UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

COMPARAISON ENTRE TROIS MODÈLES STRUCTURELS D'ÉVALUATION D'OPTIONS : THÉORIE ET ÉTUDE EMPIRIQUE EXPLORATOIRE

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT CONJOINT EN ADMINISTRATION

PAR

HASSAN EL IBRAMI

JUILLET 2010

DÉDICACE

Ce travail est dédié à mon épouse chérie Halima Ait Ali qui aura souffert beaucoup plus que moi pour que ce travail puisse voir le jour, à ma mère chérie lalla chrifa, à mon aimable père Si Said, à mes enfants Hind et Houssam qui auront accepté que j'empiète sur leurs priorités pour me consacrer à cette recherche, à mes frères et sœurs ainsi qu'à mon directeur de recherche Monsieur Nabil Khoury.

Ce travail est également dédié à l'honorable professeur, le grand professeur Stylianos Perrakis que j'ai eu l'honneur et le privilège d'avoir comme professeur et comme codirecteur de thèse. Tout le monde n'a pas la chance d'être orienté, conseillé et suivi par un aussi grand professeur. J'espère avoir été à la hauteur de la confiance qu'il m'a accordée. Au même titre, j'aimerais dédier ce travail au professeur Marko Savor qui a toujours accepté, généreusement, de me faire bénéficier de son expérience, de ses conseils et de ses orientations et ce, tout au long du processus d'évolution de cette thèse. En témoignage de reconnaissance, j'aimerais lui dire merci. De la même manière et avec la même intensité, j'aimerais dédier ce travail au professeur Maher Kooli que je remercie pour son soutien permanent et inconditionnel, pour ses encouragements, pour ses conseils judicieux, pour son amabilité ainsi que pour son empathie. J'aimerais aussi remercier les professeurs Guy Bellemare et Gilles Bernier d'avoir cru en mon travail et accepté de faire partie de mon comité de thèse. Je souhaite avoir été à la hauteur de leurs attentes.

Au même titre, j'aimerais remercier mon Université, l'Université du Québec à Montréal, qui m'a offert l'opportunité de suivre des études aussi prestigieuses dans un cadre prestigieux également. J'espère pouvoir lui retourner le compliment un jour. Je profite également de cette occasion pour remercier tous les membres de la Chaire desjardins en gestion des produits dérivés qui m'ont offert leur soutien permanent et inconditionnel tout au long des phases de réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES ABRÉVIATIONS

E	Avoir des actionnaires
EBIT	Bénéfice avant impôt et intérêts
V	Valeur de la compagnie
V_B	Valeur liquidative de la compagnie
X	Bénéfice avant impôt et intérêts
X_L	Niveau des bénéfices avant impôt et intérêts au moment de la faillite de la compagnie

RÉSUMÉ DU SUJET DE THÈSE

L'objectif de cette recherche est de comparer la capacité de trois modèles d'évaluation à estimer la valeur de l'avoir des actionnaires d'une compagnie ainsi que celle d'une option d'achat écrite sur cet avoir. Les modèles que nous comparons sont celui de H. Leland. (1994), celui de R. Goldstein, Ju. N., Leland. H. (2001) et celui de S. Sarkar et Zapatero. F. (2003).

Le premier modèle part de la valeur aux livres des actifs comme variable d'état qui suit un processus log-normal, alors que les deux autres modèles considèrent comme variable d'état, le bénéfice avant impôt et intérêts. Toutefois, cette variable d'état suit un processus log-normal dans le cas du modèle de R. Goldstein, Ju. N., Leland. H. (2001). Dans le cas du modèle de S. Sarkar et Zapatero. F. (2003), elle suit un processus de retour à la moyenne.

Afin d'effectuer cette comparaison, nous dérivons les équations différentielles stochastiques et ordinaires du sous-jacent et de l'option d'achat en vue d'en déterminer les expressions respectives des titres contingents et ce, pour les trois modèles sujets de notre comparaison. Ceci nous permet d'évaluer, à l'aide de nos trois modèles, la valeur de l'avoir des actionnaires et des options d'achat pour les compagnies formant notre échantillon. Ce dernier se compose de 26 compagnies listées à l'indice TSX60 que nous évaluons aux dates respectives de leurs états financiers de 2006 et de 2002, au moyen de ces mêmes modèles.

