyse du manuel *Calcul intégral*

Dans les pages précédentes, nous avons relevé, dans le manuel *Calcul intégral, 3^e^ édition* (Charron et Parent, 2004), un corpus de démonstrations illustrant les difficultés liées à l'activité de démonstration et les éléments de formalisme s'y rattachant. Pour conclure la présentation de ce corpus, nous souhaitons mettre en lumière certains éléments ayant retenu notre attention, soit par la façon dont ils sont traités, soit par leur absence.

4.2.1 Nouvelles exigences en matière de démonstration sollicitées dans le manuel du cours *NYB*

Changement de point de vue à introduire sans indication

L'introduction d'un changement de point de vue étant un procédé couramment utilisé dans les mathématiques avancées (Robert, 1998), il n'est pas surprenant de l'avoir relevé dans plusieurs des démonstrations étudiées. En fait, cette exigence est sans doute celle qui est la plus sollicitée. Parmi les 37 tâches et démonstrations analysées, près des deux tiers nécessitent un changement de point de vue à un moment ou un autre. En étudiant de plus près chacun de ces changements de point de vue, nous avons remarqué que certains d'entre eux partagent des caractéristiques communes. De cette observation sont nées trois sous-catégories :

- *Changement de point de vue réalisé par l'introduction d'un nouvel objet.*
- *Changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche.*
- *Changement de point de vue nécessité par la méthode de preuve utilisée.*

Cette subdivision permet de cibler plus précisément les éléments qui doivent être décryptés, ré-exprimés et sur lesquels doivent opérer les étudiants. Alors que la mise en œuvre de la première et la troisième forme de changement de point de vue nécessite davantage une compréhension globale de la situation, la seconde forme de changement de point de vue requiert plutôt une compréhension approfondie des concepts en jeu dans la démonstration. En effet, cette deuxième forme de changement de point de vue consiste à ré-exprimer un élément précis de la démonstration en une forme différente, mais équivalente (par exemple, le cône de l'exercice 5 de la section 5.4 doit être exprimé comme la surface obtenue par révolution d'une droite autour d'un axe). Il est important de mentionner qu'une même démonstration peut nécessiter l'introduction de plusieurs changements de point de vue de différents types, augmentant par le fait même le niveau de complexité de la tâche à accomplir. Par exemple, l'exercice récapitulatif 24 du chapitre 6 portant sur la convergence de la série de Riemann comporte deux changements de point de vue. Le premier est lié à la méthode de preuve utilisée, tandis que le second est réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé (voir page 98).

Ces changements de point de vue, laissés à la charge de l'étudiant, constituent un élément de difficulté d'autant plus qu'ils sont rarement discutés par les enseignants (Robert, 1998). Le manuel analysé, bien qu'il sollicite plusieurs de ces changements de point de vue, ne discute pas non plus explicitement de cette pratique. En effet, les démonstrations analysées dans les sections théoriques ne prennent pas le temps d'expliquer et de justifier ces changements de point de vue pourtant essentiels pour comprendre pleinement la démonstration. Le meilleur exemple qui peut en être donné est l'introduction de la fonction H dans la démonstration du théorème de Lagrange (voir § 4.1.1.4), qui n'est accompagnée d'aucune note justificative.

La première sous-catégorie de changements de point de vue est, selon nous, la plus complexe à réaliser. En effet, l'étudiant doit momentanément se détacher des données fournies dans l'énoncé pour se concentrer sur un nouvel objet qu'il doit introduire. Cette sous-catégorie de changement de point de vue, observée dans plusieurs des démonstrations présentées dans les sections théoriques[34], n'a été sollicitée que dans deux tâches, soit l'exercice 6 de la section 1.2 et le problème synthèse 25 du chapitre 6 (voir respectivement les pages 135 et 114). De

[34] La fonction H introduite dans la démonstration du théorème de Lagrange (voir page 89), l'approximation linéaire introduite dans la démonstration du théorème permettant de calculer la longueur d'une courbe (voir page 140) et l'expression $A(x + h)$ introduite dans la démonstration du théorème fondamental du calcul (voir page 60) sont des changements de point de vue de la première sous-catégorie introduits dans des démonstrations présentées dans les sections théoriques du manuel. L'exercice 6 de la section 3.1 (voir page 150) portant sur la somme des k premiers nombres à l'aide de l'expression $i^2 - (i - 1)^2$ peut également être mentionné ici car, bien qu'il s'agisse d'une tâche laissée à la charge de l'étudiant, le changement de point de vue à réaliser est indiqué et aucune justification ne vient expliquer les raisons motivant celui-ci.

plus, le corrigé du manuel ne fournit aucune explication permettant à l'étudiant de comprendre d'où sont issues les fonctions à utiliser pour réaliser les démonstrations attendues. De tels changements de points de vue sont donc présents dans les démonstrations des sections théoriques, mais les étudiants y semblent peu confrontés dans les exercices. N'y aurait-il pas là un manque à combler? Est-ce que *Mathématiques pour les sciences* propose davantage de tâches nécessitant des changements de point de vue de ce type?

Pluralité des arguments impliqués dans la démonstration

La présence de cet élément dans notre grille d'analyse a permis de relever une très grande variété quant au nombre d'arguments intervenant dans les différentes démonstrations.

Une majorité de démonstrations repose sur la mise en œuvre d'un seul théorème d'analyse et de quelques arguments de nature algébrique (par exemple, voir exercice 5 de la section 5.4 présenté à la section 4.1.1.4 et le problème synthèse 18 du chapitre 1 présenté à la section 4.1.1.5). En plus de comporter une pluralité restreinte d'arguments, plusieurs des tâches fournissent des indices venant faciliter leur résolution. Ces indices peuvent être explicitement donnés dans l'énoncé à démontrer ou bien proposés de façon implicite (par exemple, des démonstrations similaires à celles requises à l'exercice 6 de la section 1.2 ont été présentées aux étudiants dans une section théorique antérieure du manuel : voir section 4.1.4.4). La construction de telles démonstrations ne requiert aucune analyse préalable de la part de l'étudiant. Celui-ci peut directement s'attaquer à la démonstration sans avoir à décortiquer et analyser les éléments de l'énoncé. Selon nous, l'élaboration de ces « démonstrations dirigées » s'apparente davantage à un problème d'application qu'à un problème suscitant l'élaboration d'un véritable raisonnement déductif.

Malgré la prépondérance des démonstrations décrites précédemment, quatre démonstrations nous ont surpris par le nombre et la nature des arguments qu'elles impliquent (voir *Pluralité des arguments impliqués,* § 4.1.1.1). Chacune nécessite en effet l'application de plusieurs théorèmes et définitions centraux en analyse, ce qui contraste avec les démonstrations proposées avant dans la section. La réalisation et compréhension de ces quatre démonstrations demandent d'avoir ce que Robert (1998) appelle une bonne *flexibilité dans l'utilisation de ses connaissances.* Effectivement, celles-là font cohabiter une grande diversité de notions dont certaines ont été traitées dans le cours de *Calcul différentiel NYA*. L'étudiant ne doit pas se restreindre aux notions présentées dans le manuel, mais il doit plutôt puiser dans le bagage de ses connaissances antérieures pour dénicher les éléments qui lui permettront de comprendre ou construire la démonstration. La démonstration du théorème fondamental du calcul en est un excellent exemple, car elle requiert la cohabitation des notions de continuité et de dérivabilité, traitées dans le premier cours de calcul de niveau collégial, avec la notion d'intégrale introduite dans le second cours de calcul. En plus de devoir puiser dans les notions vues en *NYA*, l'étudiant doit pouvoir les intégrer dans un contexte beaucoup plus vaste. En effet, alors que le calcul de dérivée constituait un exercice en soi en *NYA*, il représente maintenant une des étapes à faire pour mener à terme une démonstration en *NYB* (voir la démonstration de l'exercice récapitulatif 24 du chapitre 6, présentée à la section 4.1.1.4 de ce corpus).

Parmi les quatre démonstrations dont il a été question dans le paragraphe précédent, deux doivent être construites par les étudiants. Les deux autres sont présentées dans des sections théoriques du manuel. Celles à construire (problème synthèse 21 du chapitre 3, voir § 4.1.1.1, et problème synthèse 25 du chapitre 6, voir § 4.1.3) sont, selon nous, les tâches les plus complexes proposées par le manuel, leur niveau de difficulté pouvant, selon notre expérience, être comparable à celui de certaines tâches universitaires en analyse. La résolution de ces tâches nécessite une analyse approfondie des composantes de l'énoncé à démontrer. Les arguments à mettre en jeu, bien que connus des étudiants, ne sont pas facilement accessibles et découlent d'une étude et analyse pointues de la situation.

Nous souhaitons soulever un dernier point concernant l'exigence *Pluralité des arguments impliqués dans la démonstration*. Malgré le fait que ce dont il va être question ne fasse pas explicitement partie de notre grille d'analyse, nous trouvons intéressant et pertinent de le mettre en relief. Tel qu'il a été mentionné dans certaines de nos analyses (par exemple, celle du théorème fondamental du calcul, § 4.1.1.1), des arguments intervenant dans certaines démonstrations sont tenus pour acquis sans avoir été préalablement démontrés. C'est d'ailleurs le cas de certains théorèmes présentés sans démonstration dans les sections théoriques, pour ensuite être utilisés dans les démonstrations d'autres énoncés. Bien que nous sommes conscients que la démonstration de certains théorèmes d'analyse soit inaccessible pour les étudiants de niveau collégial, nous voulons tout de même souligner le danger lié à cette pratique. L'utilisation de théorème non-démontrés dans un processus de validation mathématique peut, selon nous, ancrer une fausse image de l'activité de démonstration chez l'étudiant. En aucun temps, celui-ci ne devrait être amené à croire que cette pratique est courante en mathématiques. Il doit plutôt saisir qu'elle est un « mal nécessaire » dans le contexte du cours *NYB*, mais qu'elle n'est pas répandue et acceptable dans une science déductive comme les mathématiques. Les théorèmes qui sont présentés sans démonstration dans le manuel étudiés sont souvent accompagnés d'un exemple vérifiant le théorème pour un cas précis, ce qui constitue un deuxième danger à nos yeux. Effectivement, en nous appuyant sur les propos de Epp (2003, p. 892), nous avançons que cette forme de justification peut donner à l'étudiant l'impression que les vérifications de nature empirique sont suffisantes pour établir la validité d'un énoncé. Les auteurs du manuel pourraient rétorquer que l'illustration par un exemple d'un résultat dont la démonstration est inaccessible au niveau considéré est certainement préférable à rien du tout, ce en quoi ils auraient sans doute raison. Mais on peut alors déplorer que la présentation de tels exemples ne s'accompagne pas d'un commentaire d'ordre « méta-mathématique » précisant que la démonstration est hors de portée et que l'exemple constitue une illustration, mais certainement pas une validation au sens mathématique.

En plus de ces théorèmes non-démontrés, certaines démonstrations mettent en jeu des arguments intuitifs qui sont tenus pour acquis sans être justifiés. Un exemple de ce type d'argument est l'énoncé voulant qu'une somme de fonctions continues soit continue. Le recours à des arguments non mathématiquement vérifiés dénature, selon nous, l'activité de démonstration et rend ambiguë la construction de démonstration par l'étudiant. Nous croyons effectivement que certains étudiants ne sauront plus quels éléments doivent être démontrés rigoureusement et quels peuvent être tenus pour acquis ou acceptés sur des bases intuitives.

Dans l'optique où nous considérons *NYB* comme le cours « charnière » entre les mathématiques collégiales et les cours universitaires d'analyse, les pratiques décrites précédemment sont d'autant plus dangereuses. En effet, les étudiants pourraient être tentés de les réutiliser dans les cours universitaires d'analyse où le niveau de rigueur attendu ne tolère plus de telles pratiques. Certains étudiants pourraient se trouver déroutés en apprenant que des arguments utilisés antérieurement dans leurs cours de mathématiques collégiaux ne sont plus adéquats à l'université. Pourquoi ce qui était acceptable, et même à un certain point attendu, au collégial ne l'est plus à l'université? C'est pour éviter ce questionnement chez les étudiants, que nous aurions souhaité voir davantage de commentaires d'ordre « méta-mathématique » venant relativiser les pratiques utilisées pour contourner la réalisation de démonstrations trop complexes pour le niveau collégial.

Exigences peu exploitées par le manuel de Charron et Parent

Après avoir regardé globalement l'ensemble de nos analyses, la quasi-absence de deux des exigences de Robert (1998) nous a quelque peu étonnées. Le recours à la *Sélection d'informations* dans uniquement 3 des 37 démonstrations étudiées a en effet retenu notre attention. Nous soumettons la réaliste hypothèse que la « simplicité » des théorèmes abordés dans le cours *NYB* a grandement contribué à éliminer le recours à un tel procédé. Les théorèmes traités sont, pour la majorité, composés de quelques hypothèses desquelles découle une unique conclusion, rendant ainsi non pertinent le morcellement en plusieurs parties de l'énoncé.

La seconde exigence qui occupe une place plutôt timide dans les démonstrations analysées est la *Nécessité d'une écriture quantifiée*. L'usage qui est fait des quantificateurs dans le manuel nous a étonnées. Le seul type de démonstrations où nous avons noté un rôle non-négligeable pour les quantificateurs est constitué des démonstrations par l'absurde. Effectivement, la mise en jeu de ce type de raisonnement nécessite de prendre en considération la négation de l'énoncé quantifié initial. Le second usage qui est fait des quantificateurs, et que nous avons relevé dans certaines analyses, est illustré par l'exemple suivant. La démonstration du théorème 6.9 (voir page 108) portant sur la convergence et la divergence de séries nécessite la définition d'un rang N à partir duquel les termes de deux séries sont égaux, ce qui peut être mathématiquement écrit de la façon suivante : $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $a_i = b_i\ \forall i \geq N$. Bien que l'usage des quantificateurs soit souhaité dans un tel contexte si l'on désire se conformer à un certain niveau de formalisme (niveau de formalisme requis dans les cours universitaires d'analyse par exemple), l'étudiant moins soucieux de rigueur pourrait s'y dérober. Devant l'incertitude qui entoure le recours effectif par les étudiants aux quantificateurs dans ces situations, nous sommes dans l'obligation de mettre un bémol sur l'utilisation de quantification dans ces situations. Ce bémol vient renforcer notre observation attribuant une place timide, et dans le présent cas incertaine, aux quantificateurs dans les tâches du manuel.

Cette quasi-absence des quantificateurs détonne selon nous avec la place importante qu'ils occupent dans les mathématiques avancées, particulièrement en analyse. On a qu'à penser aux définitions en $\varepsilon - \delta$: de la convergence d'une suite[35], de la limite, de la continuité, des convergences (ponctuelle et uniforme) d'une suite de fonctions, etc. Elles nécessitent la prise en compte, dans un ordre précis, de quantifications existentielles et universelles. Les quantificateurs présents dans ce type de définition ainsi que leur ordre d'apparition constituent une difficulté de taille pour bon nombre d'étudiants. Cette situation a d'ailleurs été relevée par Lockwood et Swinyard (2007, pp. 18-19) :

> [...] students had difficulty determining both the types of quantifiers appropriate for ε and δ (i.e., existential vs. universal) and the appropriate quantification structure (i.e., "For all/there exists" vs. "There exists/for all"). Some students believed no difference exists between the two quantification structures and did not understand the role quantification structure plays in the definition[36].

Dans sa thèse, Chellougui (2004) montre comment ces difficultés sont exacerbées par le passage des quantifications exprimées en langage courant aux quantifications symbolisées. L'article de Dubinsky et Yiparaki (2000) étudie les difficultés spécifiquement liées à l'ordre d'application des quantifications. Cela est cruciale en analyse, où certaines définitions (par exemple celles de la continuité sur un intervalle et de la continuité uniforme sur un intervalle) diffèrent uniquement par l'ordre dans lequel se présentent les deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

---

[35] « On dit que la suite $\{x_n\}$ converge (ou tend) vers la limite x si, quel que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre N tel que l'inégalité $n > N$ entraîne $|x_n - x| < \varepsilon$, c'est-à-dire que, en notation abrégée, $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$. » (Labelle et Mercier, 1993, p. 49)

[36] [...] les étudiants ont eu de la difficulté à déterminer le type de quantificateurs approprié pour ε et δ (c'est-à-dire, existentiel versus universel) et la structure de quantification appropriée (c'est-à-dire, « Pour tout/il existe » versus « Il existe/pour tout »). Certains étudiants croyaient qu'il n'existe aucune différence entre les deux structures de quantification et ne comprenaient pas le rôle que cette structure joue dans la définition. (Lockwood et Swinyard, 2007, pp. 18-19, notre traduction)

Les définitions $\varepsilon - \delta$ constituent un exemple parmi tant d'autres montrant l'importance d'une bonne compréhension des quantifications. Puisque le cours *NYB* présente plusieurs points en commun avec les cours d'analyse, nous nous attendions à ce que les quantificateurs jouent un rôle plus déterminant dans le manuel analysé. Selon Epp (2003), les quantifications sont des notions complexes qui nécessitent un travail important dans les cours de mathématiques. En effet, la signification informelle des quantificateurs dans la vie courante et leur signification en mathématiques étant souvent discordantes, cela pose problème à plusieurs étudiants, qui ne perçoivent pas les nuances entre les significations formelle et informelle des quantificateurs (voir également Chellougui, 2004). Ce problème se pose lorsqu'on veut déterminer la négation d'un énoncé quantifié. Effectivement, la négation de quantificateurs dans le langage courant est régie par des lois différentes, et souvent beaucoup plus souples et variables (selon les contextes et les langues) que la négation des quantificateurs dans l'univers mathématique (voir Durand-Guerrier et Njomgang-Ngansop, 2009). Un étudiant qui éprouve des difficultés dans ce domaine aura sans doute de la difficulté à effectuer des démonstrations par l'absurde ou par la contraposée (deux méthodes de preuve nécessitant la prise en considération de la négation de l'énoncé initial), en plus d'avoir certains problèmes dans les tâches nécessitant la recherche d'un contre-exemple. La validité d'un contre-exemple repose en effet sur la compréhension et la négation des quantifications en cause dans l'énoncer à réfuter.

Nous croyons, pour les raisons avancées précédemment, que les quantifications en mathématiques doivent faire l'objet d'un travail important, dans le but de préparer les étudiants à affronter les attentes des mathématiques universitaires. Il sera donc intéressant d'étudier l'utilisation des quantifications dans un cours de transition vers la preuve comme celui proposé au cégep Ahuntsic.

4.2.2 Les éléments de formalisme dans le manuel analysé

Notre étude du manuel de Charron et Parent nous a permis de dresser un portrait des principaux éléments de formalisme qui y sont présents :

- *Présence d'intervalles ouverts et d'intervalles fermés*
- *Pluralité de symboles littéraux*
- *Recours à des représentants génériques de prime abord arbitraires*
- *Travail sur les inégalités*
- *Travail sur les limites et les infinitésimaux*
- *Calculs, manipulation des formules*

C'est la présence de ces éléments dans plusieurs des démonstrations analysées et leur représentativité en matière de formalisme des mathématiques avancées qui nous ont poussées à les garder comme « balises » en vue de notre analyse du cours *Mathématiques pour les sciences*. Bien que le cours du cégep Ahuntsic sera analysé en ayant en tête ces éléments pointés dans le manuel *NYB*, nous gardons bien évidemment l'œil ouvert pour voir si *Mathématiques pour les sciences* ne traiterait pas d'autres éléments de formalisme.

4.2.3 Complexité de la structure déductive des démonstrations analysées

L'analyse du manuel nous a permis de mettre en lumière une pauvre variété de structures déductives. En effet, la majorité des démonstrations analysées possèdent des structures déductives linéaires, souvent composées de peu de pas déductifs. De plus, le raisonnement mis en jeu dans plusieurs d'entre elles est entièrement subordonné au calcul à effectuer (voir § 4.1.4.6, exercice 7, section 4.1 du manuel). Ce type de tâches, qui semble de prime abord susciter la mise en œuvre de déductions, repose plutôt sur la réalisation de manipulations algébriques. L'étudiant n'a pas à réfléchir sur la signification des objets en cause mais peut uniquement se concentrer sur les manipulations symboliques à effectuer.

Malgré le fait que certaines des démonstrations étudiées (3 démonstrations sur les 37 analysées) se soient démarquées par la complexité de leur structure déductive (arbres d'inférences plutôt que chaînes), nous croyons que l'abondance de démonstrations à structure déductive linéaire peut ancrer chez l'étudiant une représentation incomplète de l'activité de démonstration. Le fait de présenter presque qu'exclusivement des démonstrations se résumant à des chaînes d'inférences peut amener l'étudiant à croire qu'il suffit, pour démontrer tout énoncé, d'effectuer une suite de déduction, où la conclusion d'un pas sert de prémisse au pas suivant, pour obtenir la conclusion souhaitée. Cette marche à suivre, qui est valable dans les démonstrations décrites précédemment, ne peut s'appliquer à un bon nombre de démonstrations requises dans les mathématiques avancées. Pour élaborer celles-ci, l'étudiant doit souvent développer plusieurs arguments de façon indépendante avant de les combiner et en déduire la conclusion escomptée (voir le problème synthèse analysé à la section 4.1.3). Ce type de démonstrations représentera une difficulté de taille pour l'étudiant d'autant plus s'il n'y a jamais été initié.

4.2.4 Attitude de preuve

La totalité des tâches analysées sont fermées, c'est-à-dire que la valeur de vérité de l'énoncé à démontrer n'est pas mise en doute. Alors que la démarche de preuve devrait naître du désir d'établir définitivement la validité d'un énoncé dont on ignore la valeur de vérité, la démonstration mathématique est plutôt présentée ici comme un simple exercice qui doit être accompli par l'étudiant. Celui-ci n'entre pas dans la démonstration poussé par la *nécessité intérieure* d'établir la vérité, mais se soumet plutôt aux consignes de la tâche. Devant cette situation, l'étudiant pourrait se questionner sur l'utilité de la démonstration en mathématiques : pourquoi valider des énoncés qu'on sait être vrais.

Nous sommes conscientes qu'il est impossible de présenter uniquement des énoncés ouverts aux étudiants. Cependant, nous aurions souhaité en voir davantage, dans l'optique de donner aux étudiants une image fidèle des rôles et des fonctions que joue la démonstration en mathématiques. Nous sommes curieuses de voir quelle sera l'utilisation faite de la démonstration dans le cours *Mathématiques pour les sciences*.

4.3 Éléments à prendre en considération lors de l'analyse de *Mathématiques pour les sciences* et raffinement de la grille d'analyse

L'analyse des tâches proposées dans *Mathématiques pour les sciences* sera faite avec le même outil que celui utilisé pour l'analyse du manuel de Charron et Parent, c'est-à-dire les grilles d'analyse présentées au chapitre *Méthodologie* (voir § 3.2.4). Cependant, chacun des éléments traités dans notre bilan fera l'objet d'une attention particulière. Pour résumer et rendre opérationnels les propos qui ont été tenus dans le bilan, nous présentons une version améliorée de notre grille d'analyse. Celle-ci comporte les sous-catégories qui ont été établies ainsi que certains points qui devront être étudiés lors des analyses à venir.

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement?*
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?*
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?*

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?*
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices sont-ils fournis?*
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?*
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?*
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche? Certains éléments repérés dans le manuel NYB sont-ils présents :*
    - *Présence d'intervalles ouverts et d'intervalles fermés?*
    - *Pluralité de symboles littéraux?*
    - *Recours à des représentants génériques de prime abord arbitraires?*
    - *Travail sur les inégalités?*
    - *Travail sur les limites?*
    - *Calculs, manipulation des formules?*

- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?*
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?*
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?*

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?*
- *Quels théorèmes appliquer?*
- *Y a-t-il lieu d'introduire des étapes?*
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?*
    - *Ces arguments sont-ils facilement accessibles ou une analyse approfondie de la situation est-elle nécessaire pour les mettre en lumière?*
- *Y a-t-il à répéter un argument?*
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)? Si un changement de point de vue est nécessaire, de quel type est-il :*
    - *Changement de point de vue réalisé par l'introduction d'un nouvel objet?*
    - *Changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche?*
    - *Changement de point de vue nécessité par la méthode de preuve utilisée?*
- *Y a-t-il une sélection d'informations à effectuer?*
- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?*
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?*
    - *Outre l'importance des quantificateurs dans les démonstrations par l'absurde, y a-t-il d'autres situations requérant la prise en compte des quantifications explicites ou implicites?*
- *Y a-t-il un nouveau vocabulaire ou symbolisme à gérer?*

CHAPITRE V

ANALYSE DES TÂCHES PROPOSÉES DANS LE COURS *MATHÉMATIQUES POUR LES SCIENCES*

Comme il a été mentionné précédemment, le cours *Mathématiques pour les sciences* sera analysé via les tâches faisant intervenir l'activité de démonstration proposées à la session hiver 2008. Ces tâches seront analysées dans l'optique de mettre en lumière les difficultés, eu égard à la démonstration et au formalisme, qui y sont présentes. Rappelons que notre but ultime est de comparer les difficultés ciblées dans ce cours avec celles relevées dans les tâches et démonstrations du manuel du cours de *Calcul intégral NYB*. C'est pourquoi l'analyse des tâches du cours du cégep Ahuntsic sera effectuée avec la même grille que celle utilisée pour notre analyse du cours *NYB*. Les éléments relevés lors de notre analyse précédente (ces éléments ont été présentés dans notre bilan des analyses du cours *NYB*, § 4.2) seront cependant pris en considération pour raffiner et orienter notre analyse des tâches de *Mathématiques pour les sciences*.

Par souci de rester le plus fidèle possible au déroulement du cours décidé par l'enseignante, nous présenterons les tâches dans le même ordre qu'elles sont proposées aux étudiants. De plus, contrairement à ce qui a été fait pour le manuel de Charron et Parent, seules les tâches sélectionnées par l'enseignante parmi les exercices du manuel du cours (Bourbonnais, 2008) ainsi que celles données en devoir et en évaluation ont été étudiées. Cette démarche a été choisie pour avoir une représentation la plus réaliste possible du cours suivi par les étudiants.

Pour chacune des tâches ciblées, nous présentons la solution « idéalement » attendue. Cette solution est, pour la majorité des tâches, directement issue du corrigé du manuel

(Bourbonnais, 2008) ou des corrigés rédigés par l'enseignante. Certaines des solutions issues des corrigés du manuel ou de l'enseignante ont cependant été retranscrites plutôt que numérisées. Deux raisons expliquent cette situation. Premièrement, certains des corrigés fournis par l'enseignante étaient manuscrits et donc moins faciles à lire une fois numérisés. Deuxièmement, certaines pages du manuel de référence prêté par l'enseignante étaient en moins bon état, rendant la numérisation difficile, voire impossible. Quelques tâches n'étant pas accompagnées d'un solutionnaire, nous avons été dans l'obligation de proposer, pour ces tâches, nos propres solutions. Pour ce faire, nous nous sommes appuyées sur les sections théoriques et les documents remis par l'enseignante dans l'optique de fournir la solution la plus près possible de celle attendue dans le cadre du cours.

Les différentes tâches, leurs solutions attendues ainsi que leurs analyses sont présentées ci-dessous. Nous avons également pris soin d'identifier la nature des tâches : exercices donnés en devoir, question de quiz, activité, question d'examen...

5.1 Étape 1 : Logique propositionnelle et ensembles

5.1.1 Objectifs spécifiques de l'étape 1

Cette étape comprend l'étude de trois thèmes principaux : la théorie des ensembles, la logique propositionnelle et les méthodes de preuves. Le premier sujet abordé est la théorie des ensembles. Il est attendu de l'étudiant qu'il apprenne les définitions de plusieurs concepts relatifs à ce thème tel que ensemble universel, l'ensemble vide, sous-ensemble, une partition d'un ensemble, les opérations sur les ensembles (union, intersection, complémentation), diagrammes de Venn ainsi que les principaux ensembles numériques. L'étudiant doit ainsi pouvoir résoudre des problèmes mettant en jeu ces concepts. Dans le plan de cours, aucun objectif spécifique se rapportant à la théorie des ensembles ne semble faire intervenir l'activité de démonstration. Cependant, le formalisme mathématique est très présent dans cette portion du cours, puisque l'étudiant doit apprendre le symbolisme inhérent à la théorie des ensembles. D'ailleurs, plusieurs des tâches sont centrées sur la compréhension et l'utilisation du symbolisme lié aux ensembles.

La logique propositionnelle est le deuxième thème abordé à l'étape 1. Tout comme pour la théorie des ensembles, un des objectifs d'apprentissage lié à ce sujet est d'être en mesure d'énoncer la définition de plusieurs concepts tels qu'une proposition, une forme propositionnelle, les cinq opérateurs logiques, la réciproque, la contraposée et l'inverse d'une implication, une tautologie, une implication et une équivalence logique, une règle d'inférence ainsi que le modus ponens, le syllogisme et le modus tollens. Ces concepts, et bien d'autres, doivent par la suite être réinvestis dans la résolution de plusieurs problèmes. Ceux-ci revêtent plusieurs formes dont la construction de tables de vérité, la détermination de la nature d'une proposition (est-ce une tautologie, une contradiction, une implication logique?) et la démonstration que deux propositions sont logiquement équivalentes. Ce dernier point est d'ailleurs le seul objectif traitant explicitement de l'activité de démonstration. Le formalisme mathématique semble également présent dans cette portion du cours puisque plusieurs tâches visent à utiliser et départager les symboles nouvellement introduits.

Le dernier thème abordé à l'étape 1 est les différentes méthodes de preuves. L'objectif principal de cette section est de « démontrer des propositions par énumération, à l'aide d'un contre-exemple, à l'aide d'une preuve directe, preuve par la contraposée, preuve par contradiction, preuve par cas, preuve d'une biconditionnelle » (Plan de cours, hiver 2008, p. 8). La réalisation d'un tel but demande à l'étudiant de connaître, de départager et d'utiliser le vocabulaire relatif à chacune de ces méthodes de preuves, en plus d'en connaître les mécanismes. Cette emphase mise dans le plan de cours sur l'exactitude du vocabulaire à employer constitue un premier élément d'incitation au formalisme. Lors de la réalisation des différentes démonstrations demandées, il est attendu de l'étudiant qu'il justifie précisément chacune des étapes menant à la conclusion. Puisque que le manuel a ciblé les nombres entiers comme contexte d'apprentissage pour les différentes méthodes de preuves (Bourbonnais, 2008, p. 80), les justifications qui doivent être apportées passent souvent par l'énumération de propriétés des opérations dans les nombres entiers. Celles-là doivent donc être connues des étudiants et nommées clairement par ceux-ci. D'autres éléments de formalisme interviennent dans les objectifs d'apprentissage de ce thème. Effectivement, il est mentionné dans le plan de cours que l'utilisation des quantificateurs existentiels, universels et d'unicité ainsi que les définitions, en langage naturel et en langage mathématique, d'un nombre pair, d'un nombre impair et d'un nombre premier doivent être maîtrisées par les étudiants.

L'étape 1 de *Mathématiques pour les sciences* semble donc sous-tendre plusieurs objectifs d'apprentissage liés à la démonstration et au formalisme. Pour mener à bien ces objectifs, plusieurs tâches sont proposées aux étudiants.

5.1.2 Tâches proposées à l'étape 1

Pour atteindre l'ensemble des objectifs d'apprentissage ciblés à l'étape 1 du cours, 100 tâches sont proposées aux étudiants. Parmi celles-ci, 41 font intervenir l'activité de démonstration. L'analyse de chacune de ces 41 tâches est présentée ci-dessous.

Tâche 1 : Exercice 3.5.1 (exercice tiré du manuel, p. 55)

Montrer que les propositions P et $\sim(\sim P)$ sont logiquement équivalentes.

Réponse attendue à la tâche 1

Cette solution est tirée du solutionnaire du manuel (p. 56).

P	$\sim P$	$\sim(\sim P)$	$P \leftrightarrow \sim(\sim P)$
V	F	V	V
F	V	F	V

Puisque $P \leftrightarrow \sim(\sim P)$ est une tautologie, alors P et $\sim(\sim P)$ sont logiquement équivalentes. On peut donc écrire $P \Leftrightarrow \sim(\sim P)$.

Analyse de la tâche 1

Les tâches 1 et 2 étant similaires à plusieurs égards, nous avons décidé de ne pas présenter une analyse exhaustive de la présente tâche et référons plutôt le lecteur à l'analyse qui est réalisée de la tâche suivante. C'est la complexité des propositions impliquées dans la tâche 2 qui a motivé notre choix d'appliquer notre grille à la tâche 2 plutôt qu'à la tâche 1.

Tâche 2 : Exercice 3.5.2 (exercice tiré du manuel, p. 55)

a) Soit P et Q deux propositions. Montrer que la proposition $((\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$ est une tautologie.
b) Peut-on déduire de a) une proposition logiquement équivalente à $P \leftrightarrow Q$.

Réponse attendue à la tâche 2

Cette solution est tirée du solutionnaire du manuel (p. 56).

a)

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee Q$	$P \vee \sim Q$	$(\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q)$	$P \leftrightarrow Q$	◊
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V

où ◊ représente $(\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$

b) Oui. Puisque $(\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$ est une tautologie, alors on peut conclure que la proposition $(\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q)$ est logiquement équivalente à la proposition $P \leftrightarrow Q$.

Analyse de la tâche 2

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Une compréhension du symbolisme utilisé en logique propositionnelle est requise. Les symboles de la négation, de la conjonction, de la disjonction et de la biconditionnelle doivent être décodés, interprétés et utilisés. L'étudiant doit être en mesure d'utiliser une table de vérité pour présenter sa solution. La construction de cette table demande de repérer les différentes combinaisons des propositions P et Q qui doivent être successivement créées pour ultimement obtenir les valeurs de vérité des deux propositions composant la biconditionnelle principale, soit $(P \leftrightarrow Q)$ et $(\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q)$. Pour répondre à la sous-question b), l'étudiant doit comprendre la signification des termes « propositions logiquement équivalentes ». Plus précisément, il doit savoir que deux propositions sont logiquement équivalentes quand la biconditionnelle de ces deux propositions est une tautologie.

- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* La logique propositionnelle, ainsi que le vocabulaire et le symbolisme qui lui sont associés, a été présentée au chapitre 3 du manuel, chapitre duquel est issue cette tâche. Il s'agit donc de nouvelles notions.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent à la logique propositionnelle.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte deux sous-questions dont la solution de la seconde repose sur la proposition démontrée à la première.
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* La valeur de vérité de l'énoncé à démontrer est connue puisqu'on sait que la proposition est une tautologie. Des indices sont fournis. En effet, un exemple similaire[1] est présenté dans la section théorique précédant la section d'exercices d'où est tiré l'exercice 3.5.2. De plus, la sous-question b) renvoie directement l'étudiant au résultat démontré à la sous-question a).
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Ce type de problèmes a été présenté aux étudiants dans la section théorique 3.4 du chapitre 3.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Le raisonnement déductif qui doit être mis en œuvre ici est pris en charge par les opérations logiques à effectuer.

---

[1] « Exemple 3.4.4 : Montrons que la proposition $P \rightarrow Q$ est logiquement équivalente à la proposition $\sim P \vee Q$. Cela revient à montrer que $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$ est une tautologie. » (Bourbonnais, 2008, p. 53)

- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme occupe une place non négligeable dans cette tâche. En effet, dans un premier temps, l'étudiant doit comprendre ce que représente les symboles *P* et *Q*, c'est-à-dire des propositions pouvant être soit vraie, soit fausse. Les symboles des opérateurs logiques qui interviennent dans la démonstration doivent aussi être maîtrisés. Le vocabulaire inhérent à la logique propositionnelle joue également un rôle-clé dans la tâche. Les termes « propositions logiquement équivalentes » et « tautologie » doivent être saisis par l'étudiant s'il souhaite résoudre la tâche.
- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?* Les termes «propositions logiquement équivalentes » et « tautologie » ont été présentés dans la section théorique précédant la section d'exercices 3.5. Il s'agit de la première section d'exercices faisant intervenir ces termes. En ce qui concerne les symboles des opérateurs logiques, ils ont été introduits à la section théorique 3.1 et la section d'exercices 3.2 portait sur leur compréhension et leur utilisation.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est technique. Des exemples similaires ont été donnés dans la section théorique 3.4.
- *Y a-t-il lieu d'introduire des étapes?* Les propositions intermédiaires intervenant dans la table de vérité peuvent être considérées comme des étapes qui doivent être introduites par l'étudiant.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Très peu d'arguments sont mis en jeu dans cette tâche : les définitions des opérateurs logiques, d'une tautologie et de propositions logiquement équivalentes. La priorité des opérateurs logiques doit également être prise en considération lors de l'élaboration de la table de vérité.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de point de vue correspondant à notre

deuxième sous-catégorie, c'est-à-dire un *changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche*, est à introduire à la sous-question b). L'étudiant doit traduire mathématiquement l'expression « propositions logiquement équivalentes ». En effet, il doit savoir que deux propositions sont logiquement équivalentes quand la biconditionnelle de ces deux propositions est une tautologie. Ce changement de point de vue ne représente pas, selon nous, un véritable défi pour l'étudiant, car il a été dévoilé dans les exemples similaires présentés à la section théorique 3.4. En ce qui concerne les registres de représentations, la table de vérité, utilisée pour présenter la démonstration, doit être introduite sans indication. Nous croyons cependant, que l'étudiant, influencé par les exemples présentés, y aura spontanément recours.

- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* La tautologie sous-entend une quantification universelle. En effet, pour qu'une proposition soit une tautologie, celle-ci doit être toujours vraie « quelles que soient les valeurs de vérité que peuvent prendre les propositions qui la composent » (Bourbonnais, 2008, p. 52).

Bien que la tâche 2 soit plus complexe du point de vue symbolique que la tâche 1, nous croyons que l'énoncé de la présente tâche est plus directif que celui de sa consœur. En effet, pour réaliser la démonstration demandée à la tâche 1, un changement de point de vue est requis, car l'étudiant doit transformer l'énoncé « propositions logiquement équivalentes » en une forme orientant davantage la démonstration à construire. Un tel changement de point de vue n'est pas nécessaire pour résoudre la sous-question a) puisqu'il est mentionné explicitement de « montrer que la proposition $((\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$ est une tautologie ». Le changement de point de vue requis lors de l'élaboration de la démonstration de la tâche 1 doit par contre être effectué à la sous-question b) de la tâche 2.

Tâche 3 : Exercice 3.5.3 (exercice tiré du manuel, p. 55)

Montrer que la proposition $P \leftrightarrow Q$ est logiquement équivalente à la proposition $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

Réponse attendue à la tâche 3

Cette solution est tirée du solutionnaire du manuel (p. 56).

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	$P \leftrightarrow Q$	$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

La tâche 3 étant similaire à la tâche suivante, son analyse sera traitée en concomitance avec l'analyse de la tâche 4.

Tâche 4 : Exercice 3.5.4 (exercice tiré du manuel, p. 55)

Démontrer l'équivalence logique $\sim (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$

Réponse attendue à la tâche 4

Cette solution est tirée du solutionnaire du manuel (p. 56).

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\sim (P \rightarrow Q)$	$\sim Q$	$P \wedge \sim Q$	$\sim (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

Analyse des tâches 3 et 4

Les tâches 3 et 4 étant similaires aux tâches 1 et 2, nous avons décidé de ne pas représenter une analyse complète. Seulement certains éléments-clés sont soulevés.

Tout comme c'était le cas pour la tâche 1, les tâches 3 et 4 reposent sur un changement de point de vue. En effet, l'étudiant doit savoir que démontrer qu'une équivalence logique entre deux propositions revient à démontrer que la biconditionnelle formée de ces deux propositions est une tautologie.

La complexité symbolique des tâches 3 et 4 s'apparente à la complexité symbolique de la tâche 2. Deux propositions, P et Q, sont impliquées et une grande variété d'opérateurs logiques (biconditionnelle, conjonction, implication et négation) est utilisée. Ces deux facteurs ont pour effet d'augmenter la taille de la table de vérité qui doit être créée.

Tâche 5 : Exercice 3.5.5 (exercice tiré du manuel, p. 55)

Démontrer que si deux propositions sont logiquement équivalentes, alors il en est de même avec leur négation.

Réponse attendue à la tâche 5

Cette solution est tirée du solutionnaire du manuel (p. 56).

Le problème revient à démontrer que $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\sim P \leftrightarrow \sim Q)$ est une tautologie.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \leftrightarrow Q$	$\sim P \leftrightarrow \sim Q)$	$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\sim P \leftrightarrow \sim Q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

L'implication est bien une tautologie.

Analyse de la tâche 5

Contrairement aux quatre premières tâches, la tâche 5 ne vise pas la démonstration d'une équivalence logique, mais plutôt la démonstration d'une implication logique. Malgré cette différence, la démonstration à réaliser partage plusieurs similarités avec les tâches 1 à 4, rendant accessoire la présentation de son analyse exhaustive. Effectivement, la démonstration qui doit être élaborée repose encore une fois sur la construction d'une table de vérité montrant que l'implication est une tautologie.

Deux points méritent cependant d'être soulevés. Dans un premier temps, contrairement aux quatre tâches précédentes, les différentes propositions sont données en langage naturel et c'est à l'étudiant de mathématiser l'énoncé qui lui est foumi. Cette étape constitue un premier changement de point de vue. Cette réécriture en langage mathématique nécessite une compréhension des symboles et du vocabulaire inhérents à la logique propositionnelle. Dans un deuxième temps, un changement de point de vue similaire à celui explicité pour les tâches précédentes doit être effectué. L'étudiant doit en effet démontrer que l'implication décrite est une tautologie.

Tâche 6 : Exercice 4.5.3 (exercice tiré du manuel, p. 77)

Démontrer que

a) $(x+a)^4 \equiv x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$
b) $x^3 - a^3 \equiv (x-a) \cdot (x^2 + ax + a^2)$

Réponse attendue à la tâche 6

La solution est issue du corrigé du manuel (pp. 78-79).

a)

$$
\begin{aligned}
(x+a)^4 &\equiv (x+a)^2 \cdot (x+a)^2 \\
&\equiv (x^2 + 2ax + a^2) \cdot (x^2 + 2ax + a^2) \\
&\equiv x^2 \cdot (x^2 + 2ax + a^2) + 2ax \cdot (x^2 + 2ax + a^2) + a^2 \cdot (x^2 + 2ax + a^2) \\
&\equiv (x^4 + 2ax^3 + x^2a^2) + (2ax^3 + 4a^2x^2 + 2a^3x) + (a^2x^2 + 2a^3x + a^4) \\
&\equiv x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
(x-a)\cdot(x^2+ax+a^2) &\equiv x\cdot(x^2+ax+a^2)-a\cdot(x^2+ax+a^2)\\
&\equiv (x^3+ax^2+a^2x)-(ax^2+a^2x+a^3)\\
&\equiv x^3+ax^2+a^2x-ax^2-a^2x-a^3\\
&\equiv x^3-a^3
\end{aligned}
$$

Analyse de la tâche 6

Après avoir appliqué notre grille d'analyse, nous nous sommes aperçues que peu d'éléments en ressortaient. C'est pourquoi nous avons choisi de présenter directement les quelques points mis en lumière par notre outil.

Cette tâche semble, selon nous, davantage un prétexte pour travailler certaines manipulations algébriques, telles que la factorisation, qu'une tâche travaillant la démonstration. Le raisonnement déductif qui doit être élaboré est pris en charge par le calcul. La structure déductive des deux démonstrations se résume à une chaîne d'inférences comportant peu de pas déductifs. En effet, les démonstrations qui doivent être élaborées reposent sur un nombre restreint d'arguments : la transitivité de l'égalité, la définition de l'exposant, certaines propriétés des opérations et certaines manipulations algébriques. Ces arguments sont peu complexes et ont tous été travaillés au secondaire. Cette tâche, en plus de servir de prétexte à la réalisation de manipulations algébriques, sert selon nous à mettre en action un symbole qui a nouvellement été présenté : $\equiv$. L'étudiant doit savoir qu'une quantification universelle est sous-entendue dans ce symbole d'équivalence. En effet, celui-ci signifie que l'égalité est vraie pour toutes les valeurs de la variable x.

En plus d'être une tâche simple sur le plan du raisonnement déductif, le manuel fournit des indices sur la marche à suivre pour effectuer de telles démonstrations. Effectivement, la démonstration d'identités est traitée dans la section théorique précédant la section d'exercices d'où est issue cette tâche. On y dévoile deux méthodes pouvant être utilisées pour réaliser ce type de démonstrations.

Tâche 7 : Exercice 4.5.4 (tiré du manuel, p. 77)

Platon a formulé la proposition suivante : « *Le carré d'une somme de carrés de deux nombres donnés est la somme du carré de la différence de ces carrés et du carré du double produit des deux nombres donnés* »

a) Formuler cette proposition à l'aide du symbolisme mathématique.
b) Illustrer cette proposition avec les nombres 2 et 3.
c) Démontrer cette proposition.

Réponse attendue à la tâche 7

La solution est tirée du corrigé du manuel (p. 79).

a) $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a^2 + b^2)^2 \equiv (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$
b) Membre de gauche : $(a^2 + b^2)^2 = (2^2 + 3^2)^2 = (4 + 9)^2 = 13^2 = 169$
Membre de droite : $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (2^2 - 3^2)^2 + (2 \cdot 2 \cdot 3)^2 = (4 - 9)^2 + 12^2 = (-5)^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$
c) Développons chacun des deux membres de l'identité.
D'une part, le membre de gauche peut se ramener à :
$$(a^2 + b^2)^2 \equiv a^4 + 2a^2b^2 + b^4$$
D'autre part, le membre de droite se ramène à :
$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 \equiv a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 \equiv a^4 + 2a^2b^2 + b^4$$
Puisque les deux membres se ramènent à la même expression, on peut conclure que :
$$\therefore (a^2 + b^2)^2 \equiv (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$$

Analyse de la tâche 7

La démonstration demandée à la tâche 7 étant similaire à celles requises à la tâche 6, nous référons le lecteur à l'analyse qui y a été réalisée.

Nous tenons par contre à mettre en lumière certains éléments départageant les deux tâches. Alors que la méthode attendue à la tâche 6 pour effectuer la démonstration consiste à sélectionner un des deux membres de l'égalité pour lui faire subir une succession de transformations afin d'obtenir le second membre de l'égalité, la méthode souhaitée à la tâche

7 est quelque peu différente. Elle demande à l'étudiant de traiter séparément chacun des deux membres de l'égalité pour leur faire subir une succession de transformations dans l'optique d'obtenir une tierce expression qui soit identique. Malgré leurs différences, ces deux méthodes reposent sur la même propriété : la transitivité de l'égalité. Il est cependant important de préciser que la solution fournie par le manuel n'est pas la seule qui soit possible. Un étudiant pourrait très bien avoir recours à la méthode utilisée à la tâche 6 pour démontrer l'identité de la tâche 7. Dans ce cas, le commentaire émis ci-haut ne s'appliquerait pas.