Au cours de cette recherche, nous analysons également les points de divergence et de convergence entre les trois modèles. Les résultats théoriques montrent que le modèle de R. Golstein, Ju. N. et Leland. H. (2001) et celui de H.Leland(1994) constituent des cas particuliers du modèle de retour à la moyenne de S. Sarkar et Zapatero. F, (2003). L'analyse montre également que la convergence entre les trois modèles peut être établie sous certaines conditions. Les résultats empiriques montrent que les trois modèles permettent d'évaluer correctement l'avoir des actionnaires ainsi que les options d'achat écrites sur cet avoir, avec une assez forte précision. À cet effet, nous effectuons une comparaison entre les résultats obtenus à l'aide des trois modèles et l'évaluation boursière et constatons que ces résultats sont très proches les uns des autres. Toutefois, le modèle de Sarkar et Zapatero offre, en général, une meilleure précision à ce niveau en offrant les résultats les plus proches de l'évaluation boursière.

INTRODUCTION

L'objectif de cette recherche est de comparer théoriquement et empiriquement la capacité de trois modèles structurels d'options, à évaluer l'avoir des actionnaires d'une compagnie ainsi qu'une option d'achat écrite sur cet avoir. L'étude est motivée par le fait que très peu de chercheurs qui utilisent les modèles structurels se sont attardés sur l'évaluation des options écrites sur les actions[1]. On peut regrouper ces modèles en deux catégories : des modèles d'ordre théorique et d'autres à caractère empirique. Partant de là, on peut subdiviser les modèles structurels ayant évalué les options en deux générations :

- Les modèles de première génération : cette première génération s'est surtout préoccupée d'évaluer la dette obligataire. Parmi les auteurs qui se sont penchés sur cet aspect de la littérature, on peut citer R. Merton (1974). Cet auteur fut le premier à suggérer que l'avoir des actionnaires soit évalué comme une option d'achat écrite sur la valeur de la compagnie en considérant que cette variable suit un processus log-normal. L'analyse s'est poursuivie avec Black, F. et J. C. Cox (1976) qui ont également essayé d'évaluer les obligations en partant des mêmes hypothèses que Merton mais en considérant des engagements spécifiques qui intégrés aux contrats d'obligations en augmentent la valeur. D'autres auteurs ont continué sur la lancée de ces pionniers et dont nous relaterons les propos dans le chapitre consacré à la revue de la littérature.

-La deuxième génération commence avec H. Leland (1994) qui part d'un modèle structurel permettant de déterminer la structure optimale du capital de la compagnie en considérant l'arbitrage entre les déductions fiscales des

[1]) La plupart des études effectuées à ce niveau ont porté sur les indices boursiers.

intérêts et les coûts de faillite. Ces deux derniers facteurs sont présentés par l'auteur comme des titres contingents qui remplissent les conditions de l'équation dynamique de son modèle et sont évalués en tant que tels. D'autres modèles considérant tantôt la valeur des actifs, tantôt la valeur des flux monétaires générés par la compagnie comme variable d'état ont suivi. Cette variable d'état suit un processus log-normal, de retour à la moyenne ou de sauts.

D'autres auteurs se sont plutôt penchés sur l'aspect empirique de la question en partant de modèles structurels ou d'équilibre, mais comme nous l'avons signalé précédemment, très peu d'articles ont mis l'accent sur l'évaluation des options sur actions. Parmi ces modèles, on trouve le modèle de Prucyk, B. et K. B. Toft (1997). Ce modèle est à notre connaissance le seul à s'être penché sur l'évaluation des options écrites sur l'avoir des actionnaires en partant de la structure du capital. Les auteurs utilisent l'expression de l'avoir des actionnaires telle qu'elle a été dérivée par H. Leland (1994) pour évaluer une option écrite sur cet avoir à l'aide du modèle de Black-Scholes. Nous montrerons plus tard dans l'étude que le modèle de Black-Scholes est inapproprié pour évaluer une telle option. Cela étant, on devrait normalement se tourner vers le bénéfice avant intérêts et impôt en tant que source de valeur comme le préconise la théorie financière.