La réécriture en langage mathématique de l'égalité donnée en langage naturel est un changement de point de vue qui est propre à la tâche 7. Celui-ci constitue une difficulté supplémentaire puisque l'étudiant doit décoder l'information qui lui est présentée avant de pouvoir débuter la démonstration.

Tâche 8 : Question 4 tirée des exercices supplémentaires sur les quantificateurs (document supplémentaire remis aux étudiants par l'enseignante)

Si les énoncés suivants sont vrais, alors les démontrer. S'ils sont faux, alors donner un contre-exemple.

a) Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{6, 7, 8\}$. $\forall x \in A \cup B^c, x \in A$.
b) Soit $A = \{♥, ♦\}$ et $B = \{♥, ♦, ♣, ♠\}$. $\forall x \in A \cup B, x \in B$.
c) Soit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $B = \{d, e, f, g, h, i\}$. $\forall x \in A \cap B, x \in A$.
d) Soit A et B deux ensembles d'un même référentiel Ω, tel que $(A \cup B)$ est inclus dans Ω. On peut alors affirmer que $(A \cup B)^c = \emptyset$.
e) $\forall x \in R$, si $x\,(x + 2)\,(x - 3) = 0$ alors $x = -2$ ou $x = 3$.

Réponse attendue à la tâche 8

Cette solution est tirée d'un solutionnaire rédigé par l'enseignante.

a) Faux, $4 \in A \cup B^c$ et 4 n'est pas un élément de l'ensemble A.
b) Vrai, puisque ♥ ∈ A ∪ B et ♥ ∈ B; ♦ ∈ A ∪ B et ♦ ∈ B; ♣ ∈ A ∪ B et ♣ ∈ B; ♠ ∈ A ∪ B et ♠ ∈ B.

c) Vrai, puisque $d \in A \cap B$ et $d \in A$; $e \in A \cap B$ et $e \in A$; $f \in A \cap B$ et $f \in A$.

d) Faux, soit $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ et $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, alors $(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4\}$ est inclus dans l'ensemble Ω, mais $(A \cup B)^c = \{5\} \neq \emptyset$.

e) Faux, si $x = 0$, on a que la proposition $x\ (x + 2)\ (x - 3) = 0$ est vraie tandis que la proposition $x = -2$ ou $x = 3$ est fausse et donc l'implication est fausse (puisque l'antécédent est vraie, mais le conséquent est faux).

Analyse de la tâche 8

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* La compréhension de plusieurs notions liées à la théorie des ensembles (appartenance, inclusion, union, intersection, complément, référentiel, ensemble vide), de l'opérateur logique d'implication et des quantificateurs est nécessaire. De plus, l'étudiant doit savoir ce qu'est un contre-exemple et être en mesure d'en fournir un lorsque nécessaire.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les notions relatives à la théorie des ensembles et l'opérateur logique d'implication ont déjà été travaillés dans plusieurs tâches présentées antérieurement dans le cours. En ce qui concerne les quantificateurs et la notion de contre-exemple, elles sont nouvelles pour l'étudiant.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent à la théorie des ensembles.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé de la tâche comporte cinq sous-questions indépendantes.
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* La tâche est ouverte puisque la valeur de vérité de chacun des énoncés est inconnue. Aucun indice ne vient faciliter la résolution de la tâche.

- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Il s'agit d'un nouveau type de problèmes puisqu'aucun problème similaire n'a été proposé dans les sections d'exercices précédentes ou dans les sections théoriques.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Les énoncés vrais nécessitent la mise en jeu d'un raisonnement par disjonction de cas tandis que les énoncés faux font intervenir la réfutation à l'aide d'un contre-exemple.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme occupe une place importante dans cette tâche. L'étudiant doit maîtriser le symbolisme inhérent à la théorie des ensembles ainsi que les quantificateurs. Des lacunes dans ces domaines compliqueraient le travail de l'étudiant et pourraient entraîner des erreurs.
- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?* Les quantificateurs ont nouvellement été présentés.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de chacune des démonstrations est simple.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est technique.
- *Quels théorèmes appliquer?* Aucun théorème précis n'est à appliquer. Par contre, l'utilisation du contre-exemple sous-entend le principe du tiers-exclu.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est à développer : définitions des différentes notions ensemblistes explicitées précédemment, du quantificateur universel et de l'implication.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* Plusieurs quantificateurs sont explicités dans la tâche et doivent être interprétés adéquatement par l'étudiant. La validité d'un contre-exemple en mathématique reposant sur la négation des énoncés quantifiés, il est essentiel pour mener à bien cette tâche de comprendre les quantifications impliquées et leur négation. Plus précisément, l'étudiant doit savoir que pour réfuter un énoncé quantifié universellement, il suffit de trouver un élément

du référentiel pour lequel cet énoncé est faux. Cette affirmation repose sur l'équivalence logique suivante : $\sim(\forall x \in A, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in A, \sim P(x))$.

Tâche 9 : Exercice 4.16.1 (tiré du manuel, p. 97)

a) Montrer que si un nombre $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit $n = 2a + 17$ avec $a \in \mathbb{Z}$ alors il peut aussi s'écrire $n = 2b + 1$ avec $b \in \mathbb{Z}$.

b) Montrer que si un nombre $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit $n = 5a + 28$ avec $a \in \mathbb{Z}$ alors il peut aussi s'écrire $n = 5b + 3$ avec $b \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer que si un nombre $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit $n = 3a - 19$ avec $a \in \mathbb{Z}$ alors il peut aussi s'écrire $n = 3b + 2$ avec $b \in \mathbb{Z}$.

Réponse attendue à la tâche 9

Cette solution est issue du corrigé du manuel (p. 101).

a) Hypothèse : $n = 2a + 17,\ a \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $n = 2b + 1,\ \ b \in \mathbb{Z}$

Démonstration

n	$= 2a + 17\ ,a \in \mathbb{Z}$	(par hypothèse)
	$= 2a + 16 + 1$	(simplification dans $\mathbb{Z}$)
	$= 2(a + 8) + 1$	(simplification dans $\mathbb{Z}$)
	$= 2b + 1\ ,b \in \mathbb{Z}$	(◊)

◊ Nous pouvons déduire que $b \in \mathbb{Z}$ car $a \in \mathbb{Z}$ (par hypothèse) et $8 \in \mathbb{Z}$; alors $b = a + 8 \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $< \mathbb{Z}, + >$).

b) Hypothèse : $n = 5a + 28,\ a \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $n = 5b + 3,\ \ b \in \mathbb{Z}$

Démonstration

$$\begin{aligned} n &= 5a + 28, a \in \mathbb{Z} && \text{(par hypothèse)} \\ &= 5a + 25 + 3 && \text{(simplification dans } \mathbb{Z}\text{)} \\ &= 5(a + 5) + 3 && \text{(simplification dans } \mathbb{Z}\text{)} \\ &= 5b + 3, b \in \mathbb{Z} && (\lozenge) \end{aligned}$$

◊ Nous pouvons déduire que $b \in \mathbb{Z}$ car $a \in \mathbb{Z}$ (par hypothèse) et $5 \in \mathbb{Z}$; alors $b = a + 5 \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $< \mathbb{Z}, + >$).

c) Hypothèse : $n = 3a - 19,\ a \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $n = 3b + 2,\ b \in \mathbb{Z}$

Démonstration

$$\begin{aligned} n &= 3a - 19, a \in \mathbb{Z} && \text{(par hypothèse)} \\ &= 3a - 21 + 2 && \text{(simplification dans } \mathbb{Z}\text{)} \\ &= 3(a - 7) + 2 && \text{(simplification dans } \mathbb{Z}\text{)} \\ &= 3b + 2, b \in \mathbb{Z} && (\lozenge) \end{aligned}$$

◊ Nous pouvons déduire que $b \in \mathbb{Z}$ car $a \in \mathbb{Z}$ (par hypothèse) et $-7 \in \mathbb{Z}$; alors $b = a - 7 = a + (-7) \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $< \mathbb{Z}, + >$).

Analyse de la tâche 9

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Les propriétés des nombres entiers ainsi que celles des opérations sont à mettre en fonctionnement.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les propriétés des opérations sont couvertes au secondaire. En ce qui concerne la fermeture des entiers sous l'opération d'addition, nous croyons que cette propriété est souvent tenue pour acquis par les étudiants sans nécessairement qu'elle leur ait été explicitée. Sa formalisation constituera donc sûrement une nouveauté pour certains.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Elles se rapportent à la théorie élémentaire des nombres.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte trois sous-questions indépendantes. Cependant, les raisonnements qui doivent être mis en œuvre pour chacune de celles-ci sont similaires.
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est fermé. Aucun indice explicite n'est fourni dans la tâche. Par contre, une démonstration similaire[2] est présentée dans la section théorique 4.9.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Ce type de problèmes est connu des étudiants puisque un exemple similaire leur a été présenté.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Outre un raisonnement déductif pris en charge par le calcul à effectuer, aucun autre type de raisonnement particulier n'est à mettre en jeu.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Bien que peu nombreux, certains éléments de formalisme sont présents dans cette tâche. Dans un premier temps, l'étudiant doit être en mesure de départager les différents symboles littéraux, n, a et b, qui y sont inclus. La démonstration repose d'ailleurs sur le lien qui unit deux de ces symboles, soit a et b. En plus de cette gestion symbolique, l'étudiant doit connaître le vocabulaire et le symbolisme associés aux propriétés des opérations dans les nombres entiers. Avant de passer au point suivant de notre grille, nous voulons ouvrir une brève parenthèse. Le solutionnaire du manuel utilise l'expression « simplification dans $\mathbb{Z}$ » pour justifier certaines étapes de la démonstration. Cette expression est, à nos yeux, imprécise et nous aurions souhaité que les propriétés des opérations mises en jeu soient nommées précisément plutôt que d'avoir recours à une formulation générale pouvant justifier plusieurs manipulations algébriques.
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?* Nous croyons que certains étudiants ne penseront pas à démontrer que l'élément b

[2] « Exemple 4.9.1 : Montrons que si un nombre $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit $n = 2a + 4$ avec $a \in \mathbb{Z}$, alors il peut aussi s'écrire $n = 2b$ avec $b \in \mathbb{Z}$. » (Bourbonnais, 2008, p. 83)

découvert est bel et bien un nombre entier. En effet, selon nous, la construction de cette portion de la démonstration sera vide de sens pour plusieurs étudiants qui la trouveront sans doute superflue y voyant là un caprice d'enseignant plutôt qu'un besoin réel de validation. Tel que nous l'avons mentionné antérieurement, la fermeture des entiers sous l'opération d'addition est tenue pour acquis par les étudiants qui n'y auraient sans doute pas spontanément recours pour justifier le fait que b soit un entier.

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple et linéaire. De plus, très peu de pas déductifs sont nécessaires pour arriver à la conclusion.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est technique puisque l'étudiant peut appliquer la marche à suivre qui lui a été présentée à la section théorique 4.9.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est à développer : la simplification dans les entiers ainsi que la fermeture des entiers sous l'opération d'addition. L'argument « simplification dans $\mathbb{Z}$ » est utilisé pour exprimer les effets de plusieurs propriétés des opérations telles que l'associativité de l'addition et la distributivité de la multiplication sur l'addition.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* L'étudiant doit comprendre, pour chacune des sous-questions, que **pour tous** les entiers n s'écrivant de la forme donnée, il **existe** un entier b faisant en sorte que ce même n puisse également s'écrire de la forme de la seconde expression fournie dans l'énoncé.

Tâche 10 : Exercice 4.16.2 (tiré du manuel, p. 97)

Dire (et démontrer) si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse :

a) la somme de deux nombres pairs est paire;
b) la somme de deux nombres impairs est paire;
c) le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair;
d) la somme d'un nombre pair et d'un nombre impaire est impaire;
e) le quotient de deux nombres pairs est pair;
f) la différence de deux nombres pairs est paire;
g) la différence de deux nombres impairs est paire.

Réponse attendue à la tâche 10

Cette solution est issue du corrigé du manuel (pp. 102-103). Uniquement les réponses attendues aux sous-questions e) et g) sont présentées. Les réponses des autres sous-questions mettent en œuvre des raisonnements similaires à celui requis à la sous-question g).

e) Cette proposition est fausse.

Hypo : $p = 2a, a \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre pair)
$q = 2b, b \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre pair)
Concl : $\frac{p}{q} = 2c, c \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre pair)

Démonstration (*preuve à l'aide d'un contre-exemple*)

Considérons $p = 12$ et $q = 4$ deux nombres vérifiant les hypothèses. Nous avons alors

$$\frac{p}{q} = \frac{12}{4} = 3$$

Ainsi, le quotient n'est pas pair. Puisque les nombres p et q vérifient les hypothèses mais non la conclusion, nous avons trouvé un contre-exemple à cette proposition qui est donc fausse.

■

g) Cette proposition est vraie.

Hypo : $p = 2a + 1, a \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre impair)

$q = 2b + 1, b \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre impair)

Concl : $p - q = 2c, c \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre pair)

Démonstration (*preuve directe*)

$$\begin{aligned} p - q &= (2a + 1) - (2b + 1) && \text{(par hypothèse)} \\ &= 2a - 2b && \text{(simplification dans } \mathbb{Z}) \\ &= 2(a - b) && \text{(simplification dans } \mathbb{Z}) \\ &= 2c, \text{ avec } c = a - b \in \mathbb{Z} && (\diamond) \end{aligned}$$

$\diamond$ Nous pouvons déduire que $c = a - b \in \mathbb{Z}$ car $b \in \mathbb{Z}$ par hypothèse, donc $-b \in \mathbb{Z}$ (symétrisation dans $< \mathbb{Z}, + >$). De plus, puisque $a \in \mathbb{Z}$ par hypothèse alors $\underbrace{a + (-b)}_{a-b} \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $< \mathbb{Z}, + >$).

Ainsi, $p - q$ est pair, c'est-à-dire la différence de deux nombres impairs est paire.

■

Analyse de la tâche 10

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Les connaissances mises en fonctionnement sont les propriétés des opérations dans les entiers. Les représentations algébriques d'un nombre pair et d'un nombre impair doivent être connues.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les propriétés des opérations sont connues des étudiants depuis le secondaire. En ce qui concerne la fermeture des entiers sous l'opération d'addition, elle est désormais connue puisque les étudiants ont dû y avoir recours à la tâche précédente. L'utilisation des représentations algébriques des nombres pairs et impairs constitue sûrement une nouveauté pour plusieurs étudiants du collégial.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent à la théorie élémentaire des nombres.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte sept sous-questions indépendantes.

Cependant, outre la sous-question e) qui nécessite la découverte d'un contre-exemple, les six autres mettent en jeu des raisonnements similaires.

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est ouvert. En effet, c'est l'étudiant qui doit déterminer la valeur de vérité des énoncés présentés. Des indices facilitant la résolution de la tâche sont fournis à la section théorique 4.7. Les représentations algébriques d'un nombre pair et d'un nombre impair sont présentées. De plus, des démonstrations similaires[3] à celles demandées à la tâche 10 sont explicitées dans le manuel.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Ce type de problèmes est connu puisqu'un exemple similaire a été présenté dans la section théorique 4.9. Par contre, il s'agit de la première tâche où la construction d'une telle démonstration est laissée à la charge de l'étudiant.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement déductif pris en charge par le calcul est à mettre en œuvre.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Pour réaliser les démonstrations, l'étudiant doit représenter algébriquement un nombre pair et un nombre impair. Cette traduction en langage mathématique nécessite l'utilisation de plusieurs symboles qui doivent être introduits par l'étudiant. La pluralité de symboles littéraux (a, b, c, p et q) qui doit être gérée est une difficulté non négligeable. L'étudiant doit départager le rôle de chacun de ces symboles et comprendre les liens qui unissent certains d'entre eux.
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?* Une quantification cachée est présente dans l'énoncé de chacune des sous-questions. Il est sous-entendu que les affirmations doivent être considérées **pour tous** les nombres pairs et impairs. La prise en compte de ce quantificateur implicite est essentielle pour comprendre que la présentation d'un seul contre-exemple est suffisante pour réfuter l'affirmation. Un dernier point doit être soulevé. Selon nous, la tâche comporte une lacune importante : l'ensemble numérique dans lequel

[3] « Exemple 4.9.2 : Démontrons que le produit de deux nombres pairs est pair. Exemple 4.9.3 : Démontrons que le produit de deux nombres impairs est impair. » (Bourbonnais, 2008, p. 83)

prennent place les énoncés à démontrer n'est jamais mentionné et la tâche n'a de sens que dans la mesure où le référentiel est restreint aux entiers. Les impacts de cette omission se font particulièrement sentir à la sous-question e) où l'opération à réaliser est une division. Par exemple, si l'étudiant, lors de sa recherche d'un contre-exemple, considère la division du nombre pair 12 par le nombre pair 10, comment pourra-t-il statuer sur la parité du quotient, un nombre rationnel n'étant ni pair, ni impair?

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple et linéaire. Très peu de pas déductifs sont nécessaires pour arriver à la conclusion.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Les mises en fonctionnement des connaissances sont de niveau technique. Les représentations algébriques des nombres pairs et impairs, éléments-clés pour débuter la démonstration, sont présentées dans une section théorique précédant la tâche 10. Une fois ces représentations introduites, les démonstrations se résument à un simple calcul.
- *Quels théorèmes appliquer?* L'utilisation du contre-exemple pour réfuter une affirmation sous-entend le principe du tiers-exclu.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Des propriétés des opérations dans les entiers, tels que l'associativité de l'addition, la distributivité de la multiplication sur l'addition et la fermeture des entiers sous l'opération d'addition, sont à utiliser. L'intervention de l'existence pour tout nombre entier d'un opposé additif dans les démonstrations f) et g) constitue selon nous un élément difficulté. En effet, nous sommes d'avis que certains étudiants pourraient omettre d'utiliser cette propriété pour justifier le fait que c est un entier. Ils pourraient avoir directement recours à la propriété de fermeture des entiers sous l'opération d'addition en l'appliquant incorrectement à l'expression représentant c, soit $a - b$. Cette justification inadéquate entraînerait la construction d'une démonstration incomplète. Les représentations algébriques d'un nombre pair et d'un nombre impair doivent également être mises à contribution.

- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un *changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche* doit être introduit. L'étudiant doit représenter algébriquement un nombre pair et un nombre impair. Cependant, ces représentations leur ont été fournies dans une section théorique.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* Une fois les représentations algébriques énoncées, l'étudiant peut remarquer, par exemple pour la sous-question a), que la tâche revient à démontrer que **pour tout** nombre entier $p = 2a$, $a \in \mathbb{Z}$, et $q = 2b$, $b \in \mathbb{Z}$, il **existe** un nombre entier c tel que $p + q = 2c$. Une quantification semblable peut être perçue pour les autres sous-questions de la tâche 10.

Le changement de point de vue requis par l'utilisation des représentations algébriques des nombres pairs et impairs est nécessité dans plusieurs des tâches de l'étape 1. Cette tâche étant la première à y avoir recours, nous avons explicité chacune des difficultés liées à cette réécriture. Ces détails seront cependant passés sous silence dans les prochaines analyses impliquant ce type de changement de point de vue et ce, pour éviter de charger nos analyses d'éléments redondants. Le lecteur pourra cependant se référer à cette tâche pour revoir les difficultés inhérentes à ce changement de point de vue.

Tâche 11 : Exercice 4.16.3 (tiré du manuel, p. 97)

a) Démontrer que si x^2 est irrationnel alors x est irrationnel.
b) La réciproque de l'énoncé précédent est-elle vraie? Justifier.

Réponse attendue à la tâche 11

Cette solution est issue du corrigé du manuel[4] (pp. 104-105).

---

[4] Les modifications manuscrites présentes dans la solution exposée ont été rédigées par l'enseignante.

$\boxed{4.17.3}$

a) Soit $P(x)$: x^2 est irrationnel et $Q(x)$: x est irrationnel. Au lieu de démontrer la proposition $P(x) \Rightarrow Q(x)$, nous allons démontrer la contraposée $\sim Q(x) \Rightarrow \sim P(x)$, c'est-à-dire nous allons démontrer que si x est rationnel, alors x^2 est rationnel.

Hypo : $x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ (définition d'un nombre rationnel)

Concl : $x^2 = \frac{c}{d}$, $c, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0$

Démonstration (*preuve directe de la contraposée*)

$x = \frac{a}{b}$ (par hypothèse)

si f est une fct, a = b ⇒ f(a) = f(b)

$x^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ (si $u = v$ alors $f(u) = f(v)$)

$= \frac{a^2}{b^2}$ (propriété des exposants : $(\frac{u}{v})^n = \frac{u^n}{v^n}$)

$= \frac{c}{d}$ (en posant $c = a^2$ et $d = b^2$)

Ainsi, x^2 *semble* avoir la forme voulue. Il reste à montrer que $c, d \in \mathbb{Z}$ et $d \neq 0$. Or, $a, b \in \mathbb{Z}$ par hypothèse, donc $a^2, b^2 \in \mathbb{Z}$ par fermeture dans $< \mathbb{Z}\ ,\ \times >$. Ainsi, $c, d \in \mathbb{Z}$.
De plus, puisque $b \neq 0$, alors $b^2 \neq 0$, d'où $d \neq 0$. Nous avons donc montré que

$$x^2 = \frac{c}{d}\ ,\ \text{avec } c, d \in \mathbb{Z},\ \text{et } d \neq 0$$

■

b) La réciproque de l'énoncé est :

Hypo : $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Concl : $x^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Démonstration (*à l'aide d'un contre-exemple*)

Cet proposition est fausse ; nous avons le contre-exemple suivant : Nous avons montré précédemment que $x = \sqrt{2}$ est un irrationnel. Or, $x^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$ n'est pas irrationnel. Ainsi, puisqu'il existe un élément du référentiel pour lequel l'hypothèse est vérifiée mais pas la conclusion, on peut conclure que la proposition est fausse. ■

Analyse de la tâche 11

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* La définition d'un nombre rationnel et sa représentation algébrique sont au cœur de la démonstration. Une connaissance des propriétés des exposants et de l'opération de multiplication est également requise. De plus, pour réaliser la démonstration présentée dans le corrigé, l'étudiant doit pouvoir déterminer la contraposée d'une implication et connaîtr l'équivalence logique entre une implication et sa contraposée. Une telle connaissance justifie le recours à la méthode de preuve par la contraposée qui est utilisée en a). En ce qui concerne la sous-question b), la connaissance de la réciproque d'une forme propositionnelle est nécessaire.

- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les propriétés des exposants et de l'opération de multiplication ont été traitées au niveau secondaire. Bien que la représentation algébrique d'un rationnel soit normalement couverte au secondaire, nous croyons que son utilisation dans un contexte de démonstration est une nouveauté pour plusieurs étudiants qui devront apprendre à utiliser cette formalisation. En ce qui concerne l'équivalence logique entre une implication et sa contraposée, elle a été traitée et démontrée à la section théorique 3.4 du manuel et un rappel est fait à la section théorique 4.10, section portant précisément sur la preuve utilisant la contraposée. La réciproque d'une forme propositionnelle a elle aussi été couverte au chapitre 3 du manuel.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* La tâche se rapporte à la théorie élémentaire des nombres.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte deux sous-questions. Celles-ci sont liées, car la sous-question b) porte sur la réciproque de l'affirmation énoncée en a).
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* La valeur de vérité de la sous-question a) est connue tandis que celle de la sous-question b) doit être découverte par l'étudiant. Aucun indice n'est fourni.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Il s'agit d'un nouveau type de problèmes. L'étudiant doit travailler avec la représentation algébrique d'un nombre rationnel. De plus, la démonstration à construire utilise un raisonnement par contraposée ce qui est une première, du moins dans le cadre de ce cours.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement par contraposée est attendu à la sous-question a). Pour la sous-question b), une réfutation à l'aide d'un contre-exemple est en jeu.

- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* L'utilisation de la représentation algébrique d'un nombre rationnel est un élément de formalisme qui constitue une difficulté non négligeable. Dans la présente tâche, elle nécessite l'introduction de plusieurs éléments : a, b, c et d. Cette pluralité de symboles littéraux doit être gérée par l'étudiant qui doit départager le rôle de chacun d'eux et comprendre les liens qui unissent certains d'entre eux.
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?* Un quantificateur universel est sous-entendu dans les énoncés des sous-questions a) et b). En a), l'étudiant doit comprendre que **pour tout** x^2 irrationnel, x est irrationnel alors qu'en b), il doit saisir que **pour tout** x irrationnel, x^2 irrationnel. La compréhension de cette dernière quantification est particulièrement importante puisque la validité du contre-exemple en dépend. En effet, un étudiant ne prenant pas en considération la quantification universelle implicite à la sous-question b) pourrait affirmer que l'énoncé est vrai, car il existe des x irrationnels, par exemple π, dont le carré est irrationnel et il existe des x irrationnels, tel que $\sqrt{2}$, dont le carré est un nombre rationnel.

  De plus, une difficulté réside selon nous dans ce qui est à démontrer. Nous croyons effectivement que plusieurs étudiants arrêteront leur démonstration à l'étape $x^2 = c / d$ négligeant de démontrer que les éléments c et d sont des entiers et que d est non nul.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple et linéaire.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est mobilisable. Malgré le fait qu'aucun indice explicite ne soit donné, un exemple[5] présenté dans la section théorique 4.10 va, selon nous, faciliter la résolution. Les similitudes que l'énoncé de la tâche 11 a avec cet exemple

[5] « Exemple 4.10.1 : Démontrons que si x^2 est pair alors x est pair. » (Bourbonnais, 2008, p. 85)

pousseront sans doute l'étudiant à emprunter le même chemin que celui utilisé dans l'exemple théorique. Cependant, puisque le contexte de la tâche 11 diffère de celui de l'exemple, des adaptations devront être apportées par l'étudiant.

- *Quels théorèmes appliquer?* La résolution de la sous-question b) nécessite la négation d'un énoncé quantifié universellement. La recherche d'un contre-exemple dans ce contexte sous-entend le principe du tiers.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est à développer. La représentation algébrique d'un rationnel, des propriétés des exposants et de l'opération de multiplication ainsi que l'unicité de l'image d'une fonction sont des arguments qui interviennent dans la démonstration. L'équivalence logique entre une implication est sa contraposée doit également être mise en contribution à la sous-question a). En ce qui concerne la sous-question b), la définition de la réciproque d'une forme propositionnelle doit être utilisée.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* La démonstration qui doit être construite à la sous-question a) nécessite deux changements de point de vue. Dans un premier temps, la méthode de preuve par contraposée nécessite un changement de point de vue puisque l'implication donnée dans l'énoncé de la tâche doit être transformée en sa contraposée pour poursuivre la démonstration (*changement de point de vue nécessité par la méthode de preuve utilisée*). Dans un second temps, l'étudiant doit représenter algébriquement un nombre rationnel ce qui constitue un *changement de point de vue réalisée par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche*.
- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* La représentation algébrique d'un nombre rationnel nécessite l'introduction de deux éléments, soit un élément représentant l'entier au numérateur et un second élément représentant l'entier non-nul au dénominateur.

Tâche 12 : Exercice 4.16.4 (tiré du manuel, p. 97)

Démontrer que $x^2 - 8x + 16 \in \mathbb{R}_+$ quelque soit le nombre réel x.

Réponse attendue à la tâche 12

Cette solution est issue du corrigé du manuel (p. 105).

$$x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \geq 0 \ (puisqu'un\ carré\ est\ toujours\ positif\ ou\ nul)$$

Analyse de la tâche 12

Cette démonstration étant particulièrement simple, nous avons décidé de ne pas présenter l'ensemble de notre grille, mais de plutôt résumer les éléments que son application nous a permis de mettre en lumière.

La construction de cette démonstration repose sur un *changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche*. En effet, l'étudiant doit réécrire l'expression $x^2 - 8x + 16 \in \mathbb{R}_+$ sous la forme $x^2 - 8x + 16 \geq 0$, forme dévoilant davantage l'orientation de la démonstration. Une fois l'énoncé initial ré-exprimé, la démonstration se limite à la factorisation d'un polynôme de degré 2, exercice grandement couvert au secondaire, et en l'application de l'affirmation qu'un carré est toujours positif ou nul. Une quantification universelle écrite en langage naturel est également à repérer. L'expression « [...] quelque soit le nombre réel x » peut être traduite par **pour tout** nombre réel x. La démonstration, composée de deux pas déductifs, a une structure déductive linéaire.

Tâche 13 : Exercice 4.16.5 (tiré du manuel, p. 97)

Démontrer que si un nombre est divisible par 6, alors il est divisible par 3.

Réponse attendue à la tâche 13

Cette solution est issue du corrigé du manuel (p. 105).

$\boxed{4.17.5}$

Hypo : $n = 6a, a \in \mathbb{Z}$ (définition de « divisible par 6 »)
Concl : $n = 3b, b \in \mathbb{Z}$ (définition de « divisible par 3 »)

Démonstration (*preuve directe*)

$$\begin{aligned} n &= 6a && \text{(par hypothèse)} \\ &= 3(2a) && \text{(simplification dans } \mathbb{Z}) \\ &= 3b, \text{ avec } b = 2a \in \mathbb{Z} && (\diamond) \end{aligned}$$

$\diamond$ Nous pouvons déduire que $b = 2a \in \mathbb{Z}$ car $a \in \mathbb{Z}$ (par hypo) et $2 \in \mathbb{Z}$; alors $2a \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $< \mathbb{Z}, \times >$).

Ainsi, tout nombre divisible par 6 est aussi divisible par 3. ■

Analyse de la tâche 13

Cette tâche se limitant à l'application directe de la définition de divisibilité, nous avons décidé de ne pas présenter son analyse complète. Un résumé des principales caractéristiques de cette démonstration seront mises en lumière ci-dessous.

La démonstration attendue repose sur l'utilisation de la représentation algébrique de l'expression « un nombre divisible par ». L'utilisation de cette représentation est le seul véritable élément de difficulté contenu dans cette tâche puisqu'une fois ce changement de point de vue effectué (*changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche*), la démonstration se restreint à l'application de quelques propriétés de l'opération de multiplication. Le raisonnement déductif mis en œuvre dans cette tâche est pris en charge par le calcul. La structure déductive est simple et linéaire.

Tâche 14 : Exercice 4.16.6 (tiré du manuel, p. 97)

Dire (et démontrer) si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse pour $x \in \mathbb{Z}$.

a) Si $5x^2 + 3$ est impair, alors x est pair.
b) Si x^2 est impair, alors x est impair.
c) Si x est pair, alors x^2 est pair.
d) Si x^3 est pair, alors x est pair.
e) Si x^3 est impair, alors x est impair.

Réponse attendue à la tâche 14

Cette solution est tirée du corrigé du manuel (pp. 105-106). Les solutions attendues pour chacune des sous-questions étant similaires, nous n'en présentons que deux.

Ces propositions sont toutes vraies.

a) Nous allons démontrer la contraposée, c'est-à-dire nous allons démontrer que si x n'est pas pair (donc x est impair), alors $5x^2+3$ n'est pas impair (donc $5x^2+3$ est pair)

Hypo : $x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre impair)

Concl : $5x^2+3 = 2t, t \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre pair)

Démonstration (*preuve directe de la contraposée*)

$$\begin{aligned} x &= 2k+1 && \text{(par hypothèse)}\\ 5x^2+3 &= 5(2k+1)^2+3 && \text{(si } f \text{ est une fonction, } a=b \Rightarrow f(a)=f(b)\text{)}\\ &= 5(4k^2+4k+1)+3 && \text{(en développant le carré)}\\ &= 20k^2+20k+8 && \text{(simplification dans } \mathbb{Z}\text{)}\\ &= 2(10k^2+10k+4) && \text{(simplification dans } \mathbb{Z}\text{)}\\ &= 2t \text{ avec } t\in\mathbb{Z} && (\diamond) \end{aligned}$$

$\diamond$ Puisque $10 \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors $10k^2 \in \mathbb{Z}$ et $10k \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $< \mathbb{Z}, \times >$ (3 fois)).
Puisque $10k^2 \in \mathbb{Z}$, $10k \in \mathbb{Z}$ et $4 \in \mathbb{Z}$ alors $10k^2+10k+4 \in \mathbb{Z}$ (ferm. dans $< \mathbb{Z}, + >$ (2 fois)).
Ainsi, $5x^2+3 = 2t$ avec $t = 10k^2+10k+4 \in \mathbb{Z}$

On a donc démontré que si x est impair, alors $5x^2+3$ est pair ou ce qui est équivalent on a démontré, en utilisant la contraposée, que si $5x^2+3$ est impair, alors x est pair.

■

d) Nous allons démontrer la contraposée, c'est-à-dire nous allons démontrer que si x est impair, alors x^3 est impair.

Hypo : $x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre impair)

Concl : $x^3 = 2t+1, t \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre impair)

Démonstration (*preuve directe de la contraposée*)

$$\begin{aligned} x &= 2k+1 && \text{(par hypothèse)}\\ x^3 &= (2k+1)^3 && \text{(si } f \text{ est une fonction, } a=b \Rightarrow f(a)=f(b)\text{)}\\ &= 8k^3+12k^2+6k+1 && \text{(en développant le cube)}\\ &= 2(4k^3+6k^2+3k)+1 && \text{(distributivité dans } \mathbb{Z}\text{)}\\ &= 2t+1 \text{ avec } t\in\mathbb{Z} && (\diamond) \end{aligned}$$

$\diamond$ Puisque $4 \in \mathbb{Z}$, $6 \in \mathbb{Z}$, $3 \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors $4k^3 \in \mathbb{Z}$, $6k^2 \in \mathbb{Z}$ et $3k \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $< \mathbb{Z}, \times >$ (6 fois)).
Puisque $4k^3 \in \mathbb{Z}$, $6k^2 \in \mathbb{Z}$ et $3k \in \mathbb{Z}$ alors $4k^3+6k^2+3k \in \mathbb{Z}$ (ferm. dans $< \mathbb{Z}, + >$ (2 fois)).
Ainsi, $x^3 = 2t+1$ avec $t = 4k^3+6k^2+3k \in \mathbb{Z}$

On a donc démontré que si x est impair, alors x^3 est impair ou ce qui est équivalent on a démontré, en utilisant la contraposée, que si x^3 est pair, alors x est pair.

■

Analyse de la tâche 14

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Les connaissances mises en fonctionnement sont les propriétés des opérations, les propriétés des exposants et l'unicité de l'image d'une fonction. Les représentations algébriques d'un nombre pair et d'un nombre impair doivent également être mises à contribution. De plus, l'équivalence logique entre une implication et sa contraposée doit être connue.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Ces notions sont connues des étudiants. Les propriétés des opérations et des exposants sont traitées au secondaire en plus d'avoir été utilisées dans plusieurs autres tâches. Les représentations algébriques d'un nombre pair et d'un nombre impair ainsi que la contraposée ont, quant à elles, été traitées dans des sections théoriques du manuel.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Cette tâche se rapporte à la théorie élémentaire des nombres.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte cinq sous-questions indépendantes. Quatre d'entre elles, soit les sous-questions a), b), d) et e), requièrent la construction de démonstrations similaires alors que la sous-question c) est différente.
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est ouvert puisque l'étudiant doit en déterminer la valeur de vérité. Un exemple similaire[6] aux démonstrations demandées en a), b), d) et e) est présenté dans la section théorique 4.10. En ce qui concerne la sous-question c), elle est résolue dans la section théorique 4.9.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Pour les sous-questions a), b), d) et e), un raisonnement par contraposée est mis en jeu. Outre le raisonnement déductif, la

[6] « Exemple 4.10.1 : Soit $x \in \mathbb{Z}$. Démontrons que si x^2 est pair, alors x est pair. » (Bourbonnais, 2008, p. 85)

sous-question c) ne nécessite pas la mise en œuvre d'autres types particuliers de raisonnements. Les raisonnements mis en œuvre dans ces démonstrations sont pris en charge par le calcul.

- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Les représentations algébriques d'un nombre pair et d'un nombre impair sont utilisées. Ayant été traitées antérieurement (voir la tâche 10), nous sommes d'avis que ces écritures algébriques et la gestion symbolique qui en découle ne représentent plus un véritable défi.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure des démonstrations est simple et linéaire.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est technique. Une marche à suivre est proposée via la présentation d'un exemple.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est à développer. Certaines propriétés des opérations (l'associativité de la multiplication, la distributivité de la multiplication sur l'addition et la fermeture des entiers sous les opérations d'addition et de multiplication) et des exposants, l'unicité de l'image d'une fonction et les représentations algébriques des nombres pairs et impairs interviennent dans les démonstrations. L'équivalence logique entre une implication et sa contraposée est également mise à profit pour les sous-questions a), b), d) et e). En prenant connaissance du corrigé du manuel, un élément a retenu notre attention. Certaines étapes de certaines démonstrations sont similaires, mais sont cependant justifiées différemment. Par exemple, la justification, « simplification dans $\mathbb{Z}$ », qui est apportée à la cinquième ligne de la démonstration a), $2(10k^2 + 10k + 4)$, diffère de la justification, « distributivité dans $\mathbb{Z}$ », apportée à l'opération, $2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$, de la démonstration d). Pourtant, dans les deux cas, la manipulation algébrique qui est effectuée est la même. Cette discontinuité peut, selon nous, causer des difficultés à certains étudiants qui pourraient croire qu'il y a une nuance entre les deux étapes énoncées ci-dessus. Selon nous, le fait de

préciser explicitement la propriété des opérations justifiant la manipulation effectuée, distributivité dans l'exemple explicité ci-dessus, est plus rigoureuse et devrait être privilégiée à la formulation générale « simplification dans $\mathbb{Z}$ ». Nous avions d'ailleurs déjà soulevé ce point dans une analyse précédente (voir tâche 9).

- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Deux changements de point de vue doivent être effectués. Le premier est nécessité par la méthode de preuve utilisée, dans le cas présent la preuve par contraposée. En effet, l'étudiant doit partir de l'implication donnée dans l'énoncé pour déterminer sa contraposée qui sera le point de départ de la démonstration. Le second changement de point de vue à réaliser est la traduction d'un nombre pair et d'un nombre impair en langage algébrique.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* L'étudiant peut remarquer qu'une fois les représentations algébriques des nombres pairs/impairs posées, la tâche revient, pour la sous-question a) par exemple, à démontrer que **pour tout** $x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, il **existe** un nombre entier t tel que $5x^2 + 3 = 2t$.

Tâche 15 : Exercice 4.16.8 (tiré du manuel, p. 97)

a) Legendre a trouvé le polynôme $P(n) = n^2 + n + 17$ qui donne des nombres premiers pour $n = 0, 1, \ldots, 15$. Démontrer, sans l'évaluer, que $P(16)$ n'est pas un nombre premier. Aide : montrer que $P(16)$ est un multiple (différent de 1 et -1) de 17.

b) Legendre a aussi trouvé le polynôme $P(n) = 2n^2 + 29$ qui donne des nombres premiers pour $n = 0, 1, \ldots, 28$. Démontrer, sans évaluer $P(29)$, que $P(29)$ n'est pas un nombre premier.

Réponse attendue à la tâche 15

Cette solution est tirée du manuel (p. 107).

$\boxed{4.17.8}$

a) **Démonstration** (*preuve directe*)

$$\begin{aligned}
P(n) &= n^2 + n + 17 && \text{(définition du polynôme de Legendre)}\\
P(16) &= 16^2 + 16 + 17 && \text{(substitution)}\\
&= 16 \cdot (16 + 1) + 17 && \text{(simplification dans } \mathbb{Z})\\
&= 16 \cdot 17 + 17 && \text{(simplification dans } \mathbb{Z})\\
&= 17 \cdot (16 + 1) && \text{(simplification dans } \mathbb{Z})\\
&= 17 \cdot 17
\end{aligned}$$

Puisque $P(16)$ s'écrit comme un produit de deux nombres et qu'aucun des deux n'est le nombre « 1 » cela signifie qu'il n'est pas un nombre premier.

■

b) **Démonstration** (*preuve directe*)

$$\begin{aligned}
P(n) &= 2n^2 + 29 && \text{(définition d'un autre polynôme de Legendre)}\\
P(29) &= 2 \cdot 29^2 + 29 && \text{(substitution)}\\
&= 29 \cdot (2 \cdot 29 + 1) && \text{(simplification dans } \mathbb{Z})\\
&= 29 \cdot 59
\end{aligned}$$

Puisque $P(29)$ s'écrit comme un produit de deux nombres et qu'aucun des deux n'est le nombre « 1 » cela signifie qu'il n'est pas un nombre premier.

■

Analyse de la tâche 15

Les démonstrations attendues se limitent en fait à des exercices d'application de définitions. L'étudiant doit effectuer une substitution algébrique suivie de plusieurs manipulations arithmétiques élémentaires dans le but d'écrire l'expression numérique obtenue après la substitution comme un produit de deux facteurs dont aucun ne vaut 1 ou -1. Cette démarche étant explicitement proposée dans l'énoncé de la tâche, nous croyons qu'un raisonnement déductif élémentaire sera mis en jeu. Selon nous, les étudiants se contenteront de manipuler les expressions numériques en jeu pour obtenir la factorisation souhaitée et ce, sans réfléchir aux objets en cause et à ce qu'ils représentent dans le contexte.

La présence d'un indice aussi directif dans l'énoncé inhibe le raisonnement déductif qui aurait autrement pu être suscité dans un tel contexte. Nous croyons effectivement que le contexte des polynômes de Legendre est intéressant pour travailler la démonstration. L'élimination de la directive fournie à la sous-question a) aurait contribué à augmenter le niveau de complexité de cette tâche. Pour démontrer que $P(16)$ et $P(29)$ ne sont pas des nombres premiers, l'étudiant aurait dû traduire l'expression « n'est pas un nombre premier » en une forme mathématique davantage opérationnelle et dévoilant l'orientation de la démonstration. Il aurait dû voir que la tâche revient en fait à démontrer que $P(16)$ et $P(29)$ peuvent s'écrire comme un produit de deux facteurs dont aucun ne vaut 1 ou -1. Cette réécriture de l'énoncé, qui est basée sur la définition d'un nombre premier, constitue un *changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche*. Alors que ce changement de point de vue est indiqué dans la tâche présentée dans le manuel, le retrait de l'indice aurait remis à la charge de l'étudiant l'introduction d'un tel changement. Bien que la définition d'un nombre premier ait été traitée au secondaire, nous croyons que son utilisation dans un contexte de démonstration aurait représenté une difficulté non-négligeable pour plusieurs étudiants.

Tâche 16 : Quiz 2 (document distribué par l'enseignante)

Montrer que si un entier s'écrit $n = 12a - 5$ avec $a \in \mathbb{Z}$ alors on peut aussi écrire $n = 2b + 1$, avec $b \in \mathbb{Z}$.

Réponse attendue à la tâche 16

Cette réponse est tirée du solutionnaire du quiz 2 rédigée par l'enseignante.

Hypothèse : $n = 12a - 5,\ a \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $n = 2b + 1,\ b \in \mathbb{Z}$

Démonstration (par preuve directe)

n	$= 12a - 5$	(par hypothèse)
	$= 12a - 6 + 1$	(algèbre dans $\mathbb{Z}$)
	$= 2(6a - 3) + 1$	(mise en évidence)
	$= 2b + 1$	(posons $b = 6a - 3$, $b \in \mathbb{Z}$ car $a \in \mathbb{Z}$ par hypothèse, $6 \in \mathbb{Z}$, $-3 \in \mathbb{Z}$, $6a \in \mathbb{Z}$ par fermeture $\langle \mathbb{Z}, \times \rangle$ et $6a + 3 \in \mathbb{Z}$ par fermeture $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$)

Nous avons montrer que si un entier s'écrit $n = 12a - 5$ avec $a \in \mathbb{Z}$, alors on peut aussi l'écrire $n = 2b + 1$, avec $b \in \mathbb{Z}$.

Analyse de la tâche 16

Cette tâche étant identique, modulo les expressions qu'elle contient, à la tâche 9, nous avons décidé de ne pas présenter son analyse exhaustive. En effet, eu égard à l'activité de démonstration, aucun nouvel élément n'aurait été mis en lumière. Le lecteur peut se rapporter à l'analyse de la tâche 9.

Tâche 17 : Exercice 4.16.10 (tiré du manuel, p. 98)

Démontrer que si un nombre peut s'écrire sous la forme $6k + 11$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors il peut aussi s'écrire sous la forme $3p + 2$, avec $p \in \mathbb{Z}$.

Réponse attendue et analyse de la tâche 17

Mises à part les expressions mentionnées à la tâche 17, cette tâche est identique aux tâches 9 et 16. Nous référons donc le lecteur à l'analyse complète qui a été faite de la tâche 9. La solution attendue n'a pas été présentée, car elle nécessite la mise en œuvre de la même démarche que celle présentée antérieurement.

Tâche 18 : Exercice 4.16.12 (tiré du manuel, p. 98)

Soit $x \in Z$. Démontrer que si $5x^2 + x + 8$ est impair alors x est pair.

Réponse attendue à la tâche 18

Cette solution est tirée du corrigé du manuel (p. 109).

$\boxed{\textbf{4.17.12}}$

La proposition

« si $5x^2 + x + 8$ est impair, alors x est pair »

est logiquement équivalente à sa contraposée

« si x est impair, alors $5x^2 + x + 8$ est pair »

Hypo : $x = 2a + 1, a \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre impair)
Concl : $5x^2 + x + 8 = 2b, b \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre pair)

Démonstration (*preuve directe de la contraposée*)

$$\begin{aligned}
5x^2 + x + 8 &= 5(2a+1)^2 + (2a+1) + 8 && \text{(par hypothèse)}\\
&= 5(4a^2 + 4a + 1) + (2a+1) + 8 && \text{(simplification dans } \mathbb{Z})\\
&= 20a^2 + 22a + 14) && \text{(simplification dans } \mathbb{Z})\\
&= 2(10a^2 + 11a + 7) && \text{(simplification dans } \mathbb{Z})\\
&= 2b, b \in \mathbb{Z} && (\diamond)
\end{aligned}$$

$\diamond$ Nous pouvons déduire que $b = 10a^2 + 11a + 7 \in \mathbb{Z}$ car : $10 \in \mathbb{Z}$, $11 \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ (par hypo) alors $10a^2 \in \mathbb{Z}$ et $11a \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $< \mathbb{Z}, \times >$ (3 fois)).
De plus, sachant que $10a^2 \in \mathbb{Z}$, $11a \in \mathbb{Z}$ et $7 \in \mathbb{Z}$, alors $10a^2 + 11a + 7 \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $< \mathbb{Z}, + >$).

Ainsi on a démontré que $5x^2 + x + 8 = 2b$, avec $b \in \mathbb{Z}$

■

Analyse de la tâche 18

La tâche 18 est pratiquement identique à la tâche 14. En effet, seules les expressions impliquées diffèrent. Nous référons le lecteur à l'analyse qui a été réalisée de la tâche 14.

Tâche 19 : Exercice 4.16.13 (tiré du manuel, p. 98)

Démontrer qu'il n'existe pas de solutions entières aux équations :

a) $4x^2 + 6xy = 123$
b) $3xy^5 - 9x^3y = 124$

Réponse attendue à la tâche 19

Cette solution est issue du manuel (p. 109).

$\boxed{4.16.13}$

a) **Démonstration** *(par contradiction)*

Supposons au contraire qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $4\,x^2 + 6\,xy = 123$.

Alors on doit avoir $2\,(2x^2 + 3\,xy) = 123$ (distributivité dans $\mathbb{Z}$). Mais puisque $x, y \in \mathbb{Z}$ alors on a que $2\,x^2 + 3\,xy \in \mathbb{Z}$ (après quelques étapes en utilisant les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}$).

Ainsi, le membre de gauche de l'égalité est pair (par définition).

On arrive donc à une contradiction $(*)$ car 123 est impair.

Par conséquent il n'existe pas d'entiers dans $\mathbb{Z}$ pour lesquels $4\,x^2 + 6\,xy = 123$.

b) **Démonstration** *(par contradiction)*

Supposons au contraire qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $3\,xy^5 - 9\,x^3y = 124$.

Alors on doit avoir $3\,(xy^5 - 3x^3y) = 124$ (distributivité dans $\mathbb{Z}$). Mais puisque $x, y \in \mathbb{Z}$ alors on déduit que $xy^5 - 3\,x^3y \in \mathbb{Z}$ (après quelques étapes en utilisant les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}$).

On arrive donc à une contradiction $(*)$ car l'égalité signifie que 124 est un multiple de 3.

Ainsi, il n'existe pas d'entiers dans $\mathbb{Z}$ pour lesquels $3\,xy^5 - 9\,x^3y = 124$.

Analyse de la tâche 19

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Une bonne compréhension de la signification de l'égalité dans un contexte algébrique est requise. En effet, l'étudiant doit comprendre que chacun des membres de l'équation représente le même élément, mais exprimé dans des registres différents : registre algébrique pour le membre de gauche et registre arithmétique pour celui de droite. L'unicité de la décomposition en facteurs premiers intervient également dans la démonstration. Bien que son intervention ne soit pas explicitée dans le solutionnaire du manuel, il n'en reste pas moins que cet élément à un impact dans la démonstration. Effectivement, l'étudiant doit saisir que les facteurs premiers dans une égalité entre deux entiers sont nécessairement les mêmes de chaque côté de l'égalité. Cette connaissance ne semble pas avoir de statut officiel dans le cadre du cours, mais semble plutôt être tenue pour acquise et intervient spontanément et implicitement dans la résolution de la tâche. Une connaissance des propriétés des opérations dans les entiers, de la définition d'un multiple/facteur et de la méthode de preuve par l'absurde (mécanisme reposant sur l'équivalence logique $\sim\left(P \Rightarrow Q\right) \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$) est également requise.

- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles ?* Les propriétés des opérations dans les entiers et la définition d'un multiple/facteur sont des notions travaillées au secondaire. L'unicité de la décomposition en facteurs premiers est, quant à elle, souvent tenue pour acquise par les étudiants sans qu'aucune formalisation ne leur soit présentée. La méthode de preuve par l'absurde, et ses fondements logiques, ont été discutés au chapitre 4 du manuel du cours.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent à la théorie élémentaire des nombres.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte deux sous-questions indépendantes, mais nécessitant la mise en œuvre d'un raisonnement similaire.
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* Les énoncés à démontrer sont fermés. Aucun indice n'est fourni.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Ce type de problèmes est nouveau pour les étudiants.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement par l'absurde est à mettre en jeu.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* L'étudiant doit connaître la définition de « multiple » et être capable de l'utiliser dans les démonstrations demandées. Un second élément de formalisme doit être considéré. L'étudiant doit être en mesure de départager les différents symboles contenus dans la tâche. Celui-ci doit distinguer les **variables x et y** qui sont présentes dans les équations fournies dans l'énoncé de la tâche, des **éléments fixés x et y** qui, une fois la négation de l'énoncé effectuée, représentent une solution de l'équation de départ. Dans le corrigé du manuel, l'utilisation d'un même symbolisme pour représenter des éléments de

natures différentes constitue selon nous une difficulté supplémentaire. Il aurait été plus précis et plus clair de nommer la solution, par exemple x_0 et y_0. Ce type de notations est d'ailleurs fréquemment utilisé pour désigner des éléments fixés.

- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?* Des quantificateurs implicites sont à repérer. En effet, par exemple, l'énoncé proposé en a) doit être compris de la façon suivante : $\forall x, y \in \mathbb{Z}, 4x^2 + 6xy \neq 123$. La compréhension de cette quantification est essentielle pour réaliser la démonstration puisque la méthode de preuve utilisée requiert la négation cet énoncé.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est une chaîne d'inférences.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement est disponible puisque l'étudiant doit lui-même déterminer les connaissances nécessaires à la réalisation de la démonstration. Il s'agit par ailleurs de connaissances relativement élémentaires.
- *Quels théorèmes appliquer?* Théorème fondamental de l'arithmétique.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est à développer : distributivité dans les entiers, fermeture des opérations dans les entiers, existence d'un opposé additif pour chaque nombre entier, définition d'un facteur/multiple d'un nombre et unicité de la factorisation des entiers.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* L'énoncé de départ doit être transformé en sa négation. Il s'agit d'un changement de point de vue qui s'opère sans indication, dans le but de réaliser une démonstration par l'absurde. L'étudiant doit également comparer un même nombre exprimé dans deux registres de représentations distincts : le registre algébrique et le registre arithmétique.
- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* Les objets x et y qui représentent une solution de l'équation donnée doivent être

introduits. C'est la méthode de preuve utilisée qui rend nécessaire leur introduction. En effet, le recours à un raisonnement par l'absurde demande à l'étudiant de travailler sur la négation de l'énoncé qui lui est initialement proposé dans la tâche. Par exemple, pour la sous-question a), la négation de l'affirmation $\forall x, y \in \mathbb{Z}, 4x^2 + 6xy \neq 123$ est $\exists x, y \in \mathbb{Z}, 4x^2 + 6xy = 123$.

- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* En plus des quantifications implicites sous-entendues dans l'énoncé de la tâche, un quantificateur existentiel implicite est à utiliser : « Supposons au contraire qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$... ».

Tâche 20 : Exercice 4.16.18 (tiré du manuel, pp. 98-99)

Dire si chacune des biconditionnelles suivantes est vraie ou fausse. Si elle est vraie seulement dans un sens, indiquer lequel. Démontrer votre réponse.

a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'entier n est pair si et seulement si $n = 9n^2 + 4$ est pair.
b) La différence de deux nombres entiers est paire si et seulement si les deux nombres sont pairs.

Réponse attendue à la tâche 20

Cette solution est issue du corrigé du manuel (pp. 111-113).

$\boxed{4.17.18}$

Démonstration (*preuve de la biconditionnelle a)*)

$|\Rightarrow|$ *Partie directe*

On doit montrer que si un entier n est pair, alors $9n^2 + 4$ est pair.

Hypo : $n = 2a$, $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ (voir note[16])
Concl : $9n^2 + 4 = 2b$ $b \in \mathbb{Z}$

Démonstration (*preuve directe*)

$$\begin{array}{rcll} 9\,n^2+4 & = & 9\cdot(2\,a)^2+4 & \text{(par hypothèse)} \\ & = & 9\cdot(4\,a^2)+4 & \text{(propriété des exposants)} \\ & = & 36\,a^2+4 & \text{(par associativité dans } <\mathbb{Z}\,,\ \times>) \\ & = & 2\cdot(18\,a^2+2) & \text{(par distributivité dans } \mathbb{Z}) \\ & = & 2\,b & \text{(en posant } b=18\,a^2+2) \end{array}$$

Ainsi, $9\,n^2+4$ *semble* avoir la forme voulue. Il reste à montrer que $b\in\mathbb{Z}$. Or, $a\in\mathbb{Z}$ par hypothèse et on sait que $18\in\mathbb{Z}$, donc $18\,a^2\in\mathbb{Z}$ par fermeture dans $<\mathbb{Z}\,,\ \times>$ (2 fois). De plus, puisque nous savons maintenant que $18\,a^2\in\mathbb{Z}$, et que $2\in\mathbb{Z}$, alors $\underbrace{18\,a^2+2}_{b}\in\mathbb{Z}$ par fermeture dans $<\mathbb{Z}\,,\ +>$.

Nous avons donc montré que $9\,n^2+4=2\,b$, avec $b\in\mathbb{Z}$.

□ |⇒|

[16]Ici il n'était pas nécessaire de préciser $n\in\mathbb{Z}$ puisqu'on peut le déduire de l'autre hypothèse.

|⇐| *Partie réciproque*

On doit montrer que si $9\,n^2+4$ est pair (avec $n\in\mathbb{Z}$), alors n est pair..

Hypo : $n\in\mathbb{Z}$
$9\,n^2+4=2\,a \quad a\in\mathbb{Z}$
Concl : $n=2\,b,\quad b\in\mathbb{Z}$

Puisqu'il est plus simple de déduire des résultats sur n^2 à partir de résultats connus sur n que l'inverse, nous allons considérer la contraposée (une proposition logiquement équivalente), de cette proposition.

Cela revient donc à montrer que si un entier n est impair, alors $9\,n^2+4$ est impair.

Hypo : $n=2\,c+1,\quad c\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}$ (voir note[17])
Concl : $9\,n^2+4=2\,d+1 \quad d\in\mathbb{Z}$

Démonstration (*preuve directe*)

$$\begin{array}{rcll} 9\,n^2+4 & = & 9\cdot(2\,c+1)^2+4 & \text{(par hypothèse)} \\ & = & 9\cdot(4\,c^2+4\,c+1)+4 & \text{(en développant le carré)} \\ & = & (36\,c^2+36\,c+9)+4 & \text{(par distributivité dans } \mathbb{Z}) \\ & = & 36\,c^2+36\,c+13 & \text{(par associativité dans } <\mathbb{Z}\,,\ +>) \\ & = & (36\,c^2+36\,c+12)+1 & \text{(par associativité dans } <\mathbb{Z}\,,\ +>) \\ & & 2\cdot(18\,c^2+18\,c+6)+1 & \text{(par distributivité dans } \mathbb{Z}) \\ & & 2\,d\ +1 & \text{(en posant } d=18\,c^2+18\,c+6) \end{array}$$

Ainsi, $9\,n^2+4$ *semble* avoir la forme voulue. Il reste à montrer que $d\in\mathbb{Z}$. Or, $c\in\mathbb{Z}$ par hypothèse et on sait que $18\in\mathbb{Z}$, donc $18\,c^2\in\mathbb{Z}$ et $18\,c\in\mathbb{Z}$ par fermeture dans $<\mathbb{Z}\,,\ \times>$ (3 fois). Puisque nous savons maintenant que $18\,c^2$ et $18\,c$ sont des entiers, et que $6\in\mathbb{Z}$, alors $\underbrace{18\,c^2+18\,c+6}_{d}\in\mathbb{Z}$ par fermeture dans $<\mathbb{Z}\,,\ +>$ (2 fois).

Nous avons donc montré que $9n^2 + 4 = 2d + 1$, avec $d \in \mathbb{Z}$.

$\square$ $|\Rightarrow|$

Ainsi, puisque la partie directe et la partie réciproque de cette biconditionnelle sont vraies, alors la biconditionnelle est une proposition vraie.

■

Démonstration (*preuve*[18] *de la biconditionnelle b)*)

$|\Rightarrow|$ *Partie directe*

On doit montrer que si la différence de deux nombres entiers est paire, alors les deux nombres sont pairs.

[17] Ici il n'était pas nécessaire de préciser $n \in \mathbb{Z}$ puisqu'on peut le déduire de l'autre hypothèse.

[18] En fait, nous démontrerons que seule la partie réciproque est vraie.

Hypo : $n \in \mathbb{Z}$

$m \in \mathbb{Z}$

$n - m = 2a, \quad a \in \mathbb{Z}$

Concl : $n = 2b, \quad b \in \mathbb{Z}$

$m = 2c, \quad c \in \mathbb{Z}$

Démonstration (*à l'aide d'un contre-exemple*)

La partie directe de la biconditionnelle est fausse. Il suffit de considérer, comme contre-exemple, les nombres 7 et 3 qui vérifient les hypothèses, puisque ce sont deux entiers dont la différence 7 - 3 = 4 est paire, mais qui ne vérifient pas la conclusion puisque les deux nombres ne sont pas pairs.

$\square$ $|\Rightarrow$ est fausse$|$

$|\Leftarrow|$ *Partie réciproque*

On doit montrer que si deux nombres sont pairs, alors la différence de ces nombres sera paire.

Hypo : $n = 2a, \quad a \in \mathbb{Z}$

$m = 2b, \quad b \in \mathbb{Z}$

Concl : $n - m = 2c, \quad c \in \mathbb{Z}$

Démonstration (*preuve directe*)

Cette démonstration se trouve déjà dans les notes de cours, à la page 103, au numéro f.

$\square$ $|\Leftarrow|$

Puisque l'une des deux parties de la biconditionnelle est fausse, alors la biconditionnelle est fausse.

■

Analyse de la tâche 20

Pour réaliser la tâche qui lui est demandée, l'étudiant doit connaître la notion de biconditionnelle. Plus précisément, il doit savoir qu'il existe une équivalence logique entre les deux propositions suivantes $P \Leftrightarrow Q$ et $\left(P \Rightarrow Q\right) \wedge \left(Q \Rightarrow P\right)$. Celle-ci indique que la démonstration d'une biconditionnelle peut se ramener à démontrer deux « sous-affirmations » : l'implication directe et sa réciproque. Cette connaissance, qui est discutée dans la section théorique 4.13 et rappelée indirectement dans l'énoncé de la tâche (« Si [la biconditionnelle] est vraie seulement dans un sens, ... »), oriente la construction des démonstrations. L'étudiant doit également prendre conscience qu'une biconditionnelle n'est vraie que si l'implication directe **et** la réciproque qui la composent le sont.

Après avoir séparé la biconditionnelle en deux sous-affirmations (l'implication directe et sa réciproque), les démonstrations de ces sous-affirmations ont plusieurs similitudes avec certaines démonstrations analysées précédemment. En effet, la démonstration de l'implication directe de la sous-question a) met en œuvre les mêmes raisonnements que ceux intervenant à la sous-question c) de la tâche 14, tandis que la démonstration de la réciproque est semblable à la démonstration de la sous-question a) de la tâche 14. En ce qui concerne la sous-question b) de la tâche 20, les démonstrations de la partie directe et de la partie réciproque de la biconditionnelle se ramènent aux démonstrations réalisées à la tâche 10. Devant les similitudes qu'entretiennent chacune des démonstrations requises à la tâche 20 avec des tâches déjà analysées, nous avons décidé de ne pas présenter une analyse complète de la tâche 20. Nous invitons plutôt le lecteur à se référer aux tâches 14 et 10 pour voir les difficultés et le formalisme inhérents aux démonstrations de ce type.

Nous tenons également à préciser que l'analyse d'une tâche nécessitant la démonstration d'un énoncé comportant une biconditionnelle est réalisée un peu plus loin dans cette recherche. Nous avons décidé de soumettre la tâche 37, plutôt que la tâche 20, à notre grille d'analyse puisque les démonstrations de l'implication directe et de la réciproque nécessitent la mise en œuvre de nouveaux éléments qui ne sont pas couverts par d'autres tâches.

Tâche 21 : Exercice 4.16.19 (tiré du manuel, p. 99)

Démontrer le résultat de la section 4.15.1, c'est-à-dire démontrer que si $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ et $z = m^2 + n^2$, où $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m > n$, alors le triplet (x, y, z) est un triplet pythagorien.

Réponse attendue à la tâche 21

La démonstration que $x^2 + y^2 = z^2$ est directement tirée du manuel (p. 113). Cependant, la démonstration que $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ est laissée à la charge de l'étudiant dans le corrigé. La version qui est présentée ci-dessous est donc notre création.

$\boxed{4.17.19}$

Hypo : $x = m^2 - n^2 \quad m, n \in \mathbb{N}^*$
$y = 2mn$
$z = m^2 + n^2$
$m \quad n$

Concl : $x, y, z \in \mathbb{N}^*$
$x^2 + y^2 = z^2$

Démonstration[19] *(preuve directe)*

$x^2 + y^2$	$=$	$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$	(par hypothèses)
	$=$	$m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2$	(en développant le carré et propr. des exposants)
	$=$	$m^4 + 2m^2n^2 + n^4$	(algèbre dans $\mathbb{N}$)
	$=$	$(m^2 + n^2)^2$	(en factorisant le trinôme)
	$=$	z^2	(par hypothèse)

■

[19] La démonstration que $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ est laissée à l'étudiant

x	$= m^2 - n^2$	(par définition)
	$\in \mathbb{N}^*$	($m \in \mathbb{N}^*$, donc $m^2 \in \mathbb{N}^*$ par fermeture dans $\langle \mathbb{N}^*, \times \rangle$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n^2 \in \mathbb{N}^*$ par fermeture dans $\langle \mathbb{N}^*, \times \rangle$. Puisque que $m > n$ et que $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $m^2 > n^2$ et $m^2 - n^2 \in \mathbb{N}^*$.)
y	$= 2mn$	(par définition)
	$\in \mathbb{N}^*$	($2 \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donc $2mn \in \mathbb{N}^*$ par fermeture dans $\langle \mathbb{N}^*, \times \rangle$ (2 fois)).

$z \; = m^2 + n^2$	(par définition)
$\in \mathbb{N}^*$	($m \in \mathbb{N}^*$, donc $m^2 \in \mathbb{N}^*$ par fermeture dans $\langle \mathbb{N}^*, \times \rangle$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n^2 \in \mathbb{N}^*$ par fermeture dans $\langle \mathbb{N}^*, \times \rangle$. Puisque que $m^2 \in \mathbb{N}^*$ et $n^2 \in \mathbb{N}^*$, $m^2 + n^2 \in \mathbb{N}^*$ par fermeture dans $\langle \mathbb{N}^*, + \rangle$).

Analyse de la tâche 21

La démonstration attendue à la tâche 20 repose sur l'application de la définition d'un triplet pythagorien. Cette définition[7] est d'ailleurs donnée à la section théorique mentionnée dans la tâche. Une fois cette définition prise en considération, l'étudiant n'a plus qu'à effectuer deux sous-démonstrations, démontrer que x, y, z sont des nombres naturels non nuls et démontrer que $x^2 + y^2 = z^2$, pour mener la tâche à terme. Celles-ci ont des structures déductives simples et linéaires et le raisonnement déductif qui y est mis en œuvre est pris en charge par le calcul. En effet, ces sous-démonstrations nécessitent l'intervention de propriétés des opérations dans $\mathbb{N}^*$, des propriétés des exposants ainsi que certaines manipulations algébriques telles que la factorisation d'un trinôme. Ces notions ont toutes été traitées au secondaire. La seule difficulté présente dans cette démonstration concerne ce qui doit être démontré. En effet, nous croyons que certains étudiants pourraient négliger de démontrer que x, y et z sont des nombres naturels non nuls et tiendront plutôt pour acquis cette affirmation. Cependant, ce type de démonstrations ayant été demandé précédemment (voir tâche 11), nous croyons que notre remarque ne s'applique qu'à une minorité d'étudiants.

Tâche 22 : Exercice 4.16.20 (tiré du manuel, p. 99)

Démontrer que si l'entier $n > 1$ n'est pas un nombre premier, alors il possède un diviseur supérieur à 1 et inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Réponse attendue à la tâche 22

Cette solution est issue du corrigé du manuel (p. 114).

---

[7] « On dit que (x, y, z) est un *triplet pythagorien* si x, y, z sont des nombres naturels, différents de zéro, vérifiant l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. » (Bourbonnais, 2008, p. 95)

4.17.20

Remarque préliminaire : Si n n'est pas premier, alors il peut s'écrire comme un produit de deux entiers supérieurs à 1.

Hypo : $n \quad pq \quad n, p, q \in \mathbb{N}, n, p, q > 1$
Concl : $p \leq \sqrt{n}$ ou $q \leq \sqrt{n}$

Démonstration (*preuve par contradiction*)

Supposons au contraire que $p > \sqrt{n}$ **et** $q > \sqrt{n}$. Alors $p \cdot q > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$ ce qui est absurde car $n = p \cdot q$ par hypothèse ($*$ *contradiction*).

■

Analyse de la tâche 22

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Les définitions d'un nombre premier et d'un diviseur doivent être mises à contribution. Puisque la réalisation d'une preuve par contradiction est souhaitée, l'étudiant doit être capable de trouver la négation d'une affirmation comportant un « ou » mathématique. Cette tâche est d'ailleurs peut être un prétexte pour souligner que la négation d'un « ou » mathématique est un « et ».
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les notions de diviseur et de nombre premier ont toutes deux été traitées au secondaire et ont également été travaillées dans certaines tâches du cours *Mathématiques pour les sciences* (voir les tâches 13 et 15 respectivement). La méthode de preuve par contradiction est connue de l'étudiant qui y a déjà eu recours à la tâche 19.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* La tâche se rapporte à la théorie élémentaire des nombres.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est fermé car sa valeur de vérité est connue. Aucun indice n'est donné.

- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Il s'agit d'un nouveau type de problèmes pour l'étudiant. En effet, l'exploitation qui est requise de la notion de nombres premiers est, selon nous, nouvelle. La seule autre tâche de démonstration nécessitant l'intervention de la définition d'un nombre premier prend place dans un contexte numérique plus dirigé.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement par l'absurde est à mettre en jeu.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Pour résoudre la tâche qui lui est proposée, l'étudiant doit être en mesure de représenter algébriquement l'expression « l'entier $n > 1$ n'est pas un nombre premier ».
- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?* La représentation algébrique d'un nombre premier doit être utilisée dans cette tâche. Les nombres premiers ont déjà été traités dans un contexte numérique à la tâche 15, mais leur traitement dans un contexte algébrique est une nouveauté dans le cours.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple et linéaire. Très peu de pas déductifs sont requis.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est disponible. Aucune indication ne facilite le travail.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Très peu d'arguments sont impliqués : la définition d'un nombre premier, la définition d'un diviseur et certains arguments de nature algébrique.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Deux changements de point de vue doivent être introduits. La méthode de preuve par contradiction requiert un changement de point de vue puisque la démonstration se déroule désormais à partir de la négation de la conclusion. De plus, tel qu'il a été mentionné précédemment, l'expression « l'entier $n > 1$ n'est pas un nombre premier » doit être représentée algébriquement. Il s'agit

d'un *changement de point de vue nécessité par la modification des objets présents dans la tâche.*

- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* Les diviseurs de n, p et q, doivent être introduits.

Tâche 23 : Exercice 4.16.21 (tiré du manuel, p. 99)

a) Démontrer que la somme de trois nombres impairs est impaire.

b) Est-il possible de placer 10 billets dans 3 gobelets à café de telle sorte que chaque verre contienne un nombre impair de billes?

Réponse attendue à la tâche 23

Cette solution est tirée du manuel (p. 114).

$\boxed{\textbf{4.17.21}}$

a) **Hypo :** $p = 2a + 1, a \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre impair)
$q = 2b + 1, b \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre impair)
$r = 2c + 1, c \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre impair)
Concl : $p + q + r = 2d + 1, d \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre impair)

Démonstration (*preuve directe*)

$$\begin{aligned} p+q+r &= (2a+1)+(2b+1)+(2c+1) && \text{(par hypothèse)} \\ &= 2a+2b+2c+3 && \text{(simplification dans } \mathbb{Z}) \\ &= 2(a+b+c+1)+1 && \text{(simplification dans } \mathbb{Z}) \\ &= 2d+1, \text{ avec } d \in \mathbb{Z} && (\diamond) \end{aligned}$$

$\diamond$ Puisque $1 \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$, alors $(a + b + c + 1) \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $< \mathbb{Z}, + >$).
Donc, $p + q + r = 2d + 1$, avec $d = a + b + c + 1 \in \mathbb{Z}$

Ainsi, $p + q + r$ est impair. On a donc montré que la somme de trois nombres impairs est un nombre impair. ■

b) Non, ce n'est pas possible.

Démonstration (*preuve par contradiction*)

Supposons au contraire que ce soit possible. Si on place un nombre impair de billes dans chacun des 3 verres, on aura placé au total, selon le résultat précédent, un nombre impair de billes, or il y a 10 billes à placer (* *contradiction*).

■

Analyse de la tâche 23

La sous-question a) de la tâche 23 met en œuvre des raisonnements similaires à ceux des sous-questions b) et d) de la tâche 10. Pour connaître les difficultés présentes dans ce type de tâches, nous référons le lecteur à l'analyse réalisée de la tâche 10.

La sous-question b) de la tâche 23 nécessite la construction d'une démonstration par l'absurde dont la contradiction naît de la prise de connaissance de l'énoncé démontré à la sous-question a). La démonstration b) reposant entièrement sur l'énoncé démontré en a), nous avons décidé de ne pas présenter l'analyse de cette brève démonstration. Aucune difficulté particulière et aucun élément de formalisme n'intervient lors de la réalisation de la sous-question b). De plus, nous croyons que l'étudiant aura rapidement recours à l'énoncé démontré en a) et par conséquent réalisera la démonstration attendue sans embûche.

Tâche 24 : Exercice 4.16.23 (tiré du manuel, p. 99)

Répondre aux questions suivantes concernant la *divisibilité*. Démontrer vos réponses.

a) Si un nombre entier n est divisible par un nombre entier x et un nombre entier y, peut-on conclure qu'il sera divisible par le produit xy?
b) Si deux nombres entiers x et y sont divisibles par un nombre entier n, peut-on conclure que la somme $x + y$ est divisible par n?
c) Si l'un ou l'autre des deux nombres entiers x et y est divisible par un nombre entier n, peut-on conclure que la somme $x + y$ est divisible par n?
d) Si la somme $x + y$ est divisible par un nombre entier n, peut-on conclure que x et y sont divisibles par n?

Réponse attendue à la tâche 24

Cette solution est tirée du corrigé du manuel (p. 115).

4.17.23

a) Non. On a le contre-exemple suivant : $n = 240$ est divisible par $x = 6$ et $y = 15$, mais pas par le produit $xy = 90$. On a donc trouvé un exemple où l'hypothèse (n est divisible par x et y avec $x, y, n \in \mathbb{Z}$) est vraie, mais pas la conclusion (n est divisible par xy).

■

Remarque : Pour que l'énoncé soit vrai en général, il faudrait de plus que x et y soient premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'aient pas de diviseurs en commun à part 1.

b) Oui. Considérons $x, y, n \in \mathbb{Z}$. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Hypo : $x = a\,n, a \in \mathbb{Z}$ (x est divisible par n)
$y = b\,n, b \in \mathbb{Z}$ (y est divisible par n)
Concl : $x + y = c\,n, c \in \mathbb{Z}$ ($x + y$ est divisible par n)

Démonstration (*preuve directe*)

$$\begin{aligned} x + y &= a\,n + b\,n && \text{(par hypothèse)} \\ &= (a + b)\,n && \text{(distributivité dans } \mathbb{Z}\text{)} \\ &= c\,n && \text{(en posant } c = a + b\text{) } (\diamond) \end{aligned}$$

($\diamond$) De plus, puisque par hypothèse nous avons $a, b \in \mathbb{Z}$, alors $a + b \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $< \mathbb{Z}, + >$)

■

c) Non. On a un contre-exemple en prenant $x = 8$, $y = 1$ et $n = 2$. Le nombre x est alors divisible par n mais $x + y$ ne l'est pas

■

d) Non. On a un contre-exemple en prenant $x = 3$, $y = 7$ et $n = 5$. Le nombre $x + y$ est alors divisible par n mais ni x ni y n'est divisible par n.

■

Analyse de la tâche 24

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* La principale connaissance à mettre en fonctionnement est la notion de divisibilité ainsi que sa représentation algébrique. Des propriétés des opérations dans les entiers sont aussi mises à profit. La preuve à l'aide d'un contre-exemple doit être maîtrisée.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* La notion de divisibilité est travaillée par les étudiants au secondaire. De plus, la tâche 13 présentée précédemment met en scène cette notion. Les propriétés des opérations dans les entiers ont abondamment été traitées dans les tâches analysées antérieurement. Pour ce qui est de la réfutation

à l'aide d'un contre-exemple, certaines tâches analysées ci-dessus, telles que les tâches 10 et 11, nécessitent la mise en œuvre de ce type de raisonnements.

- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent à la théorie élémentaire des nombres.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte quatre sous-questions indépendantes portant sur la divisibilité.
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* Les énoncés sont ouverts puisque l'étudiant doit en déterminer la valeur de vérité.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Ce type de problèmes présente plusieurs similitudes avec la tâche 10. Bien que ces deux tâches portent sur des notions différentes, parité pour la tâche 10 et divisibilité pour la 24, les démonstrations qu'elles demandent mettent en jeu des raisonnements semblables. De plus, la notion de divisibilité a déjà été travaillée à la tâche 13.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Une réfutation à l'aide d'un contre-exemple est requise pour les sous-questions a), c) et d). La sous-question b) quant à elle nécessite la mise en œuvre d'un raisonnement déductif pris en charge par le calcul.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* À la sous-question b), la notion de divisibilité doit être représentée algébriquement. Cette traduction ne posera sans doute pas de difficultés aux étudiants puisqu'elle a déjà été traitée à la tâche 13. L'utilisation de cette représentation nécessite l'introduction de plusieurs éléments, a, b et c. Ceux-ci s'ajoutent aux éléments x, y et n donnés dans l'énoncé de la tâche. L'ensemble de ces symboles littéraux devra être géré par l'étudiant.
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?* Une quantification implicite doit être perçue. Par exemple, pour la sous-question a), l'étudiant doit comprendre que l'énoncé proposé sous-entend la quantification

universelle suivante : **pour tout** nombre entier n divisible par un nombre entier x et un nombre entier y, l'entier n est divisible par le produit xy. Des quantifications semblables à celle exposée ci-dessus sont aussi à repérer pour les trois autres sous-questions de la tâche 24. La prise en considération de cette quantification est particulièrement importante pour les sous-questions a), c) et d), car elle permet de pouvoir réfuter entièrement l'énoncé par la présentation d'un seul contre-exemple.

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de chacune des démonstrations est simple. En effet, les démonstrations a), c) et d) se résument à la présentation d'un contre-exemple et la démonstration b) nécessite très peu de pas déductifs.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est mobilisable. Des tâches similaires et une tâche faisant intervenir la notion de divisibilité ont déjà été résolues par les étudiants leur donnant des outils pour mener à terme la présente tâche.
- *Quels théorèmes appliquer?* Le principe du tiers-exclu qui est intiment lié au contre-exemple est implicitement impliqué dans les sous-questions a), c) et d).
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est à déployer : la définition de divisibilité, la distributivité de la multiplication sur l'addition dans les entiers et la fermeture des entiers sous l'opération d'addition.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de point de vue doit être opéré par l'étudiant. Il doit représenter algébriquement la notion de divisibilité.
- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* Les représentations algébriques utilisées dans cette tâche nécessitent l'introduction de plusieurs symboles littéraux : a, b et c.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* Une quantification peut être repérée dans la démonstration de la sous-question b). En effet, une fois les

représentations algébriques établies, l'étudiant peut remarquer que la tâche revient à démontrer que **pour tout** nombre $x = an$, $a \in \mathbb{Z}$, et $y = bn$, $b \in \mathbb{Z}$ il **existe** un $c \in \mathbb{Z}$ tel que $x + y = cn$.

Les tâches 25, 26 et 27 étant similaires, elles seront analysées simultanément.

Tâche 25 : Question 2 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Démontrer l'identité $x^3 + 5x^2 + 6x \equiv x\ (x + 2)\ (x+3)$.

Réponse attendue à la tâche 25

Cette réponse a été élaborée par l'auteur de la présente recherche.

$$\begin{aligned} x(x+2)(x+3) &\equiv (x^2+2x)(x+3) \\ &\equiv x^2(x+3) + 2x(x+3) \\ &\equiv (x^3+3x^2) + (2x^2+6x) \\ &\equiv x^3 + 5x^2 + 6x\,. \end{aligned}$$

Tâche 26 : Question 3 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Démontrer $\forall x \in R, x \neq -3$, alors $\frac{x^3+5x^2+6x}{(x+3)} \equiv x(x+2)$.

Réponse attendue à la tâche 26

Cette réponse a été élaborée par l'auteur de la présente recherche.

$$\frac{x^3+5x^2+6x}{(x+3)} \equiv \frac{x(x+2)(x+3)}{(x+3)} \equiv x(x+2).$$

Tâche 27 : Question 4 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Démontrer que $x^3 - a^3 \equiv (x - a) \cdot (x^2 + ax + a^2)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réponse attendue à la tâche 27

La tâche 27 est identique à la sous-question b) de la tâche 6 analysée précédemment. Nous référons donc le lecteur à la solution qui y est présentée.

Analyse des tâches 25, 26 et 27

Ces trois tâches sont identiques, modulo les expressions impliquées, à la tâche 6 analysée précédemment. Puisqu'une analyse exhaustive de ce type de tâches a déjà été présentée, nous référons le lecteur aux points soulevés lors de cette étude.

Les tâches 28 et 29 étant similaires, elles seront analysées simultanément.

Tâche 28 : Question 5 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Démontrer que $\forall x \in \{2, 4, 10\}$, x peut s'écrire sous la forme $2n$, $n \in \mathbb{N}$.

Réponse attendue à la tâche 28

Cette solution est issue du solutionnaire fournie par l'enseignante.

Si $x = 2$, $2 = 2\ (n) = 2\ (1)$ $n = 1$ et $1 \in \mathbb{N}$.

Si $x = 4$, $4 = 2\ (n) = 2\ (2)$ $n = 2$ et $2 \in \mathbb{N}$.

Si $x = 10$, $10 = 2\ (n) = 2\ (5)$ $n = 5$ et $5 \in \mathbb{N}$.

Puisque les trois propositions sont vraies, alors la proposition est vraie.

Tâche 29 : Question 6 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Si les énoncés suivants sont vrais, alors les démontrer. S'ils sont faux, alors donner un contre-exemple.

a) $\forall x \in \{-2, -1\},\ x^3 < 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{Q}_+^*, \frac{1}{x} \leq x$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 2 \neq 3 \Rightarrow x \neq 0$.

d) $\exists x \in \{-1,1\}, x^2 - 1 \neq 0$.

Réponse attendue à la tâche 29

Cette solution a été composée par l'auteur de cette étude.

a) Si $x = -2$, $x^3 = (-2)^3 = -8 < 0$.
Si $x = -1$, $x^3 = (-1)^3 = -1 < 0$.
Puisque les deux propositions ci-dessus sont vraies, la proposition
$\forall x \in \{-2, -1\},\ x^3 < 0$ est vraie.

b) Cette proposition est fausse, car prenons $x = \frac{1}{2}$, alors $\frac{1}{x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 > \frac{1}{2} = x$.

c) Cette proposition est fausse, si $x = 0$, on a que la proposition $5x - 2 \neq 3$ est vraie tandis que la proposition $x \neq 0$ est fausse et donc l'implication est fausse (puisque l'antécédent est vraie, mais le conséquent est faux).

d) Cette proposition est fausse, car elle est fausse pour tous les éléments du domaine de référence.
Si $x = -1$, $x^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$.
Si $x = 1$, $x^2 - 1 = (1)^2 - 1 = 0$.

Analyse des tâches 28 et 29

Malgré le fait que les énoncés des tâches 28 et 29 soient de natures différentes, l'énoncé de la tâche 28 est fermé tandis que celui de la tâche 29 est ouvert, elles nécessitent la construction de démonstrations semblables. En effet, la démonstration demandée à la tâche 28 est pratiquement identique, modulo l'ensemble de référence et les expressions impliquées, à celle requise à la sous-question a) de la tâche 29. Devant un tel constat, nous avons décidé de regrouper ces deux tâches.

En plus de présenter des ressemblances avec la tâche 28, la tâche 29 comporte plusieurs points en commun avec la tâche 8. Premièrement, les énoncés des deux tâches sont identiques ce qui nous porte à croire que le travail qui doit être réalisé par l'étudiant est similaire. Bien que la tâche 8 se déroule dans le contexte de la théorie des ensembles tandis que la tâche 29 se situe en théorie des nombres, toutes deux nécessitent la construction de preuves par énumération et de preuves à l'aide d'un contre-exemple. La réalisation des deux tâches repose sur un même élément-clé : la compréhension des quantifications impliquées. Après avoir pris connaissance de ces similitudes, nous avons décidé de ne pas présenter une analyse exhaustive des tâches 28 et 29. L'analyse de ces deux tâches ne mettrait en lumière aucun nouvel élément. Nous référons plutôt le lecteur à l'analyse de la tâche 8.

Tâche 30 : Question 7 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Démontrer que si un nombre entier est divisible par 12 alors il est divisible par 4.

Réponse attendue à la tâche 30

Cette solution a été construite par l'auteur de cette étude.

Hypothèse : $n = 12a,\ a \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $n = 4b,\ b \in \mathbb{Z}$

Démonstration (preuve directe)

$$
\begin{aligned}
n &= 12a && \text{(par hypothèse)}\\
&= 4(3a) && \text{(simplification dans } \mathbb{Z}\text{)}\\
&= 4b, \text{ avec } b = 3a \in \mathbb{Z} && \lozenge
\end{aligned}
$$

$\lozenge$ Nous pouvons déduire que $b = 3a \in \mathbb{Z}$ car $a \in \mathbb{Z}$ (par hypo) et $3 \in \mathbb{Z}$; alors $3a \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$).

Ainsi, tout nombre divisible par 12 est divisible par 4.

Analyse de la tâche 30

À l'exception des nombres impliqués, la tâche 30 est identique à la tâche 13 analysées antérieurement. Nous invitons donc le lecteur à se référer à l'analyse de cette tâche.

Tâche 31 : Question 8 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Montrer que si un nombre $n \in \mathbb{Z}$, s'écrit $n = 10a - 6$ avec $a \in \mathbb{Z}$, alors il peut s'écrire $n = 2b + 4$, $b \in \mathbb{Z}$.

Réponse attendue et analyse de la tâche 31

Puisque ce type de tâches a déjà été traité à plusieurs reprises, nous référons le lecteur aux analyses présentées précédemment (voir tâches 9, 16 et 17).

Tâche 32 : Question 9 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Démontrer que si $5x^2 + 3$ est un nombre impair alors x est un nombre pair pour $x \in \mathbb{R}$.

Réponse attendue à la tâche 32 et analyse

La tâche 32 est identique à la sous-question a) de la tâche 14.

Tâche 33 : Question 10 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Démontrer que log 2 est un nombre irrationnel.

Réponse attendue à la tâche 33

Cette solution est issue d'un corrigé fourni par l'enseignante.

Démonstration : (preuve par contradiction)

Supposons que log 2 est un rationnel.

$\log 2$	$= \frac{a}{b} \; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$	(par définition d'un nombre rationnel, avec a et b premiers entre eux, $(a, b) = 1$, et a et b de même signe)
$b \log 2$	$= a$	(multiplication par b, $b \neq 0$)
$\log 2^b$	$= a$	(propriété des logarithmes)
2^b	$= 10^a$	(définition du logarithme) (L'expression obtenue est impossible puisque 10 ne peut pas s'exprimer comme une puissance de 2).

Donc log 2 n'est pas un nombre rationnel, il est irrationnel.

Analyse de la tâche 33

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* La définition d'un nombre rationnel et sa représentation algébrique doivent être connus. Cette représentation est le point de départ de la démonstration. La définition d'un logarithme, ses propriétés ainsi que certaines connaissances de nature algébrique doivent être maîtrisées par l'étudiant. Bien qu'il ne soit pas mentionner explicitement dans la démonstration fournie par l'enseignante, le théorème fondamental de l'arithmétique doit être mis à contribution. Puisque la démonstration qui est attendue requiert la mise en œuvre d'un raisonnement par l'absurde, l'étudiant doit savoir utiliser cette méthode de preuve.

- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Plusieurs des connaissances nécessaires à la résolution de la tâche ont été traitées au secondaire : définition et propriétés des logarithmes, définition d'un nombre rationnel et les connaissances de nature algébrique impliquées. De plus, la représentation algébrique d'un nombre rationnel a été utilisée dans certaines démonstrations analysées précédemment (voir la tâche 11). La méthode de preuve par l'absurde a fait l'objet d'un enseignement explicite dans le cadre du cours, la section théorique 4.11 du manuel lui est dédiée. Elle a aussi été utilisée à la tâche 19.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Cette tâche est liée à la théorie élémentaire des nombres.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est fermé. Une démonstration similaire[8] a été présentée dans la section théorique 4.11. Cette démonstration suggère une marche à suivre qui devra être adaptée au présent contexte.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement par l'absurde est à mettre en jeu.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* L'utilisation de la représentation algébrique d'un nombre rationnel est un élément de formalisme qui doit être pris en considération.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple et linéaire.

---

[8] « Exemple 4.11.3 : Démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel » (Bourbonnais, 2008, p. 87).

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est technique. Malgré le fait qu'aucune indication explicite ne soit donnée à l'étudiant, la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ exposée dans le manuel dévoile les grandes lignes de la démonstration qui doit être construite à la tâche 33. Cette indication implicite oriente le travail de l'étudiant qui n'aura qu'à adapter la démarche qui lui est présentée au contexte de la présente tâche. Les adaptations à apporter sont élémentaires et de nature algébrique.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Très peu d'arguments interviennent dans cette démonstration : la définition et la représentation algébrique d'un nombre rationnel, une propriété des logarithmes, la définition du logarithme, le théorème fondamental de l'arithmétique ainsi que certains arguments de nature algébrique.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Deux changements de point de vue doivent être effectués. Le premier changement est nécessité par la méthode de preuve utilisée. Le deuxième changement concerne la traduction de l'expression *log 2 est un nombre rationnel* en langage algébrique. Cette mathématisation qui est faite de l'énoncé est essentielle puisque l'ensemble de la démonstration repose sur cette réécriture.
- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* La représentation algébrique d'un nombre rationnel requiert l'introduction de deux éléments : a et b. Ces éléments doivent être définis précisément par l'étudiant puisqu'ils doivent répondre à certaines contraintes : $b \neq 0$, a et b de même signe et $(a, b) = 1$.
- *Y a-t-il un nouveau vocabulaire ou symbolisme à gérer?* Aucun symbolisme particulier n'est à gérer. Cependant, la connaissance du symbolisme désignant que les entiers a et b sont premiers entre eux est un atout pour l'étudiant. Bien que non nécessaire pour mener la tâche à terme, une maîtrise de cette notation permet à l'étudiant de comprendre pleinement la solution qui lui est proposée dans le

solutionnaire du manuel. D'ailleurs, cette notation a brièvement été présentée dans la section théorique 4.11.

Tâche 34 : Question 11 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Lire la démonstration sur l'unicité 4.11.4, page 88 des notes de cours.

Réponse attendue à la tâche 34

La tâche 34 n'est pas une démonstration qui doit être produite par l'étudiant, mais plutôt une tâche reposant sur la lecture et la compréhension d'une démonstration préalablement rédigée[9].

□ **Exemple 4.11.4**

Nous savons que tout nombre réel différent de 0 possède un inverse multiplicatif. Démontrons que cet inverse est unique.

Hypo : $a \in \mathbb{R}^*$

Concl : $\exists! b \in \mathbb{R}^*, (a \cdot b = 1) \wedge (b \cdot a = 1)$ (définition de l'inverse multiplicatif)

Démonstration (*preuve par contradiction*)

Supposons au contraire qu'il existe (au moins) deux inverses multiplicatifs pour a, c'est-à-dire :

H_1 : $\exists b_1 \in \mathbb{R}^*, (a \cdot b_1 = 1) \wedge (b_1 \cdot a = 1)$ (définition de l'inverse)

H_2 : $\exists b_2 \in \mathbb{R}^*, (a \cdot b_2 = 1) \wedge (b_2 \cdot a = 1)$ (définition de l'inverse)

H_3 : $b_1 \neq b_2$ (a possède deux inverses)

On considère alors les produits

$$b_1 \cdot (a \cdot b_2) \text{ et } (b_1 \cdot a) \cdot b_2$$

$$\begin{aligned} b_1 \cdot (a \cdot b_2) &= (b_1 \cdot a) \cdot b_2 && \text{(par associativité de } <\mathbb{R}, \cdot>) \\ b_1 \cdot 1 &= 1 \cdot b_2 && \text{(par hypothèses } H_1 \text{ et } H_2) \\ b_1 &= b_2 \; * && \text{(car 1 est le neutre de } <\mathbb{R}, \cdot>) \end{aligned}$$

On arrive alors à une contradiction avec l'hypothèse H_3.

---

[9] Bien que nous ayons mentionné que notre analyse du cours *Mathématiques pour les sciences* se limiterait à l'analyse des tâches qu'il propose, nous avons décidé d'analyser cette démonstration car l'enseignante l'a incluse dans sa feuille d'exercices supplémentaires. Il s'agit d'ailleurs de la seule démonstration présentée dans une section théorique du manuel qui a été explicitement ciblée par l'enseignante dans ses documents d'exercices.

Ainsi, on vient de démontrer qu'il n'est pas possible d'avoir simultanément l'hypothèse et la négation de la conclusion. Par conséquent, selon l'équivalence (4.1) de la page 86, on déduit que l'hypothèse implique logiquement la conclusion, c'est-à-dire que tout nombre réel différent de 0 possède un seul inverse multiplicatif.

■

La façon dont est rédigée la démonstration dans le manuel porte selon nous à confusion. En effet, les membres de droite de chacune des trois expressions présentées (soit $b_1 \cdot (a \cdot b_2)$, $b_1 \cdot 1$ *et* b_1) sont équivalents et devraient être unies par un symbole d'égalité (il en va de même pour les membres de gauche). Il aurait, selon nous, été plus précis d'écrire la démonstration de la façon suivante :

$$b_1 = b_1 \cdot 1 = b_1 \cdot (a \cdot b_2) = (b_1 \cdot a) \cdot b_2 = 1 \cdot b_2 = b_2$$

Cette écriture permet de mieux comprendre d'où proviennent les différentes expressions impliquées dans la démonstration.

L'analyse réalisée ci-dessous est cependant basée sur la démonstration telle qu'elle est présentée dans le manuel.

Analyse de la tâche 34

Puisque la tâche 34 nécessite la lecture et la compréhension d'une démonstration présentée dans une section théorique du manuel, nous utilisons notre grille d'analyse conçu à cet effet.

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont la ou les connaissances mises en fonctionnement ?* La définition de l'inverse multiplicatif, et sa représentation algébrique, ainsi que les propriétés de la multiplication dans les nombres réels sont mises en fonctionnement. De plus, la méthode de preuve par l'absurde est à prendre en considération. Des connaissances logiques sont aussi nécessaires pour que l'étudiant comprenne pleinement l'énoncé de la conclusion ainsi que sa négation, qui est le point de départ de la preuve par l'absurde.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les propriétés de la multiplication dans les nombres réels et la méthode de preuve par l'absurde sont connues. La définition

d'un inverse multiplicatif a été traitée au secondaire, cependant la représentation algébrique qui en est faite dans la démonstration est sans doute une nouveauté pour plusieurs étudiants. En effet, le symbolisme utilisé pour exprimer cette définition dépasse selon nous celui qui est normalement utilisé au secondaire.

- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* L'énoncé se rapporte à la théorie élémentaire des nombres.

Deuxième et troisième axes d'analyse : Les tâches prescrites et les activités attendues des étudiants

- *Qu'est-ce qui est attendu de l'étudiant par la présentation de cette démonstration? Des indices facilitant la réalisation/compréhension de la tâche sont-ils fournis?* Il est attendu de l'étudiant qu'il lise et comprenne la démonstration qui lui est présentée. Il doit en comprendre les diverses parties ainsi que leurs enchaînements. Plusieurs indices sont fournis pour faciliter sa compréhension. Premièrement, chacune des étapes de la démonstration est accompagnée d'une justification qui est donnée entre parenthèse. Deuxièmement, la méthode de preuve par l'absurde qui est mise en œuvre dans cette démonstration est décortiquée au maximum. En effet, le squelette logique de ce mécanisme est mis à nu dans la démonstration. De plus, avant de présenter l'exemple 4.11.4, le manuel présente une marche à suivre qui est souvent utilisée pour démontrer l'unicité d'un élément : « La démonstration par contradiction sont souvent utilisées pour démontrer qu'une forme propositionnelle est vérifiée pour une seule valeur du référentiel. La preuve consiste alors à supposer au contraire qu'il existe au moins deux telles valeurs, puis arriver à une contradiction » (Bourbonnais, 2008, p. 87). Cette marche à suivre est ensuite illustrée dans l'exemple 4.11.4.
- *S'agit-il d'un type de démonstrations qui était ignoré jusqu'alors?* Ce type de problèmes est nouveau pour l'étudiant. Dans le cadre du cours, il s'agit en effet d'un premier contact avec une démonstration sur l'unicité.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement par l'absurde est en jeu.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme occupe une place importante dans cette tâche. Tout d'abord, des symboles logiques et des

quantificateurs exprimés symboliquement sont à prendre en considération. Ensuite, le recours à la preuve par l'absurde nécessite de prendre la négation de la conclusion ce qui requiert l'introduction de deux éléments, soit deux inverses multiplicatifs distincts de a, b_1 et b_2. L'apparition de ces deux éléments dans la démonstration découle directement de la négation de l'expression $\exists!\, b \in \mathbb{R}^*, (a \cdot b = 1) \wedge (b \cdot a = 1)$. Il est donc primordial que l'étudiant comprenne cette expression, sa négation et le rôle de cette dernière dans l'ensemble de la démarche.

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure est simple et linéaire.
- *Y a-t-il plusieurs arguments développés à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est développée : la définition d'un inverse multiplicatif, l'associativité de la multiplication dans les nombres réels et le fait que 1 est l'élément neutre de la multiplication dans les réels.
- *Un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation est-il introduit (sans indication)?* Deux changements de point de vue sont à introduire. Un premier changement est nécessité par la méthode de preuve utilisée. En effet, l'énoncé donné doit être momentanément mis de côté par l'étudiant pour se consacrer à l'étude de la négation de la conclusion de cet énoncé. Le second changement de point de vue concerne les produits $b_1 \cdot (a \cdot b_2)$ et $(b_1 \cdot a) \cdot b_2$ qui sont introduits dès le départ dans la démonstration. L'étudiant doit comprendre d'où ils sont issus et pourquoi ils sont introduits dans la démonstration. La présentation qui est faite de ces produits dans le manuel donne l'impression qu'ils sont tout droit sortis d'un chapeau. Aucune explication n'est fournie pour éclairer l'étudiant à ce propos. Selon nous, l'écriture de la démonstration tel que nous la suggérons faciliterait la compréhension des étudiants quant à l'origine et aux rôles de ces produits. L'utilisation de ces nouvelles expressions nécessite un *changement de point de vue réalisé par l'introduction d'un nouvel objet.*
- *Une quantification est-elle à repérer?* Un quantificateur universel exprimé en langage naturel est à repérer. Plusieurs quantificateurs symboliques sont aussi à considérer. Tel que nous l'avons mentionné précédemment, ils jouent un rôle crucial et ne peuvent donc être négligés.

Tâche 35 : Question 12 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Démontrer que $\forall n \in Z, n^2 + 3n$ est un nombre pair.

Réponse attendue à la tâche 35

Cette réponse est issue du solutionnaire rédigé par l'enseignante.

Hypothèse : $n \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $n^2 + 3n$ est pair

Démonstration (preuve par cas)

<u>1er cas : si n est pair, alors $n^2 + 3n$ est pair</u>

Hypothèse : $n = 2a$, $a \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre pair)

Conclusion : $n^2 + 3n = 2b, b \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre pair)

Démonstration du premier cas (preuve directe)

n	$= 2a$	(par hypothèse)
$n^2 + 3n$	$= (2a)^2 + 3(2a)$	(si f est une fonction avec $x = y$, alors $f(x) = f(y)$)
	$= 4a^2 + 6a$	(propriété des exposants et simplification dans $\mathbb{Z}$)
	$= 2(2a^2 + 3a)$	(distributivité de la multiplication sur l'addition)
	$= 2b$, avec $b = 2a^2 + 3a \in \mathbb{Z}$	◊

◊ Puisque que $2 \in \mathbb{Z}$, $3 \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$, alors $2a^2 \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $\langle \mathbb{Z}, \times \rangle$ (2 fois)) et $3a \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $\langle \mathbb{Z}, \times \rangle$). Puisque $2a^2 \in \mathbb{Z}$ et $3a \in \mathbb{Z}$, alors $2a^2 + 3a \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$).

Ainsi $n^2 + 3n$ est pair.

□

2^e cas : si n est impair, alors $n^2 + 3n$ est pair

Hypothèse : $n = 2c+1$, $c \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre pair)

Conclusion : $n^2 + 3n = 2d$, $d \in \mathbb{Z}$ (définition d'un nombre pair)

Démonstration du premier cas (preuve directe)

n	$= 2c + 1$	(par hypothèse)
$n^2 + 3n$	$= (2c+1)^2 + 3(2c+1)$	(si f est une fonction avec $x = y$, alors $f(x) = f(y)$)
	$= 2c^2 + 4c + 1 + 6c + 3$	(développement du carré et distributivité de la multiplication sur l'addition)
	$= 2c^2 + 10c + 4$	(simplification dans $\mathbb{Z}$)
	$= 2(c^2 + 5c + 2)$	(distributivité de la multiplication sur l'addition)
	$= 2d$, avec $d = c^2 + 5c + 2 \in \mathbb{Z}$	$\lozenge$

$\lozenge$ Puisque que $5 \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$, alors $c^2 \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $\langle \mathbb{Z}, \times \rangle$) et $5c \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $\langle \mathbb{Z}, \times \rangle$). Puisque $2 \in \mathbb{Z}$, $c^2 \in \mathbb{Z}$ et $5c \in \mathbb{Z}$, alors $c^2 + 5c + 2 \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ (2 fois)),

Ainsi $n^2 + 3n$ est pair.

$\square$

Donc puisque nous avons démontré que la proposition est vraie pour tous les nombres entiers n pairs et que nous l'avons aussi démontrée pour tous les nombres entiers n impairs, nous l'avons démontrée pour tous les entiers.

$\blacksquare$

La démonstration proposée dans le corrigé de l'enseignante nous a quelque peu surprises. Bien qu'elle soit cohérente avec le travail fait jusqu'à présent dans le cours, nous croyons qu'une démonstration moins laborieuse et tout aussi valable pourrait être réalisée.

Démonstration que nous suggérons :

$$n^2 + 3n \quad = n\,(n+3) \quad \text{(en factorisant } n\text{)}$$

Considérons deux cas :

Si n est pair, alors $(n + 3)$ est impair (car la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair, ici 3, est impaire) et donc $n\ (n + 3)$ est pair (car le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair).

Si n est impair, alors $(n + 3)$ est pair (car la somme de deux nombres impairs est impaire) et donc $n\ (n + 3)$ est pair (car le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair).

■

Cette démonstration, en plus de présenter l'avantage d'être moins laborieuse et plus directe que celle proposée par l'enseignante, utilise la même méthode de preuve, soit la preuve par disjonction de cas. De plus, la démonstration que nous avons élaborée fait intervenir des énoncés qui ont été préalablement démontrés dans le cours. En effet, ces énoncés portant sur les opérations avec des nombres pairs et impairs ont tous été démontrés à la tâche 10. Nous aurions trouvé intéressant de les réinvestir dans la présente tâche. D'ailleurs n'est-il pas dans la nature des mathématiques de construire sur ce qui a été fait auparavant?

Bien que notre démonstration nous semble plus efficace à bien des égards, nous avons décidé d'appliquer notre grille d'analyse à la solution rédigée par l'enseignante. Celle-ci est en effet peut être plus susceptible d'être construite par un étudiant, car des exemples similaires sont présentés dans le manuel.

Analyse de la tâche 35

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Le cœur de cette démonstration repose sur la définition d'un nombre pair et d'un nombre impair ainsi que leurs représentations algébriques. Des propriétés des exposants et des opérations dans les nombres entiers doivent également être mises en fonctionnement. En ce qui concerne la méthode de preuve utilisée, l'étudiant doit pouvoir mettre en œuvre un raisonnement par disjonction de cas. Cette méthode de preuve, qui repose sur l'implication logique $[(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)] \Rightarrow [(P \vee Q) \rightarrow R\ ]$, requiert un morcellement de l'ensemble de référence en plusieurs parties dont l'union recouvre le référentiel. Dans le cas présent, l'ensemble de référence, les entiers, doit être partagé en deux parties, les nombres entiers pairs et les nombres entiers impairs.

- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les définitions d'un nombre pair et d'un nombre impair ainsi que leurs représentations algébriques ont abondamment été traitées (voir tâches 10, 14, 18, 20, 23 et 32). Les propriétés des opérations dans les entiers et les propriétés des exposants ont été travaillées au secondaire en plus d'être utilisées dans certaines tâches proposées aux étudiants. En ce qui concerne la méthode de preuve par disjonction de cas, elle a été présentée à la section théorique 4.12 du manuel. La tâche 35 est la première application, par l'étudiant, de cette méthode de preuve.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* La tâche se rapporte à la théorie élémentaire des nombres.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* La valeur de vérité de l'énoncé est connue, il est donc fermé. Aucun indice n'est donné explicitement dans la tâche. Par contre, l'exemple 4.12.1[10] présenté dans le manuel est très similaire à la tâche 35.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu*? Un raisonnement par disjonction de cas est à mettre en jeu.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* La preuve par disjonction de cas attendue dans cette démonstration requiert de l'étudiant qu'il prenne connaissance que deux cas doivent être traités séparément, soit les nombres pairs et les nombres impairs. Il est attendu qu'il énonce précisément, et dans un langage mathématique, chacun des deux cas qu'il devra traiter ce qui nécessite l'utilisation des représentations algébriques d'un nombre pair et d'un nombre impair.

---

[10] « Exemple 4.12.1 : Démontrons la proposition : $\forall n \in \mathbb{Z}, n^3 + n$ est pair. » (Bourbonnais, 2008, p. 89)

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est plutôt simple. Pour démontrer l'énoncé de la tâche, deux sous-démonstrations doivent être réalisées. La structure déductive de chacune d'entre elles est simple et linéaire. Une fois ces sous-démonstrations complétées, un pas déductif supplémentaire est requis puisque l'étudiant doit déduire la validité de l'énoncé initiale de la tâche à partir de la validité des énoncés des sous-démonstrations. La démonstration attendue à la tâche 35 est donc un arbre d'inférences composé de deux branches (chacune des branches correspondant à la démonstration d'un cas).

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est technique, puisqu'un exemple similaire a été présenté dans la section théorique 4.12 et que les modifications qui doivent être apportées pour adapter cette démarche à la présente tâche sont élémentaires et de nature algébrique.
- *Y a-t-il lieu d'introduire des étapes?* La démonstration de l'énoncé initial s'effectue en deux étapes : la démonstration du cas n est un nombre pair et la démonstration du cas n est un nombre impair.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Peu arguments interviennent dans chacune des sous-démonstrations : représentations algébriques d'un nombre pair et d'un nombre impair, unicité de l'image d'une fonction, propriété des exposants, distributivité de la multiplication sur l'addition dans les entiers et la fermeture des entiers sous les opérations d'addition et de multiplication. Un argument supplémentaire doit être apporté pour pouvoir conclure que les deux sous-démonstrations réalisées démontrent bien l'énoncé initial de la tâche. Cette déduction repose sur le fait que l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs forment une partition de l'ensemble des nombres entiers. Les deux cas couvrent donc entièrement l'ensemble de référence.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de point de vue nécessité par le recours

à la disjonction de cas est requis dans la tâche. De plus, les nombres pairs et impairs doivent être représentés algébriquement ce qui constitue un second changement de point de vue.

- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* Outre la quantification universelle explicitée dans l'énoncé de la tâche, aucune autre quantification n'est à prendre en considération.

Tâche 36 : Question 13 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2$ est pair si et seulement si *n* est pair.

Réponse attendue et analyse de la tâche 36

Une tâche nécessitant la démonstration d'une biconditionnelle a déjà été traitée dans le passé, nous référons le lecteur aux propos qui ont été tenus lors de cette analyse (voir tâche 20). La démonstration qui est demandée à la tâche 36 repose principalement sur la compréhension d'une biconditionnelle. En effet, une fois la biconditionnelle séparée en deux sous-affirmations, l'implication directe et sa réciproque, les démonstrations attendues sont similaires à celles construites à la tâche 14. Le lecteur pourra donc également se référer à cette tâche pour avoir de plus amples détails.

Nous tenons également à préciser que l'analyse exhaustive et complète d'une tâche nécessitant la démonstration d'un énoncé comportant une biconditionnelle est faite à la tâche 37. Nous avons décidé de soumettre la tâche 37 à notre grille d'analyse puisque les démonstrations de l'implication directe et de sa réciproque comportent des éléments ignorés par les tâches couvertes jusqu'à présent.

Tâche 37 : Question 14 (tirée de la feuille d'exercices supplémentaires portant sur les méthodes de preuves fournie par l'enseignante)

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |2x| + x = 6 \leftrightarrow x = 2$ ou $x = -6$.

Réponse attendue à la tâche 37

Cette solution est tirée du corrigé fourni par l'enseignante.

$P \Rightarrow Q$ c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, |2x| + x = 6 \rightarrow x = 2 \; ou \; x = -6.$

Hypothèse : $|2x| + x = 6$

Conclusion : $x = 2 \; ou \; x = -6$

Sachant que $|2x| = \begin{cases} 2x & si \; x \geq 0 \\ -2x & si \; x < 0 \end{cases}$ on obtient $|2x| + x = \begin{cases} 2x + x = 3x = 6 \; si \; x \geq 0 \\ -2x + x = -x = 6 \; si \; x < 0 \end{cases}$

Cas $x \geq 0$

Hypothèse : $3x = 6$

Conclusion : $x = 2$ ou $x = -6$

Démonstration (preuve directe)

$3x = 6$

$x = 2$ (simplification algébrique)

On note que la proposition $x = 2$ ou $x = -6$ est vraie puisqu'une des égalités est vraie. □

Cas $x < 0$

Hypothèse : $-x = 6$

Conclusion : $x = 2$ ou $x = -6$

Démonstration (preuve directe)

$-x = 6$

$x = -6$ (simplification algébrique)

On note que la proposition $x = 2$ ou $x = -6$ est vraie puisqu'une des égalités est vraie. □

□ ⇒

<u>$Q \Rightarrow P$ c'est-à-dire : Si $x = 2$ ou $x = -6 \rightarrow |2x| + x = 6$</u>.

Hypothèse : $x = 2$ ou $x = -6$

Conclusion : $|2x| + x = 6$

Démonstration (preuve par énumération)

Si $x = 2$ alors $|2(2)| + 2 = |4| + 2 = 4 + 2 = 6$.

Et

Si $x = -6$ alors $|2(-6)| + (-6) = |-12| + (-6) = 12 - 6 = 6$.

□ ⇐

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, |2x| + x = 6 \leftrightarrow x = 2$ ou $x = -6$.

■

Analyse de la tâche 37

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* L'étudiant doit savoir ce qu'est une biconditionnelle et comment elle doit être traitée. La notion de valeur absolue, et plus particulièrement sa définition algébrique, est requise.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* La biconditionnelle, et la structure de démonstration qu'elle sous-entend, est connue des étudiants. La section théorique 4.13 du manuel lui est consacrée et des tâches présentées antérieurement (voir tâche 20 et 36) portent sur ce sujet. La notion de valeur absolue est présentée au

secondaire. Cependant, la définition algébrique de la valeur absolue et l'utilisation qui en est faite constituent, selon nous, une nouveauté pour plusieurs.

- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent au domaine de l'algèbre.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est fermé puisque sa valeur de vérité est connue. Aucun indice n'est fourni.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* La démonstration d'une biconditionnelle a été traitée auparavant dans le cours *Mathématique pour les sciences*. Cependant, nous croyons que la présence dans cette tâche de la notion de valeur absolue élève significativement le niveau de difficulté nous permettant ainsi d'avancer qu'il s'agit d'un nouveau type de problèmes pour les étudiants.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* En plus du raisonnement déductif, une disjonction de cas nécessité par la définition de la valeur absolue doit être effectuée.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme occupe une place importante dans cette tâche. Tout d'abord, le symbole de la biconditionnelle doit être repéré et correctement traité. En effet, l'étudiant doit transformer la démonstration de la biconditionnelle en la démonstration de l'implication directe et la démonstration de la réciproque. Cette transformation s'appuie sur l'équivalence logique entre les deux propositions suivantes $P \Leftrightarrow Q$ et $\left(P \Rightarrow Q\right) \wedge \left(Q \Rightarrow P\right)$. Deuxièmement, la notion de valeur absolue qui est présente dans la démonstration constitue, selon nous, une difficulté non négligeable. L'étudiant doit être en mesure de ré-exprimer l'expression $|2x|$ en une forme qui soit davantage opérationnelle. Pour ce faire, le recours à la définition algébrique de la valeur absolue est nécessaire. Cette définition implique la prise en compte de plusieurs cas : le cas où x prend des valeurs positives, celui où il prend une valeur nulle et celui où il prend des valeurs négatives. Nous souhaitons d'ailleurs soulever un point en lien avec cette disjonction

de cas. Le corrigé de la tâche 37 qui est fourni par l'enseignante ré-exprime de la façon suivante la valeur absolue :

$$|2x| = \begin{cases} 2x \; si \; x \geq 0 \\ -2x \; si \; x < 0. \end{cases}$$

Nous croyons que cette nouvelle expression peut troubler certains étudiants qui se demanderaient pourquoi avoir choisi d'étudier les cas $x \geq 0$ et $x < 0$ plutôt que $x > 0$ et $x \leq 0$. Un tel choix constitue une source d'ambiguïté qui doit être prise en considération.

- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est complexe. Il s'agit en fait d'un arbre d'inférences composé de deux « branches » principales : la démonstration de l'implication directe et la démonstration de la réciproque. De plus, les deux branches principales sont, elles aussi, séparées en deux « sous-branches ». La branche illustrant la démonstration de l'implication directe est composée de deux sous-branches supportant les cas $x \geq 0$ et $x < 0$, tandis que la branche illustrant la réciproque est séparée en l'étude du cas $x = 2$ et $x = -6$.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est disponible. Bien que la voie à emprunter pour démontrer des affirmations comportant une biconditionnelle soit connue, les difficultés inhérentes à la notion de valeur absolue constituent un défi de taille pour l'étudiant.
- *Y a-t-il lieu d'introduire des étapes?* Deux étapes principales doivent être introduites : la démonstration de l'implication directe et la démonstration de la réciproque. De plus, la démonstration de l'implication directe nécessite l'introduction de deux étapes supplémentaires, soit la prise en compte des cas $x \geq 0$ et $x < 0$.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est à développer : la définition d'une biconditionnelle, la définition algébrique de la valeur absolue et des arguments de nature algébrique.

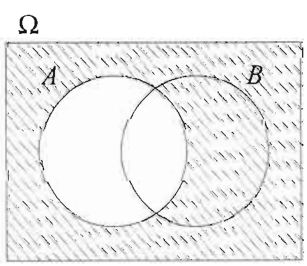
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Plusieurs changements de point de vue sont nécessaires. Dans un premier temps, la démonstration de la biconditionnelle doit être subdivisée en la démonstration de l'implication directe et la démonstration de la réciproque. Cette forme de changement de point de vue correspond, selon notre catégorisation, à *un changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche.* En effet, le symbole de la biconditionnelle doit être ré-exprimé en une forme dévoilant davantage la voie à suivre pour démontrer l'énoncé. Cette transformation trace la structure globale de la démonstration qui sera construite. Dans un deuxième temps, la valeur absolue doit être ré-exprimée à l'aide de sa définition algébrique. Ce changement de point de vue, qui est de la même forme que le précédent, n'est pas direct et causera sans doute certains problèmes aux étudiants. Une disjonction de cas découle directement de la définition de la valeur absolue. En effet, les cas $x \geq 0$ et $x < 0$ doivent être pris en considération. L'apparition de ces deux cas constitue un troisième changement de point de vue à introduire.

Tâche 38 : Examen 1, question 2 (tirée de l'examen de l'étape 1qui a été rédigé par l'enseignante)

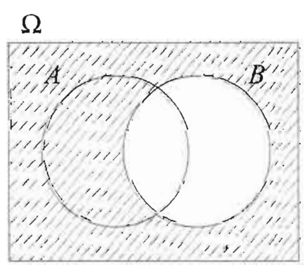
Démontrer que $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$ en utilisant des diagrammes de Venn.

Réponse attendue à la tâche 38

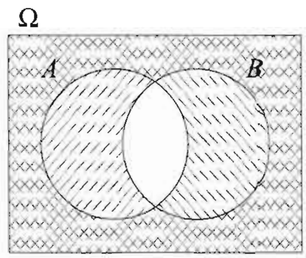
Cette solution a été créée par l'auteur de la présente recherche.



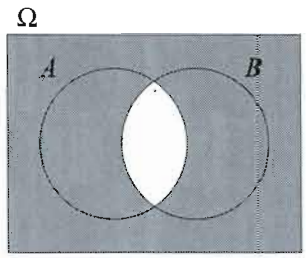
A^c correspond aux éléments du référentiel qui ne sont pas dans l'ensemble A.



B^c correspond aux éléments du référentiel qui ne sont pas dans l'ensemble B.



En superposant les deux diagrammes présentés ci-dessus, nous obtenons $(A^c \cup B^c)$ correspondant aux éléments du référentiel qui n'appartiennent pas à un ou l'autre des ensembles A et B.



$(A \cap B)^c$ correspond aux éléments du référentiel qui ne sont pas communs aux ensemble A et B.

Puisque les portions grisées/hachurées des diagrammes de Venn des expressions $(A \cap B)^c$ et $(A^c \cup B^c)$ sont identiques, nous pouvons conclure que $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$.

Analyse de la tâche 38

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Cette tâche repose sur la connaissance des opérations élémentaires avec des ensembles : le complément, l'union et l'intersection. De plus, la priorité des opérations avec des ensembles doit être prise en considération. L'étudiant doit également être capable de représenter des ensembles à l'aide d'un diagramme de Venn.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Chacune de ces notions a été présentée au chapitre 2 du manuel. Plusieurs tâches de ce chapitre portaient sur la compréhension de ces notions. Cependant, il s'agit de leur première présence dans un contexte de démonstration utilisant des diagrammes de Venn.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent à la théorie des ensembles.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est fermé. L'utilisation du diagramme de Venn est mentionnée explicitement dans la tâche dévoilant la voie à emprunter pour résoudre la tâche.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Il s'agit de la première démonstration s'appuyant sur des diagrammes plutôt que des expressions algébriques.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* L'étudiant doit interpréter correctement les symboles d'union, d'intersection et de complémentation d'ensembles. Selon nous, cette tâche est en fait un prétexte pour travailler le symbolisme ensembliste et sa représentation à l'aide d'un diagramme de Venn plutôt qu'une tâche destinée à travailler le raisonnement déductif.
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?* Il est sous-entendu que les ensembles A et B sont issus du même ensemble universel Ω.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple. Après avoir représenté par un diagramme de Venn chacun des membres de l'égalité, un seul pas est nécessaire pour conclure que l'égalité présentée dans la tâche est vraie.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est technique. Les opérations élémentaires avec des ensembles ainsi que leur représentation avec un diagramme de Venn ont été traitées dans le cours. L'étudiant n'a donc qu'à combiner ces différentes opérations en prenant en considération leur priorité et tracer le diagramme de Venn correspondant à chacune des combinaisons.
- *Y a-t-il lieu d'introduire des étapes?* La construction du diagramme de Venn représentant chacun des membres de l'égalité doit être réalisée pour conclure que

l'énoncé proposé est bel et bien vrai. De plus, le diagramme illustrant le membre de droite a nécessité la construction de deux diagrammes intermédiaires.

- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est à développer : définition et représentation à l'aide du diagramme de Venn des opérations élémentaires avec des ensembles et la priorité de ces opérations. L'égalité des expressions $(A \cap B)^c$ et $(A^c \cup B^c)$ est déduite du fait que leur représentation par un diagramme de Venn est identique.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de mode de représentation doit être réalisé puisque chaque membre de l'égalité $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$ doit être exprimé à l'aide d'un diagramme de Venn. Ce changement est par contre indiqué dans l'énoncé de la tâche.

Tâche 39 : Examen 1, question 6 (tirée de l'examen de l'étape 1qui a été rédigée par l'enseignante)

Si les énoncés suivants sont vrais, alors démontrer les sinon, donner un contre-exemple.

a) Soit $\Omega = \{$l, o, g, i, q, u, e$\}$, $A = \{$l, o, g$\}$ et $B = \{$l, o, q, u, e$\}$, $\forall x \in (A \cup B)^c, x \in (A^c \cap B^c)$.
b) $\exists!\, x \in \mathbb{Z}, x^2 = 9$.
c) Soit $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 4 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}^* | x^2 < 4\}$ et $C = \left\{\frac{a}{b} \middle| a \in A\ et\ b \in B\right\}$, $\forall c \in C, c \in \mathbb{Q}$.

Réponse attendue à la tâche 39

La solution attendue a été conçue par l'auteur de la présente recherche.

a) Vrai, l'ensemble $(A \cup B)^c = \{$i$\}$ et $(A^c \cap B^c) = \{$i$\}$, donc tous les éléments appartenant à l'ensemble $(A \cup B)^c$ appartiennent aussi à $(A^c \cap B^c)$.
b) Faux, si $x = 3 \in \mathbb{Z}$ alors $x^2 = (3)^2 = 9$ et si $x = -3 \in \mathbb{Z}$ alors $x^2 = (-3)^2 = 9$.
c) Vrai, $A = \{2, -2\}$, $B = \{1\}$ donc $C = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ et $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

Analyse de la tâche 39

Mises à part les expressions impliquées, la tâche 39 est pratiquement identique à la tâche 8. En effet, elles reposent sur la compréhension du symbolisme inhérent à la théorie des ensembles, sur la compréhension des quantificateurs impliqués et sur la construction de preuves par énumération et de preuves à l'aide de contre-exemple. Il est vrai que les expressions présentées à tâche 39 sont plus complexes à décoder que celles de la tâche 8. Cependant, cette différence n'a pratiquement aucun impact du point de vue de l'activité de démonstration. Devant ce constat, nous avons décidé de ne pas présenter l'analyse exhaustive de cette tâche. Nous référons plutôt le lecteur à l'analyse de la tâche 8.

Tâche 40 : Examen 1, question 10 (tirée de l'examen de l'étape 1 qui a été rédigé par l'enseignante)

Démontrer qu'il n'existe pas de solutions entières à l'équation $4x^2 + 12xy = 81$.

Réponse attendue à la tâche 40

Cette solution a été élaborée par l'auteur de cette recherche.

Méthode de preuve : par contradiction

Démonstration :

Supposons au contraire qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $4x^2 + 12xy = 81$. Alors on doit avoir $2(2x^2 + 6xy) = 81$(distributivité dans $\mathbb{Z}$). Mais puisque $x, y \in \mathbb{Z}$ et que $2, 6 \in \mathbb{Z}$ alors $2x^2 \in \mathbb{Z}$ (fermeture $\langle \mathbb{Z}, \times \rangle (2fois)$), $6xy \in \mathbb{Z}$ (fermeture $\langle \mathbb{Z}, \times \rangle (2fois)$) et donc, $2x^2 + 6xy \in \mathbb{Z}$ (fermeture $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$).

Ainsi, le membre de gauche de l'égalité est pair (par définition). On arrive donc à une contradiction, car 81 est impair. Par conséquent, il n'existe pas d'entiers dans $\mathbb{Z}$ pour lesquels $4x^2 + 12xy = 81$.

■

Analyse de la tâche 40

Cette tâche étant similaire à la tâche 19, nous référons le lecteur à l'analyse qui en a été faite.

Tâche 41 : Examen 1, question 11 (tirée de l'examen de l'étape 1 qui a été rédigé par l'enseignante)

Démontrer que si $2x^2 + x + 3$ est un nombre entier pair alors x est un nombre entier impair.

Réponse attendue et analyse de la tâche 41

Pour voir le type de démonstrations attendues et son analyse, nous référons le lecteur à la tâche 14, tâche pratiquement identique à la tâche 41.

5.2 Étape 2 : Analyse combinatoire et probabilités

5.2.1 Objectifs spécifiques de l'étape 2

L'étape 2 débute par l'étude de l'analyse combinatoire. Le travail qui est fait dans ce domaine vise principalement l'apprentissage des notions d'arrangements, de permutations et de combinaisons d'objets. Ces notions requièrent l'implantation d'un certain formalisme mathématique, chose qui est faite dans le cours *Mathématiques pour les sciences*. En effet, le manuel présente la factorielle et son symbolisme associé, en plus d'implanter les notations liées aux arrangements, aux permutations et aux combinaisons d'objets. L'étudiant doit connaître les définitions de ces notions et apprendre à travailler avec elles, et leur symbolisme associé. Il doit également être en mesure de les utiliser dans un contexte de résolution de problèmes et de construction de démonstrations. Effectivement, le plan de cours mentionne explicitement que des démonstrations d'égalités faisant intervenir des factorielles et des démonstrations d'expressions comportant des combinaisons ou des arrangements seront au menu dans cette étape.

La seconde portion de l'étape 2 se concentre sur les probabilités. Les définitions des principaux concepts liés à l'étude des probabilités sont présentées : expérience aléatoire, espace échantillonnal, événement, événement certain, événement impossible, événements complémentaires, événements incompatibles et probabilités d'un événement (définition classique et définition empirique). En ce qui concerne la résolution de problèmes, il est attendu de l'étudiant qu'il soit capable de calculer la probabilité qu'un événement particulier se réalise en ayant recours, au besoin, à divers outils : le diagramme de Venn, les axiomes ou les propriétés des probabilités. L'activité de démonstration est également présente dans l'étude de ce thème, puisque « démontrer les propriétés du calcul des probabilités » (Plan de cours, session hiver 2008, p. 10) constitue un objectif d'apprentissage de l'étape 2.

L'étape 2 de *Mathématiques pour les sciences* possède plusieurs objectifs d'apprentissage liés à l'activité de démonstration et au formalisme. Pour mener à termes ces objectifs, plusieurs tâches ont été proposées.

5.2.2 Tâches proposées à l'étape 2

Pour atteindre les objectifs de l'étape 2, 77 tâches sont proposées. Parmi celles-ci, 5 font intervenir l'activité de démonstration. L'analyse de chacune d'elles est présentée ci-dessous.

Tâche 42 : Exercice 8.14.7 (exercice tiré du manuel, p. 350)

Démontrer que le nombre de lignes nécessaires pour établir la table de vérité d'une proposition définie à partir de n propositions, en plus de la première ligne contenant les noms des colonnes (les propositions intermédiaires), est 2^n.

Réponse attendue à la tâche 42

La solution est tirée du corrigé du manuel (p. 351). Seule la représentation du casier a été ajoutée pour montrer au lecteur la *méthode des cases* dont il est question dans le texte.

Puisque chacune des n propositions élémentaires définissant la proposition composée peut prendre les valeurs V ou F, le problème revient à un problème de casiers[11] à n cases (1 case pour chacune des propositions), chacune d'elles pouvant être occupée par 2 valeurs (V ou F). Selon le principe fondamental de l'analyse combinatoire[12], il y a 2^n façon de faire cela.

Valeurs de vérité possibles pour la $1^{ère}$ proposition	Valeurs de vérité possibles pour la 2^e proposition	...	Valeurs de vérité possibles pour la $(n-1)^e$ proposition	Valeurs de vérité possibles pour la n^e proposition	Produit
2	2	...	2	2	2^n

Analyse de la tâche 42

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Une connaissance de la table de vérité est essentielle pour construire la démonstration demandée. L'étudiant doit également avoir recours au principe fondamental de l'analyse combinatoire pour calculer correctement le nombre de lignes que contient la table de vérité. Pour l'aider dans la résolution du problème, la méthode de l'arbre ou sa version simplifiée, soit la méthode des cases, peuvent être utilisées pour visualiser la situation.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* La table de vérité est connue puisqu'elle a été travaillée dans plusieurs tâches de l'étape 1. La méthode de l'arbre de possibilités a été introduite à la section théorique 8.3 du manuel et plusieurs tâches ont porté sur ce sujet. Le principe fondamental de l'analyse combinatoire et la

[11] Cette méthode s'apparente à la méthode des arbres de possibilités. En effet, la méthode des cases consiste à « associer à chaque niveau de l'arbre une case d'un casier dans laquelle on indique le nombre de ramifications qu'il y a à ce niveau pour chacune des ramifications du niveau précédent. Le nombre de ramifications terminales qu'il y a alors au dernier niveau est donné par le produit de ces nombres. » (Bourbonnais, 2008, p. 342)

[12] « Si une situation S_1 peut se réaliser de n_1 manières différentes et que, pour chacune de ces manières une deuxième situation S_2 peut se réaliser de n_2 manières différentes, alors les deux situations S_1 et S_2 peuvent se réaliser en même temps de $n_1 \times n_2$ manières différentes. » (Bourbonnais, 2008, p. 343)

méthode des cases sont présentées à la section théorique 8.9. La tâche 42 est issue de la première section d'exercices portant sur ces notions.

- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* La tâche se rapporte à l'analyse combinatoire.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est fermé puisque sa valeur de vérité est connue. L'énoncé ne fournit aucun indice.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Il s'agit du premier problème de démonstration se déroulant dans le contexte de l'analyse combinatoire.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme occupe très peu de place dans cette démonstration. Il est important de mentionner que, selon nous, plusieurs étudiants rédigeront une démonstration intuitive et informelle. Nous croyons en effet que l'utilisation du principe fondamental de l'analyse combinatoire ne sera explicitée que par un nombre limité d'étudiants. Tous y auront recours, mais sans doute peu penseront de l'inclure concrètement et explicitement dans la rédaction de leur démonstration.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure déductive de cette démonstration est simple.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est mobilisable. Cette tâche revient en fait à un calcul combinatoire similaire à plusieurs autres qui ont été proposés antérieurement à l'étudiant. Celui-ci doit cependant appliquer ces connaissances en analyse combinatoire au domaine de la logique, ce qui peut présenter un défi pour certains étudiants. En plus du contexte d'application qui est nouveau pour l'étudiant, le niveau de généralité et d'abstraction de cette tâche est plus élevé.

- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Peu d'arguments sont impliqués dans cette démonstration : la définition d'une table de vérité et le principe fondamental de l'analyse combinatoire.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Aucun changement de point de vue n'est requis dans cette tâche. Cependant, certains étudiants auront sans doute recours à un arbre de possibilités ou à un casier pour représenter la situation qui leur est proposée, ce qui constitue un changement de registre.

Tâche 43 : Exercice 8.14.14 (exercice tiré du manuel, p. 350)

Démontrer que $A_r^n = nA_{r-1}^{n-1}$[13].

Réponse attendue à la tâche 43

Cette solution a été élaborée par l'auteur de la présente recherche.

nA_{r-1}^{n-1}	$= n\left(\dfrac{(n-1)!}{(n-1-(r-1))!}\right)$	(par définition de A_{r-1}^{n-1})
	$= n\left(\dfrac{(n-1)!}{(n-1-r+1)!}\right)$	(par distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{N}$)
	$= n\left(\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!}\right)$	(par simplification dans $\mathbb{N}$)
	$= \dfrac{n!}{(n-r)!}$	(par définition de la factorielle)
	$= A_r^n$	(par définition de A_r^n)

[13] La notation A_r^n représente un arrangement de n objets pris r à la fois. Un tel arrangement est « une disposition ordonnée sans répétition de r éléments choisis parmi n éléments distincts. » (Bourbonnais, 2008, p. 344). On définit A_r^n de la façon suivante : $A_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Analyse de la tâche 43

Cette tâche repose sur l'utilisation de la définition de la notation A_{r-1}^{n-1} qui a nouvellement été présentée à l'étudiant. Le fait de ré-exprimer cette notation par l'expression factorielle $\frac{(n-1)!}{(n-1-(r-1))!}$ est un changement de point de vue dévoilant la voie qui doit être empruntée pour mener à bien la tâche. Une fois ce changement de point de vue opéré, l'étudiant n'a plus qu'à faire intervenir un argument de nature algébrique, une propriété des opérations (distributivité) et la définition de la factorielle pour arriver à la conclusion souhaitée. Le raisonnement déductif qui doit être mis en jeu est alors pris en charge par le calcul et la structure déductive de la démonstration se résume à une courte chaîne d'inférences.

Le formalisme occupe une place non négligeable dans cette tâche. L'étudiant doit connaître le symbolisme inhérent à la notion d'arrangement, A_r^n, et être capable de le manipuler adéquatement. Bien que cette tâche permette à l'étudiant de se familiariser avec ce symbolisme, elle présente selon nous un risque non négligeable. En effet, nous croyons que plusieurs étudiants démontreront l'égalité donnée sans même tenter d'en comprendre le sens. Ils réduiront ainsi la démonstration à un ensemble de manipulations symboliques visant à obtenir l'expression escomptée, soit A_r^n. Une telle démarche permet un travail d'ordre symbolique et syntaxique, mais ne constitue pas, à notre avis, un travail complexe sur le plan déductif.

Tâche 44 : Exercice 8.19.13 (exercice tiré du manuel, p. 364)

a) Démontrer que $\sum_{r=0}^{n} C_r^n = 2^n$.
b) Démontrer que si la cardinalité d'un ensemble E est n, alors celle de $P(E)$ (l'ensemble des parties de E) est 2^n.

Réponse attendue à la tâche 44

a) Cette solution est issue d'un corrigé rédigé par l'enseignante.

Il suffit d'utiliser le binôme de Newton[14] et de prendre $(a + b)^n$ avec $a = 1$ et $b = 1$.

$$
\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n && \text{(poser } a = 1,\ b = 1 \text{ dans le binôme de Newton)}\\
&= \textstyle\sum_{r=0}^{n} C_r^n\,(1)^{n-r}(1)^r && \text{(formule du binôme de Newton)}\\
&= \textstyle\sum_{r=0}^{n} C_r^n && \text{(algèbre dans } \mathbb{R}\text{)}
\end{aligned}
$$

b) Cette solution est issue du corrigé du manuel (p. 366).

Pour former un sous-ensemble, on doit choisir un certain nombre d'objets, disons r, parmi les n objets disponibles. Puisque, par définition, les éléments d'un ensemble sont distincts et que l'ordre dans lequel ils sont placés dans l'ensemble n'a pas d'importance, ont peut donc former C_r^n sous-ensembles de r éléments. Puisque $P(E)$ est constitué des sous-ensembles de cardinalité 0, 1, 2, ...n, alors le nombre de sous-ensembles qu'il y a dans $P(E)$ est $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n$ et nous avons démontré en a) que la valeur de cette expression est 2^n.

Analyse de la tâche 44

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement?* Tandis que la démonstration requise à la sous-question a) repose sur la connaissance de la formule du binôme de Newton, la sous-question b) est centrée sur la compréhension de l'expression $P(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des parties de E, et sur la notion de cardinalité.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* La formule du binôme de Newton est une nouveauté pour l'étudiant. En effet, la section d'exercices d'où est issue la présente tâche est la première portant sur cette notion. En ce qui concerne la cardinalité d'un ensemble et l'ensemble des parties de E, noté $P(E)$, ces notions ont été traitées à l'étape 1.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent à l'analyse combinatoire et à la théorie des ensembles.

---

14 « Formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n\, a^{n-r} b^r$. » (Bourbonnais, 2008, p. 361)

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte deux sous-questions qui sont liées. En effet, l'expression démontrée en a) doit intervenir pour mener à terme la démonstration demandée à la sous-question b).
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est fermé, car sa valeur de vérité est connue. Aucun indice n'est fourni.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Il s'agit d'un nouveau type de problèmes. Les combinaisons et le binôme de Newton interviennent pour la première fois dans un contexte de démonstration. De plus, le niveau d'abstraction requis dans ce problème est supérieur à celui des autres tâches portant sur ces notions. En effet, les autres tâches demandent, par exemple, de « développer $(2x-y)^4$ » (Bourbonnais, 2008, p. 365) à l'aide de la formule du binôme.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme occupe une place de choix dans cette tâche. Le symbolisme inhérent aux combinaisons et le symbole de sommation doivent être pris en considération par l'étudiant. Pour résoudre la sous-question a), l'étudiant doit analyser l'expression qui y est donnée pour découvrir qu'elle présente des similarités avec la formule du binôme de Newton. C'est de cette observation que découle l'ensemble de la démonstration. À la sous-question b), l'étudiant doit exprimer la cardinalité de l'ensemble des parties de E à l'aide d'une somme de combinaisons ce qui constitue un élément de difficulté non négligeable. Cette réécriture, qui est nécessaire pour établir le lien entre les sous-questions a) et b), n'est pas indiquée dans l'énoncé de la tâche et l'étudiant doit donc y avoir recours par lui-même.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de chacune des sous-démonstrations est simple.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Cette tâche nécessite des mises en fonctionnement des connaissances de niveau disponible. Dans un premier temps, l'étudiant doit analyser les situations qui lui sont proposées en a) et b). En a), l'expression donnée doit être étudiée et le recours au binôme de Newton doit en être déduit. En ce qui concerne la sous-question b), l'énoncé présenté en langage naturel doit être ré-exprimé en langage mathématique pour ensuite pouvoir utiliser l'énoncé démontré en a). Aucune indication ne vient orienter le travail qu'il doit accomplir.

- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est à développer dans chacune des deux démonstrations. La démonstration de la sous-question a) repose sur la formule du binôme de Newton et sur des arguments de nature algébrique. En ce qui concerne la démonstration b), elle fait intervenir la définition de l'ensemble des parties d'un ensemble E de cardinalité n, i.e. $P(E)$, la définition d'un sous-ensemble, la définition et la représentation symbolique d'une combinaison ainsi que l'expression démontrée en a).
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Selon nous, les changements de point de vue requis constituent le véritable défi auquel sont confrontés les étudiants. La démonstration de la sous-question a) demande de démasquer le binôme de Newton qui se cache derrière l'expression 2^n. Ce binôme doit être construit par l'étudiant à partir de l'information contenue dans l'expression 2^n et ce, sans qu'aucune indication ne lui soit fournie. La décomposition qui doit être faite du nombre 2, soit $2 = 1 + 1$, est loin d'être évidente. L'étudiant ne doit pas considérer comme immuable les différentes composantes de l'expression, mais plutôt être capable de les modifier tout en préservant l'égalité. Nous pensons que certains étudiants ne verront pas le binôme de Newton « caché », ce qui auraient pour effet de bloquer la rédaction de la démonstration. Une fois le binôme construit, le reste de la démonstration découle assez facilement. La résolution de la sous-question b) nécessite elle aussi un changement de point de vue important. Effectivement, la cardinalité de ensemble des parties de E, $P(E)$, doit être ré-exprimée à l'aide d'une somme de combinaisons. Le recours aux notions de sommation et de combinaison découle de la prise en compte des définitions d'un sous-ensemble, de la cardinalité d'un ensemble et de l'ensemble des parties d'un ensemble. L'étudiant doit puiser dans ses connaissances

en analyse combinatoire pour mathématiser les informations en théorie des ensembles qui lui sont présentées dans l'énoncé de la tâche, ce qui n'est pas une mince affaire. Les changements de point de vue dont il est question dans cette tâche correspondent à des *changements de points de vue réalisés par la modification des objets présentés dans l'énoncé de la tâche.*

- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* En a), les objets a et b composant le binôme de Newton doivent être introduits. À la sous-question b), une notation doit être introduite. Effectivement, la cardinalité de l'ensemble des parties de E doit être exprimée par une somme de combinaisons où chacune des combinaisons représente le nombre de sous-ensembles d'une cardinalité déterminée qu'il est possible de créer dans l'ensemble E.

Tâche 45 : Exercice 8.19.13 (exercice tiré du manuel, p. 364)

Démontrer que $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r C_r^n = 0$.

Réponse attendue à la tâche 45

Cette solution a été rédigée par l'auteur de cette recherche et est inspirée de l'indice[15] fourni dans le corrigé du manuel ainsi que de la démonstration présentée à la sous-question a) de la tâche précédente.

Il suffit d'utiliser le binôme de Newton et de prendre $(a + b)^n$ avec $a = 1$ et $b = -1$.

0	$= (1-1)^n$	(poser $a = 1$, $b = -1$ dans le binôme de Newton)
	$= \sum_{r=0}^{n} C_r^n (1)^{n-r}(-1)^r$	(formule du binôme de Newton)
	$= \sum_{r=0}^{n} C_r^n (-1)^r$	(algèbre dans $\mathbb{R}$)

[15] « Aide : Il suffit d'utiliser la formule du binôme en posant $a = 1$ et $b = -1$. » (Bourbonnais, 2008, p. 366)

Analyse de la tâche 45

La tâche 45 étant pratiquement identique à la tâche 44 a), nous référons le lecteur à l'analyse qui a été faite de cette tâche. En effet, les démonstrations requises dans ces deux tâches nécessitent la construction d'un binôme de Newton à partir des expressions données dans les énoncés.