C'est ainsi que nous avons choisi de mettre l'accent sur trois modèles faisant partie de la deuxième génération des modèles structurels qui sont : le modèle de H. Leland (1994), le modèle de Goldstein, R ., N. Ju et H. Leland (2001) et le modèle de Sarkar, S. et F. Zapatero (2003). Le choix de ces trois modèles est motivé par le fait qu'ils présentent beaucoup de similitudes même si leurs variables d'état et les processus que suivent ces dernières sont différents. Ceci nous a incités à vouloir vérifier les points de convergence et de divergence entre eux, d'autant plus que le modèle de Leland part de la valeur aux livres des actifs[2], comme variable d'état et que cette variable suit un processus log-normal, alors que les modèles de Goldstein, Ju et Leland et de Sarkar et Zapatero utilisent comme variable d'état le bénéfice avant intérêts et impôt, avec un processus log-normal dans le cas du premier modèle et un processus de retour à la moyenne dans le cas du second.

De plus, nous avons voulu compléter l'analyse effectuée par ces auteurs en l'étendant à l'évaluation des options, un aspect sur lequel ils ne se sont pas attardés. Pour cela, nous procédons de la manière suivante :

Dans un premier temps, nous dérivons les expressions respectives des titres contingents des modèles en vue d'obtenir l'expression de l'avoir des actionnaires selon les trois modèles. Cette dérivation se veut nécessaire en ce sens qu'elle va nous permettre plus tard de dériver les expressions respectives des options d'achat écrites sur l'avoir des actionnaires. Mais auparavant, il va falloir rendre opérationnels les modèles pour une éventuelle évaluation de l'avoir des actionnaires. À cet égard, il y a lieu de constater que les expressions respectives des titres contingents du modèle de Sarkar et Zapatero comprennent un terme qui présente une indétermination et qui rend impossible l'évaluation de l'avoir des actionnaires à l'aide de ce modèle. Afin d'obtenir une solution finie pour ces titres, il est nécessaire de trouver une fonction usuelle vers laquelle converge le terme qui cause l'indétermination. Un autre problème se pose cependant après avoir franchi cette étape. En effet, une fois que nous aurons modélisé les trois modèles, il faudra inverser les fonctions

2) Leland, H. E. (1994), "Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure", *Journal of Finance*, vol.49, pp.1216-1217

respectives qu'ils utilisent en vue de les rendre opérationnels pour l'évaluation de l'avoir des actionnaires. Une optimisation de type Newton-Raphson s'avèrera nécessaire dans ce cas. Une fois que nous aurons dérivé l'expression de l'avoir des actionnaires à l'aide des trois modèles, nous nous penchons sur un point important qui consiste à mesurer l'effet des impôts sur la valeur de l'avoir des actionnaires ainsi que sur la forme de la fonction qui relie cet avoir à la valeur marchande de la compagnie. Ce dernier point tire son importance du fait que nous voulons vérifier si cette courbe présente les mêmes caractéristiques que celles de l'option d'achat en présence de l'impôt. Nous nous penchons ensuite sur les conditions de convergence entre les trois modèles susceptibles de nous permettre d'obtenir des expressions identiques des titres contingents de ces modèles.

Nous mettons ensuite l'accent sur l'élément essentiel de cette thèse à savoir la dérivation théorique de l'expression d'une option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires à partir des expressions respectives des modèles structurels sous étude. Cette dérivation constitue une extension de ces trois modèles qui devrait nous permettre de les utiliser empiriquement. Contrairement à Prucyk et Toft (1997), nous pensons que cette expression peut uniquement être simulée en raison des coefficients complexes et variables de son équation différentielle stochastique. En effet, il s'agit d'une intégrale impropre, impossible à intégrer de façon analytique. Une simulation de la valeur de l'option s'avère inévitable dans ce cas, ce à quoi nous procéderons quand viendra le moment d'évaluer ces options. Les expressions des titres contingents obtenues à l'aide des trois modèles seront comparées à celles du modèle de R. Merton (1974), utilisé comme référence, ce qui permet de positionner sur le plan théorique ces trois modèles et de mettre en évidence leurs similitudes et leurs différences. Ayant dérivé les expressions respectives de l'avoir des actionnaires ainsi que celles des options d'achat écrites sur cet avoir selon les modèles structurels analysés, nous procédons à une analyse empirique exploratoire, basée sur des données réelles, qui va nous permettre de mesurer l'applicabilité de nos trois modèles. À cette fin, nous utilisons comme échantillon d'évaluation, les compagnies faisant partie de l'indice « TSX60 ». Nous considérons les données trimestrielles relatives à ces compagnies pour la période allant de janvier 2000 à décembre 2006. Durant cette période, seules 42 compagnies présentaient des données trimestrielles continues sur Bloomberg. Par ailleurs, pour pouvoir comparer les trois modèles au niveau de leur efficacité respective à évaluer l'avoir des actionnaires et les options d'achat écrites dessus, nous recourons à un test de vérification des deux paramètres de retour à la moyenne[3], sur les 42 compagnies retenues. L'échantillon final d'évaluation se trouve ainsi restreint à 26 compagnies[4] qui remplissent cette condition. Les 15 autres compagnies sont exclues de l'échantillon d'évaluation[5]. Cependant, afin de contourner le problème potentiel de biais de sélection, une évaluation hors échantillon utilisant ces 15 compagnies sera effectuée en vue de mesurer l'efficacité d'évaluation des deux modèles dont la condition de retour à la moyenne de la variable d'état n'est pas respectée. En procédant de la sorte, nous évitons que le modèle de Sarkar et Zapatero soit favorisé en autant que le standard de

3) Il s'agit de la valeur moyenne à terme des bénéfices avant intérêts et impôt et de leur vitesse de retour à cette moyenne.

4) Nous convenons qu'il s'agit d'un petit échantillon d'évaluation mais il s'agit ici d'une étude empirique exploratoire qui nous permettra uniquement de déterminer si les modèles analysés seront opérationnels pour évaluer des titres qui se transigent sur les marchés des actions et des options. Des études plus poussées impliquant de plus grands échantillons, des périodes plus allongées ainsi que d'autres marchés seront conduites dans le cadre d'une analyse ultérieure.

5) Il s'agit des 15 compagnies qui ne remplissent pas la condition de retour à la moyenne. Nous avons exclu Nortel de cet échantillon parce que la compagnie a présenté beaucoup d'instabilité lors de la période entourant la date d'évaluation. Ceci a fait que le BAII de la compagnie était négatif durant cette période rendant ainsi impossible son évaluation à l'aide des modèles qui partent du BAII comme variable d'état.

comparaison retenu[6] ne sera pas choisi sur la base des conditions sous-jacentes à ce modèle. Le reste du travail sera organisé de la façon suivante :

Le premier chapitre sera consacré à la revue de la littérature. Dans cette partie, nous nous penchons sur les travaux qui ont été effectués dans ce domaine. Nous commençons par les modèles classiques et relatons les divergences et les concordances entre eux. Nous ferons, ensuite, une transition vers les modèles qui font l'objet de notre étude.

Le second chapitre met l'accent sur les dérivations théoriques relatives aux titres contingents. Les dérivations ainsi effectuées, nous permettront de déterminer l'expression de l'avoir des actionnaires. Dans ce chapitre, nous nous attarderons également sur les points de divergence entre les trois modèles sous étude, notamment en ce qui a trait à l'incidence de l'impôt sur la convexité de la courbe qui relie l'avoir des actionnaires à la valeur marchande de la compagnie, ainsi que sur la valeur marchande de cet avoir. Nous aurons aussi l'occasion de vérifier sous quelles conditions les expressions des titres contingents des trois modèles deviennent identiques.