Nous tenons cependant à mettre en lumière un élément qui est présent dans cette tâche, mais qui ne l'était pas dans la tâche précédente. Lors de la réécriture du 0 en un binôme de Newton, l'étudiant doit, en plus d'avoir à introduire les éléments a et b et de devoir déterminer leur valeur respective, également introduire l'exposant n. Cet ajout qui doit être fait par l'étudiant ne constitue pas, selon nous, une difficulté supplémentaire. En effet, après avoir résolu la tâche précédente, l'étudiant connaît la marche à suivre pour résoudre une telle tâche et y aura sans doute spontanément recours. Les modifications qu'il doit apporter aux raisonnements élaborés à la tâche 44 sont peu nombreuses et élémentaires. Elles reposent en fait sur les valeurs qui doivent être attribuées à a et b et sur les manipulations algébriques qui en découlent. En plus des ressemblances que ce problème entretient avec la tâche précédente, nous sommes d'avis que la présence de la composante $(-1)^r$ dans l'expression donnée dans l'énoncé renforcera l'intuition de l'étudiant quant à l'utilisation de la formule du binôme de Newton pour construire la démonstration

Tâche 46 : Examen 2, question 4 (tirée de l'examen de l'étape 2 qui a été rédigé par l'enseignante)

Sachant que $P(\Omega) = 1$ (axiome 2), $\forall A \subseteq B, P(A) \leq P(B)$ (propriété 1) et $\forall A, B \subseteq \Omega$, si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (axiome 3)

a) démontrer $\forall A, B \subseteq \Omega$, $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.
b) démontrer que $P(A) \leq 1$.

Réponse attendue à la tâche 46

Cette solution est tirée de la section théorique 9.7 du manuel (p.383). Seules certaines justifications ont été modifiées pour s'adapter à la numérotation des propriétés et des axiomes donnée dans l'énoncé de la tâche.

a)

$$\begin{aligned} A &= (A\backslash B) \cup (A \cap B) && \text{(théorie des ensembles)} \\ P(A) &= P(A\backslash B) + P(A \cap B) && \text{(selon axiome 3 car } (A\backslash B) \cap (A \cap B) = \emptyset) \\ \text{d'où } P(A\backslash B) &= P(A) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} A &\subseteq \Omega && \text{(par hypothèse)} \\ P(A) &\leq P(\Omega) && \text{(propriété 1)} \\ P(A) &\leq 1 && \text{(axiome 2)} \end{aligned}$$

Analyse attendue à la tâche 46

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* Les deux démonstrations qui sont demandées font intervenir la théorie des ensembles ainsi que les axiomes et propriétés concernant les probabilités.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* La théorie des ensembles a été traitée à l'étape 1 du cours. Les probabilités, quant à elles, ont été abordées à l'étape 2 et plusieurs tâches portant sur ce sujet ont été proposées. Il ne s'agit donc plus de nouvelles notions, d'autant plus que les démonstrations qui sont demandées ici ont été explicitées dans la section théorique 9.7 du manuel.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Cette tâche se rapporte aux probabilités.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte deux sous-questions indépendantes.
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* On connaît la valeur de vérité de l'énoncé, celui-ci est donc fermé. L'énoncé de la tâche comporte trois affirmations susceptibles d'intervenir dans l'une ou l'autre des démonstrations à construire. Ces affirmations orientent le travail de l'étudiant qui pourra s'en inspirer pour construire les démonstrations demandées. De surcroît, les démonstrations attendues ont déjà été présentées dans la section théorique 9.7 du manuel.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Mis à part le raisonnement déductif, aucun autre type de raisonnements n'est à mettre en jeu. Avant de poursuivre notre analyse, nous tenons à soulever un doute quant au raisonnement déductif qui sera effectivement déployé par l'étudiant. Selon nous, un étudiant ayant lu, étudié, voir mémorisé les démonstrations proposées dans le manuel des deux énoncés fera davantage appel à sa mémoire qu'à la mise en œuvre d'un raisonnement déductif complet. Il pourrait tenter de se souvenir des démonstrations qui lui étaient présentées plutôt que d'essayer de les construire par lui-même.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* L'étudiant doit connaître le symbolisme inhérent à la théorie des ensembles et aux probabilités. Les passages entre la théorie des ensembles et les probabilités (dans les démonstrations a) et b), il s'agit du passage de la première ligne à la seconde) peuvent être problématiques pour certains étudiants. En effet, la traduction, en a), du symbole d'union utilisé dans la théorie des ensembles par le symbole d'addition en probabilité et la traduction, en b), du symbole d'inclusion par le symbole « plus petit ou égal » en probabilité causera sans doute des difficultés. Pourquoi changer de symboles?
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?* Il est sous-entendu à la sous-question b) que $A \subseteq \Omega$.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de chacune des démonstrations est simple et linéaire.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances **visé** par la tâche est mobilisable. L'énoncé de la tâche fournit un mini système axiomatique à l'étudiant qui devra s'y référer et en combiner les différents éléments pour construire les démonstrations attendues. Cependant, puisque les démonstrations à élaborer ont déjà été présentées dans une section théorique du manuel, les mises en fonctionnement des connaissances qui sont suscitées par la tâche sont plutôt de niveau technique. Du moins, c'est le cas pour les étudiants qui ont pris connaissance des démonstrations de ces énoncés dans le recueil du cours.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* En plus des axiomes et de la propriété mentionnés dans l'énoncé de la tâche, un argument de nature algébrique et la représentation d'un ensemble par l'union de deux sous-ensembles disjoints sont à invoquer. Tel qu'il a été mentionné précédemment, plusieurs des arguments à développer sont donnés aux étudiants qui doivent les combiner pour mener la démonstration à terme.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* La démonstration requise à la sous-question a) nécessite un changement de point de vue. En effet, l'étudiant doit délaisser les probabilités pour s'intéresser à la théorie des ensembles. Il doit exprimer l'ensemble A comme l'union de deux sous-ensembles disjoints, $(A\backslash B)$ et $(A \cap B)$. Cette expression doit être introduite par l'étudiant et aucune indication ne lui est fournie pour l'aider. L'apprenant doit s'inspirer des éléments présents dans la conclusion de la démonstration pour construire l'expression de départ mettant en jeu des éléments de la théorie des ensembles. Ce changement de point de vue correspond à notre première sous-catégorie : *changement de point de vue réalisé par l'introduction d'un nouvel objet.* En ce qui concerne la sous-question b), les probabilités doivent également être momentanément mises de côté par l'étudiant pour faire place à la théorie des ensembles. L'expression en théorie des ensembles qu'il doit considérer est en fait une hypothèse sous-entendue dans l'énoncé de la tâche.

- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* Les expressions en théorie des ensembles doivent être introduites par l'étudiant.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* Des quantificateurs universels exprimés symboliquement doivent être pris en considération dans l'énoncé de la tâche.

5.3 Étape 3 : Preuve par induction et les suites

5.3.1 Objectifs spécifiques de l'étape 3

Le premier thème abordé à l'étape 3 est la preuve par induction. Après les séances d'enseignement prévues sur ce sujet, il est attendu de l'étudiant qu'il connaisse le principe de la preuve par induction en plus d'être en mesure d'en définir les composantes : la base, le pas d'induction et l'hypothèse d'induction. L'étude d'un tel sujet nécessite inévitablement la construction de démonstrations. D'ailleurs, le plan de cours mentionne explicitement qu'un des objectifs est d'être en mesure de « démontrer une forme propositionnelle à l'aide de la preuve par induction » (plan de cours, hiver 2008, p. 12).

Les suites sont le second thème traité à l'étape 3. En plus de présenter aux étudiants les concepts fondamentaux liés à l'étude des suites (suite, terme d'une suite, rang, terme général, relation de récurrence et condition(s) initiale(s)), le cours cible l'étude de suites particulières : les progressions arithmétiques et les progressions géométriques. Ces apprentissages devront être mis à contribution lors de la résolution de plusieurs problèmes tels que trouver le terme général ou la relation de récurrence d'une suite ou donner les p premiers termes d'une suite lorsque son terme général ou la relation de récurrence est connu. L'étape 3 se poursuit par l'étude des sommes partielles débouchant ultimement sur une brève présentation de la notion de séries. L'activité de démonstration est présente dans cette portion de l'étape, puisqu'il est attendu de l'étudiant qu'il démontre, à l'aide du principe d'induction, la formule donnant la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique et d'une progression géométrique. Pour formaliser les apprentissages qui ont été faits sur les sommes partielles et les séries, l'étape 3 se conclut par l'introduction officielle du symbole de sommation et de ses composantes : indice de la sommation, bornes inférieure et supérieure, domaine et terme général de la sommation. L'étudiant doit apprendre à manipuler adéquatement ce symbole pour résoudre des problèmes tels qu' « écrire une somme à l'aide du symbole de sommation » ou « modifier le domaine de l'indice de sommation sans changer la valeur de la somme » (Plan de cours, hiver 2008, p. 13). Les propriétés des sommations, ainsi que leurs démonstrations, sont également présentées.

L'étape 3 de *Mathématiques pour les sciences* possède plusieurs objectifs d'apprentissage liés à l'activité de démonstration et au formalisme. Pour mener à termes ces objectifs, plusieurs tâches sont proposées.

5.3.2 Tâches proposées à l'étape 3

Pour atteindre les objectifs ciblés à l'étape 3, 87 tâches sont proposées aux étudiants. Parmi celles-ci, 11 font intervenir l'activité de démonstration. L'analyse de chacune d'elles est présentée ci-dessous.

Tâche 47 : Exercice 4.20.1 (exercice tiré du manuel, p. 125)

Démontrer par induction les propositions suivantes (on supposera dans tous les problèmes de cette section [4.20] que $n \in \mathbb{N}$ en tenant compte, le cas échant, des restrictions supplémentaires indiquées.) Propositions comportant des égalités avec des sommes.

a) $P(n) : 2 + 12 + 22 + \cdots + (10n - 8) = n(5n - 3), n \geq 1$

b) $P(n) : 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^n = \frac{3(3^n - 1)}{2}, n \geq 1$

c) $P(n) : 5 + 13 + 21 + \cdots + (8n - 3) = 4n^2 + n, n \geq 1$

d) $P(n) : 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1), n \geq 1$

e) $P(n) : 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = 2n^2 - n, n \geq 1$

f) $P(n) : 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{(3^n - 1)}{2}, n \geq 1$

g) $P(n) : \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}, n \geq 1$

h) $P(n) : 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = 2 + (n - 1) \cdot 2^{n+1}, n \geq 1$

Réponse attendue à la tâche 47

Puisque les démonstrations attendues à la tâche 47 sont très similaires, nous avons décidé d'en expliciter une seule, soit la démonstration attendue en b). Celle-ci nécessite, selon nous, des manipulations algébriques un peu plus complexes que celles requises par ses consœurs.

La réponse qui est présentée ci-dessous est tirée du solutionnaire du manuel (p. 126-127).

b) **Démonstration** *(preuve par induction)*

- *Démonstration de la base*

  On doit vérifier que la proposition est vraie pour le premier élément du référentiel (ici $n = 1$)
  - le membre de gauche de $P(1)$ est : 3
  - le membre de droite de $P(1)$ est : $\frac{3\cdot(3^1-1)}{2} = 3$

  Puisque les deux membres sont égaux (tous les deux valent 3), alors $P(1)$ est vrai.

  $\square$ *(fin de la démo. de la base)*

- *Démonstration du pas*

  On doit maintenant démontrer que si la proposition est vraie pour une certaine valeur

$(n = k, k \geq 1)$ alors cela implique qu'elle est vraie aussi pour la valeur suivante $(n = k + 1)$.

$$P(k): \quad 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^k = \frac{3\cdot(3^k-1)}{2}, \quad k \geq 1 \quad [\text{H.I.}]$$

$$P(k+1): 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{k+1} = \frac{3\cdot(3^{k+1}-1)}{2} \quad [\text{Concl.}]$$

Démonstration *(preuve directe de l'implication* $P(k) \Rightarrow P(k+1)$*)*

En partant avec le membre de gauche de l'égalité que l'on doit déduire (à partir de l'hypothèse d'induction), on obtient la suite d'égalités :

$$
\begin{array}{lll}
G & = 3+9+27+\cdots+3^{k+1} & \text{(le membre de gauche de } P(k+1)\text{)} \\
 & = 3+9+27+\cdots+3^{k}+3^{k+1} & \text{(on fait « réssortir » l'avant-dernier terme)} \\
 & = \frac{3\cdot(3^{k}-1)}{2}+3^{k+1} & \text{(par H.I.)} \\
 & = \frac{3\cdot(3^{k}-1)+2\cdot 3^{k+1}}{2} & \text{(dénominateur commun)} \\
 & = \frac{3^{k+1}-3+2\cdot 3^{k+1}}{2} & \text{(distributivité)} \\
 & = \frac{3\cdot 3^{k+1}-3}{2} & \text{(distributivité)} \\
 & = \frac{3\cdot(3^{k+1}-1)}{2} & \text{(distributivité)}
\end{array}
$$

Ainsi, on a montré que si la proposition est vraie pour une certaine valeur k de n, alors elle est vraie pour la valeur suivante $k+1$.

□ *(fin de la démo. du pas)*

- Donc, puisque la proposition est vraie pour $n = 1$ et que lorsqu'elle est vraie pour une certaine valeur quelconque de n supérieure ou égale à 1, alors elle est vraie pour la valeur suivante, on peut conclure qu'elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$

■

Analyse de la tâche 47 (plus précisément la sous-question b))

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ?* L'étudiant doit manipuler une somme et utiliser adéquatement certaines propriétés des opérations dans les naturels. Une connaissance de la méthode de preuve par induction est requise.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* La méthode de preuve par induction est une nouveauté pour l'étudiant. Il s'agit de la première tâche portant sur ce sujet. Les propriétés des opérations sont connues de l'étudiant depuis le niveau secondaire et ont déjà été traitées dans d'autres tâches.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* La tâche se rapporte à la théorie élémentaire des nombres.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte huit sous-questions indépendantes. Celles-ci requièrent cependant la construction de démonstrations similaires.
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'étudiant sait que les énoncés à démontrer sont vrais, ils sont donc fermés.

Un indice est fourni dans l'énoncé de la tâche. En effet, il est mentionné que l'étudiant doit mettre en œuvre un raisonnement par récurrence pour démontrer les énoncés proposés. De plus, une démonstration similaire[16] est présentée dans la section théorique 4.19 du manuel proposant ainsi une marche à suivre à l'étudiant. Celui-ci n'a plus qu'à adapter cette méthode aux expressions de la tâche 47.

- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement par récurrence est à mettre en jeu.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Plusieurs éléments de formalisme sont à prendre en considération dans cette tâche. Premièrement, la forme que revêt une démonstration par récurrence constitue un élément de formalisme important qui peut causer des difficultés à certains étudiants. La subdivision de la démonstration en deux sous-démonstrations, la démonstration de la base et la démonstration du pas d'induction, doit être maîtrisée. L'étudiant doit idéalement comprendre le rôle de chacune de ces sous-démonstrations. Bien qu'une telle compréhension soit souhaitée et attendue dans le cadre du cours, nous sommes d'avis qu'il est possible qu'un étudiant puisse mener à terme une démonstration par récurrence en appliquant systématiquement la recette qui lui a été présentée sans même en comprendre les composantes. Il est selon nous primordial de ne pas négliger ce point puisque *Mathématiques pour les sciences* accorde une grande importance à la forme que doit prendre une démonstration par récurrence. Une structure est imposée par le manuel et l'étudiant doit s'y conformer. L'imposition d'un tel canevas peut selon nous distancer l'étudiant du sens de la démonstration par récurrence en l'obligeant à se concentrer davantage sur des détails d'ordre rédactionnel. Deuxièmement, ce type de tâches nécessite une gestion de plusieurs symboles littéraux ayant divers rôles. En effet, en plus de la variable n qui est présente dans l'expression à démontrer, l'étudiant doit introduire une notation, k, pour représenter une valeur fixée de n. L'élément k doit être introduit pour poser l'hypothèse d'induction nécessaire à la construction de la démonstration du pas. Il

---

[16] « Exemple 4.19.1 : Démontrons que la forme propositionnelle $P(n)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ si $P(n): 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. » (Bourbonnais, 2008, p. 119)

est important que l'étudiant comprenne que le passage de *n* à *k* n'est pas un simple changement de variables. L'élément *k* est bel et bien une valeur quelconque qui a été fixée. Le caractère générique de l'élément *k* est le troisième élément de formalisme à prendre en considération dans cette tâche. Il correspond d'ailleurs à un élément que nous avions retenu dans notre analyse du manuel *NYB*, soit *Recours à des représentants génériques*. La démonstration du pas d'induction établie que si la proposition *P* est vraie pour une valeur *k* quelconque, alors elle est vraie pour la valeur suivante, *k*+1. Puisque l'élément *k* peut être n'importe quelle valeur entière supérieure ou égale à 1, l'étudiant doit comprendre que la démonstration du pas d'induction, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, est valable pour tout *k*. En combinant la démonstration du pas, qui est faite à partir d'un élément *k* générique, à la démonstration de la base, il est possible de déduire que l'énoncé est vrai pour toutes les valeurs de *n* supérieures ou égales à 1. Le caractère générique de *k* est essentiel pour pouvoir généraliser à l'ensemble des nombres naturels les déductions faites à partir d'un élément *k* fixé.

- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?* La forme de la démonstration par récurrence ainsi que le vocabulaire inhérent à ce type de démonstrations (la base, le pas, l'hypothèse d'induction) sont des nouveautés.
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?* Un quantificateur universel est caché dans l'énoncé de la tâche. Effectivement, l'étudiant doit comprendre que la proposition *P* est vraie **pour toutes** les valeurs entières de *n* supérieures ou égales à 1.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure déductive de la démonstration a la forme d'un arbre à deux branches. L'une des branches représente la démonstration de la base tandis que l'autre celle du pas d'induction.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est technique. Le raisonnement à employer dans cette démonstration est donné. De plus, une démonstration similaire a déjà été présentée dévoilant la voie à emprunter pour résoudre ce type de problèmes.

- *Y a-t-il lieu d'introduire des étapes?* Deux étapes sont à introduire puisqu'on doit démontrer que la proposition P est vraie pour la première valeur du référentiel, soit $n = 1$, et on doit démontrer que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Une pluralité restreinte d'arguments est à développer : le développement d'une somme, la distributivité de la multiplication sur l'addition, l'associativité de l'addition, des arguments de nature algébrique ainsi que l'hypothèse d'induction $\left(P(k) : 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^k = \frac{3\cdot(3^k-1)}{2}\right)$.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de point de vue est nécessité par la méthode de preuve utilisée. Plutôt que de démontrer directement l'expression donnée, l'étudiant doit démontrer la validité de cet énoncé pour une valeur précise, $n = 1$, et démontrer que si la proposition est vraie pour une valeur entière k supérieure ou égale à 1, alors elle est vraie pour la valeur suivante : $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. La validité de l'énoncé est par la suite déduite de la combinaison de ces deux démonstrations.
- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* Les éléments k et k+1 doivent être introduits.
- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* L'étudiant doit comprendre que la démonstration du pas de récurrence est valable **pour tout** k.

Tâche 48 : Exercice 4.20.2 (exercice tiré du manuel, p. 125)

Démontrer par induction les propositions suivantes (on supposera dans tous les problèmes de cette section [4.20] que $n \in \mathbb{N}$ en tenant compte, le cas échant, des restrictions supplémentaires indiquées.)

Propositions comportant des égalités avec des produits

a) $P(n) : \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}, n \geq 2$

b) $P(n) : \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, n \geq 2$

Réponse attendue à la tâche 48

Les démonstrations attendues aux sous-questions a) et b) requérant la mise en œuvre de raisonnements similaires, nous avons choisi de présenter une seule solution, soit la a).

Cette solution est issue du corrigé du manuel (p. 132).

a) **Démonstration** *(preuve par induction)*

- *Démonstration de la base*

  On doit vérifier que la proposition est vraie pour le premier élément du référentiel (ici $n = 2$)
  - le membre de gauche de $P(2)$ est : $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
  - le membre de droite de $P(2)$ est : $\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

  Puisque les deux membres sont égaux (tous les deux valent $\frac{3}{2}$), alors $P(2)$ est vraie.

  □ *(fin de la démo. de la base)*

- *Démonstration du pas*

  On doit maintenant démontrer que si la proposition est vraie pour une certaine valeur ($n = k, k \geq 2$) alors cela implique qu'elle est vraie aussi pour la valeur suivante ($n = k+1$).

$$P(k) : \quad (1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{4})\dots(1+\tfrac{1}{k}) = \tfrac{k+1}{2}, \quad k \geq 2 \quad [\text{H.I.}]$$

$$P(k+1) : (1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{4})\dots(1+\tfrac{1}{k+1}) = \tfrac{k+2}{2} \quad [\text{Concl.}]$$

Démonstration (*preuve directe de l'implication* $P(k) \Rightarrow P(k+1)$)

En partant avec le membre de gauche de l'égalité que l'on doit déduire (à partir de l'hypothèse d'induction), on obtient la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
G &= (1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})\dots(1+\tfrac{1}{k+1}) && \text{(le membre de gauche de } P(k+1)\text{)}\\
&= (1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})\dots(1+\tfrac{1}{k})(1+\tfrac{1}{k+1}) && \text{(on fait « ressortir » l'avant-dernier terme)}\\
&= \tfrac{k+1}{2}(1+\tfrac{1}{k+1}) && \text{(par H.I.)}\\
&= \tfrac{k+1}{2} \cdot \tfrac{k+2}{k+1} && \text{(dénominateur commun)}\\
&= \tfrac{k+2}{2} && \text{(simplification)}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que <u>si</u> la proposition est vraie pour une certaine valeur k de n, <u>alors</u> elle est vraie pour la valeur suivante $k+1$.

$\square$ *(fin de la démo. du pas)*

- Donc, puisque la proposition est vraie pour $n = 2$ et que lorsqu'elle est vraie pour une certaine valeur quelconque de n supérieure ou égale à 2, alors elle est vraie pour la valeur suivante, on peut conclure qu'elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$

$\blacksquare$

Analyse de la tâche 48

La tâche 48 présente plusieurs similarités avec la tâche 47. En plus de mettre en jeu un raisonnement par récurrence, ces deux tâches reposent sur le même argument-clé, soit le développement de la somme pour la tâche 47 et le développement du produit pour sa consœur 48. Une fois ce développement réalisé, l'étudiant n'a plus qu'à faire intervenir l'hypothèse d'induction et quelques propriétés des opérations et manipulations algébriques pour déduire la validité de la proposition $P\ (k+1)$ à partir de celle de $P(k)$. Bien que les propriétés et les manipulations à utiliser diffèrent d'une tâche à l'autre, nous croyons que ce point n'est nullement suffisant pour distinguer complètement ces deux tâches. Nous référons donc le lecteur à l'analyse qui a été réalisée de la tâche 47. Les difficultés liées à l'activité de démonstration et le formalisme impliqué dans ce type de tâches y sont rigoureusement traités.

Tâche 49 : Exercice 4.20.3 (exercice tiré du manuel, p. 125)

Démontrer par induction les propositions suivantes (on supposera dans tous les problèmes de cette section [4.20] que $n \in \mathbb{N}$ en tenant compte, le cas échant, des restrictions supplémentaires indiquées.)

Propositions comportant des inégalités.

a) $P(n) : 2^n \geq (n+1)^2, n \geq 6$
b) $P(n) : (1+x)^n \geq 1 + x^n\ avec\ x\ \in \mathbb{R}_{+,}\ n \geq 1$
c) $P(n) : 3^n \geq 1 + 2 \cdot n, n \geq 1$
d) $P(n) : 2^n \geq 2 \cdot n, n \geq 1$

Réponse attendue à la tâche 49

Tout comme pour les deux tâches précédentes, nous avons décidé de ne pas présenter les quatre démonstrations attendues. La démonstration de la sous-question b) a été retenue, car elle comporte une seconde variable, *x*, ce qui complexifie la tâche.

Cette solution est tirée du corrigé du manuel (pp. 135-136).

b) **Démonstration** *(preuve par induction)*

- *Démonstration de la base*

  On doit vérifier que la proposition est vraie pour le premier élément du référentiel (ici $n = 1$)

  ◦ le membre de gauche de $P(1)$ est : $(1+x)^1 = 1+x$

  ◦ le membre de droite de $P(1)$ est : $1 + x^1 = 1 + x$

  Puisque $(1+x)^1 \geq 1 + x^1$, $P(1)$ est vraie.

  □ *(fin de la démo. de la base)*

- *Démonstration du pas*

  On doit maintenant démontrer que si la proposition est vraie pour une certaine valeur ($n = k, k \geq 1$) alors cela implique qu'elle est vraie aussi pour la valeur suivante ($n = k+1$).

  $$P(k): \qquad (1+x)^k \geq 1 + x^k \qquad \text{[H.I.]}$$

  $$P(k+1): \quad (1+x)^{k+1} \geq 1 + x^{k+1} \quad \text{[Concl.]}$$

  Démonstration (*preuve directe de l'implication* $P(k) \Rightarrow P(k+1)$)

  En partant avec le membre de gauche de l'inégalité que l'on doit déduire (à partir de l'hypothèse d'induction), on obtient :

  $$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)\cdot(1+x)^k && \text{(propriété des exposants)}\\ &\geq (1+x)\cdot(1+x^k) && \text{(par H.I. et puisque } 1+x>0)\\ &= 1+x+x^k+x^{k+1} && \text{(distributivité dans } \mathbb{R})\\ &\geq 1+x^{k+1} && \text{(car } x \geq 0 \text{ et } x^k \geq 0)\end{aligned}$$

  On a donc montré que <u>si</u> $(1+x)^k \geq 1 + x^k$, <u>alors</u> $(1+x)^{k+1} \geq 1 + x^{k+1}$

  □ *(fin de la démo. du pas)*

- Donc, puisque la proposition est vraie pour $n = 1$ et que lorsqu'elle est vraie pour une certaine valeur quelconque de n supérieure ou égale à 1, alors elle est vraie pour la valeur suivante, on peut conclure qu'elle est vraie pour les entiers $n \geq 1$.

■

Analyse de la tâche 49

Les démonstrations qui sont attendues à la tâche 49 nécessitent une preuve par récurrence. Celle-ci a précédemment fait l'objet d'une analyse détaillée (voir tâche 47). Plutôt que de représenter ici la totalité de notre grille, dont les réponses à plusieurs questions correspondent mot pour mot à des points soulevés antérieurement, nous allons uniquement présenter les difficultés et éléments de formalisme propres à cette tâche. Les difficultés inhérentes à la méthode de preuve utilisée peuvent être consultées à la tâche 47.

Tout d'abord, mentionnons que chacune des sous-questions de la tâche 49 est fermée, car l'étudiant en connaît la valeur de vérité. Tout comme c'était le cas pour les deux tâches précédentes, l'énoncé mentionne la méthode de preuve qui doit être utilisée. De plus, une démonstration similaire[17] à celles requises pour cette tâche est présentée dans la section théorique 4.19 du manuel. Les arguments-clés de ce type de démonstrations étant dévoilés, l'étudiant n'a plus qu'à s'en inspirer pour construire les démonstrations souhaitées, ce qui nécessite des mises en fonctionnement des connaissances de niveau technique.

Les quatre démonstrations attendues ont plusieurs points en commun. Premièrement, la démonstration du pas de chacune des expressions repose sur le même élément déclencheur : la propriété des exposants stipulant que si a est un nombre réel et m et n des nombres naturels, alors $a^m \times a^n = a^{m+n}$. L'utilisation de cette propriété permet de faire intervenir par la suite l'hypothèse d'induction. Une fois l'hypothèse d'induction introduite, la démonstration se résume en l'application de certaines propriétés des opérations et certaines manipulations algébriques.

Deuxièmement, les inégalités jouent un rôle important dans cette tâche. Le travail qui est demandé sur les inégalités constitue un élément de formalisme non négligeable. L'étudiant doit connaître les propriétés des inégalités et être capable de les manipuler correctement. Certains pas déductifs nécessitent de supprimer certains termes d'une expression algébrique dans l'optique d'obtenir la conclusion escomptée. L'étudiant doit déterminer quels termes enlever et gérer les impacts de ces retraits sur les expressions en jeu. Les passages d'une égalité à une inégalité, et vice-versa, doivent également être pris en considération. L'étudiant

---

[17] « Exemple 4.19.2 : Démontrons que la forme propositionnelle $P(n)$ est vraie pour les entiers $n \geq 7$ si $P(n)\colon \left(\frac{4}{3}\right)^n > n$. » (Bourbonnais, 2008, p. 120)

doit en comprendre les fondements et être capable de les justifier. Ce travail sur les inégalités va dans le même sens que celui que nous avions relevé en *NYB* (voir § 4.1.4.4).

En plus des éléments précisés ci-dessus, la présence de la variable x dans la démonstration b) constitue selon nous une difficulté supplémentaire. Alors que l'étudiant doit déjà gérer les symboles n et k, un troisième, x, est ajouté. La variable x ne doit pas être confondue avec la variable n, variable sur laquelle s'effectue la relation de récurrence. L'étudiant doit départager ces deux éléments et comprendre le rôle de chacun dans la tâche.

Tâche 50 : Exercice 4.20.4 (exercice tiré du manuel, p. 125)

Démontrer par induction les propositions suivantes (on supposera dans tous les problèmes de cette section [4.20] que $n \in \mathbb{N}$ en tenant compte, le cas échant, des restrictions supplémentaires indiquées.)

Propositions de divisibilité

a) $P(n) : 5^{2n} - 1$ est divisible par 24, $n \geq 0$.
b) $P(n) : 9^{n} - 1$ est divisible par 8, $n \geq 0$.
c) $P(n) : 3^{2n} - 1$ est divisible par 4, $n \geq 0$.
d) $P(n) : 8^{2n-1} + 1$ est divisible par 9, $n \geq 1$.

Réponse attendue à la tâche 50

Les quatre sous-questions donnant lieu à des démonstrations similaires, nous avons décidé d'en expliciter une seule, la sous-question d). Celle-ci a été retenue, car les manipulations algébriques qu'elle requiert sont légèrement plus complexes.

La solution présentée est issue du corrigé du manuel (p. 139).

d) **Démonstration** *(preuve par induction)*

- *Démonstration de la base*

  On doit vérifier que la proposition est vraie pour le premier élément du référentiel (ici $n = 1$)
  Si $n = 1$, alors on a $8^{2\cdot 1-1} + 1 = 9$.
  Puisque 9 est divisible par 9 (*youppitou!*), alors $P(1)$ est vraie.

  □ *(fin de la démo. de la base)*

- *Démonstration du pas*

  On doit maintenant démontrer que si la proposition est vraie pour une certaine valeur ($n = k, k \geq 1$) alors cela implique qu'elle est vraie aussi pour la valeur suivante ($n = k + 1$).

  $$P(k): \quad 8^{2k-1} + 1 = 9t, \quad t \in \mathbb{N} \quad \text{[H.I.]}$$

  $$P(k+1): \quad 8^{2k+1} + 1 = 9s, \quad s \in \mathbb{N} \quad \text{[Concl.]}$$

  Démonstration (*preuve directe de l'implication $P(k) \Rightarrow P(k+1)$*)
  En partant avec le membre de gauche de l'égalité que l'on doit déduire (à partir de l'hypothèse d'induction), on obtient la suite d'égalités :

  $$\begin{aligned}
  8^{2k+1} + 1 &= 8^{2k-1} \cdot 8^2 + 1 && \text{(propriété des exposants)}\\
  &= (9t - 1) \cdot 8^2 + 1 && \text{(par H.I.)}\\
  &= 64 \cdot 9t - 64 + 1 && \text{(algèbre dans } \mathbb{Z}\text{, dont la distributivité)}\\
  &= 64 \cdot 9t - 63 && \text{(simplification)}\\
  &= 9(64t - 7) && \text{(algèbre dans } \mathbb{Z}\text{, dont la distributivité)}\\
  &= 9s, \quad s = 64t - 7 \in \mathbb{N} && (\diamond)
  \end{aligned}$$

  $\diamond$ On sait que $s = 64t - 7 \in \mathbb{N}$ car $64 \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}$ (par hypo). Ainsi $64t \in \mathbb{N}$ (fermeture dans $< \mathbb{N}, \times >$). De plus, comme $7 \in \mathbb{N}$, alors $64t - 7 = 64t + (-7) \in \mathbb{Z}$ (fermeture dans $< \mathbb{Z}, + >$). De plus, comme $t \geq 1$ par hypothèse (car $8^{2k-1} + 1 \geq 9$), alors $64t - 7 \in \mathbb{N}$.

  On a donc montré que si l'expression $8^{2n-1} + 1$ est un multiple de 9 pour une certaine valeur k de n, alors cette expression est aussi un multiple de 9 pour la valeur suivante $k + 1$.

  □ *(fin de la démo. du pas)*

- Donc, puisque la proposition est vraie pour $n = 1$ et que lorsqu'elle est vraie pour une certaine valeur quelconque de n supérieure ou égale à 1, alors elle est vraie pour la valeur suivante, on peut conclure qu'elle est vraie pour les entiers $n \geq 1$

■

Analyse de la tâche 50

Pour les mêmes raisons que celles explicitées à la tâche précédente, nous ne présenterons pas la totalité de notre grille d'analyse, mais allons plutôt nous concentrer sur les éléments propres à la présente tâche qu'elle nous a permis de mettre en lumière.

Tout comme c'était le cas pour les tâches présentées jusqu'à maintenant dans l'étape 3, les mises en fonctionnement des connaissances qui sont nécessitées ici sont de niveau technique.

En effet, en plus de la méthode de preuve à utiliser qui est explicitement révélée dans l'énoncé de la tâche, une démonstration similaire[18] est donnée dans la section théorique 4.19.

Les démonstrations souhaitées reposent sur l'introduction de plusieurs changements de point de vue. En plus du changement de point de vue nécessité par la méthode de preuve utilisée, l'étudiant doit représenter algébriquement l'expression « $8^{2n-1} + 1$ est divisible par 9 ». L'introduction de cette représentation est nécessaire puisqu'il s'agit en fait de pouvoir représenter mathématiquement l'hypothèse d'induction qui entre en jeu dans la démonstration du pas. Le recours à cette représentation n'est néanmoins pas nouveau pour l'étudiant puisque plusieurs tâches de l'étape 1 y avaient aussi recours (voir tâches 13, 24 et 30). Un troisième et dernier changement de point de vue est requis. Alors que toutes les tâches traitées jusqu'à présent dans l'étape 3 faisaient intervenir directement l'hypothèse d'induction dans la démonstration du pas, la présente tâche demande à l'étudiant d'exprimer différemment l'hypothèse d'induction avant de pouvoir l'utiliser. En effet, ce n'est pas la forme $8^{2k-1} + 1 = 9t$ qui intervient dans la démonstration du pas, mais plutôt $8^{2k-1} = 9t - 1$. Bien que seulement la réalisation d'une opération élémentaire distingue ces deux expressions, nous croyons que l'étudiant pourra chercher à appliquer directement la première plutôt que d'avoir recours à la seconde forme qui est équivalente.

Finalement, un élément de formalisme a retenu notre attention dans le corrigé de la tâche fourni dans le manuel. Cet élément de la sous-question d) concerne les passages qui sont requis entre les différents ensembles numériques. En effet, il est attendu que l'étudiant navigue entre les nombres naturels et les nombres entiers, ce qui peut être une source de difficultés. Nous croyons que plusieurs ne percevront pas les nuances à l'origine de « l'apparition » des entiers dans la tâche. Bien que cette portion de la démonstration soit tout à fait valable, nous sommes d'avis qu'un étudiant aurait pu avoir recours à un argument moins détaillé pour justifier que s est un naturel. Selon nous, la manipulation attendue des propriétés des opérations sur les différents ensembles numériques, bien que rigoureuse,

---

[18] « Exemple 4.19.3 : Démontrons que la forme propositionnelle $P(n)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ si $P(n)$: $3^{4n} - 1$ est divisible par 80. » (Bourbonnais, 2008, p. 122)

constitue une formalisation « extrême » d'un argument qui aurait pu être rédigé informellement.

Tâche 51 : Quiz 5 (document distribué par l'enseignante)

Démontrer par induction que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: $10^{2n} - 1$ est divisible par 99.

Réponse attendue et analyse de la tâche 51

Puisque la tâche 51 est identique, modulo les expressions impliquées, à la tâche 50, nous référons le lecteur à la tâche précédente.

Tâche 52 : Exercice 5.20.4 (exercice tiré du manuel, p. 197)

Démontrer la proposition 2[19] de la section précédente à l'aide du principe d'induction.

Réponse attendue à la tâche 52

Cette solution a été rédigée par l'auteur de la présente recherche. Elle est inspirée de la solution qui a été rédigée par l'enseignante pour la tâche 53 qui est similaire.

1. Démonstration de la base (pour $n = 1$)

Le membre de gauche est égal à a_1 par définition de s_1.

Le membre de droite est égal à : $\frac{n\cdot(2\cdot a_1+(n-1)\cdot d)}{2} = \frac{1\cdot(2\cdot a_1+(1-1)\cdot d)}{2} = a_1$.

Puisque le membre de gauche est égal au membre de droite, la proposition est vraie pour $n = 1$.

□

[19] « Proposition 2 : La somme des n premiers termes d'une progression arithmétique de premier terme a_1 et de raison d est donnée par $s_n = \frac{n\cdot(2\cdot a_1+(n-1)\cdot d)}{2}, n \geq 1$. » (Bourbonnais, 2008, p. 195)

2. Démonstration du pas

$P(k) = s_k = \frac{k\cdot(2\cdot a_1+(k-1)\cdot d)}{2}$ (Hypothèse d'induction) pour $k \geq 1$

$P(k+1) = s_{k+1} = \frac{(k+1)\cdot(2\cdot a_1+k\cdot d)}{2}$ (Conclusion)

$s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$	(par définition de la somme partielle)
$= \frac{k\cdot(2\cdot a_1+(k-1)\cdot d)}{2} + a_{k+1}$	(hypothèse d'induction)
$= \frac{k\cdot(2\cdot a_1+(k-1)\cdot d)}{2} + (a_1 + k \cdot d)$	(application du terme général d'une progression arithmétique à a_{k+1})
$= \frac{k\cdot(2\cdot a_1+(k-1)\cdot d)+2\cdot a_1+2\cdot k\cdot d}{2}$	(mise au même dénominateur)
$= \frac{k\cdot(2\cdot a_1+k\cdot d-d)+2\cdot a_1+2\cdot k\cdot d}{2}$	(par distributivité)
$= \frac{2\cdot a_1\cdot k+k^2\cdot d-k\cdot d+2\cdot a_1+2\cdot k\cdot d}{2}$	(par distributivité)
$= \frac{2\cdot a_1\cdot k+2\cdot a_1+k^2\cdot d+k\cdot d}{2}$	(par simplification et commutativité)
$= \frac{2\cdot a_1\cdot(k+1)+k\cdot d(k+1)}{2}$	(par mise en évidence)
$= \frac{(k+1)\cdot(2\cdot a_1\cdot+k\cdot d)}{2}$	(par mise en évidence)

□

3. Conclusion

Puisque la proposition est vraie pour *n* égal à 1 et lorsqu'elle est vraie pour une valeur quelconque de *n* supérieure ou égale à un, alors elle est aussi vraie pour la valeur suivante, on peut conclure que la proposition est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

■

Analyse de la tâche 52

La tâche 52 requiert, comme ses consœurs de l'étape 3, la réalisation d'une démonstration par récurrence. La structure de cette forme de démonstration, les difficultés et les éléments de formalisme qui lui sont liés ayant été traités antérieurement (voir tâche 47), nous allons présenter uniquement les éléments caractéristiques de la présente tâche.

La construction de la démonstration est dirigée par plusieurs indices. L'énoncé de la tâche indique clairement la méthode de preuve à utiliser. De plus, la démonstration de la proposition 1[20], qui est faite dans les pages précédant l'énoncé de la proposition 2, présente plusieurs similarités avec la démonstration qui doit être construite.

Contrairement aux autres tâches proposées jusqu'à présent à l'étape 3, la tâche 52 se rapporte au domaine de l'analyse, plus précisément à la notion de suites qui a nouvellement été présentée aux étudiants. Ce choix de contexte a plusieurs impacts sur la démonstration.

Pour mener à bien la tâche, certains éléments relatifs aux suites doivent être ré-exprimés différemment, ce qui constitue un changement de point de vue. Plus précisément, deux *changements de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans la tâche* sont à introduire dans la démonstration. Premièrement, la $k+1^e$ somme partielle, s_{k+1}, doit être transformée en l'addition de la k^e somme partielle avec le $k+1^e$ terme de la suite, $s_k + a_{k+1}$. Ce changement de point de vue rend possible l'introduction de l'hypothèse d'induction dans la démonstration. Le deuxième changement se fait à la troisième ligne de la démonstration du pas. À ce stade, le terme a_{k+1} est ré-exprimé comme la somme du premier terme de la suite, a_1, et de k fois la valeur de la raison d : $a_1 + k \cdot d$. Cette réécriture s'appuie sur la définition du terme général d'une progression arithmétique.

Ces changements de point de vue reposent sur une compréhension du vocabulaire et du symbolisme liés à la notion de suite. Les représentations algébriques des termes propres à la notion de suite nécessitent l'utilisation d'un symbolisme précis qui doit être utilisé adéquatement. D'ailleurs, plusieurs symboles littéraux se côtoient, nécessitant une gestion rigoureuse.

Une fois ces changements de point de vue introduits, la démonstration du pas se résume en l'application de propriétés des opérations et la réalisation de manipulations algébriques. À

[20] « Proposition 1 : La somme des n premiers termes d'une progression arithmétique de premier terme a_1 et de n^e terme a_n est donnée par $P(n)$: $s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}, n \geq 1$. » (Bourbonnais, 2008, p. 193)

partir de la troisième ligne, le raisonnement déductif mis en œuvre est pris en charge par le calcul. La signification des symboles impliqués peut donc être mise de côté par l'étudiant qui peut manipuler les symboles sans désormais se soucier de ce qu'ils représentent.

Tâche 53 : Exercice 5.24.5 (exercice tiré du manuel, p. 209)

Démontrer par induction la proposition[21] permettant de calculer la somme des n premiers termes d'une progression géométrique.

Réponse attendue à la tâche 53

La démonstration qui est attendue pour cette tâche nécessite la prise en considération de deux cas, soit $r \neq 1$ et $r = 1$. La démonstration du premier cas a été rédigée par l'enseignante du cours, tandis que la démonstration du second cas a été élaborée par l'auteur de cette recherche. Pour fournir une solution qui était la plus près possible des attentes de l'enseignante, nous nous sommes inspirées de sa solution pour le cas $r \neq 1$.

---

[21] La somme des n premiers termes d'une progression géométrique de premier terme a_1 et de raison r est donnée par

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{a_1 \cdot (1 - r^n)}{1 - r} & si\, r \neq 1 \\ n \cdot a_1 \; si\, r = 1 \end{cases}$$

(Bourbonnais, 2008, p. 202)

Cas $r \neq 1$

1- **Démonstration de la base** (vérifions pour la première valeur du référentiel, n=1)
Membre de gauche est égale à a_1 par définition de s_1.
Membre de droite est égale à : $\frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a_1(1-r^1)}{(1-r)} = a_1$
Puisque le membre de gauche est égale au membre de droite, P(1) est vraie. □

2- **Démonstration du pas** (à démontrer l'implication $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ par preuve directe)

$P(k) = s_k = \frac{a_1(1-r^k)}{(1-r)}$	[Hypothèse d'induction] pour $k \geq 1$
$P(k+1) = s_{k+1} = \frac{a_1(1-r^{k+1})}{(1-r)}$	[Conclusion]
$s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$	[Définition de la nième somme partielle d'une PG]
$s_{k+1} = \frac{a_1(1-r^k)}{(1-r)} + a_{k+1}$	[Hypothèse d'induction]
$s_{k+1} = \frac{a_1(1-r^k)}{(1-r)} + a_1 r^k$	[Application du terme général d'une PG pour a_{k+1}]
$s_{k+1} = \frac{a_1(1-r^k) + a_1 r^k (1-r)}{(1-r)}$	[Mise au même dénominateur]
$s_{k+1} = \frac{a_1 - a_1 r^k + a_1 r^k - a_1 r^{k+1}}{(1-r)}$	[Distributivité]
$s_{k+1} = \frac{a_1 - a_1 r^{k-1}}{(1-r)}$	[Simplification algébrique]
$s_{k+1} = \frac{a_1(1-r^{k+1})}{(1-r)}$	[Mise en évidence simple] □

3- **Conclusion**
Puisque la proposition est vraie pour n égale à 1 et lorsqu'elle est vraie pour une valeur quelconque de n supérieure ou égale à un alors elle est aussi vraie pour la valeur suivante, on peut conclure que la proposition est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

■

Cas $r = 1$

1. Démonstration de la base (pour $n = 1$)

   Le membre de gauche est égal à a_1 par définition de s_1

   Le membre de droite est égal à : $1 \cdot a_1 = a_1$

   Puisque le membre de gauche est égal au membre de droite, la proposition est vraie pour $n = 1$.

□

2. Démonstration du pas

   $P(k) = s_k = k \cdot a_1$ (Hypothèse d'induction) pour $k \geq 1$

   $P(k+1) = s_{k+1} = (k+1) \cdot a_1$ (Conclusion)

s_{k+1}	$= s_k + a_{k+1}$	(par définition de la somme partielle)
	$= k \cdot a_1 + a_{k+1}$	(hypothèse d'induction)
	$= k \cdot a_1 + a_1$	(application du terme général d'une progression géométrique de raison 1 pour a_{k+1})
	$= a_1 \cdot (k+1)$	(mise en évidence)

□

3. Conclusion

   Puisque la proposition est vraie pour n égal à 1 et lorsqu'elle est vraie pour une valeur quelconque de n supérieure ou égale à un, alors elle est aussi vraie pour la valeur suivante, on peut conclure que la proposition est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

■

Nous avons démontré l'énoncé pour les cas $r \neq 1$ et $r = 1$, nous pouvons donc affirmer que, pour n supérieur ou égal à 1,

$$s_n = \begin{cases} \frac{a_1 \cdot (1-r^n)}{1-r} & si\, r \neq 1 \\ n \cdot a_1 & si\, r = 1\,. \end{cases}$$

Analyse de la tâche 53

La tâche 53 a plusieurs points en commun avec la tâche précédente. Dans un premier temps, les deux tâches mettent en œuvre des raisonnements par récurrence. Deuxièmement, les contextes de réalisation des démonstrations sont similaires. Les deux tâches visent à démontrer une expression permettant de déterminer la n^e somme partielle d'une suite particulière. Bien que cette suite soit une progression arithmétique pour la tâche 52, et une progression géométrique pour la présente tâche, cette différence est, selon nous, minime. En effet, les arguments mis en œuvre dans les deux tâches sont pratiquement identiques, modulo la définition du terme général qui doit intervenir et les manipulations algébriques requises. Devant ce constat, nous avons décidé de ne pas représenter l'analyse de ce type de tâches. Nous référons plutôt le lecteur aux éléments relevés par l'analyse de la tâche 52.