Le troisième chapitre sera réservé aux dérivations théoriques relatives aux options d'achat écrites sur l'avoir des actionnaires. Ceci nous permettra d'en déterminer l'expression qui servira ensuite à évaluer ces options à l'aide des trois modèles.

Les quatrième et cinquième chapitres seront consacrés à une analyse empirique exploratoire. Ainsi, au quatrième chapitre, nous évaluerons l'avoir des

[6] Représenté par la valeur marchande moyenne des titres. Cette valeur est obtenue par la moyenne des prix haut et bas de la journée de l'état financier. Le fait d'obtenir des résultats proches de ceux observés sur le marché à l'aide de l'un ou l'autre des modèles sous étude signifiera que le marché évalue les titres de la même manière que le font les utilisateurs de ce modèle.

actionnaires des compagnies faisant partie de notre échantillon à l'aide des trois modèles sous étude. Quant au cinquième chapitre, il présente l'analyse des résultats de l'évaluation des options d'achat écrites sur cet avoir.

CHAPITRE I

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Très peu de chercheurs qui utilisent les modèles structurels se sont attardés sur l'évaluation des actions et des options écrites sur ces actions. Parmi ces auteurs, quelques uns se sont penchés sur l'aspect théorique de la problématique alors que d'autres ont mis l'accent sur le côté empirique. Par ailleurs, on peut répertorier ces études en deux générations. Une première génération qui s'est attardée sur l'évaluation de la dette obligataire des compagnies et une deuxième génération qui a prôné l'utilisation de l'arbitrage entre déductions fiscales des intérêts, coûts de faillite, coûts d'agence et coûts de transaction comme outil d'optimisation de la valeur des titres contingents.

Dans les études de la première génération, on retrouve tout d'abord celle de R. Merton (1974). Cet auteur fut le premier à utiliser la relation de parité entre les options d'achat et les options de vente au niveau de l'entreprise pour suggérer que les fonds propres d'une entreprise endettée peuvent être perçus comme une option d'achat écrite sur les actifs de celle-ci et dont le prix de levée est égal à la valeur nominale de la dette. Ainsi, les actionnaires ont l'option, si leur entreprise est solvable, de racheter les actifs de l'entreprise à un prix de levée correspondant au montant de la dette à l'échéance de celle-ci.

L'auteur part alors de la valeur des actifs de la compagnie comme variable d'état, une variable qui suit un processus log-normal[7]. Il obtient une solution analytique de type du modèle de Black-Scholes que remplissent les titres contingents. Merton montre aussi que l'avoir des créanciers peut être également perçu et évalué comme une option. Dans ce cas, la valeur marchande d'une obligation risquée serait égale à la valeur marchande d'une obligation sans risque moins la valeur marchande d'une option de vente écrite sur l'actif de l'entreprise émettrice. Ainsi, plus le risque de l'entreprise augmente, toutes choses égales, plus la valeur marchande de l'option de vente augmente aussi, ce qui fait diminuer d'autant celle des obligations.

Poursuivant sur la même lancée, Black, F. et J. C. Cox (1976) analysent la dette obligataire de la compagnie en considérant la même équation dynamique que Merton et le même processus suivi par la variable d'état de ce modèle[8]. Cependant, ils intègrent dans leur analyse trois types d'engagement qu'on retrouve dans la pratique. Ces engagements sont :

---

7) L'équation dynamique de la valeur de la compagnie selon ce modèle se présente de la façon suivante
$dV = (\alpha V - C)dt + \sigma V dz$

où

V représente la valeur de la compagnie;
α représente le taux de rendement de la firme;
C représente les flux monétaires totaux reçus par les créanciers et par les actionnaires;
σ représente l'écart type instantané des rendements;
dz suit un processus de Wiener.

8) L'équation différentielle stochastique de ce modèle est identique à celle de Merton. Elle se présente de la façon suivante :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial V^2}\sigma^2 V^2 + \frac{\partial G}{\partial V} rV - rG + c = 0$$

où

V représente la valeur de la compagnie;
c représente les coupons reçus par les créanciers;
σ représente l'écart type instantané des rendements;

- Les engagements de sécurité « Safety Covenants » : ces derniers donnent aux créanciers le droit de mettre la compagnie en faillite ou de forcer sa réorganisation si son activité est jugée insuffisante selon un standard préétabli. Ce standard peut être, à titre d'exemple, le défaut de paiement des intérêts de la dette.
- Les arrangements de subordination (Subordinating Arrangements) : ce type d'engagement consiste en la subordination des obligations « Junior » aux obligations « Senior », ce qui donne aux détenteurs de ces dernières la priorité de recouvrement de leur créance, à l'échéance.
- Les restrictions relatives au paiement des intérêts et des dividendes : les actionnaires peuvent vendre de nouveaux titres pour rencontrer les exigences de paiement des intérêts et des dividendes, mais certaines restrictions peuvent limiter la portée de cette pratique. Dans ce cas, les créanciers qui voudront protéger leurs créances exigeront que les titres nouvellement émis soient des actions ou des obligations subordonnées. Ainsi, les chances de non paiement des intérêts augmenteront et offriront à ces créanciers la possibilité de prendre possession de l'actif de la compagnie.

Les deux auteurs poursuivent l'analyse en expliquant que les discontinuités associées au processus de sauts pourraient modifier le fonctionnement du modèle. En effet, la valeur de la compagnie peut ne pas passer par le point indiquant le seuil de la faillite, ce qui rend difficile la décision de poursuivre les opérations de l'entreprise ou de les arrêter.

Poursuivant dans cette voie, Brennan, M. J. et E. S. Schwartz.(1978) obtiennent une équation différentielle partielle de même forme que celle de

Merton[9] mais dont la valeur des titres contingents peut uniquement être déterminée de façon numérique en raison du caractère fini de la dette sous-jacente à leur modèle. Selon ces deux auteurs, cette dernière devrait être renouvelée, contrairement à l'hypothèse de perpétuité préconisée par Merton. Les deux auteurs poussent le raisonnement plus loin en considérant les déductions fiscales des intérêts et les coûts de faillite éventuels. Ils montrent alors que c'est l'arbitrage entre ces deux termes qui détermine l'effet net de la dette sur la valeur de la compagnie.

Afin de compléter leur analyse, Brennan, M. J. et E. S. Schwartz. (1984)[10] considèrent également les coûts d'agence et concluent à un effet net positif de la dette dans le cas d'une entreprise prospère. Par contre, en cas de difficultés financières, les coûts d'agence élevés élimineraient les bienfaits des déductions

---

9) L'équation stochastique du modèle se présente de la façon suivante :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial V^2}\sigma^2 U^2 + \frac{\partial G}{\partial V} rU - rV = 0$$

où

U représente la valeur de la compagnie sans levier financier. Cette variable suit un processus log-normal comme dans le cas du modèle de Merton.

V est la valeur de la compagnie avec levier financier.

10) L'équation différentielle du modèle est la suivante :

$$L^{f,g} K = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\sigma^2 + \mu(x,g,t)\frac{\partial K}{\partial x} + gA\frac{\partial K}{\partial A} + fM\frac{\partial K}{\partial M}$$

où

$$dM = fMdt$$

$$dz = gzdt$$

$$dA = gAdt$$

et

L représente l'opérateur de dérivation;

x représente les bénéfices avant intérêts et impôt;

A représente la valeur aux livres des actifs de la compagnie;

M représente la valeur aux livres de la dette;

z représente l'envergure de la compagnie;

μ représente la croissance instantanée des cash-flows;

g représente le taux de croissance de la firme;

f représente le taux de croissance de la dette.

fiscales des intérêts. Ainsi, une stratégie dynamique de financement permettrait à l'entreprise de contrôler la croissance de ses flux monétaires et de sa dette, ce qui conduirait à une structure optimale de son capital.