Un élément propre à la présente tâche doit cependant être traité. En plus d'un raisonnement par récurrence, cette tâche requiert la mise en jeu d'un raisonnement par disjonction de cas. Effectivement, les cas $r \neq 1$et $r = 1$ doivent être étudiés séparément, donnant lieu à deux démonstrations par récurrence. Cette disjonction de cas est toutefois facilement perceptible puisque les deux cas à étudier sont donnés dans l'énoncé. L'étudiant aura donc, selon nous, spontanément recours à un raisonnement par disjonction de cas. Malgré le fait que la mise en œuvre de ce type de raisonnements soit suggérée implicitement dans la tâche, elle n'en requiert pas moins un changement de point de vue de la part de l'étudiant qui doit considérer chaque cas individuellement avant de conclure à la validité de l'énoncé. Bien que la démonstration du cas $r = 1$ fasse intervenir des expressions moins complexes et nécessite moins de pas déductifs, les deux démarches s'appuient sur les mêmes éléments-clés, soit la définition de la $k+1^e$ somme partielle et l'application du terme général d'une progression géométrique au terme a_{k+1}.

Tâche 54 : Exercice préparatoire 1 (document rédigé par l'enseignante)

Démontrer par induction que la somme des n premiers termes d'une progression géométrique dont le premier terme est a_1 et la raison est r est donnée par $s_n = \frac{a_1 \cdot (1-r^n)}{1-r}$ pour $r \neq 1$ et $a_1 \neq 1$.

Réponse attendue et analyse de la tâche 54

La démonstration attendue correspond à la démonstration du cas $r \neq 1$ présentée à la tâche 53. Nous y référons donc le lecteur.

Tâche 55 : Exercice préparatoire 2 (document rédigé par l'enseignante)

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Réponse attendue et analyse de la tâche 55

Puisque la démonstration qui est requise ici est similaire à celles demandées à la tâche 47, nous invitions le lecteur à s'y référer.

Tâche 56 : Examen 3, question 1 (tirée de l'examen de l'étape 3 qui a été rédigé par l'enseignante)

Démontrer que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - cy_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i - c\sum_{i=1}^{n} y_i$, c étant une constante.

Réponse attendue à la tâche 56

Cette solution a été rédigée par l'auteur de cette étude. Elle est inspirée de la démonstration fournie par le manuel *NYB* analysé précédemment (Charron et Parent, 2004, p. 113).

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - cy_i)$	$= (x_1 - cy_1) + (x_2 - cy_2) + (x_3 - cy_3) + \cdots + (x_n - cy_n)$	(en explicitant la somme)
	$= (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) + (-cy_1 - cy_2 - cy_3 \ldots - cy_n)$	(par commutativité et associativité)
	$= (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) - c(y_1 + y_2 + y_3 \ldots + y_n)$	(mise en évidence)
	$= \sum_{i=1}^{n} x_i - c\sum_{i=1}^{n} y_i$	(par définition du symbole de sommation)

Analyse de la tâche 56

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement?* Les connaissances à mettre en fonctionnement sont la définition du symbole de sommation ainsi que certaines propriétés des opérations et manipulations algébriques.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Le symbole de sommation a été introduit dans le paysage mathématique de l'étudiant à l'étape 3 du cours. Plusieurs exercices ont cependant été proposés sur ce sujet, ce qui nous pousse à dire qu'il ne s'agit plus d'une nouvelle notion. Il n'est également pas exclu que l'étudiant y ait eu accès auparavant, par exemple dans ses cours de statistiques au secondaire.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Cette notion se rapporte au domaine des mathématiques discrètes ou des statistiques.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* La validité de l'expression à démontrer n'est pas mise en doute, il s'agit donc d'un énoncé fermé. L'énoncé de la tâche ne fournit aucun indice. Toutefois, le manuel du cours précise que les propriétés des sommations seront démontrées en classe. Si cet élément a bel et bien été couvert dans une séance de cours, l'étudiant aurait déjà été mis en contact avec ce type de démonstrations. Dans ce cas, cette tâche reviendrait à combiner deux démonstrations qui lui ont été présentées, soit celles des deux premières propriétés[22].
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement déductif pris en charge par le calcul est à mettre en jeu.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* L'utilisation du symbole de sommation est un élément de formalisme non négligeable dans cette tâche.

---

[22] « Propriétés des $\sum$: Soit a_i, $b_i \in \mathbb{R}$.

1) $\sum$-somme : $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.
2) $\sum$-multiple : $\sum_{i=1}^{n} k \cdot a_i = k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$ $(avec\ k \in \mathbb{R})$ » (Bourbonnais, 2008, p. 225)

L'interprétation de ce symbole est le point de départ de la démonstration. L'étudiant doit être en mesure de développer une somme qui est présentée à l'aide du symbole de sommation, ce qui requiert une compréhension de l'indice, du terme général ainsi que des bornes inférieure et supérieure de cette sommation.

- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?* Selon nous, certaines précisions ont été omises dans l'énoncé de la tâche. En effet, les éléments x_i et y_i n'ont pas été définis. De plus, on précise que c est une constante, mais s'agit-il d'une constante réelle, entière... Cette omission nous a quelque peu surprises puisque le cours semble porter une attention particulière à ce genre de détail.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration est simple et linéaire.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* En supposant que les démonstrations des propriétés du symbole de sommation aient été présentées comme prévu, les mises en fonctionnement requises sont de niveau technique.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Peu d'arguments doivent être mis en jeu dans cette démonstration. La définition du symbole de sommation, l'associativité et la commutativité de l'addition et la mise en évidence d'un facteur commun à plusieurs termes doivent intervenir pour mener la tâche à terme.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de point de vue doit être introduit par l'étudiant. À la première ligne de la démonstration, celui-ci doit développer la somme qui est exprimée à l'aide du symbole de sommation. Ce développement est essentiel puisque le cœur de la démonstration se déroule à partir de la version explicitée de la somme. Une fois les manipulations requises effectuées, l'étudiant devra accomplir un second changement de point de vue puisqu'il devra exprimer les sommes développées à l'aide du symbole de sommation.

- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* L'étudiant doit comprendre que l'énoncé à démontrer est vrai **pour toutes** les valeurs entières de n supérieures ou égales à 1.

Tâche 57 : Examen 3, question 10 (tirée de l'examen de l'étape 3 qui a été rédigé par l'enseignante)

Démontrer, par induction, que la forme propositionnelle $P(n) : 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse attendue à la tâche 57

Cette solution a été élaborée par l'auteur de cette étude. Pour présenter une solution la plus près possible de ce qui est attendu, nous nous sommes inspirées des démonstrations similaires données dans le corrigé du manuel (voir tâche 47).

1. Démonstration de la base (pour $n = 1$)

Le membre de gauche est égal à : $3\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 3 \cdot 1 = 3$.

Le membre de droite est égal à : $6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1\right) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Puisque le membre de gauche est égal à celui de droite, la proposition est vraie pour $n = 1$.

□

2. Démonstration du pas

$P(k) : 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$ (Hypothèse d'induction) pour $k \geq 1$.

$P(k+1) : 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + 3\left(\frac{1}{2}\right)^k = 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$ (Conclusion)

$P(k+1)$	$= 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^k$	(On fait « ressortir » l'avant-dernier terme de la somme)
	$= 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^k$	(Hypothèse d'induction)
	$= 6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\left(\frac{1}{2}\right)^k$	(Distributivité)
	$= 6 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^k$	(Simplification)
	$= 6 - \left(6 \cdot \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k$	(Associativité de la multiplication : 3 est réécrit comme le produit $6 \cdot \frac{1}{2}$)
	$= 6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$	(Propriété des exposants)
	$= 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$	(Mise en évidence)

□

3. Conclusion

Puisque la proposition est vraie pour n égal à 1 et lorsqu'elle est vraie pour une valeur quelconque de n supérieure ou égale à un, alors elle est aussi vraie pour la valeur suivante, on peut conclure que la proposition est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

■

Analyse de la tâche 57

La démonstration attendue ici a plusieurs points en commun avec les démonstrations attendues à la tâche 47. Chacune des ces démonstrations repose sur le développement de la somme impliquée, ce qui permet de faire intervenir l'hypothèse d'induction dans la démonstration du pas. Une fois cette étape réalisée, l'étudiant n'a plus qu'à effectuer une série de manipulations algébriques pour obtenir la conclusion souhaitée.

5.4 Étape 4 : Vecteurs et nombres complexes

5.4.1 Objectifs spécifiques de l'étape 4

L'étape 4 débute par l'étude des vecteurs s'effectuant en deux volets : les vecteurs géométriques et les vecteurs algébriques. Le travail qui est fait dans chacun de ces volets vise entre autres à présenter le vocabulaire et les notations liés à l'objet d'étude. L'étudiant doit également apprendre à effectuer des opérations avec les vecteurs, qu'ils soient géométriques ou algébriques. Un des sujets abordés dans le volet traitant des vecteurs algébriques sont les coordonnées polaires. L'étudiant devra apprendre à utiliser ces coordonnées et à effectuer le passage entre celles-ci et les coordonnées cartésiennes, et vice-versa. La présentation d'une telle notion nécessite l'utilisation d'un certain symbolisme, ce qui est fait dans *Mathématiques pour les sciences*. Bien que l'étude des vecteurs accorde une place importante au formalisme mathématique, entre autres par la présentation et l'utilisation du vocabulaire et du symbolisme propre à l'univers vectoriel, l'activité de démonstration ne semble pas sollicitée dans cette portion du cours. En effet, aucun objectif d'apprentissage impliquant les vecteurs ne requiert la construction de démonstration.

La dernière portion du cours *Mathématiques pour les sciences* se consacre à l'étude des nombres complexes. Le vocabulaire et le symbolisme propre à ce sujet sont introduits. Les nombres complexes sont abordés sous trois formes : binomiale, cartésienne et polaire. L'étudiant doit maîtriser ces trois représentations, ainsi que le symbolisme associé, et doit être capable de passer d'une forme à l'autre. La réalisation d'opérations élémentaires sur les nombres complexes est également un objectif du cours. Ces opérations peuvent se dérouler avec des nombres complexes exprimés sous la forme cartésienne, binomiale ou polaire[23]. L'étape 4 se conclut par l'étude des puissances et des racines d'un nombre complexe. Plusieurs théorèmes en lien avec ces notions, tels que le théorème de De Moivre, sont présentés. Contrairement au premier thème abordé à l'étape 4, l'étude des nombres complexes accorde une place à la démonstration. En effet, démontrer les propriétés des opérations dans l'ensemble des nombres complexes, démontrer les propriétés du conjugué et

---

[23] Soit z un nombre complexe ; $z = a + bi$ est la forme binomiale (ou algébrique), $z = (a, b)$ est la forme cartésienne et $z = \langle \rho; \theta \rangle$ est la forme polaire de ce nombre.

démontrer le théorème de De Moivre sont quelques-uns des objectifs ciblant l'activité de démonstration.

La dernière étape de *Mathématique pour les sciences* semble donc faire intervenir, elle aussi, le formalisme et l'activité de démonstration. Pour voir quels éléments précis y ont été ciblés, nous allons nous référer aux tâches qui ont été proposées aux étudiants.

5.4.2 Tâches proposées à l'étape 4

Pour atteindre les objectifs d'apprentissage de l'étape 4, 56 tâches sont proposées. Parmi celles-ci, 3 font intervenir l'activité de démonstration et leur analyse est présentée ci-dessous.

Tâche 58 : Exercice 7.4.10 (exercice tiré du manuel, p. 300)

Démontrer les propriétés suivantes :

a) $\bar{\bar{z}} = z$ avec $z \in \mathbb{C}$.

b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ avec $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

c) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ avec $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Réponse attendue à la tâche 58

Les trois démonstrations attendues étant similaires, seule la b) est présentée. Cette solution est issue du corrigé du manuel (p. 302).

b). **Hypo :** $z_1 = a + b\,i \in \mathbb{C}$

$z_2 = c + d\,i \in \mathbb{C}$

Concl : $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Démonstration (*preuve directe*)

D'une part

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + b\,i) + (c + d\,i) && \text{(par hypothèse)} \\ &= (a + c) + (b + d)\,i && \text{(définition de l'addition de 2 nbrs complexes)} \\ \Rightarrow \quad \overline{z_1 + z_2} &= (a + c) - (b + d)\,i && \text{(définition du conjugué d'un nombre complexe)} \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \overline{z_1} + \overline{z_2} &= (a - b\,i) + (c - d\,i) && \text{(par hypo. et déf. du conjugué d'un complexe)} \\ &= (a + c) + (-b + (-d))\,i && \text{(déf.[15] de l'add. de 2 nbrs complexes)} \\ &= (a + c) + (-(b + d))\,i && \text{(algèbre dans [illegible])} \\ &= (a + c) - (b + d)\,i && \text{(car [illegible] } i \text{ correspond à } \square + (\text{[illegible]})\,i \text{)} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Analyse de la tâche 58

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement?* Les démonstrations demandées reposent sur la définition du conjugué et les définitions des opérations d'addition et de multiplication dans les nombres complexes. La représentation binomiale d'un nombre complexe doit également être utilisée.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les nombres complexes ont été présentés à l'étape 4 du cours. De plus, la section d'exercices d'où est issue cette tâche est la première portant sur ce sujet.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces notions se rapportent à la théorie des nombres.

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte trois sous-questions indépendantes, mais requérant la construction de démonstrations similaires.

- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* L'énoncé est fermé puisque sa valeur de vérité est connue. L'énoncé de la tâche ne fournit aucun indice. Néanmoins, certaines démonstrations impliquant la notion de conjugué ont été présentées aux étudiants dans la section théorique 7.2. Bien que quelques peu différentes de celles requises dans la présente tâche, les démonstrations explicitées proposent certaines façons de traiter la notion de conjugué dans un contexte de démonstration. De plus, elles dévoilent la forme qui doit être utilisée pour représenter le nombre complexe z, à savoir la forme binomiale $z = a + bi$.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Il ne s'agit pas d'un nouveau problème puisque certaines démonstrations similaires[24] portant sur le conjugué ont déjà été présentées à la section théorique 7.2 du manuel.
- *Quels types de raisonnements sont en jeu?* Un raisonnement déductif pris en charge par le calcul est à déployer.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme occupe une place de choix dans cette tâche. Pour mener à terme les différentes démonstrations demandées, les étudiants doivent être en mesure d'utiliser correctement le symbolisme lié au nombre complexe. En effet, la structure ternaire des nombres complexes (partie réelle, partie imaginaire et particule i) peut être une source de difficultés pour certains. Pour chaque nombre complexe exprimé à l'aide de la représentation binomiale, l'étudiant doit gérer trois symboles littéraux distincts. La gestion des symboles littéraux est d'ailleurs plus ardue pour les sous-questions b) et c) puisque deux nombres complexes, z_1 et z_2, interviennent dans la démonstration. La particule i constitue, selon nous, un élément qui doit être traité prudemment par l'étudiant. Celui-ci doit comprendre qu'il ne s'agit pas d'une variable, mais plutôt d'une entité numérique satisfaisant une contrainte particulière, $i^2 = -1$. L'étudiant doit connaître les définitions des opérations et savoir comment elles se traduisent sur

---

[24] Les démonstrations des propositions suivantes sont effectuées dans le manuel : « Soit z un nombre complexe, alors on a :

a) $z + \bar{z}$ est un nombre réel;
b) $z - \bar{z}$ est un nombre imaginaire pur;
c) $z \cdot \bar{z}$ est un nombre réel positif ou nul. » (Bourbonnais, 2008, p. 287)

chacune des composantes du nombre complexe. Il doit également connaître la notion de conjugué d'un nombre complexe et être capable de l'exprimer symboliquement. Le dernier point que nous voulons soulever concerne le type de démonstrations qui est attendu et le danger qu'il présente à nos yeux. Le fait que chacune des démonstrations se limite à la réalisation d'un calcul peut, selon nous, entraîner une perte de sens. Effectivement, une fois les représentations binomiales des nombres complexes posées, les manipulations algébriques prennent le dessus sur le raisonnement, occultant par le fait même le sens des symboles impliqués.

- *La tâche renferme-t-elle de nouveaux éléments de symbolisme ou de vocabulaire?* Puisqu'il s'agit de la première tâche de démonstration impliquant les nombres complexes, nous considérons que la gestion du symbolisme lié à cet ensemble numérique est une nouveauté pour l'étudiant.
- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?* L'étudiant doit comprendre que les énoncés sont vrais **pour tous** les nombres complexes z, z_1 et z_2.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* Chacune des démonstrations a une structure déductive simple qui se limite à une chaîne d'inférences.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est technique, dans la mesure où des exemples semblables ont été traités auparavant.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* Peu d'arguments doivent être utilisés dans cette tâche : la définition du conjugué, la définition de l'opération d'addition et de multiplication dans les nombres complexes, la transitivité de l'égalité ainsi que des arguments de nature algébrique.
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* Un changement de point de vue est requis puisque

l'étudiant doit avoir recours à la représentation binomiale pour exprimer chacun des nombres complexes impliqués dans la tâche. Ce changement de point de vue est primordial, mais est cependant fortement suggéré par les exemples traités auparavant.

- *Y a-t-il un élément à introduire (un objet, un nom, un formalisme, une notation)?* L'utilisation de la représentation binomiale d'un nombre complexe nécessite l'introduction, en plus de la particule *i*, de deux éléments, un représentant la partie réelle du nombre et l'autre la partie imaginaire.

Tâche 59 : Examen 4, question 9 (tirée de l'examen de l'étape 4 qui a été rédigé par l'enseignante)

Démontrer **une et une seule** des propositions suivantes :

1- Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

ou

2- Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes dans $\mathbb{C}$, alors $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$.

Réponse attendue à la tâche 59

1- La démonstration qui est attendue ici est la même que celle requise à la sous-question b) de la tâche 58. Nous invitons donc le lecteur à s'y référer.

2- La solution à cette sous-question est tirée de la section théorique 7.2 du manuel (p. 283). En effet, la fermeture des nombres complexes sous l'opération d'addition y a été démontrée.

Démonstration des propriétés de $< \mathbb{C}, + >$

pour i) **Hypo :** $H_1 : z_1 = a + bi \in \mathbb{C}$
$H_2 : z_2 = c + di \in \mathbb{C}$
Concl : $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$

Démonstration de i) (*preuve directe*)

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a - bi) + (c + di) && \text{(définitions de } z_1 \text{ et } z_2 \ [H_1 \text{ et } H_2]) \\ &= (a + c) + (b + d)i && \text{(définition de l'addition de 2 nombres complexes)} \end{aligned}$$

Par hypothèses, $z_1 = a + bi \in \mathbb{C}$ et $z_2 = c + di \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Puisque $< \mathbb{R}, + >$ possède la fermeture comme propriété, alors $a + c \in \mathbb{R}$ et $b + d \in \mathbb{R}$.
Ainsi, le résultat de l'addition de deux nombres complexes est bien de la forme

$$z_1 + z_2 = \textit{nombre réel} + \textit{nombre réel} \cdot i$$

$$\therefore z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$$

■

Analyse attendue à la tâche 59

L'analyse de la sous-question 1 ayant été réalisée lors de l'analyse de la tâche 58, nous ne la représenterons pas ici. Nous invitons le lecteur à se référer à l'analyse de la tâche précédente. En ce qui concerne la sous-question 2, nous allons plutôt nous concentrer sur les éléments qui lui sont propres.

Alors que la sous-question 1 traite d'une propriété du conjugué, la sous-question 2 se consacre plutôt à une propriété des opérations élémentaires dans les nombres complexes, plus précisément la fermeture des nombres complexes sous l'opération d'addition. La démonstration attendue repose sur la structure des nombres complexes, mise en évidence par la représentation binomiale. Effectivement, l'étudiant doit, en plus d'être capable de départager les différentes composantes d'un nombre complexe, être en mesure de déterminer à quel ensemble numérique elles appartiennent. Selon nous, le fait qu'un nombre complexe z_1 soit défini par une partie réelle représentée par a, $a \in \mathbb{R}$, et une partie imaginaire représentée par b, $b \in \mathbb{R}$, peut être une source de confusion pour l'étudiant. En effet, beaucoup d'étudiants pensent que bi est la partie imaginaire, parce que c'est elle qui se comporte différemment de ce à quoi ils sont habitués, ce qui peut entraîner confusion et erreur dans la lecture et l'application des règles. Il est donc important que l'étudiant puisse s'y retrouver puisque la fermeture des nombres complexes sous l'opération d'addition découle de la fermeture des nombres réels sous l'opération d'addition.

Finalement, nous tenons à préciser que puisque ces deux démonstrations ont été traitées préalablement dans le cours, elles ne constituent plus un véritable défi pour l'étudiant. En fait, nous nous questionnons sur le rôle de cette tâche dans le contexte d'une évaluation. À notre avis, cette tâche ne peut servir à évaluer la capacité d'un étudiant à construire une démonstration, puisque celles qui sont requises ici sont déjà connues. Un étudiant pourrait avoir mémorisé les démonstrations qui lui ont été proposées à l'étape 4 et réussir parfaitement la présente tâche sans avoir mis en œuvre un véritable raisonnement déductif.

Tâche 60 : Examen 4, question 19 (tirée de l'examen de l'étape 4 qui a été rédigé par l'enseignante)

Démontrer **un et un seul** des deux théorèmes suivants :

Théorème 1 : Si $z_1 = \langle \rho_1, \theta_1 \rangle$ et $z_2 = \langle \rho_2, \theta_2 \rangle$ sont deux nombres complexes sous la forme polaire, alors $z_1 \times z_2 = \langle \rho_1 \rho_2,\ \theta_1 + \theta_2 \rangle$.

Rappel : $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ et $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

ou

Théorème 2 : Soit $u = \langle \rho, \theta \rangle \in \mathbb{C}^*$ alors u possède exactement n racines distinctes qui sont données par $z_k = \langle \sqrt[n]{\rho}, \frac{\theta + k(360°)}{n} \rangle$, avec $k = 1, 2, \ldots, (n - 1)$.

Réponse attendue à la tâche 60

Théorème 1 : La démonstration de ce théorème est issue de la section théorique 7.7 du manuel (p. 309)

Hypo : $H_1 : z_1 = < \rho_1 ; \theta_1 > \in \mathbb{C}$

$H_2 : z_2 = < \rho_2 ; \theta_2 > \in \mathbb{C}$

Concl : $z_1 \times z_2 = < \rho_1 \cdot \rho_2 ; \theta_1 + \theta_2 >$

Démonstration *(preuve directe)*

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= <\rho_1 ; \theta_1> \times <\rho_2 ; \theta_2> && (J_1)\\
&= (\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_1 \sin\theta_1\, i) \times (\rho_2 \cos\theta_2 + \rho_2 \sin\theta_2\, i) && (J_2)\\
&= \rho_1\rho_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \rho_1\rho_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 + (\rho_1\rho_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 + \rho_1\rho_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2)\, i && (J_3)\\
&= \rho_1\rho_2 [\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2] + \rho_1\rho_2 [\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2]\, i && (J_4)\\
&= \rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \rho_1\rho_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)\, i && (J_5)\\
&= <\rho_1 \cdot \rho_2 : \theta_1 + \theta_2> && (J_6)
\end{aligned}
$$

■

Légende (justifications)

- J_1 : Par hypothèse
- J_2 : Passage de la forme polaire à la forme binomiale
- J_3 : Définition de la multiplication de deux nombres complexes
- J_4 : Distributivité dans $\mathbb{R}$
- J_5 : Identités trigonométriques (voir l'exercice 4.5.2 à la page 77)
- J_6 : Passage de la forme binomiale à la forme polaire

Théorème 2 : La démonstration de ce théorème est tirée de la section théorique 7.8 du manuel (p. 318)

Hypo. $H_1 : u = <\rho ; \theta> \in \mathbb{C}^*$

$H_2 : z_k = <\sqrt[n]{\rho} ; \dfrac{\theta + k \cdot 360°}{n}>$ avec $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$

Concl : $z_k^n = u$

Démonstration *(preuve directe)*

$$
\begin{aligned}
z_k^n &= \left(<\sqrt[n]{\rho} ; \tfrac{\theta + k \cdot 360°}{n}>\right)^n && \text{(selon l'hypothèse } H_2)\\
&= <(\sqrt[n]{\rho})^n ; n \cdot \left(\tfrac{\theta + k \cdot 360°}{n}\right)> && \text{(théorème de De Moivre)}\\
&= <\rho ; \theta + k \cdot 360°> && \text{(simplification dans } \mathbb{R})\\
&= <\rho ; \theta> && \text{(voir la note au bas de la page[21])}\\
&= u && \text{(selon l'hypothèse } H_1)
\end{aligned}
$$

De plus, les arguments

$$\frac{\theta + k \cdot 360°}{n} \text{ avec } k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

forment une progression arithmétique de premier terme $\frac{\theta}{n}$ et de raison $\frac{360°}{n}$ partageant le cercle en n parties égales. Les nombres complexes associés à ces arguments sont donc tous distincts.

■

Analyse de la tâche 60

Étant donné que les démonstrations du théorème 1 et 2 ont plusieurs points en commun, nous avons choisi de les analyser simultanément. Nous prendrons toutefois soin de préciser clairement les éléments de notre analyse qui se rapportent à une seule des démonstrations.

Premier axe d'analyse : Description globale de la situation, le contexte mathématique

- *Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement?* Une compréhension de la représentation polaire d'un nombre complexe est requise pour chacune des démonstrations. La démonstration du théorème 1 requiert également une connaissance du passage entre la forme polaire et la forme binomiale (et vice-versa), ainsi que de la définition de l'opération de multiplication dans les nombres complexes. Les identités trigonométriques fournies dans l'énoncé devront aussi être utilisées. La démonstration du théorème 2 nécessite, quant à elle, une bonne compréhension de l'expression « racine n^e d'un nombre complexe ». Cet élément et sa représentation algébrique sont le point de départ de la démonstration. L'étudiant doit également connaître le théorème de De Moivre[25] puisque ce dernier intervient dans la démonstration. Une compréhension approfondie des composantes de la représentation polaire, et particulièrement de l'argument, doit être acquise. L'étudiant doit en effet connaître les impacts qu'ont, sur un nombre complexe donné, certaines modifications apportées à la valeur de son argument.
- *S'agit-il de notions déjà vues ou nouvelles?* Les notions intervenant dans chacune des démonstrations sont connues. Elles ont toutes été traitées dans des tâches proposées à l'étape 4. De plus, les théorèmes et leur démonstration ont été explicités dans des sections théoriques du manuel.
- *À quel domaine mathématique se rapportent ces notions?* Ces deux théorèmes se rapportent à la théorie des nombres.

[25] « Si $z = \langle \rho, \theta \rangle \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors on a $z^n = \langle \rho^n, n \cdot \theta \rangle$. » (Bourbonnais, 2008, p. 313)

Deuxième axe d'analyse : Les tâches prescrites

- *L'énoncé comporte-t-il plusieurs étapes? Si c'est le cas, ces étapes sont-elles liées ou indépendantes?* L'énoncé comporte une seule étape. Il est vrai que deux théorèmes sont donnés portant ainsi à croire que deux étapes sont à réaliser. Cependant, puisque l'étudiant ne doit en démontrer qu'un seul, nous considérons qu'une seule étape compose la tâche.
- *L'énoncé est-il ouvert? Des indices facilitant la résolution du problème sont-ils fournis?* La valeur de vérité des deux théorèmes étant connue, leurs énoncés sont fermés. Alors qu'aucun indice n'est fourni dans l'énoncé du théorème 2, celui du théorème 1 présente certaines identités trigonométriques qui devront être mises à contribution dans la démonstration.
- *S'agit-il d'un type de problèmes qui était ignoré jusqu'alors?* Chacune des démonstrations attendues ayant été présentées dans une section théorique du manuel, nous considérons que ces types de problèmes, et même plus précisément que ces problèmes, sont connus.
- *Quelle est l'importance du formalisme dans la tâche?* Le formalisme occupe une place non négligeable dans ces démonstrations. Les deux démonstrations requièrent une compréhension approfondie de la représentation polaire d'un nombre complexe. Dans la démonstration attendue du théorème 1, l'étudiant doit comprendre chacune des composantes de cette représentation puisqu'il aura à travailler avec ces informations pour exprimer les nombres complexes z_1 et z_2 avec la représentation binomiale. Tel que nous l'avons mentionné précédemment lors de l'analyse de la tâche 58, la représentation binomiale d'un nombre complexe demande une gestion symbolique importante de la part de l'étudiant. Cette gestion est d'autant plus importante ici que les parties réelles et imaginaires des nombres complexes z_1 et z_2 sont exprimées à partir des modules et des arguments. Une telle traduction requiert l'introduction des fonctions trigonométriques sinus et cosinus, ce qui complexifie les expressions à traiter. Soulevons un dernier point concernant la démonstration souhaitée pour le théorème 1. Tel que mentionné lors de notre analyse de la tâche 58, le caractère très calculatoire de cette démonstration risque, selon nous, d'entraîner une perte de sens chez l'étudiant. En effet, nous sommes d'avis que certains

pourraient être tentés de manipuler les symboles impliqués sans se soucier de ce qu'ils représentent dans la tâche.

En ce qui concerne la démonstration du théorème 2, l'expression « z_k est une racine n^e du nombre u » doit être représentée algébriquement : $z_k^n = u$.

- *Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier, ou des quantificateurs cachés?* Une quantification est à repérer pour chacun des deux théorèmes. Pour le théorème 1, l'étudiant doit comprendre que l'énoncé est vrai **pour tous** les nombres complexes z_1 et z_2. Une quantification similaire doit être comprise pour le théorème 2. L'énoncé du théorème 2 renferme un second élément implicite et il s'agit de ce qui doit être démontré. En effet, l'étudiant doit comprendre que la démonstration comporte deux parties, soit la démonstration que z_k, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, est bel et bien une racine n^e de u et la démonstration que ces n racines sont distinctes.
- *Quelle est la structure de la démonstration? S'agit-il d'une chaîne ou d'un arbre d'inférences?* La structure de la démonstration du théorème 1 est simple et linéaire. La structure de la démonstration du théorème 2 est légèrement plus complexe puisque deux « sous-démonstrations » sont à effectuer pour démontrer l'énoncé initial.

Troisième axe d'analyse : les activités attendues des étudiants

- *Quel est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) visé par la tâche?* Les mises en fonctionnement des connaissances qui sont **visées** sont de niveau mobilisable. L'étudiant doit analyser la situation pour exprimer, à l'aide de la bonne représentation, les nombres complexes qui lui sont présentés. Il doit par la suite manipuler adéquatement les expressions obtenues. Cependant, puisque les démonstrations à élaborer ont déjà été présentées dans une section théorique du manuel, les mises en fonctionnement des connaissances qui sont réellement suscitées par la tâche sont plutôt de niveau technique. Du moins, c'est le cas pour les étudiants qui ont pris connaissance des démonstrations dans le recueil du cours.

- *Y a-t-il lieu d'introduire des étapes?* La démonstration du théorème 2 nécessite l'introduction de deux étapes : la démonstration que z_k, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, est bel et bien une racine n^e de u et la démonstration que ces n racines sont distinctes.
- *Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois?* La démonstration du théorème 1 demande l'intervention de peu d'arguments : le passage de la forme polaire à la forme binomiale (et vice-versa), la définition de la multiplication dans les nombres complexes, les deux identités trigonométriques données ainsi que la distributivité de la multiplication sur l'addition dans les nombres réels. La démonstration du théorème 2 requiert aussi le développement de peu d'arguments, cependant ceux-ci sont, selon nous, plus complexes. La représentation algébrique de l'expression « z_k est une racine n^e de u », le théorème de De Moivre, certains arguments portant sur l'équivalence ou non des nombres complexes exprimés avec la représentation polaire et dont on modifie l'argument et des manipulations algébriques sont à mettre en jeu. Avant de passer au point suivant de notre grille, nous voulons mettre en question le recours à la progression arithmétique pour justifier que les n racines z_k sont distinctes. Bien que cet argument soit tout à fait valable et rigoureux dans le cadre de la démonstration du théorème 2, nous croyons qu'un étudiant pourrait fournir un argument allant dans le même sens que celui du manuel, mais qui ne s'appuierait pas sur la notion de suite. Celui-ci serait, à nos yeux, tout aussi acceptable. Cette remarque nous amène à soulever une question : jusqu'où doit-on pousser la formalisation des étapes d'une démonstration?
- *Y a-t-il un changement de point de vue, de cadre, de registre de représentation à introduire (sans indication)?* La démonstration du théorème 1 nécessite un changement de point de vue, les nombres complexes qui étaient de prime abord exprimés avec la représentation polaire doivent être réécrits en utilisant la représentation binomiale. La démonstration du théorème 2 nécessite aussi un changement de point de vue puisque l'expression « z_k est une racine n^e de u » doit être exprimée algébriquement. Il s'agit de *changements de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans la tâche*.
- *Y a-t-il une sélection d'informations à effectuer?* Une sélection d'informations est à effectuer dans l'énoncé de manière à séparer la démonstration en deux parties : la

démonstration que z_k est une racine n^e de u et la démonstration que u possède exactement n racines distinctes.

- *Une quantification est-elle à utiliser ou à repérer?* En plus des quantifications explicitées précédemment, l'étudiant doit comprendre que la démonstration de $z_k^n = u$ est valable **pour toutes** les valeurs de k entre 0 et $n-1$.

Nous souhaitons conclure l'analyse de cette tâche en soulevant deux derniers points. Premièrement, nous tenons à mentionner que les propos tenus lors de l'analyse de la tâche précédente concernant l'utilisation, dans un contexte d'évaluation, de démonstrations déjà travaillées en cours s'appliquent également ici. Deuxièmement, contrairement à la tâche précédente qui demande à l'étudiant de choisir entre deux démonstrations similaires, nous croyons que la présente tâche propose des démonstrations qui ne sont pas équivalentes. En effet, si ces démonstrations n'avaient pas déjà été présentées aux étudiants dans le manuel, la construction de la démonstration du théorème 2 renferme, selon nous, plus d'éléments de difficultés que celle du théorème 1.. Les arguments qu'elle met en œuvre sont plus complexes et requièrent une connaissance approfondie de la représentation polaire et de ses composantes. Une analyse préalable de l'énoncé doit également être effectuée pour cibler précisément les éléments qui devront être démontrés. Certains de ces éléments doivent d'ailleurs être exprimés algébriquement ce qui constitue une difficulté supplémentaire.

5.5 Bilan des analyses des tâches du cours *Mathématiques pour les sciences*

L'ensemble des tâches faisant intervenir l'activité de démonstration, et ayant été ciblées par l'enseignante dans sa planification du cours, a été étudié. Chacune de ces tâches ayant été analysée individuellement, un regard global sur l'ensemble s'impose. Les sections subséquentes proposent de mettre en relation ces analyses et de faire une synthèse des différents éléments pointés précédemment, en plus de discuter de certains éléments qui n'ont pas été directement relevés par notre analyse.

5.5.1 Approche privilégiée par *Mathématique pour les sciences* pour travailler la démonstration

Le cours donné par le cégep Ahuntsic accorde une place importante à l'enseignement de la logique propositionnelle. Ce sujet est le second thème abordé par *Mathématiques pour les sciences* (après une introduction à la théorie des ensembles) et sert de base à l'enseignement du troisième thème : les différentes méthodes de preuves. En effet, l'étude de chacun des mécanismes traités par le manuel débute par la mise à jour de l'équivalence logique, démontrée au chapitre précédent, sur laquelle s'appuie la méthode de preuve. Cette utilisation de la logique propositionnelle comme fondement et justification des méthodes de preuves est également perceptible dans certaines des solutions proposées dans le corrigé du manuel. La tâche 11 présentée antérieurement (page 191) est un excellent exemple. Le solutionnaire révèle le squelette logique sous-jacent à l'énoncé et à la méthode de preuve utilisée.

Un enseignement préalable de la logique propositionnelle et son utilisation dans l'enseignement de la démonstration est un sujet controversé dans le monde de la recherche en didactique des mathématiques. Alors que certains didacticiens affirment qu'un enseignement de la logique formelle pourrait être inefficace pour améliorer les capacités des étudiants à construire des démonstrations (Cheng, 1986; Deer, 1969; cités dans Epp, 2003, p. 892) d'autres chercheurs, tels que Epp (2003) et Selden et Selden (1995), voient des bienfaits à l'enseignement préalable de la logique et à sa mise à nue dans les processus de validation. Selon Epp (2003) :

> Preceding the discussion of proof and disproof with a treatment of logic provides a language for instructors to explain why mathematicians do the things they do when they prove and disprove mathematical statements and to communicate with their students when they make mistakes. (p. 895)[26]

Nous nous rangeons derrière les propos de Epp, en énonçant qu'un enseignement préalable de la logique peut fournir un langage commun aux étudiants et aux enseignants pour discuter

---

[26] « Le fait de débuter la discussion sur la preuve et la réfutation par un traitement de la logique fournit aux enseignants un langage permettant d'expliquer pourquoi les mathématiciens font ce qu'ils font lorsqu'ils prouvent et réfutent des affirmations mathématiques et de communiquer avec leurs élèves lorsqu'ils commettent des erreurs » (Epp, 2003, p. 895; notre traduction).

de la démonstration. De plus, le traitement de la logique formelle qui est fait dans *Mathématiques pour les sciences*, et qui est défendu par Epp (2003), nous semble être un moyen intéressant pour justifier la validité des différentes méthodes de preuves. Ce type de justification pourrait, selon nous, contribuer à légitimer l'emploi de certaines méthodes de preuves aux yeux de certains étudiants.

L'enseignement de la logique et ses impacts sur la capacité des étudiants à mettre en œuvre des raisonnements mathématiques n'étant pas l'objectif spécifique de cette étude, nous ne nous étendrons pas davantage sur le sujet. Nous trouvons cependant important de soulever ce point dans notre bilan puisqu'il contribue à comprendre comment le cours aborde l'activité de démonstration.

Un second point ayant retenu notre attention concerne l'utilisation d'un canevas précis pour rédiger et présenter des démonstrations. Celui-ci est d'ailleurs explicité dans le manuel du cours (Bourbonnais, 2008, p. 82). Ce canevas, qui a pu être observé dans les solutions issues du corrigé du manuel, est composé de trois parties. La première partie est la présentation des hypothèses. L'étudiant doit prendre soin d'énoncer clairement la ou les hypothèses et de les numéroter, au besoin, pour pouvoir y faire référence lors de la présentation de la démonstration. La seconde étape concerne la présentation de la conclusion à laquelle on tente d'arriver. Finalement, la troisième étape, est la présentation de la démonstration. Le manuel mentionne explicitement que le début de cette étape doit être annoncé clairement par le mot « Démonstration » suivi de la méthode de preuve qui sera mise en œuvre. Chacune des étapes de la démonstration sera présentée à la suite de cet en-tête et devra être justifiée. Pour indiquer que la démonstration est terminée, le manuel propose deux options, soit l'utilisation du terme CQFD ou celle du carré. Ce canevas est illustré à la figure 5.1.

Hypo : *Hypothèse 1*
Hypothèse 2
...
Hypothèse n

Concl : *Conclusion*

Démonstration [*nom de la méthode*]

Étape 1	*justification*
Étape 2	*justification*
...	...
Étape *m*	*justification*

CQFD *ou* ■

Figure 5.1 Canevas de rédaction.
(Tiré de Bourbonnais, 2008, p. 82)

Le canevas de rédaction qui est défini dans le cours *Mathématiques pour les sciences* a sans doute plusieurs visées. L'utilisation de ce format de présentation peut entre autres pousser l'étudiant à être plus rigoureux lors de la rédaction finale de sa démonstration et le forcer à justifier davantage son raisonnement. En effet, tel que le relève Dreyfus (1999), certains étudiants ont tendance à fournir des explications imprécises en guise de preuve et même, dans certains cas, à omettre complètement d'expliquer leur démarche affirmant que la rédaction de textes ne devrait pas être requise dans les cours de mathématiques. L'auteur présente le cas d'un étudiant qui, pour démontrer que les colonnes d'une matrice A_{4x4} sont linéairement indépendantes, ne fait que réduire-échelonner cette matrice sans fournir aucune explication supplémentaire (Dreyfus, 1999, p. 89). Dans de telles situations, le canevas de rédaction fourni pas *Mathématiques pour les sciences* pourrait encourager l'étudiant à structurer et justifier davantage ses actions et son raisonnement donnant naissance, par le fait même, à des preuves plus complètes. Il s'agit d'ailleurs peut-être d'un des objectifs poursuivis par le cours.

Malgré ces avantages, nous croyons qu'un danger non négligeable est à prendre en considération lors de l'imposition d'un canevas de rédaction pour les démonstrations. En effet, le squelette de mise en forme utilisé dans le cours *Mathématiques pour les sciences* peut selon nous être une source de difficultés importantes pour certains étudiants qui s'entêteraient à « remplir » chacune des étapes du canevas dans l'ordre où elles sont présentées. La présentation des étapes dans le canevas ne correspond pas toujours, et même correspond rarement, à l'ordre des réflexions qui sont faites lors de l'élaboration d'une démonstration. Par exemple, déterminer la méthode de preuve à utiliser peut nécessiter plusieurs essais infructueux avant de mettre le doigt sur la méthode qui nous permettra de mener à bien la démonstration. Il en va de même pour les étapes de la démonstration à construire. Rares sont les démonstrations qui peuvent s'écrire du début à la fin sans avoir nécessité aucun arrêt, retour en arrière ou modifications d'étapes précédemment réalisées. Pour certaines démonstrations, il est même plus efficace de partir de la conclusion pour remonter vers les hypothèses. L'utilisation du canevas pourrait entretenir, et pourrait même encourager, selon nous, la fausse conception voulant qu'une démonstration doit être rédigée « linéairement » des hypothèses à la conclusion. Cette fausse conception que sous-tend l'utilisation d'une telle structure de rédaction va également à l'encontre des propos de Selden et Selden (2007), qui soutiennent qu'il est essentiel que l'étudiant comprenne que l'ordre de présentation d'une démonstration ne correspond pratiquement jamais à l'ordre dans lequel elle a été construite.

Le danger que nous venons de mettre en lumière constitue, à notre avis, un piège important pour plusieurs étudiants. Certaines nuances doivent cependant être apportées à notre discours. En effet, la fausse conception que sous-entend le canevas de rédaction pourrait très bien avoir fait l'objet d'une remarque par l'enseignante dans une séance de classe. N'ayant accès qu'au manuel de référence et aux documents écrits fournis par l'enseignante, il nous est impossible de savoir si tel est effectivement le cas. Il est tout à fait possible que les objectifs entretenus par le squelette de présentation aient été exposés ou que des précisions supplémentaires aient été apportées dans l'optique d'éviter que les étudiants tombent dans le piège décrit précédemment. Nous croyons cependant qu'il aurait été intéressant que le manuel précise, dans une note en bas de page par exemple, que le canevas proposé ne correspond pas à l'ordre dans lequel doivent s'élaborer les réflexions menant à l'élaboration finale de la démonstration. Le canevas doit être vu comme un outil permettant de présenter rigoureusement le produit final du raisonnement, et non une marche à suivre pour construire la démonstration de A à Z. Un commentaire à ce sujet aurait selon nous permis de lever toute ambiguïté quant au rôle de ce canevas.

Finalement, nous trouvons important de mentionner que l'utilisation d'un canevas de rédaction pour la démonstration est une pratique contestée par certains chercheurs tels que Duval (1991; 2001). Selon l'auteur, aucune contrainte d'ordre rédactionnel ne devrait restreindre l'étudiant lors de l'écriture d'une démonstration. L'auteur avance que « une tâche d'expression libre, c'est-à-dire sans aucun exemple préalable de texte de démonstration et sans aucune indication sur les conventions de rédaction est nécessaire pour permettre [l'explication par l'étudiant de toutes les caractéristiques d'une organisation déductive] » (Duval, 1991, pp. 244-245). Duval (2001) va plus loin en généralisant ces propos à l'ensemble des activités d'écritures. En effet, selon l'auteur « apprendre à écrire ne peut se faire que lorsque le sujet est placé dans une situation réelle d'expression, c'est-à-dire une situation où il n'y a plus un type de formulation plus ou moins normatif et où il n'a plus à se demander " qu'est-ce qu'il faut dire ? " » (p. 200).

L'imposition d'un canevas de rédaction semble donc une arme à double tranchant qui peut, selon la façon dont elle est effectivement traitée dans le cours, apporter des avantages, mais aussi certains inconvénients.

5.5.2 Place accordée à l'activité de démonstration dans le cours *Mathématiques pour les sciences*

Pour dresser un portrait précis de la place qui est accordée à l'activité de démonstration dans le cours du cégep Ahuntsic, les quatre étapes composant le cours ont été étudiées séparément. L'étape 1 de *Mathématiques pour les sciences* cible précisément l'apprentissage des différentes méthodes de preuve (à l'exception de la preuve par induction qui est traitée à l'étape 3), il n'est donc pas surprenant que dans cette portion du cours se retrouve la majorité des tâches nécessitant la réalisation de démonstrations. Parmi les 100 tâches présentées à cette étape, 41 font intervenir la démonstration. Ce nombre chute drastiquement pour les trois autres étapes. Effectivement, parmi les 220 tâches proposées aux étapes 2, 3 et 4, 19 se rapportent à l'activité de démonstration. De ces 19 tâches, 11 sont proposées à l'étape 3 et portent sur la réalisation de preuves par induction. Les étapes 2 et 4, deux volets du cours ne visant pas précisément l'apprentissage de méthodes de preuves, comportent donc 8 tâches sollicitant la construction de démonstrations.

Ces statistiques sont, selon nous, surprenantes. L'enseignement de la majorité des méthodes de preuves étant réalisé au tout début de la séquence d'enseignement, nous nous attendions à ce que l'activité de démonstration soit partie intégrante du cours et ce, pour chacune des étapes. Le fait de concentrer la réalisation de démonstrations dans les sections du cours portant explicitement sur l'apprentissage des méthodes de preuve comporte, à notre avis, un risque important. Ce type de présentation peut en effet amener les étudiants à voir l'activité de démonstration comme un domaine précis et isolé des mathématiques, au même titre que la géométrie et l'algèbre. Cette vision de la démonstration est très contestable et n'est évidemment pas souhaitable. L'étudiant doit comprendre que l'activité de démonstration joue un rôle important dans chacun des domaines des mathématiques. C'est le processus de validation le plus achevé et reconnu des mathématiques, et non pas un type particulier d'exercices restreint à des contextes mathématiques précis.

5.5.3 Variété des tâches portant sur la démonstration

L'analyse des 60 tâches dont il a été question ci-dessus a révélé que certaines de ces tâches étaient, du point de vue de l'activité de démonstration, équivalentes. Pour éliminer ce phénomène de nos statistiques, nous avons comptabilisé de nouveau les tâches ciblant l'activité de démonstration dans chacune des étapes, en prenant soin de regrouper les tâches qui étaient jugées similaires, eu égard à la démonstration, et de ne compter qu'un seul représentant pour chacun de ces groupes. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 5.1.

Tableau 5.1
Nombre de tâches distinctes faisant intervenir l'activité de démonstration pour chacune des étapes du cours *Mathématiques pour les sciences*.

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Total
Nombre total de tâches proposées	100	77	87	56	320
Nombre de tâches portant sur la démonstration	41	5	11	3	60
Nombre de tâches distinctes portant sur la démonstration	19	4	5	2	30

Ces nouvelles données permettent d'avoir un regard plus juste sur la variété des tâches portant sur la démonstration : des 60 tâches relevées, 30 requièrent la construction de démonstrations jugées distinctes. C'est donc dire que la moitié des tâches proposées sont en fait des exercices d'applications visant à reproduire des démarches connues. Dans le même ordre d'idée, nous trouvons important de mentionner que plusieurs des tâches demandées aux étudiants sont composées d'une multitude de sous-questions nécessitant l'élaboration de démonstrations similaires (par exemple, voir les tâches 9, 10 et 47 présentées au chapitre V). Ce traitement qui est fait de l'activité de démonstration est, selon nous, discutable. Construire des démonstrations dont les éléments-clés sont connus ne suscite pas, à notre avis, la mise en œuvre d'un véritable raisonnement déductif. Il s'agit plutôt d'un travail d'adaptation, souvent élémentaire et de nature algébrique, des arguments qui ont été utilisés pour résoudre une tâche similaire. Alors que le raisonnement déductif est mis à profit lors du premier contact de l'étudiant avec un problème de démonstration, les tâches équivalentes qui suivent sont routinières pour l'étudiant qui appliquera, pratiquement par automatisme, les arguments mis au jour lors de la première résolution d'une tâche de ce type. Bien qu'un tel travail répétitif soit bénéfique, et même nécessaire, pour travailler certains aspects en mathématiques, tels que la factorisation de polynômes, nous croyons que ce type d'approche est incomplet en ce qui a trait à l'enseignement du formalisme et de la démonstration mathématique.

Selon nous, deux aspects distincts doivent être pris en considération dans l'enseignement du formalisme et de la démonstration. Dans un premier temps, un travail routinier, tel que celui proposé dans le cours *Mathématiques pour les sciences*, a, à notre avis, sa raison d'être puisqu'il permet de travailler certains éléments d'apprentissage importants concernant le formalisme, le symbolisme et la syntaxe mathématique. En effet, l'étudiant doit se familiariser avec les nouveaux éléments de symbolisme qui lui sont présentés. Il doit pouvoir les manipuler adéquatement en respectant les règles inhérentes aux objets représentés par les symboles utilisés. Ce type de travail est d'ailleurs requis dans les tâches de démonstrations portant sur les nombres complexes présentées à l'étape 4 du cours (voir tâches 58, 59 et 60). Pour résoudre ces tâches, l'étudiant doit être en mesure de gérer correctement les représentations binomiales et polaires des nombres complexes. Il doit pouvoir opérer sur ces formes en respectant les règles établies dans cet ensemble numérique.

Malgré les bienfaits de ce type de travail quant à l'apprentissage du symbolisme et de la syntaxe mathématique, nous croyons que celui-ci est insuffisant pour travailler la démonstration. En effet, un travail d'ordre déductif où le raisonnement repose sur le sens des objets en cause, et non sur leur forme, est essentiel dans l'apprentissage de la démonstration. Tel qu'explicité précédemment, une fois les rouages d'un type de démonstrations exposés, l'étudiant les appliquera sans raisonner aux autres tâches similaires évacuant, par le fait même, une partie importante du travail d'ordre déductif. De plus, le fait de demander à l'étudiant de résoudre plusieurs tâches similaires envoient une image distordue de l'activité de démonstration. Selon nous, cette situation peut amener l'étudiant à voir la démonstration comme un simple exercice à effectuer, au même titre qu'une résolution d'équation, plutôt qu'un véritable processus de validation.

En lien avec les propos tenus précédemment, nous tenons à soulever certaines questions concernant l'utilisation de tâches connues des étudiants lors des évaluations (voir tâches 46, 59 et 60). Quels éléments peuvent être évalués dans de telles tâches? Est-il possible, en ayant recours à ce type de tâches, d'évaluer la capacité des étudiants à mettre en œuvre un raisonnement déductif ? Si le raisonnement déductif est l'élément qui doit être évalué, comment s'assurer que l'étudiant a bel et bien raisonné sur la situation qui lui est présentée et qu'il n'a pas simplement recopié une démarche apprise par cœur? Nous sommes conscientes que le contexte des évaluations est particulier et régi par une multitude de contraintes, c'est pourquoi nous ne nous attarderons pas davantage sur le sujet. Nous tenions toutefois à exposer les interrogations qui sont nées de nos analyses.

5.5.4 Difficultés et éléments de formalisme suscités dans les tâches analysées

L'application de notre grille aux tâches proposées dans le cours *Mathématiques pour les sciences* a permis de relever les difficultés rencontrées et les éléments de formalisme sollicités dans les démonstrations demandées aux étudiants. Les principaux éléments observés sont présentés ci-dessous.

<u>Changement de point de vue à introduire sans indication</u>

Cette exigence identifiée par Robert (1998), qui fait son apparition dans les mathématiques avancées, est celle qui a été la plus observée dans l'ensemble des démonstrations étudiées. Sur les 60 tâches ciblant l'activité de démonstration, 64 changements de point de vue ont été relevés. Cette statistique, qui peut surprendre, est plausible. Rappelons que différents types de changements de point de vue ont été définis lors de notre analyse du manuel du cours *NYB* (voir § 4.1.1.4) et qu'une tâche peut nécessiter l'introduction de plus d'un type de changements de point de vue, et même le recours à plus d'un changement de point de vue d'un même type.

Tel que mentionné précédemment, notre analyse préalable du manuel du cours *NYB* nous a permis de mettre en lumière trois formes de changements de point de vue :

- *Changement de point de vue réalisé par l'introduction d'un nouvel objet.*
- *Changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche.*
- *Changement de point de vue nécessité par la méthode de preuve utilisée.*

Chacun de ces types est sollicité par le cours du cégep Ahuntsic, mais dans des proportions différentes.

La première forme de changement de point de vue a été relevée dans deux tâches. Une d'entre elles, la tâche 34 (voir § 5.1.2), correspond à la démonstration de l'unicité de l'inverse multiplicatif dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ qui devait être lue dans une section théorique du manuel. La présentation qui a été faite par le manuel des nouveaux objets à traiter est, selon nous, ambiguë et lacunaire. Le lien qui unit chacune des égalités est difficile à percevoir et aucune justification ne vient appuyer l'introduction de ces éléments (voir tâche 34). Pourquoi doivent-ils être introduits? Comment ont-ils été construits? sont des questions que se poseront sans doute un bon nombre d'étudiants désireux de comprendre les rouages du raisonnement. Ce type de changement de point de vue est complexe à effectuer, car l'étudiant doit avoir une compréhension approfondie de la situation et une vision globale du raisonnement à mettre en jeu. Pour faciliter la tâche de l'étudiant, nous aurions souhaité que le manuel fournisse des explications supplémentaires sur l'origine de ces éléments. Pour pallier à cette lacune, une solution, rédigée par l'auteur de cette recherche, a été proposée (voir p. 230). Cette démonstration permet, à notre avis, de mieux comprendre d'où sont issus les éléments introduits et quels sont leurs rôles dans la démonstration.

Le second type de changement de point de vue est celui qui est le plus sollicité par *Mathématiques pour les sciences*. En effet, 38 des 64 changements de points de vue repérés sont de ce type. Nous avons pu les subdiviser en deux sous-catégories : les changements de point de vue portant sur la réécriture de notions mathématiques et les changements de point de vue portant sur la réécriture d'opérateurs logiques.

- La première sous-catégorie, qui regroupe 30 changements de points de vue, nécessite de l'étudiant qu'il ré-exprime, dans une forme dévoilant davantage l'orientation de la démonstration, des notions mathématiques traitées dans l'énoncé de la tâche. Par exemple, les nombres pairs et impairs de la tâche 10 et l'expression « un nombre divisible par » mentionné à la tâche 13 doivent être exprimés algébriquement pour mener à bien les démonstrations attendues. Il importe, selon nous, d'apporter une précision sur la statistique fournie un peu plus haut. Parmi les 30 changements de points de vue observés, plusieurs portent sur les mêmes notions mathématiques. Les notions de parité et de divisibilité touchent, à elles seules, près de la moitié de ces changements, soit 14. Cette observation est tout à fait cohérente avec les propos tenus précédemment quant à la présence de plusieurs tâches similaires dans le manuel.

- La seconde sous-catégorie, qui regroupe 8 changements de point de vue, porte sur la réécriture d'opérateur logique. La tâche 20 illustre bien cette situation, car une expression comportant une biconditionnelle doit être ré-exprimée de façon à traiter séparément l'implication directe et sa réciproque. Cette réécriture dévoile la structure générale de la démonstration qui doit être élaborée. La présence non-négligeable de ce type de changements de point de vue est selon nous explicable, du moins partiellement, par la place qui est accordée à la logique formelle dans l'apprentissage de la démonstration.

Finalement, le dernier type de changement de point de vue, *changement de point de vue nécessité par la méthode de preuve utilisée*, a été observé à 24 reprises. Ce nombre ne nous surprend nullement, car un des objectifs du cours est justement l'apprentissage des différentes méthodes de preuve.

Les changements de point de vue sont souvent des éléments déclencheurs qui tracent la voie aux étapes subséquentes de la démonstration. Un étudiant qui ne percevrait pas l'utilité d'avoir recours à de tels changements se verrait bloqué dès le départ de la démonstration. L'importance qu'ont ces changements n'est souvent pas en phase avec la place qu'il occupe dans l'enseignement des mathématiques avancées. Selon Robert (1998), ces changements de point de vue sont souvent passés sous silence par les enseignants, qui ont tendance à les tenir pour acquis. C'est pourquoi nous trouvons pertinent, et même essentiel, le travail qui est fait dans le cours pour mettre les étudiants en contact avec cette nouvelle exigence des mathématiques avancées.

<u>Nécessité d'une écriture quantifiée</u>

Un travail important est fait par *Mathématiques pour les sciences* sur les énoncés quantifiés. Une section théorique du manuel est d'ailleurs réservée à l'étude des quantificateurs universels, existentiels et d'unicité. Le symbolisme inhérent à ces quantifications et leurs négations y sont traités explicitement. En plus de cet enseignement direct, les énoncés quantifiés jouent un rôle non négligeable dans plusieurs des tâches.

Le premier type de tâches dans lequel la prise en considération des quantificateurs, explicités ou non, est nécessaire est constitué des démonstrations mettant en jeu un raisonnement par l'absurde. La mise en œuvre de ce type de raisonnement nécessite de déterminer la négation de l'énoncé à démontrer, requérant par le fait même de repérer et traiter adéquatement les quantifications qu'il comporte. Le traitement requis ici a également été relevé dans notre analyse du manuel du cours *Calcul intégral NYB*.

En plus de ce que nous venons de voir, le cours du cégep Ahuntsic pousse un peu plus loin le travail fait sur les quantifications en traitant un sujet important en mathématiques, mais que nous n'avons pas relevé en *NYB*. Plusieurs des tâches analysées (voir tâches 8, 29 et 39, § 5.1.2) portent sur la recherche d'un contre-exemple, ce qui nécessite une étude attentive des quantifications impliquées. Effectivement, le fait de pouvoir réfuter un énoncé quantifié universellement par la présentation d'un seul contre-exemple s'appuie sur une compréhension complète des quantifications mathématiques et de leur négation. Alors que les tâches présentées précédemment mettent en jeu des quantifications explicites, certaines tâches proposent un défi supplémentaire aux étudiants en leur présentant des énoncés dont les quantifications sont implicites (voir tâches 11 et 24, respectivement pages 191 et 218). Bien que non mentionnées directement, ces quantifications doivent être repérées si l'étudiant veut justifier la réfutation de l'énoncé donné par un contre-exemple.

La présence, dans certaines tâches, de quantifications implicites permet, selon nous, de confronter les étudiants à une réalité présente dans les mathématiques avancées. Tel que le rapportent Selden et Selden (1995), plusieurs enseignants et manuels traitent « informellement »[27] les théorèmes et définitions mathématiques requérant ainsi de l'étudiant qu'il mette à jour la structure logique sous-jacente. La perception de cette structure est souvent nécessaire pour construire la démonstration attendue. Cette mise à jour de la structure logique pour des énoncés informellement organisés n'est pas une mince affaire à accomplir et s'avère être une source de difficulté importante pour plusieurs étudiants (Selden

---

[27] Le terme « informellement » a été choisi pour rester fidèle aux propos de Selden et Selden (1995). Selon ces auteurs, les *énoncés informels* sont ceux explicités dans le langage naturel où certaines quantifications sont parfois sous-entendues.

et Selden, 1995). Nous croyons donc qu'entamer un tel travail au niveau collégial est plus que souhaitable.

Exigences en matière de démonstration qui ne sont pas ou faiblement sollicitées dans *Mathématiques pour les sciences*

La majorité des tâches du cours *Mathématiques pour les sciences* fait intervenir un nombre restreint d'arguments. Mais de plus, la nature des arguments mis en jeu dans ces tâches est, selon nous, simple. En fait, les arguments à faire intervenir sont souvent issus directement du manuel de référence, et plus précisément des sections théoriques adjacentes à la section d'exercices d'où est issue la tâche. Les tâches demandées à l'étape 1 constituent un bon exemple de cette situation. Celles-ci se déroulent, pour la majorité, dans le domaine de la théorie élémentaire des nombres et font par conséquent intervenir les propriétés des opérations dans les entiers. Bien que ces propriétés aient été traitées au secondaire, le manuel propose un rappel détaillé de ces éléments au tout début du chapitre portant sur les méthodes de preuves. Ce rappel crée un mini-système axiomatique auquel peut se référer l'étudiant. L'étudiant n'a donc pas à puiser dans ses connaissances antérieures, car tout ce dont il a besoin peut être trouvé dans le recueil du cours. Cette situation est, à notre avis, une lame à double tranchant. Bien qu'elle permette de bien définir les éléments sur lesquels peuvent s'appuyer l'étudiant, elle ouvre également la porte à des stratégies de résolution basées sur des essais-erreurs, plutôt que sur la mise en œuvre de déductions. En effet, un étudiant pourrait utiliser un processus d'élimination consistant à passer en revue les derniers théorèmes et les dernières notions pour tenter de voir lesquels permettent de mener à bien la démonstration et ce, plutôt que de tenter de raisonner à partir des informations données dans l'énoncé de la tâche.

En ce qui concerne leur accessibilité, c'est-à-dire avec quelle facilité les arguments peuvent être déduits de l'énoncé à démontrer, nous croyons que la plupart des tâches proposées ne requièrent aucune analyse préalable. En fait, ceux-ci découlent souvent directement d'un changement de point de vue qui doit être effectué par l'étudiant. Ces changements de point de vue effectués, plusieurs démonstrations se résument à la réalisation de simples calculs (par exemple, voir les tâches 10 et 24, § 5.1.2 , et la tâche 43, § 5.2.2).

Une tâche est selon nous un peu à part des autres et il s'agit de la démonstration du *Théorème des racines* $n^{ièmes}$ demandée lors de l'étude des nombres complexes à l'étape 4 du cours (voir tâche 60, § 5.4.2). Les arguments à mettre en œuvre requièrent selon nous une compréhension approfondie de la situation. L'étudiant doit comprendre les différentes composantes de la représentation polaire d'un nombre complexe. Plus précisément, il doit comprendre l'impact de l'application de chaque opération sur chacune des composantes de la représentation polaire. De plus, la tâche 60 nécessite une sélection d'informations (il s'agit d'ailleurs de la seule tâche comportant cette exigence) ce qui complique, selon nous, davantage le travail de l'étudiant. Effectivement, il doit démontrer l'énoncé initial en deux temps : la démonstration que l'expression fournie est bel et bien une racine n^{e} de u et la démonstration que les n racines $n^{\text{ièmes}}$ sont distinctes. Cette sélection d'informations requise oblige l'étudiant à analyser la situation pour déterminer quels arguments doivent être mis à profit **et** dans quelle sous-démonstration. Mais ces propos doivent être relativisés. Bien que la démonstration du théorème doive être construite par l'étudiant à la tâche 60, le fait que le théorème et sa démonstration aient été fournis dans une section théorique du manuel nous pousse à croire que plusieurs des éléments de complexité décrits précédemment seront amoindris. Par exemple, la sélection d'informations qui auraient pu être difficile à percevoir sera désormais facilement identifiable si l'étudiant a préalablement pris connaissance de la démonstration proposée par le manuel.

La dernière exigence en matière de démonstration qui compose notre grille d'analyse est la *Répétition d'arguments*. Celle-ci n'a été relevée dans aucune des tâches analysées.

<u>Le formalisme et *Mathématiques pour les sciences*</u>

Le formalisme occupe une place centrale dans le cours du cégep Ahuntsic. Chacune des étapes du cours comporte des objectifs ciblant l'apprentissage d'un vocabulaire et d'un symbolisme mathématique précis, liés au sujet abordé. Cette emphase sur le formalisme est nettement perceptible dans plusieurs des tâches analysées. Dans certaines de ces tâches, le travail d'ordre symbolique et syntaxique effectué surpasse même, selon nous, le travail d'ordre déductif sollicité. On peut se demander si, dans ces cas, la démonstration ne servirait pas plutôt d'un prétexte permettant d'effectuer un travail d'ordre symbolique ou même algébrique. Plusieurs des tâches étudiées reposent en effet sur la compréhension du symbolisme en jeu, le raisonnement déductif qui en découle est relativement élémentaire et ne présente pas de véritable défi pour l'étudiant. La véritable difficulté est plutôt liée à l'interprétation et la compréhension des expressions symboliques données. La démonstration de l'égalité $A_r^n = nA_{r-1}^{n-1}$ (voir tâche 43, § 5.2.2) en est un excellent exemple. La démonstration attendue repose entièrement sur la compréhension et la traduction à l'aide de la factorielle du symbole d'arrangement. Une fois cette étape effectuée, le raisonnement déductif mis en jeu est pris en charge par le calcul. Les tâches portant sur la compréhension des opérateurs logiques (voir les tâches 1 à 5, § 5.1.2), celles traitant du symbolisme inhérent à la théorie des ensembles (voir tâche 38, § 5.1.2) ou celles reposant sur le symbolisme lié aux nombres complexes (voir les tâches 58 et 59, § 5.4.2) sont d'autres exemples illustrant cette situation.

Ce travail d'ordre symbolique et syntaxique est, selon nous, tout à fait pertinent puisqu'il permet aux étudiants de se familiariser avec les différents symbolismes introduits et de s'approprier leurs règles syntaxiques. Le cours de transition vers la preuve accorde d'ailleurs beaucoup d'importance à ce travail lié au formalisme. Devant ce constat, une question peut se poser : est-ce que l'emphase mise sur le formalisme n'a pas amené une certaine négligence du travail d'ordre déductif, qui est tout aussi important dans l'apprentissage de la démonstration? Selon nous, les sujets mathématiques ciblés par *Mathématiques pour les sciences* peuvent avoir contribué à favoriser un travail d'ordre symbolique et syntaxique, au détriment du travail d'ordre déductif. En effet, certains des sujets abordés, tels que les nombres complexes et les notions d'arrangement (A_r^n) et de combinaison (C_r^n), ne sont peut-être pas des contextes qui se prêtent facilement à des raisonnements déductifs complexes. Se pourrait-il donc que le choix du cours de mettre à l'avant plan le travail d'ordre symbolique et syntaxique ait été influencé par le choix des contenus abordés?

Un second type de tâches relègue au deuxième plan l'activité de démonstration en l'utilisant comme un prétexte pour la réalisation d'un travail d'ordre algébrique. Les démonstrations d'identités requises à l'étape 1 (voir tâches 6, 25 et 26, § 5.1.2) en sont d'excellents exemples. Le raisonnement déductif mis en œuvre dans ce type de démonstrations est pris en charge par le calcul. Un étudiant habile à manipuler des expressions algébriques n'éprouvera aucune difficulté à résoudre cette tâche, l'aspect déductif de la démonstration étant subordonné aux manipulations algébriques à effectuer.

Encore une fois, le traitement qui est fait ici de la démonstration la détourne selon nous de son sens de processus de validation, la reléguant à l'exercice d'application de définitions ou de manipulations algébriques.

Outre sa présence dans les tâches de démonstration, le formalisme mathématique est également traité via d'autres types de tâches[28] portant expressément sur la compréhension de symboles mathématiques nouvellement introduits.

Éléments de formalisme sollicités dans *Mathématiques pour les sciences*

L'application de notre grille d'analyse a permis de mettre en lumière les principaux éléments de formalisme sollicités dans le cours du cégep Ahuntsic.

Tel que mentionné précédemment, le cours accorde une place importante à l'apprentissage du vocabulaire et du symbolisme propre à chacun des thèmes abordés. Il n'est donc pas surprenant que le symbolisme lié à la théorie des ensembles, à la logique propositionnelle, à l'analyse combinatoire, aux probabilités, aux suites et aux nombres complexes ait été sollicité dans plusieurs des tâches analysées. Mise à part la présence de ces différents symbolismes, certains des éléments soulevés dans notre analyse du manuel *NYB* (voir chapitre IV) ont été relevés dans *Mathématiques pour les sciences*. Ces éléments sont les suivants.

L'élément de formalisme *Pluralité de symboles littéraux* est celui qui est le plus suscité. En effet, plusieurs énoncés à démontrer doivent être traduits algébriquement, nécessitant par le fait même l'introduction de plusieurs symboles littéraux. Ceux-ci s'ajoutent aux symboles littéraux initialement présents dans la tâche et l'étudiant doit être en mesure de voir le lien qui unit certains d'entre eux ainsi que le rôle joué par chacun. Bien qu'une pluralité de symboles littéraux ait été repérée dans un nombre non négligeable de tâches, la gestion de ces symboles

[28] Par exemple : « Exercice 2.8.2 : Vrai ou faux? Si $E = \{1, 2\}$, alors : a) $\{1\} \in E$, b) $\{1\} \subset E$, c) $\{1\} \in P(E)$, d) $\{1\} \subset P(E)$, e) $\{\{1\}\} \subset P(E)$ » (Bourbonnais, 2008, p. 27)

est, selon nous, relativement élémentaire. La tâche 58, portant sur les propriétés du conjugué des nombres complexes, est un excellent exemple. L'utilisation de la représentation binomiale pour exprimer les nombres complexes impliqués dans l'énoncé nécessite l'introduction de symboles littéraux qui devront être manipulés lors de la construction de la démonstration. Les étudiants devront comprendre le rôle de chacun (représenter la partie réelle/imaginaire du nombre ou la particule *i*) et les manipuler adéquatement dans la démonstration. Ces manipulations sont toutefois simples, elles reposent sur la définition des opérations élémentaires dans l'ensemble des nombres complexes.

L'élément *Travail sur les inégalités* a également été relevé dans une des tâches analysées, soit la tâche 49 (§ 5.3.2). Celle-ci nécessite la construction d'une démonstration par récurrence et le travail sur les inégalités doit être réalisé lors de la démonstration du pas. L'étudiant doit être en mesure de passer d'une égalité à une inégalité en ajoutant et majorant certains termes. Bien que cet élément de formalisme n'ait été repéré que dans une seule tâche, nous croyons que ce type de travail est nécessaire pour préparer les étudiants à affronter certaines exigences des mathématiques avancées. En effet, les définitions en $\varepsilon - \delta$, qui font leur apparition dans les cours universitaires d'analyse, requièrent ce traitement des inéquations. Il est donc selon nous souhaitable que les étudiants y aient été confrontés au niveau collégial. Nous sommes cependant conscientes que les sujets mathématiques qui se prêtent à un tel travail ne sont pas faciles à trouver.

En plus de cet élément de formalisme, la tâche 49 sollicite l'utilisation d'un second élément de formalisme, soit le *Recours à des représentants génériques*. En fait, cet élément de formalisme est présent dans chacune des tâches nécessitant la mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence. En effet, la démonstration du pas nécessite l'introduction de l'élément générique k. La démonstration du pas consiste à démontrer que si la proposition est vraie pour une certaine valeur k, alors elle le sera pour la valeur suivante, k+1. Le caractère générique de k est essentiel ici puisqu'il va permettre, en combinant la démonstration du pas à celle de la base, de déduire la validité de la proposition pour l'ensemble des valeurs du référentiel.

Finalement, l'élément de formalisme *Calculs, manipulation des formules* est aussi suscité dans le cours du cégep Ahuntsic. Tel que nous l'avons mentionné antérieurement, des tâches telles que la démonstration de l'égalité $A_r^n = nA_{r-1}^{n-1}$ (voir tâche 43) cible davantage la compréhension du symbolisme impliqué et la manipulation algébrique que l'élaboration d'un raisonnement déductif. Le travail accompli dans ces tâches est important car, tel que le rapporte Corriveau (2007), les étudiants semblent arriver au cégep avec des lacunes importantes en algèbre. Ce type de tâche peut selon nous permettre de pallier ces lacunes.

5.5.5 Attitude de preuve travaillée à travers les tâches analysées

Le premier volet ayant retenu notre attention eu égard au travail sur l'attitude de preuve est la forte présence d'indices explicites et implicites dans les tâches analysées. Parmi les 60 tâches étudiées, 11 sont des tâches dont la démarche doit entièrement être découverte par l'étudiant. Le tableau ci-dessous permet de voir la répartition de ces tâches dans les quatre étapes du cours.

Tableau 5.2
Nombre de tâches distinctes et ne comportant aucun indice
dans le cours *Mathématiques pour les sciences*

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Total
Nombre total de tâches proposées	100	77	87	56	320
Nombre de tâches portant sur la démonstration	41	5	11	3	60
Nombre de tâches distinctes[29] portant sur la démonstration	19	4	5	2	30
Nombre de tâches distinctes ne comportant aucun indice	8	3	0	0	11

[29] À la section 5.5.3, nous avons soulevé que plusieurs tâches requièrent la construction de démonstrations similaires. Ces tâches ont été regroupées et un seul représentant par groupe a été compté de manière à mettre en relief le nombre de tâches distinctes, eu égard à l'activité de démonstration.

Il y a donc 49 tâches qui comportent des indices orientant d'une façon plus ou moins précise le travail de l'étudiant. Ces indices peuvent être donnés dans l'énoncé de la tâche (par exemple, voir tâche 15, § 5.1.2) ou implicitement dans une section théorique antécédente du manuel. Plusieurs des tâches analysées nécessitent en effet la construction de démonstrations qui sont en fait des copies pratiquement conformes d'un exemple présenté dans une section théorique (par exemple, voir tâche 9, § 5.1.2). Une telle pratique ne permet pas vraiment selon nous d'effectuer un réel travail sur le raisonnement déductif, mais repose plutôt sur l'application d'une marche à suivre préalablement définie. Les mises en fonctionnement des connaissances suscitées y sont de niveau technique et ne présentent pas de véritable défi pour l'étudiant. Le manuel propose également des « recettes » pour résoudre des types de problèmes particuliers. C'est d'ailleurs ce qui est fait à la section théorique 4.4 portant sur la démonstration d'identités. Dans cette section, deux méthodes pour effectuer de telles démonstrations sont présentées aux étudiants qui n'ont plus qu'à appliquer l'une d'entre elles pour mener à bien les tâches proposées ensuite. La présentation de ces méthodes relègue au niveau de l'exercice d'application des tâches qui étaient, de prime abord, pourtant assez simples à résoudre.

Le second volet que nous voulons traiter eu égard à l'attitude de preuve est le caractère ouvert/fermé des énoncés à démontrer. Après avoir observé l'ensemble des tâches, nous en avons relevé 7 présentant des énoncés ouverts (voir les tâches 8, 10, 11, 14, 24, 29 et 39). Rappelons que nous entendons par « énoncé ouvert », un énoncé dont la valeur de vérité doit être déterminée par l'étudiant. Cette statistique est quelque peu décevante car, idéalement, l'activité de démonstration devrait découler de la nécessité d'établir la validité d'un énoncé et non d'une directive imposée. Nous sommes conscientes que l'utilisation exclusive d'énoncés ouverts est difficilement envisageable dans un contexte scolaire, cependant certaines des tâches proposées auraient selon nous pu être énoncées différemment de manière à laisser planer un doute sur la validité des affirmations. Ce doute fait comprendre à l'étudiant la nécessité de la validation et donne ainsi un sens à l'activité de démonstration.

Une des tâches qui aurait, à notre avis, pu être formulée de façon plus ouverte est la tâche 15, portant sur les polynômes de Legendre (voir page 201). Dans le recueil du cours, l'énoncé de la tâche comporte un indice dévoilant l'ensemble de la démarche à élaborer. Un tel indice a pour effet d'éliminer une bonne part du raisonnement déductif à mettre en œuvre pour la remplacer par la réalisation de manipulations algébriques et arithmétiques prescrites. Le simple retrait de l'indice aurait, selon nous, permis d'effectuer un travail plus substantiel eu égard à l'activité de démonstration. En effet, dans ce cas, un changement de point de vue aurait dû être introduit par l'étudiant. L'expression « $P(16)$ n'est pas un nombre premier » aurait dû être ré-exprimée en une forme dévoilant davantage l'orientation de la démonstration : $P(16)$ peut être exprimé comme un produit de deux facteurs dont aucun ne vaut 1 ou -1. C'est d'ailleurs ce changement de point de vue qui est mis en lumière par l'indice fourni dans l'énoncé de la tâche.

Bien que cette modification aurait eu pour effet d'augmenter le niveau de difficulté de la tâche, nous pensons qu'une reformulation plus importante aurait eu davantage de bénéfices. Nous croyons que le contexte des polynômes de Legendre peut donner naissance à une tâche encore plus riche du point de vue de l'activité de démonstration. Il aurait été intéressant de présenter les deux polynômes de Legendre en demandant à l'étudiant de statuer sur la validité de l'affirmation : est-ce que ces deux polynômes donnent des nombres premiers pour toutes les valeurs de n, n étant un nombre naturel? Cette question présente selon nous plusieurs avantages. La valeur de vérité de l'énoncé n'étant pas explicitée, l'étudiant doit analyser la situation pour tenter de déterminer si oui ou non les polynômes donnés produisent des nombres premiers pour tous les nombres naturels. Cette quête de la vérité passe par la recherche d'un contre-exemple, ce qui n'est pas un travail facile dans le présent contexte, car les contre-exemples arrivent assez tard, soit $n = 16$ pour le premier polynôme et $n = 29$ pour le second. Cette situation pourrait confondre certains étudiants qui auraient statué sur la validité de l'énoncé après seulement quelques essais. Une fois le contre-exemple trouvé, l'étudiant aurait eu à démontrer qu'il ne s'agit effectivement pas d'un nombre premier, ce qui fait intervenir le changement de point de vue décrit précédemment.

En plus de cette relative rareté des tâches ouvertes, la simplicité de celles-ci est, à nos yeux, souvent trop grande pour que l'étudiant soit pousser à ressentir le processus de validation comme une nécessité intérieure. En fait, dans les tâches ouvertes proposées, l'activité de démonstration semble davantage servir de prétexte à l'utilisation de certaines définitions ou à la compréhension d'un symbolisme précis qu'à la mise en jeu d'un raisonnement d'ordre déductif. Par exemple, la valeur de vérité des tâches 8, 29 et 39 (voir § 5.1.2) peut être déterminée en décodant le symbolisme ensembliste et les quantificateurs impliqués et les valeurs de vérité des énoncés de la tâche 10 reposent sur la définition d'un nombre pair et impair et leur représentation algébrique. Le symbolisme et les définitions à décoder ayant souvent été définis dans des sections théoriques du manuel et mis à profit dans d'autres tâches, ils ne représentent plus un défi pour l'étudiant. Il peut s'appuyer sur ce qui a été vu préalablement pour résoudre efficacement et rapidement les tâches de « démonstrations » proposées. Ce type de tâche pousserait, selon Brousseau (1998), les étudiants à appliquer des recettes plutôt qu'à entrer dans un véritable processus de validation mis en œuvre à partir d'un doute profond et d'une nécessité d'établir la vérité.

Nous sommes conscientes que les tâches qui posent un véritable « enjeu de vérité » (Grenier et Payan, 1998) ne sont pas faciles à trouver. Par ailleurs, malgré le fait que les exercices d'application décrits précédemment ne soient pas optimaux pour susciter une attitude de preuve, ils ont comme souci d'exercer l'étudiant sur le symbolisme et la syntaxe, ce qui est aussi un travail important.

5.5.6 Complexité de la structure déductive des démonstrations étudiées

L'analyse des tâches a mis en lumière la simplicité de la structure déductive de plusieurs des démonstrations étudiées. Effectivement, la majorité des démonstrations analysées possèdent des structures déductives linéaires composées de peu de pas déductifs. Le manque de variété dans les structures déductives étudiées, ainsi que leur simplicité, envoient, selon nous, une image incomplète de l'activité de démonstration. En effet, nous croyons que plusieurs étudiants pourraient déduire de cette situation que la démonstration se limite à un enchaînement linéaire de pas déductifs, c'est-à-dire une chaîne d'inférences où la conclusion du pas précédent devient la prémisse du pas suivant. Cette situation, qui s'avère fondée dans le cadre du cours, est néanmoins inapplicable à un bon nombre de démonstrations des mathématiques avancées, nécessitant souvent la prise en considération simultanée de plusieurs arguments.

Les seules démonstrations de *Mathématiques pour les sciences* échappant à ce schéma déductif linéaire sont celles nécessitant la mise en œuvre d'un raisonnement par disjonction de cas ou par récurrence, ainsi que les démonstrations des énoncés comportant une biconditionnelle. En effet, dans ces cas, des sous-démonstrations doivent être construites en parallèle pour ensuite être combinées dans l'optique de déduire la conclusion souhaitée. Par exemple, les démonstrations par récurrence nécessitent la construction de deux sous-démonstrations, soit la démonstration de la base et la démonstration du pas, et la validité de l'énoncé initial est déduite de la combinaison de ces deux sous-démonstrations. La complexité de la structure déductive des démonstrations traitées ici est intimement liée à la méthode de preuve employée. Étant donné que les méthodes de preuves sont décortiquées dans les sections théoriques du manuel et que plusieurs exemples y sont présentés, l'étudiant connaît, avant même de commencer à élaborer la démonstration requise par ces types de tâches, la structure qui devra être déployée ce qui oriente, et par le fait même facilite, la résolution de la tâche. Nous sommes néanmoins conscientes que la structure sous-jacente de certaines méthodes de preuve, telles que la démonstration par récurrence, est une source de difficultés pour certains étudiants et ce, même si cette structure leur a été exposée à plusieurs reprises.

5.5.7 Commentaires généraux sur les tâches analysées

L'application de notre outil d'analyse à l'ensemble des tâches ciblées par l'enseignante et requérant l'élaboration d'une démonstration a permis de mettre en lumière plusieurs aspects caractérisant, par leur présence ou leur absence, les démonstrations demandées dans le cours à l'étude. Ces aspects, soit les nouvelles exigences suscitées en matière de démonstration, telles que décrites par Robert (1998), la complexité de la structure déductive, l'attitude de preuve sollicitée et les éléments de formalisme présents dans les démonstrations étudiées, ont tous été traités et présentés précédemment dans ce bilan. En plus de ces aspects, l'étude des tâches ciblées nous a permis de repérer certains éléments connexes à l'activité de démonstration et propres au cours du cégep Ahuntsic qui méritent, selon nous, d'être abordés. Bien que ceux-ci ne soient pas formellement identifiés dans notre grille d'analyse, ils contribuent à tracer un portrait précis de la préparation à l'activité de démonstration et au formalisme qui est proposée par le cours *Mathématiques pour les sciences*.

Niveau de rigueur attendu dans les tâches étudiées

Le niveau de rigueur et de formalisation qui est attendu dans certaines des tâches proposées surpasse, selon nous, le niveau qui pourrait être perçu comme nécessaire par l'étudiant. La tâche 11 en est un bon exemple. L'étudiant doit y démontrer que si x est un nombre rationnel, alors x^2 est également un nombre rationnel. En posant $x = a/b$, l'étudiant peut rapidement déduire que x^2 peut être exprimé par c/d, ce qui correspond à la représentation algébrique d'un nombre rationnel, où $c = a^2$ et $d = b^2$. Alors que cette portion de la démonstration attendue est sans doute perçue comme essentielle par les étudiants, nous croyons que certains d'entre eux ne penseront pas à démontrer que c et d sont des entiers et que d est non nul. En effet, ceux pour qui la nature des éléments c et d est évidente ne verront et comprendront pas du tout la nécessité de la valider. Pourquoi démontrer ce qui est de prime abord évident? La prise en considération de ce type de tâches nous permet d'avancer que la simplicité de certaines tâches proposées ne pousse pas spontanément l'étudiant à avoir recours au niveau de rigueur et de formalisme qui est attendu de lui. De plus, plutôt que de voir la pertinence du formalisme mathématique, celui-ci risque de le percevoir comme une exigence creuse et fastidieuse imposée par l'enseignant.

En plus de surpasser ce que l'étudiant perçoit comme nécessaire, nous croyons que le niveau de formalisme attendu dans certaines tâches est trop élevé. La démonstration fournie par le manuel au théorème des racines $n^{\text{ièmes}}$ est un bon exemple (voir tâche 60, théorème 2, § 5.4.2). L'utilisation de la progression arithmétique pour justifier le fait que les n racines trouvées sont distinctes, bien que rigoureuse, n'est, selon nous, pas essentielle. Un argument plus intuitif et moins formel aurait été tout aussi valable dans ce contexte. Par exemple, la représentation géométrique des n racines, qui est rapidement mentionné dans le solutionnaire du manuel, aurait pu être développée davantage et aurait ainsi constitué, à nos yeux, un argument complet et tout à fait valable.

Un troisième point doit être traité eu égard au niveau de rigueur et de formalisme attendu dans le cours étudié. Celui-là est d'ailleurs partiellement en contradiction avec les points développés précédemment. En effet, alors que certaines tâches nécessitent le recours à un niveau de rigueur et de formalisme surpassant la complexité de la tâche, d'autres tâches présentent d'importants manquements à la rigueur. Un bon exemple en est la tâche 10 (voir page 187). L'énoncé de cette tâche omet de mentionner l'ensemble numérique servant de référentiel aux diverses affirmations proposées, alors que la tâche n'a de sens que dans la mesure où le référentiel est restreint aux entiers. Or, ce n'est pas précisé et ça ne va pas nécessairement de soi.

De plus, les justifications fournies dans le corrigé pour certaines démonstrations sont, selon nous, imprécises. L'utilisation de la justification « simplification dans $\mathbb{Z}$ » dans plusieurs tâches en est une excellente représentation. Plutôt que de nommer la propriété des opérations mise à contribution, le manuel utilise une formule pouvant représenter plusieurs manipulations algébriques distinctes. D'ailleurs, le manuel utilise cette expression pour justifier plusieurs opérations différentes (telles que la distributivité et l'associativité). Pour ajouter à la confusion, le manuel, plutôt que de toujours utiliser cette expression pour justifier l'application d'une propriété des opérations, mentionne parfois explicitement la propriété qui a été utilisée. L'utilisation d'arguments différents pour justifier l'application d'une même propriété peut amener certains étudiants à se questionner sur les attentes du cours en matière de rigueur. Pourquoi la formule « simplification dans $\mathbb{Z}$ » était-elle adéquate pour certaine tâche, mais pas pour d'autres?

L'utilisation d'une expression générale telle que « simplification dans $\mathbb{Z}$ » n'est pas totalement à bannir. En effet, une fois une certaine maîtrise obtenue, on peut se permettre d'être plus succinct dans les justifications. Ce procédé est d'ailleurs courant en mathématiques. Cependant, nous croyons qu'avant de généraliser l'usage de telles justifications, il aurait été intéressant d'inclure dans le manuel une explication d'ordre « méta-mathématique » (voir par exemple le chapitre IV dans Dorier, 1997) explicitant les arguments couverts par cette expression.

CHAPITRE VI

CONCLUSION

6.1 Résumé du projet

Cette étude s'est, dans un premier temps, attardée à mettre au jour la transition abrupte entre les attentes en matière de démonstration et de formalisme de niveau secondaire et celles de niveau collégial (voir § 1.7). Dans l'optique d'aplanir cette transition secondaire-mathématiques avancées, certains cégeps ont décidé d'ajouter au programme *Sciences de la nature 200 B.0.* un quatrième cours obligatoire de mathématiques. Celui-ci cible l'apprentissage des différentes méthodes de preuves, tout en familiarisant les étudiants au formalisme et à la rigueur mathématique.

Ayant pris connaissance de l'existence de tels cours, nous avons décidé d'en sélectionner un, soit le cours *Mathématiques pour les sciences,* offert par le Cégep Ahuntsic, pour voir si ce cours permet effectivement de préparer les étudiants à la démonstration et au formalisme caractéristiques des mathématiques post-secondaires.

La réalisation de cet objectif, qui est d'ailleurs la visée première de la présente étude, a nécessité l'introduction d'un objectif intermédiaire. Cet objectif intermédiaire consiste à définir plus précisément ce qu'on entend par « attentes en matière de formalisme et de démonstration liées aux mathématiques avancées ». Bien qu'elles aient fait l'objet de plusieurs études, telle celle de Robert (1998), nous trouvions important d'identifier ces attentes dans le contexte de l'enseignement collégial québécois.

Pour répondre à cet objectif intermédiaire et complémentaire, un cours de niveau collégial, *Calcul intégral NYB*, a été retenu. Les tâches suscitant l'activité de démonstration et certaines démonstrations données dans les sections théoriques du manuel de référence du cours *Calcul intégral* (Charron et Parent, 2004) ont été analysées à l'aide de notre grille d'analyse. Cet outil, élaboré par Robert (1998) et modifié par Corriveau (2007), a permis d'évaluer l'attitude de preuve, la complexité des structures déductives, les éléments de formalisme et les nouvelles exigences, telles que définies par Robert (1998), sollicitées à travers le manuel. L'analyse de ce manuel de référence est incidemment présentée au chapitre IV. Une fois ceci réalisé, nous nous sommes attaquées à l'analyse, toujours à l'aide de notre grille, des tâches ciblées par le cours de transition vers la preuve du cégep Ahuntsic. L'analyse complète est présentée au chapitre V de ce mémoire.

Maintenant que nos analyses sont complétées, nous pouvons tenter de répondre aux questions à la source de cette recherche :

- est-ce que les difficultés inhérentes à l'activité de démonstration et au formalisme qui ont été travaillées à travers les tâches proposées par le cours *Mathématiques pour les sciences* correspondent à celles que les étudiants auront à affronter dans les cours de mathématiques avancées, et plus particulièrement en *Calcul intégral NYB*?
- au regard de ces mêmes mathématiques avancées, y a-t-il des éléments à travailler qui ne le seraient pas dans *NYB*, mais auxquels le cours *Mathématiques pour les sciences* suppléerait ? La combinaison de ces deux cours constitue-t-elle globalement une préparation adéquate ?

6.2 Préparation offerte par *Mathématiques pour les sciences* eu égard à la démonstration et au formalisme

Pour évaluer si les éléments ciblés dans *Mathématiques pour les sciences* préparent bel et bien aux attentes des mathématiques avancées, telles que relevées dans le manuel du cours *NYB*, les analyses des deux cours seront comparées. Les conclusions issues de cette comparaison sont présentées dans cette section.

Changement de point de vue à introduire sans indication

Les *changements de point de vue à introduire sans indication*, décrits par Robert (1998), constituent l'une des attentes relevées dans les deux cours à l'étude. Qui plus est, il s'agit de l'exigence la plus sollicitée dans chacun des deux cours.

Dans le manuel du cours *Calcul intégral NYB*, près des deux tiers des démonstrations analysées nécessitent l'introduction d'un changement de point de vue. Cette statistique est, à notre avis, révélatrice de l'importance de cette exigence dans le manuel étudié. Un étudiant préalablement mis en contact avec cette exigence sera sans doute mieux outillé pour faire face aux changements de point de vue requis par la suite. C'est d'ailleurs ce que permet, selon nous, le cours de transition vers la preuve du cégep Ahuntsic. En effet, les tâches qu'il propose permettent de se familiariser avec cette nouvelle exigence des mathématiques avancées, car des changements de point de vue de chacune des trois sous-catégories présentes dans le cours *NYB* (*Changement de point de vue réalisé par l'introduction d'un nouvel objet, Changement de point de vue réalisé par la modification des objets présents dans l'énoncé de la tâche et Changement de point de vue nécessité par la méthode de preuve utilisée*) sont sollicités (voir § 5.5.4) dans le cours *Mathématiques pour les Sciences*.

À notre avis, *Mathématiques pour les sciences* est même allé au-delà de certaines balises que nous avions identifiées dans notre analyse du manuel *NYB*. En effet, la troisième sous-catégorie de changements de point de vue, soit les *changements de point de vue nécessité par la méthode de preuve utilisée*, a fait l'objet d'un travail surpassant les attentes repérées dans le manuel de calcul intégral. Alors qu'uniquement les méthodes de preuve par l'absurde et par disjonction de cas étaient sollicitées en *NYB*, *Mathématiques pour les sciences* permet aux étudiants d'entrer en contact avec plusieurs autres méthodes de preuves telles que la preuve par la contraposée et la preuve par récurrence. Ces méthodes de preuves sont une source de difficultés pour les étudiants (Dreyfus et Ron, 2004; Stylianides *et al.*, 2004) et les inclure dans un cours de transition vers la preuve nous apparait être un bon moyen de mettre les étudiants en contact avec les changements de point de vue qu'elles requièrent.

Un bémol doit néanmoins être apporté quant à la préparation dispensée par *Mathématiques pour les sciences* face à l'exigence « changement de point de vue ». Les démonstrations requérant des changements de point de vue nécessités par l'introduction d'un nouvel objet (première sous-catégorie de changement de point de vue) sont peu sollicitées dans le cours du cégep Ahuntsic. En effet, uniquement deux démonstrations (voir tâche 34, § 5.1.2, et tâche 46, § 5.2.2), dont une présentée dans une section théorique du manuel, requièrent ce type de changements de point de vue. De plus, nous avions soulevé lors de notre analyse de la tâche 34 (cette tâche demande à l'étudiant de lire et comprendre une démonstration présentée dans une section théorique), qu'aucune explication n'accompagnait l'introduction des nouveaux objets. Nous aurions trouvé intéressant que des justifications soient apportées dans l'optique de faire comprendre aux étudiants d'où sont issus ces nouveaux éléments et quels sont leurs rôles dans la démonstration. Nous croyons que, eu égard à cette sous-catégorie de changements de point de vue, la préparation offerte par *Mathématiques pour les sciences* aurait pu être plus importante. Les changements de point de vue nécessitant l'introduction d'un nouvel objet sont sollicités dans 8 démonstrations du manuel du cours *NYB* et, tel que nous l'avons soulevé précédemment (voir § 4.2.1), aucune explication n'est fournie aux étudiants pour les aider à comprendre comment et pourquoi se fait l'introduction de ces objets dans la démonstration. Le manuel de *NYB* étudié passe ces changements de point de vue complètement sous silence. Il aurait donc été intéressant que *Mathématiques pour les sciences* lève le voile sur ce type de changements de point de vue en explicitant davantage pourquoi certains éléments doivent être inclus dans la démonstration et comment ceux-ci sont construits. Nous aurions également souhaité qu'un nombre plus important de tâches requérant ce type de changements de point de vue soit proposé afin de mieux préparer les étudiants à affronter les démonstrations présentées dans le manuel de Charron et Parent.

Nécessité d'une écriture quantifiée

Le travail accompli dans *Mathématiques pour les sciences* sur les quantificateurs est non-négligeable. Une section théorique du manuel de référence du cours porte explicitement sur ce sujet. Les quantificateurs existentiel, universel et d'unicité, ainsi que leur négation, y sont abordés.

En plus de faire l'objet d'un enseignement explicite, les quantificateurs jouent un rôle important dans plusieurs tâches analysées (voir § 5.5.4). Une des attentes en matière de quantifications que nous avons mise en lumière lors de notre analyse du manuel du cours *NYB* est la prise en considération des quantificateurs explicites et implicites contenus dans les énoncés qui doivent être démontrés par l'absurde. L'utilisation de cette méthode de preuve nécessite de prendre la négation de l'énoncé à démontrer, ce qui demande à l'étudiant de repérer et gérer efficacement les quantifications qu'il comporte. Six tâches proposées dans *Mathématiques pour les sciences* (voir les tâches 19, 22, 23, 33, 34 et 40 présentées au chapitre V) permettent aux étudiants de se familiariser avec cette exigence. Il ne s'agit cependant pas du seul type de tâches où les quantificateurs jouent un rôle de premier plan. En effet, le cours de transition vers la preuve du cégep Ahuntsic propose également plusieurs tâches (voir tâches 8, 11, 24, 29 et 39) nécessitant la recherche d'un contre-exemple. La recherche d'un contre-exemple passe par la compréhension des quantifications en cause dans l'énoncé qu'on veut réfuter et requiert, de la part de l'étudiant, qu'il soit capable de déceler les quantifications implicites dans l'énoncé (par exemple, voir tâche 11 présentée à la page 191).

Mathématiques pour les sciences propose également des tâches portant expressément sur le repérage des quantifications sous-entendues dans un énoncé. Une feuille d'exercices supplémentaires sur les quantificateurs demandent effectivement à l'étudiant d'utiliser les quantifications appropriées pour traduire des énoncés, tels que « le carré de tout nombre réel est positif ou nul », en langage mathématique. Ce type d'énoncés est, selon notre expérience, représentatif des *énoncés informels* qui sont couramment utilisés dans les manuels et par les enseignants. Le travail sur ces énoncés constitue donc une préparation supplémentaire pour affronter les mathématiques universitaires.

Le travail sur les quantificateurs accompli dans le cours de transition vers la preuve peut contribuer, à notre avis, à rendre les étudiants plus alertes à repérer les quantificateurs cachés, ce qui pourrait leur faciliter la tâche pour affronter les mathématiques avancées.

<u>Attitude de preuve</u>

Contrairement à ce qu'il en est dans le manuel *NYB, Mathématiques pour les sciences* ne propose pas uniquement des énoncés fermés. En effet, sept des 60 tâches analysées laissaient le soin à l'étudiant de déterminer la valeur de vérité de l'énoncé. Bien qu'il s'agisse d'un pas dans la bonne direction, nous croyons, tel que nous l'avons avancé précédemment, que *Mathématiques pour les sciences* aurait pu aller loin. La plupart des tâches proposées sont très directives et laissent peu de latitude à l'étudiant. Dans bien des cas, le seul retrait des indices (par exemple voir la tâche 15 portant sur les polynômes de Legendre, page 201) aurait permis de créer un « enjeu de vérité » et de donner du sens à l'activité de validation mathématique.

Il aurait également été intéressant selon nous d'inclure des tâches nécessitant l'élaboration de conjectures. Cette activité mathématique joue un rôle central dans les débats scientifiques, tels que décrits pas Alibert et Thomas (1991). Ces débats ont été développés entre autres dans l'optique d'avoir un « impact sur l'attitude de l'étudiant et celle de l'enseignant face à la connaissance et en particulier vis-à-vis du sens de la preuve et de la démonstration » (Legrand, 1988; cité dans Arsac, 1988, p. 273). Nous sommes conscientes que la mise en œuvre de débat scientifique dans la classe est une lourde tâche pour l'enseignant et demande un chamboulement important de la planification du cours déjà établie. Cependant, nous somme d'avis que de proposer des énoncés sur lesquels les étudiants pourraient conjecturer, sans nécessairement les placer dans un contexte de débat, est une solution à moindre coût. D'autant plus que la formulation de conjectures est un objectif contenu dans le programme de formation de l'école secondaire québécoise (voir § 1.4) et que les étudiants sont donc théoriquement familiers avec cette activité mathématique.

Un endroit propice pour introduire des problèmes plus ouverts nécessitant la formulation de conjectures serait selon nous les trois *activités* qui sont déjà prévues dans la planification du cours (voir § 3.3.1). Rappelons que ces activités, qui peuvent être faites en équipe ou individuellement, constituent, avec les quiz et les examens de fin d'étape, un des outils d'évaluation du cours. Plutôt que de proposer des activités se rapportant à la lecture de textes ou à la réalisation de calculs, il aurait été intéressant de proposer des tâches plus complexes requérant de l'étudiant qu'il décortique et analyse la situation qui lui est présentée. Une tâche qui aurait pu être donnée en activité est celle du *pavage d'un polymino* (Grenier et Payan, 1998). Une des situations de pavage d'un polymino proposée par Grenier et Payan est la suivante : « peut-on paver un polymino carré de côté 2^n privé d'une case par des triminos en *L*? » (*op. cit.*, p. 85).

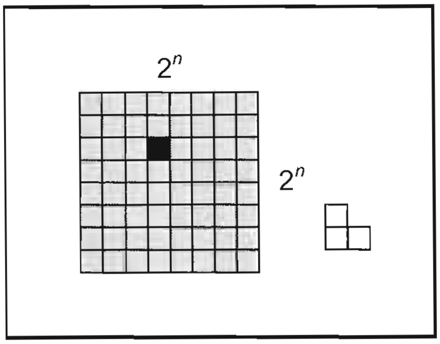


Figure 6.1 Pavage d'un polymino par un trimino. (D'après Grenier et Payan, 1998, p. 85)

Cette situation nécessite la réalisation d'une démonstration par récurrence, sujet traité par *Mathématiques pour les sciences*, et demande une analyse préalable de la situation. Il est important de mentionner que cette situation et la démonstration qu'elle requiert sont présentées à la section théorique 4.19 du manuel du cours du cégep Ahuntsic. Ceci nous permet donc d'avancer qu'elle est accessible à des étudiants de ce niveau de scolarité. Cependant, plutôt que de présenter la situation et la démonstration à l'étudiant, nous proposons de ne fournir que l'énoncé de la tâche, tel que présenté ci-dessus, et d'en laisser la résolution à l'étudiant. Une seconde situation de pavage de polyminos qui pourrait être proposée est le pavage d'un polymino privé d'une case par des dominos (Grenier et Payan, 1998, pp. 95-98). Cette situation est selon Grenier et Payan plus complexe et nécessite donc davantage de temps pour être réalisée.

Le pavage de polyminos est un contexte riche et peut donc être adapté de plusieurs façons par l'enseignant en fonction de ce qu'il souhaite travailler et des contraintes, d'ordre temporel ou autres, auxquelles il doit se conformer. En plus du nombre important de possibilités qu'offre cette situation, celle-ci se déroule dans le contexte des mathématiques discrètes dont l'analyse combinatoire, qui est traitée dans le cours, fait partie.

Le retrait des indices dans l'énoncé de certaines tâches et l'introduction d'énoncés nécessitant la formulation de conjectures auraient, selon nous, contribué à redonner ses lettres de noblesse à la démonstration. Ces modifications auraient permis aux étudiants de voir l'activité de démonstration comme un outil de validation plutôt que comme un exercice d'application. Tel que le rapporte Corriveau (2007), plusieurs enseignants de niveau collégial trouvent qu'un problème majeur chez les étudiants sortant du secondaire est qu'ils « n'ont pas le sens de la preuve » (p. 4). Nous croyons que *Mathématiques pour les sciences* serait un cours pratiquement idéal pour « redonner » un sens à cette activité de validation et ainsi pallier les lacunes relevées par les enseignants du cégep.

Éléments de formalisme sollicités dans chacun des deux cours étudiés

Notre analyse préalable du manuel *Calcul intégral NYB* a permis de mettre en lumière six éléments de formalisme auxquels sont confrontés les étudiants : *Présence d'intervalles ouverts et d'intervalles fermés, Pluralité de symboles littéraux, Recours à des représentants génériques de prime abord arbitraires, Travail sur les inégalités, Travail sur les limites et les infinitésimaux* et *Calculs, manipulation des formules*. Tel que nous l'avons mentionné dans notre bilan des analyses de *Mathématiques pour les sciences*, la majorité de ces éléments a été traitée. En effet, les éléments *Pluralité de symboles littéraux, Recours à des représentants génériques de prime abord arbitraires, Travail sur les inégalités* et *Calculs, manipulation des formules* ont tous été rencontrés par les étudiants à un moment du cours, leur fournissant ainsi un (premier) contact avec ces attentes en matière de formalisme.

Deux éléments ont cependant été laissés de côté par le cours de transition vers la preuve du cégep Ahuntsic, soit *Présence d'intervalles ouverts et d'intervalles fermés* et *Travail sur les limites et les infinitésimaux*. L'absence de ces éléments peut sans doute être, du moins partiellement, expliquée par les sujets mathématiques abordés par *Mathématiques pour les sciences*. En effet, la logique propositionnelle, la théorie élémentaire des nombres, l'analyse combinatoire, les probabilités, les vecteurs et les nombres complexes ne se prêtent pas de prime abord à l'usage de ces éléments de formalisme. Cependant, ceux-ci auraient pu être sollicités lors de l'étude des suites et des séries. En effet, la convergence des suites et des séries géométriques est brièvement abordée à la section théorique 5.23, mais aucune tâche ne porte sur ces sujets. Nous sommes néanmoins conscientes qu'un travail approfondi sur la convergence des suites et des séries demande du temps et surpasse sans doute l'introduction aux suites et aux séries que souhaite faire le cours du cégep Ahuntsic.

Tel que mentionné précédemment, les contenus mathématiques ciblés par le cours de transition vers la preuve semblent avoir un impact non négligeable sur les éléments de formalisme sollicités. Nous croyons que les contenus ciblés ont en fait un rôle plus important à jouer dans la façon dont le cours *Mathématiques pour les sciences* travaille l'activité de démonstration et le formalisme.

Choix des contenus mathématiques

Les sujets mathématiques ciblés par *Mathématiques pour les sciences* sont centraux en mathématiques avancées. Le fait de les introduire à la première session du programme *Sciences de la nature* contribue, selon nous, à préparer les étudiants à affronter les cours de mathématiques collégiaux, et même universitaires, subséquents. En effet, alors que les suites et les séries seront étudiées plus en profondeur dans le cours *NYB*, les vecteurs referont surface dans le cours *NYC*.

En plus de fournir un premier contact avec des sujets réinvestis dans d'autres cours de la formation collégiale, notre expérience des mathématiques post-secondaires nous permet d'avancer que l'introduction qui est faite des nombres complexes, de l'analyse combinatoire et des probabilités facilitera sans doute la tâche des étudiants effectuant des études universitaires en mathématiques. Les probabilités, les mathématiques discrètes et l'analyse complexe sont des thèmes abordés dans les formations universitaires[1] et nous croyons qu'un étudiant ayant préalablement suivi le cours *Mathématiques pour les sciences* pourrait être mieux outillé pour affronter les cours portant sur ces sujets.

Le choix des contenus a néanmoins de l'incidence sur les types de tâches proposés dans *Mathématiques pour les sciences*. L'introduction des nombres complexes, de l'analyse combinatoire, des probabilités requièrent l'implantation de symbolismes précis. L'étudiant doit se familiariser avec ceux-ci et apprendre à les gérer correctement. D'ailleurs, tel que

---

[1] Le baccalauréat en mathématiques offert à l'UQAM comporte trois cours obligatoires, MAT 2070 *Probabilités I*, MAT 2090 *Introduction à la combinatoire* et MAT 3010 *Analyse complexe*, qui touchent respectivement les probabilités, l'analyse combinatoire et les nombres complexes. Au baccalauréat en mathématiques et en enseignement secondaire, concentration mathématique de l'Université de Montréal, les cours MAT 1720 *Probabilités* et MAT 1500 *Mathématiques discrètes* sont obligatoires et le cours MAT 2130 *Variable complexe* est optionnel.

nous l'avons mentionné antérieurement, l'apprentissage du symbolisme inhérent à ces contenus mathématiques ainsi que des règles syntaxiques auxquelles ils sont soumis constituent un des objectifs du cours de transition vers la preuve.

Pour atteindre cet objectif, le cours propose plusieurs tâches reposant sur la compréhension et la gestion du symbolisme nouvellement introduit. Notre analyse nous a en effet permis de relever que plusieurs des tâches de démonstrations visent davantage un travail d'ordre symbolique et syntaxique qu'un travail d'ordre déductif. Ce choix est, selon nous, tout à fait en accord avec les thèmes abordés. Les étudiants doivent se familiariser avec les symboles et sont appelés à faire des manipulations calculatoires, de l'ordre du syntaxique, avec ceux-ci. Les tâches portant sur les arrangements (voir la tâche 43, où l'on doit démontrer que $A_r^n = A_{r-1}^{n-1}$) ainsi que celles traitant des propriétés des opérations et du conjugué dans les complexes (voir tâches 58 et 59) en sont d'excellents exemples. Bien que ce travail d'ordre symbolique et syntaxique soit particulièrement abondant dans les thèmes abordés précédemment, celui-ci est également perceptible dans certaines tâches proposées en théorie des nombres. En effet, les tâches de démonstrations reposant sur l'utilisation de la représentation algébrique des nombres pairs/impairs ainsi que celles portant sur la compréhension des quantificateurs (par exemple, voir tâche 8) requièrent une compréhension et une gestion symbolique qui prend le pas sur le raisonnement déductif à mettre en œuvre. Il en va de même pour les tâches concernant les suites et séries. Les démonstrations qui y sont attendues (voir tâches 52 et 53) se résument à l'application des définitions de progressions arithmétique et géométrique.

Il apparaît clairement que dans *Mathématiques pour les sciences,* la grande variété des contenus abordés contribue à axer le travail sur les ordres symbolique et syntaxique plutôt que sur l'ordre déductif. Effectivement, pour s'attaquer à des tâches d'une plus grande « envergure déductive », l'étudiant doit maîtriser les concepts de base des contenus abordés, ce qui est difficilement réalisable lorsque ceux-ci ne sont que survolés et que peu de temps leur est accordé.

Le travail d'ordre symbolique et syntaxique occupe une place importante dans le cours. En plus d'offrir une préparation pour affronter certains des éléments de formalisme relevés dans le manuel *NYB, Mathématiques pour les sciences* permet également de pallier certaines lacunes des étudiants identifiées par des professeurs du cégep dans l'enquête effectuée par Corriveau et Parenteau (2005). Plusieurs des professeurs interrogés soulèvent que les étudiants, à leur arrivée au cégep, éprouvent des difficultés à décoder et produire des textes mathématiques. Les propos d'un professeur résument bien ces difficultés : « [Les étudiants] ne savent ni lire ni écrire. [Ils sont] incapables de reproduire correctement une définition ou une preuve, aussi simple soit-elle. [...] Leurs manipulations symboliques respectent rarement la syntaxe mathématique » (Corriveau, 2007, p. 4). Ces professeurs soulignent également les difficultés qu'éprouvent plusieurs étudiants à effectuer des manipulations algébriques. Un des répondants de l'enquête mentionne que « l'algèbre est un gros obstacle. Par exemple, la factorisation, la mise en évidence, le produit de racines carrées... » (*ibid.*). Le travail syntaxique demandé dans le cours *Mathématiques pour les sciences* étant la plupart du temps purement algébrique, il donne la chance aux étudiants de consolider leurs compétences algébriques.

Nous croyons que le travail d'ordre symbolique et syntaxique effectué dans le cours de transition vers la preuve peut aider les étudiants à surmonter les difficultés décrites par les professeurs.

Travail d'ordre symbolique et syntaxique et travail d'ordre déductif

Malgré le fait que le travail d'ordre symbolique et syntaxique soit important et qu'il réponde à des lacunes présentes chez plusieurs nouveaux étudiants du niveau collégial, nous croyons que ce type de travail ne peut constituer une préparation complète pour affronter les nouvelles attentes des mathématiques post-secondaires. Nous nous rangeons effectivement derrière les propos de Bloch *et al.* (2006) en affirmant que « l'écriture formelle n'est pas en elle-même porteuse de la signification des lois qu'elle énonce et des objets qu'elle met en jeu » (p. 5). Thom (1974) va encore plus loin, en affirmant que

> [...] la connaissance explicite de la définition formelle de l'activité peut perturber cette activité, qui fonctionnait fort efficacement jusque-là sans théorie : à la manière de ces individus scrupuleux qui hésitent à parler une langue parce qu'ils en connaissent trop bien la grammaire et ont peur de commettre des fautes (p. 45).

Nous n'irons pas jusqu'à nous ranger entièrement derrière les propos de Thom, puisque nous sommes d'avis qu'un travail d'ordre symbolique et syntaxique est nécessaire et ne devrait pas être négligé. Néanmoins, nous sommes d'avis que pour outrepasser les lacunes du formalisme soulevées par Bloch *et al.* (2006), un travail supplémentaire doit être effectué. Selon Thom (1974),

> Le vrai problème qu'a à affronter l'enseignement des mathématiques n'est pas le problème de la rigueur, mais le problème de la construction du « sens », de la « justification ontologique » des objets mathématiques.
>
> [...] On sait que l'espoir de donner aux mathématiques un fondement rigoureusement formel s'est trouvé irrémédiablement ruiné par le théorème de Gödel. Il ne semble cependant pas que les mathématiciens, dans leur activité professionnelle, souffrent beaucoup de cette situation. Pourquoi ? Parce que dans la pratique la pensée du mathématicien n'est jamais une pensée formalisée. Le mathématicien donne un sens à toute proposition, ce qui lui permet d'oublier l'expression de cette proposition à l'intérieur de toute formalisation de la théorie, s'il en existe [...]. On peut, je crois, affirmer en toute sérénité que les seuls procédés formels en mathématique sont les calculs, numériques ou algébriques. Or, peut-on réduire la mathématique au calcul ? Certainement non, car même dans une situation entièrement calculatoire, la démarche même du calcul doit être choisie parmi un très grand nombre de possibilités. Et seule l'interprétation intuitive des quantités manipulées permet de guider ce choix.
>
> [...] On n'a pas, je crois, tiré de l'axiomatique hilbertienne la vraie leçon qui s'en dégage ; c'est celle-ci : on n'accède à la rigueur absolue qu'en éliminant la signification [...]. Mais s'il faut choisir entre rigueur et sens, je choisirai sans hésitation le sens. C'est ce choix qu'on a toujours fait en mathématique, où on opère pratiquement toujours dans une situation semi-formalisée, avec un métalangage qui est le langage ordinaire, non formalisé (p. 49).

En nous appuyant sur ces propos, nous avançons qu'il aurait été intéressant de compléter le travail fait sur le formalisme par un travail d'ordre sémantique et déductif. Peu de tâches analysées nécessitent l'élaboration d'un raisonnement déductif complexe dont les déductions reposent sur le sens des objets en présence. L'ajout de tâches nécessitant ce type de travail aurait, selon nous, contribué à mieux préparer les étudiants.

L'analyse du manuel de calcul intégral nous a révélé que la majorité des tâches étudiées nécessite l'élaboration de démonstrations ayant des structures déductives linéaires et faisant intervenir un nombre restreint d'arguments. Deux des tâches étudiées ont cependant fait exception à cette « règle ». Le problème[2] synthèse 21 du chapitre 3 et le problème[3] synthèse 25 du chapitre 6 (pour consulter l'analyse complète de ces tâches, voir respectivement les pages 68 et 114) nécessitent une compréhension approfondie des éléments présents dans l'énoncé. Un étudiant ayant recours à une *production syntaxique de preuve*, telle que définie par Weber et Alcock (2004) (voir § 2.1.4), ne pourra, à notre avis, construire la démonstration demandée. En effet, pour mener à bien ces deux tâches, celui-ci doit délaisser la forme des expressions présentées pour se concentrer sur leur signification. Une fois les différents éléments décodés, l'étudiant pourra les mettre en relation pour arriver à la conclusion souhaitée. Tel que mentionné lors de la présentation de notre corpus de démonstrations *NYB*, ces deux tâches sont représentatives des tâches que devront affronter les étudiants dans les cours universitaires d'introduction à l'analyse. D'ailleurs, une des deux tâches est proposée dans un manuel, *Introduction à l'analyse réelle* (Labelle et Mercier, 1993), couramment utilisé dans de tels cours au Québec. La complexité de la structure déductive de ces deux démonstrations repose sur le sens des propositions en jeu et leurs combinaisons. Cette complexité est, à notre avis, différente de celle observée dans certaines des tâches proposées en *Mathématiques pour les sciences*[4]. En effet, dans ce cours, c'est la méthode de preuve utilisée qui complexifie la structure déductive de la démonstration (voir § 5.5.6). Les méthodes de preuves, et les structures de démonstration qu'elles sous-tendent, étant abondamment traitées dans le cours, nous avançons que cette complexité présente un moins grand défi que celle repérée dans le cours *NYB*.

En plus de la complexité des structures déductives relevée dans certaines tâches du cours *NYB*, la flexibilité des connaissances (voir § 2.1.1) requise pour la construction de certaines

---

[2] « Soit f une fonction continue sur [0, 1] et dérivable sur]0, 1[telle que $f(0) = 0$ et $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Démontrer qu'il existe au moins une valeur $c \in]0,1[$ telle que $f'(c) = 2$ » (Charron et Parent, 2004, p. 172)

[3] « Démontrer que la suite $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ est convergente » (Charron et Parent, 2004, p. 366).

[4] Rappelons que les démonstrations attendues dans ce cours possèdent, pour la majorité, des structures déductives linéaires, nécessitant peu de pas déductifs et où le raisonnement à mettre en jeu est souvent pris en charge par le calcul.

démonstrations est, selon nous, un autre point départageant les deux cours analysés. Alors que le cours de calcul intégral demande parfois de combiner d'anciennes connaissances à des nouvelles (voir par exemple la démonstration du théorème fondamental du calcul § 4.1.1.1), les tâches proposées par le cours de transition vers la preuve nécessite la mise en œuvre d'arguments qui ont été nouvellement introduits ou rappelés. Cette situation facilite le travail de l'étudiant puisqu'il n'a qu'à se concentrer sur les notions et concepts nouvellement présentés pour construire la démonstration attendue.

Devant ces constats, nous trouverions intéressant d'intégrer, au cours *Mathématiques pour les sciences*, des tâches nécessitant la mise en jeu d'un raisonnement déductif reposant sur le sens des propositions plutôt que leur forme. L'ajout de ce type de tâches compléterait le travail d'ordre symbolique et syntaxique qui est déjà réalisé dans le cours et offrirait, par le fait même, une préparation plus complète pour affronter les attentes des mathématiques avancées.

6.3 Proposition d'une séquence d'enseignement en théorie des nombres

L'introduction d'un travail d'ordre sémantique et déductif est, à notre avis, possible en conservant le contexte mathématique privilégié par *Mathématiques pour les sciences* pour l'enseignement de la démonstration, soit la théorie des nombres. Ce sujet est selon nous un bon choix pour effectuer un tel travail puisqu'il est accessible aux étudiants. Cependant, plutôt que de restreindre le cours aux sujets élémentaires en théorie des nombres, tels que la parité et la divisibilité, certains thèmes plus poussés, mais selon nous tout aussi accessibles, pourraient être abordés. Nous suggérons ci-dessous une progression qui pourrait être envisagée dans le cours *Mathématiques pour les sciences*.

L'enseignement de la théorie des nombres pourrait débuter par l'étude des nombres naturels et le principe d'induction mathématique débouchant ainsi sur la réalisation de démonstrations par récurrence, sujet ciblé par le cours de transition du cégep Ahuntsic. Les suites arithmétiques et géométriques pourraient aussi être traitées dans cette portion du cours. La division euclidienne avec reste, les pgcd et les ppcm, l'algorithme d'Euclide (donnant le pgcd entre deux nombres) seraient également abordés, avec les preuves qui s'y rapportent et qui permettent d'établir (et comprendre!) les liens entre ces sujets. Ceux-ci permettent à leur tour d'accéder à certains théorèmes fondamentaux en théorie des nombres, ainsi qu'à leur démonstration, tels que :

- le théorème affirmant que p est premier si et seulement si à chaque fois que p divise un produit, p divise alors au moins un des termes du produit, ce théorème étant à la base de la démonstration du volet « unicité » du Théorème Fondamental de l'arithmétique;
- le Théorème fondamental de l'arithmétique[5] (ce théorème est d'ailleurs utilisé implicitement dans certaines démonstrations, voir tâche 19 page 205);
- le Théorème d'Euclide sur les nombres premiers[6].

Plusieurs de ces démonstrations, notamment celle du Théorème fondamental de l'arithmétique, seraient établies via une récurrence sur l'entier n en cause, ce qui permettrait d'avoir de ce type de preuve des exemples plus « parlant », portant sur des résultats moins oiseux que « $P(n) = 2 + 12 + 22 + \ldots + (10n - 8) = n(5n - 3), n \geq 1$ » (Bourbonnais, 2008, p. 125).

Le cours pourrait enchaîner avec l'étude des rationnels, puis des irrationnels :

- équivalence entre un quotient d'entiers et un nombre à développement décimal périodique (les développements finis étant compris comme des développements périodiques de période 0),
- le développement de $\frac{n}{m}$ est fini si et seulement si $\frac{m}{pgcd\,(n,m)}$ n'a que des facteurs 2 ou 5, n et m des entiers, m non nul,
- aborder des développements dans les bases autres que 10; critère pour que le développement d'un rationnel soit fini en base 2, 8, 16, 11, 34...
- irrationalité de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$... et de $\sqrt[n]{m}$ quand ce nombre n'est pas un entier,

---

[5] « Tout nombre naturel $n > 1$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers, et cette représentation est unique, à part l'ordre dans lequel les facteurs premiers sont disposés » (De Koninck et Mercier, 1994, p. 22).

[6] « Il existe une infinité de nombres premiers » (De Koninck et Mercier, 1994, p. 26).

- irrationalité de log 2, tâche déjà proposée dans le cours,
- démonstration de la dénombrabilité des rationnels,
- démonstration de l'indénombrabilité des irrationnels (argument de la diagonale de Cantor),
- questions ouvertes telles « la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle ou rationnelle? », « le produit de deux irrationnels est rationnel ou irrationnel? », avec l'exigence de réponses pleinement justifiées.

L'étude des rationnels et des irrationnels s'ouvrirait sur l'étude des réels comme corps ordonné. L'algèbre polynomiale serait abordée. Des théorèmes sur les racines de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ pourraient être traités. Par exemple, a est une racine de $p(x)$ si et seulement si $x - a$ divise $p(x)$. Une introduction aux nombres complexes viendrait clore cette séquence d'enseignement et pourrait alors être mieux problématisée, les complexes étant ces « nombres » qu'il faut ajouter aux réels pour que les polynômes à coefficients réels, entre autres le polynôme $x^2 + 1$, puissent être factorisés en facteurs linéaires. De cette façon, les nombres complexes s'inscriraient dans une plus vaste architecture de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.

Cette progression que nous proposons permettrait de voir une autre fonction de la démonstration qui est négligée par le cours *Mathématiques pour les sciences* : celle de rendre possible l'édification d'une théorie. Ce dernier point est d'ailleurs capital aux yeux de Rouche (1989) :

> Le choix de cette discipline [la géométrie] ne s'imposait pas, et nous aurions pu prendre nos exemples [les preuves que Rouche présente et discute dans son article] en arithmétique, en analyse, ou ailleurs. Le plus important pour nous était de les concentrer sur une discipline ou une théorie, car on n'atteint pas pleinement l'idée de preuve en étudiant des preuves isolées : il est dans la nature des preuves de s'appuyer sur des propositions prouvées et de s'enchaîner ainsi les unes aux autres » (p. 9).

Nous nous rangeons derrière les propos de Rouche en affirmant que mettre les étudiants face à cette fonction de la démonstration contribuerait à donner un sens à cette activité mathématique. De plus, la séquence proposée permettrait au cours de garder un de ces objectifs principal, soit l'apprentissage des différentes méthodes de preuve. Celles-ci, plutôt que de faire l'objet d'un enseignement explicite, seraient vues une à une dans le corpus « théorie des nombres » à mesure qu'elles font leur apparition. Cette façon de procéder enverrait selon nous un message plus en phase avec ce qui se passe réellement en mathématiques : on doit comprendre et chercher à comprendre ce qui se passe **avant** de trouver la méthode de preuve à utiliser.

Nous sommes conscientes que l'intégration de cette séquence dans le cours *Mathématiques pour les sciences* nécessiterait une réorganisation tout de même importante de la planification déjà en place. Cependant, nous croyons, pour les raisons énoncées précédemment, qu'elle permettrait aux étudiants d'acquérir une vision plus complète de la démonstration. De plus, plusieurs des sujets mathématiques ciblés par le cours du cégep Ahuntsic sont traités dans la séquence que nous proposons, permettant ainsi un travail sur les objectifs d'apprentissage déjà en place, mais à travers un corpus de sujets et de résultats moins morcelé, avec plus de liens d'un résultat à l'autre, en une démarche où l'étudiant sentirait mieux les mathématiques se construire, démarche vraisemblablement plus stimulante pour lui.

6.4 Préparation offerte par *Mathématiques pour les sciences* pour affronter les exigences du cours *Calcul intégral NYB* ; évaluation de la préparation offerte par la combinaison de ces deux cours

La présentation de nos principaux résultats à la section 6.2 a permis de mettre en relief la préparation offerte par le cours *Mathématiques pour les sciences*. En comparant les éléments soulevés dans ce cours à ceux mis en lumière lors de l'analyse du manuel *Calcul intégral NYB*, nous pouvons conclure que le cours de transition vers la preuve semble offrir une bonne préparation eu égard à la démonstration et au formalisme, tels qu'ils sont mis en œuvre dans un manuel typique comme celui de Charron et Parent.

Plusieurs des éléments identifiés en *NYB* ont effectivement été travaillés dans le cours du cégep Ahuntsic. Les changements de point de vue à introduire, exigence la plus sollicitée dans le manuel du cours *NYB*, est également celle qui a été la plus suscitée dans *Mathématiques pour les sciences*. Rappelons en effet que 64 changements de point de vue ont été identifiés dans les tâches proposées par le cours de transition vers la preuve, permettant ainsi à l'étudiant de se familiariser avec cette exigence. La nécessité de travailler les quantifications (explicites et implicites) a aussi été prise en considération par les deux cours à l'étude. Comme nous l'avons mentionné antérieurement, *Mathématiques pour les sciences* a su répondre aux exigences relevées dans le manuel de Charron et Parent et les a même, à notre avis, surpassées. En effet, un enseignement explicite sur les quantifications et un travail sur le contre-exemple ont, selon nous, permis d'offrir une préparation plus complète, eu égard aux quantifications. Finalement, *Mathématiques pour les sciences* fait un travail d'ordre symbolique et syntaxique considérable. Les tâches qu'il propose permettent à l'étudiant d'entrer en contact avec plusieurs des éléments de formalisme relevés dans le manuel *NYB* (voir § 6.2), en plus d'introduire plusieurs nouveaux symboles tels que ceux liés aux nombres complexes et à l'analyse combinatoire.

Notre revue de la littérature didactique, et la méthodologie qui en a découlé, a également permis de mettre en lumière des lacunes présentes dans le manuel de Charron et Parent **et** dans les tâches proposées dans *Mathématiques pour les sciences*. En effet, un manque de tâches ouvertes, l'insuffisance de structures déductives plus complexes (arbres d'inférences plutôt que chaînes) ainsi que la pluralité trop restreinte d'arguments et le fait que ces arguments se ramènent trop souvent à des calculs sont des éléments identifiés dans le manuel *NYB* qui caractérisent également le cours du cégep Ahuntsic.

Il semble donc que *Mathématiques pour les sciences* ait les mêmes « forces » et les mêmes « faiblesses » que le manuel *Calcul intégral NYB*, ce qui nous permet d'avancer que la préparation qui est offerte par le cours est tout à fait cohérente avec les exigences identifiées dans le manuel du cours *NYB*. Cependant, nous pouvons nous interroger à savoir si la préparation offerte par l'un et l'autre des cours étudiés est adéquate pour affronter les exigences universitaires. Nous émettons un doute sérieux sur ce dernier point puisque, tel que nous l'avons mis en lumière antérieurement, il y a des manques non négligeables en ce qui a trait au travail d'ordre déductif et sémantique qui est réalisé par les deux cours[7].

---

[7] Il est vrai que le cours *NYB* propose deux tâches requérant un tel travail, cependant deux tâches sur les 27 analysées nous apparaît être un ratio un peu trop faible pour conclure qu'un travail substantiel d'ordre sémantique et déductif est effectué.

Deux discours et deux courants semblent présents au niveau collégial. Le premier relie le cégep au secondaire, avec des mathématiques très procédurales et encadrées et des raisonnements simples et linéaires, le plus souvent pris en charge par le calcul. Ce courant, qui est défendu par un certain nombre de professeurs de cégep, est d'ailleurs représenté par le manuel de Charron et Parent et le cours *Mathématiques pour les sciences*. Ce courant semble également en accord avec les programmes officiels de formation de niveau collégial. En effet, comme nous l'avons mentionné en § 1.6, les cours de mathématiques collégiaux ont pour objectifs de faire « appliquer les méthodes » du calcul différentiel, du calcul intégral et de l'algèbre linéaire à la résolution de problèmes. Ces objectifs font davantage référence à l'utilisation de procédures et d'algorithmes qu'à l'élaboration de raisonnements mathématiques complexes.

Le second courant présent au niveau collégial vise à relier le cégep à l'université. Il cible des mathématiques plus exigeantes du point de vue du raisonnement, de l'imagination créative et de la pluralité des connaissances à gérer simultanément. Ce courant est soutenu par plusieurs professeurs de niveau collégial. En effet, tel que le rapporte l'enquête réalisée par Corriveau et Parenteau (2005), plusieurs professeurs de cégep interrogés accordent de l'importance à la mise en œuvre de raisonnements élaborés et ils s'attendent à ce que les étudiants soient capables d'en produire. De plus, rappelons que l'objectif des programmes pré-universitaires, dont fait partie *Sciences de la nature 200.B.0.*, est de se positionner « [...] dans une véritable continuité avec les programmes d'études universitaires » (MEQ, 1998, p. 15).

Quels courants devraient être privilégiés pour la formation des étudiants, là est la question. Nous croyons qu'il y a sûrement un juste milieu à atteindre entre les deux. Selon nous, un positionnement médian permettrait aux cours de mathématiques collégiaux de ne pas créer une trop grande rupture avec les mathématiques secondaires, tout en offrant une préparation adéquate pour l'université.

6.5 Limites et pistes de réflexion

Pour réaliser ce projet, plusieurs choix ont dû être faits et nous sommes conscientes que certains d'entre eux restreignent les conclusions qui peuvent être tirées. Premièrement, le fait d'avoir choisi de mettre en lumière les exigences du cours *Calcul différentiel NYB* teinte certainement les résultats que nous avons obtenus. Les contenus abordés et l'emplacement du cours dans la formation influencent les éléments de formalisme qui sont sollicités et les difficultés qui sont rencontrées. Le fait d'avoir choisi le manuel rédigé par Charron et Parent plutôt qu'un autre recueil a aussi certainement eu un impact sur nos conclusions. Nous ne pouvons pas exclure la possibilité que d'autres manuels de référence puissent traiter le cours *Calcul intégral NYB* dans une optique totalement différente de celle de Charron et Parent. Nous pouvons d'ailleurs avancer a posteriori que le manuel de Charron et Parent comporte certaines lacunes[8] en matière de démonstration et de formalisme, lacunes qui auraient pu ne pas être identifiées dans d'autre manuel. Pour ces raisons, nous avançons que, pour compléter le travail qui a été amorcé dans cette recherche, il serait pertinent d'étudier les exigences en matière de formalisme et de démonstration sollicitées dans d'autres manuels du cours *NYB*, dans d'autres cours de niveau collégial, tel que *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle NYC*, et même dans des cours de niveau universitaire, tels que les cours d'introduction à l'analyse, de calcul avancé et d'algèbre.

Un second point à considérer est notre choix de limiter notre étude du cours *Mathématiques pour les sciences* aux tâches proposées dans le manuel et dans les documents distribués dans le cours. Nous sommes conscientes que les conclusions issues de l'analyse sont purement théoriques et pourraient être raffinées. Dans cette optique, des productions d'étudiants suivant le cours *Mathématiques pour les sciences* pourraient être évaluées. Cet examen nous donnerait un regard plus juste sur les difficultés effectives rencontrées par les étudiants lors de la résolution des différentes tâches.

Finalement, nous croyons que la préparation offerte par d'autres cours de transition vers la preuve, tels que le cours *Compléments mathématiques* offert au cégep de Maisonneuve, gagnerait à être analysée. Une telle étude permettrait éventuellement de comparer les différentes préparations offertes, dans l'optique de proposer aux étudiants la meilleure possible face aux attentes des mathématiques post-secondaires.

---

[8] C'est notre cadre théorique qui a permis de mettre à jour ces lacunes, en matière de travail d'ordre sémantique et déductif, dans le manuel de calcul intégral rédigé par Charron et Parent.

BIBLIOGRAPHIE

Alibert, Daniel et Michael Thomas. 1991. Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 215-230). Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Alibert, Daniel, Marc Legrand et Françoise Richard. 1987. Alteration of didactic contract in codidactic situation. In *Proceedings of the eleventh Conference of the International group of psychology of Mathematics Education*, pp. 379-385, A. Borbas Ed.

Arsac, Gilbert. 1988. Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9, n° 3, pp. 247-280.

Artigue, Michèle. 1991. Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 167-198). Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, Nicolas. 1987. Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, n° 2, pp. 147-176.

Bloch, Isabelle. 2000. *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de doctorat, Bordeaux, Université Bordeaux I, consultée le 7 juillet 2009, tiré de http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/60/35/PDF/Bloch_these_total.pdf

Bloch, Isabelle, Gérard Kientega et Denis Tanguay. 2006. Synthèse du Thème 6. Transition secondaire, post-secondaire en mathématiques. Dans N. Bednarz (Dir.), *Actes du 3e colloque international Espace Mathématique Francophone : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés* (CD-ROM). Université de Sherbrooke, Canada.

Bourbonnais, Daniel. 2008. *Mathématiques pour les sciences (201-130-AH)*. Montréal : Collège Ahuntsic, 404 p.

Brousseau, Guy. 1998. *Théorie des situations didactiques*. Paris : Édition La pensée sauvage.

Burton, Leone. 2004. *Mathematicians as enquirers : Learning about learning mathematics*. Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Charnay, Roland. 1992. Problème ouvert-problème pour chercher. *Grand N*, n° 51, pp. 77-83.

Charron, Gilles et Pierre Parent. 1997. *Calcul intégral, Mathématique 203 2e édition*. Laval (Québec) : Éditions Études Vivantes, 392 p.

Charron, Gilles et Pierre Parent. 2004. *Calcul intégral 3e édition*. Montréal : Groupe Beauchemin, 436 p.

Chellougui, Faïza. 2004. *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire, entre l'explicite et l'implicite*. Thèse en co-tutelle, Université Lyon 1 et Université de Tunis.

Corriveau, Claudia et Jessica Parenteau. 2005. Comment aménager le cours de mathématique 536 du secondaire en vue de mieux préparer les élèves aux cours de mathématiques du cégep. *Envol*, n° 132 (juillet-août-septembre 2005), pp. 25-28.

Corriveau, Claudia. 2007. *Arrimage secondaire-collégial, démonstration et formalisme*. Mémoire de maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal.

Cyr, Stéphane. 2006. *Pourquoi et comment enseigner la preuve au secondaire, qu'en pensent nos futures maîtres?* Montréal : Édition Bande Didactique, 493 p.

De Koninck, Jean-Marie et Armel Mercier. 1994. *Introduction à la théorie des nombres*. Mont-Royal (Québec) : Modulo Éditeur, 254 p.

Dorier, Jean-Luc. 1997. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Paris : Édition La pensée sauvage.

Dorier, Jean-Luc. 1998. État de l'art de la recherche en didactique à propos de l'enseignement de l'algèbre. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 18, n° 2, pp. 191-230.

Dreyfus, Tommy. 1999. Why Johnny can't prove. *Educational Studies of Mathematics*, n° 38, pp. 85-109.

Dreyfus, Tommy et Gila Ron. 2004. The use of Models in teaching proof by mathematical induction. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol.4, pp. 113-120, M. Hoines et A. Fuglestad eds.

Dubinsky, Ed et Olga Yiparaki. 2000. On students' understanding of AE and EA quantification. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld et J. Kaput (Eds), *CBMS Issues in Mathematics Education : Vol. 8 Research in Collegiate Mathematics Education IV*, (pp. 239-289). Providence, RI : American Mathematical Society.

Durand-Guerrier, Viviane et Judith Njomgang-Ngansop. 2009. Questions de logique et de langage à la transition secondaire-supérieur : l'exemple de la négation. *Actes du colloque EMF 2009* (CD-ROM). Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal.

Duval, Raymond. 1991. Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, pp. 233-261.

Duval, Raymond. 2001. Écriture et compréhension : Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves? In *Produire et lire des textes de démonstration*, pp. 183-205. Collectif coord. par É. Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde. Ellipses, Paris.

Epp, Susanna. 2003. The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 110, n° 10, pp. 886-899.

Ghedamsi, Imène. 2008. *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique*. Thèse en co-tutelle, Université de Tunis et Université de Bordeaux 2, Consulté le 8 août 2009, tiré de http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/36/18/48/PDF/These_GHEDAMSI.pdf

Grenier, Denise et Charles Payan. 1998. Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18, n° 1, pp. 59-100.

Hanna, Gila. 1995. Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 15, n° 3, novembre 95, pp. 42-49.

Hanna, Gila et Hans Niels Jahnke. 1993. Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 24, pp. 421-438.

Harel, Guershon et Larry Sowder. 1998. Students' proof schemes : Results from Exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*, (pp 234-283). Washington, DC : Mathematical Association of America.

Harel, Guershon et Larry Sowder. 2007. Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning, Information Age Publishing*, pp. 805-842. Charlotte : Ed. Lester, Frank K. Jr.

Hitt, Fernando. 2004. L'aube de la preuve en mathématique et le principe du tiers exclu. In *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec*, GDM2004, pp. 61-71. F. Caron, éd. Université de Montréal.

Jones, Keith. 2000. The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 31, n° 1, pp. 53-60.

Labelle, Jacques et Armel Mercier. 1993. *Introduction à l'analyse réelle*. Mont-Royal (Québec) : Modulo Éditeur, 414 p.

Lockwood, Elise et Craig Swinward. 2007. Research on students' reasoning about the formal definition of limit : An evolving conceptual analysis. In *Electronic Proceedings of the tenth Special Interest Group of Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*. San Diego, Californie : S. Hauk Ed. Consulté le 4 juillet 2009, tiré de http://www.rume.org/crume2007/eproc.html

Luk, Hing Sun. 2005. The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 36, n° 2-3, pp. 161-174.

Québec, Ministère de l'Éducation, du loisir et du sport. 2006a. *Programme de formation de l'école québécoise, Éducation préscolaire, Enseignement primaire*, ISBN 2-550-46697-7 (PDF). Québec, 354 p.

Québec, Ministère de l'Éducation, du loisir et du sport. 2006b. *Programme de formation de l'école québécoise, Enseignement secondaire, premier cycle : Chapitre 6 Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie*, ISBN 2-550-46698-5 (PDF), Québec, 41 p.

Québec, Ministère de l'Éducation, du loisir et du sport. 2007. *Programme de formation de l'école québécoise, Enseignement secondaire, deuxième cycle : Chapitre 6 Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie, Mathématique*, ISBN 978-2-550-47584-2 (PDF), Québec, 143 p.

Québec, Ministère de l'Éducation. 1998. *Sciences de la nature, Programme d'études préuniversitaires 200.BO* (PDF), Québec, 99 p., Consulté le 4 juin 2008, tiré de http://www.mels.gouv.qc.ca/ens-sup/ens-coll/Cahiers/program/200B0.pdf

Moore, Robert. 1994. Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 27, n° 3, pp. 249-266.

Plan de cours Mathématiques pour les sciences. Hiver 2008. Collège Ahuntsic, pp. 1-21.

Robert, Aline. 1998. Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18, n° 2, pp. 139-190.

Rouche, Nicolas. 1989. Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications? In *La démonstration mathématique dans l'histoire*. Colloque Inter-Irem Épistémologie et histoire des mathématiques, pp. 8-38. Besançon, France.

Selden, Annie et John Selden. 1995. Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 29, n° 2, pp. 123-151.

Selden, Annie et John Selden. 2007. *Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs*. Rapport technique. Cookeville. Tennessee Technological University. Consulté le 28 mai 2008, tiré de http://math.tntech.edu/techreports/TR_2007_1.pdf

Sierpinska, Anna, Tommy Dreyfus et Joel Hillel. 1999. Evaluation of a teaching design in linear algebra : the case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19, n° 1, pp. 7-40.

Stylianides, Andreas, Gabriel Stylianides et George Philippou. 2004. Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 55, n° 1/3, pp. 133-162.

Tanguay, Denis. 2000. *Analyse du développement de la notion de preuve dans une collection du secondaire*. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal.

Tanguay, Denis. 2002. L'enseignement des vecteurs. *Bulletin AMQ*, Vol. XLII, n° 4, pp. 36-47.

Tanguay, Denis. 2003. Un enseignement de la preuve au collégial. *Actes du 45e Congrès de l'AMQ*, publiés sous la dir. d'André Ross, pp. 82-103. Les éditions *Le Griffon d'argile*. Sainte-Foy, Québec.

Tanguay, Denis. 2005. Une expérimentation sur l'apprentissage de la structure déductive en démonstration. *Actes du 4e Colloque de didactique des mathématiques de l'Université de Crête* (Rethymnon), pp. 57-75. M. Kourdoulos, G. Troulis et C. Tzanakis, éds.

Thom, René. 1974. Mathématiques modernes et mathématiques de toujours, suivi de Les mathématiques « modernes », une erreur pédagogique et philosophique? Dans *Pourquoi la mathématique ?*, sous la dir. de Robert Jaulin, pp. 39-88. Éditions 10-18, Paris.

Thurston, W. P. 1994. On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 30, n° 2, pp. 161-177.

Weber, Keith. 2001. Student difficulty in constructing proofs : the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 48, pp. 101-119.

Weber, Keith et Lara Alcock. 2004. Semantic and syntactic productions. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 56, pp. 209-234.