Dans la première génération des modèles structurels, on trouve également les travaux de S. Turnbull (1979) qui part des mêmes hypothèses[11] que Merton mais, au même titre que Brennan et Schwartz, il introduit la notion d'arbitrage entre les déductions fiscales des intérêts et les coûts de faillite. Ceci lui permet de déterminer la combinaison optimale pour financer un projet d'investissement à l'aide de la dette et des fonds propres. À ce stade, il serait intéressant de poursuivre l'analyse en utilisant comme variable d'état le bénéfice avant intérêts et impôt « BAII » et de vérifier si cette variable d'état suit un processus de retour à la moyenne susceptible de la stabiliser. Nous reviendrons sur ce point un peu plus tard dans cette discussion.

La deuxième vague d'auteurs qui se sont penchés sur les modèles structurels débute avec H. Leland (1994). Cet auteur a proposé un nouveau modèle d'évaluation qui tient compte des déductions fiscales des intérêts et des coûts de faillite éventuels. Ces deux dernières variables représentent des titres contingents dans le modèle et remplissent donc les conditions de son équation différentielle. Ceci permet à Leland d'établir le lien entre la structure optimale du capital et le marché. En effet, les actionnaires ordinaires d'une entreprise ont droit à la valeur résiduelle de celle-ci, c'est-à-dire l'actif dont elle demeure propriétaire après s'être acquittée de ses engagements envers toutes les autres

11) L'équation différentielle de ce modèle est la suivante .

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial U^2}\sigma^2 U^2 + \frac{\partial B}{\partial U} rU - rB = 0$$

où

U représente la valeur de la compagnie avant levier financier;

B représente la valeur marchande de la dette.

catégories de bailleurs de fonds. Par ailleurs, leur responsabilité à son égard se limite à leur mise de fonds. Ainsi, lorsque l'entreprise compte des actions et des obligations dans sa structure financière, et si elle continue à être solvable, les actionnaires pourront en conserver la propriété une fois que la dette aura été remboursée à l'échéance. Les actionnaires disposent alors d'une option d'achat sur les éléments d'actif de leur entreprise dont le prix de levée et l'échéance sont équivalents à ceux de la dette. Le remboursement de l'emprunt équivaut à la levée de l'option qu'ils détiennent. Il va de soi qu'ils le feront si la valeur marchande de l'actif est supérieure au montant des emprunts. Dans le cas contraire, ils auront avantage à ne pas le faire. Tout comme Merton, Leland dérive les équations stochastique et ordinaire de son modèle[12] en partant de la valeur des actifs de la compagnie comme variable d'état. Cette variable, possédant une volatilité constante, suit un processus log-normal. L'auteur considère également une dette perpétuelle, ce qui lui permet d'obtenir une solution fermée de l'équation différentielle ordinaire de son modèle. Il en découle une dérivation analytique de la structure optimale du capital qui prend en considération l'arbitrage entre les déductions fiscales des intérêts et les coûts d'une éventuelle faillite. Leland suppose que les activités d'une entreprise ne sont pas affectées par sa structure du capital qui demeure une structure statique[13] dans la mesure où les décisions qui y sont afférentes demeurent inchangées une fois que la dette a été émise. Le fait de considérer la

---

12) L'équation différentielle de ce modèle est la suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 G}{\partial V^2} + rV \frac{\partial G}{\partial V} - rG + C = 0$$

où

V représente la valeur aux livres des actifs de la compagnie;

C représente le coupon perpétuel versé aux créanciers;

σ représente la volatilité des actifs de la compagnie, supposée constante.

13) Corporate Debt Value, Bond Covenants and Optimal Capital Structure, Hayne. E. Leland (1994). The Journal of Finance, vol.49, issue n^0 4, pp. 1216-1217

dette statique de l'entreprise comme une variable constitue une hypothèse forte selon l'auteur, en ce sens qu'une dette fluctuante affecterait négativement la créance des nouveaux créanciers et qu'une baisse du niveau de ce paramètre affecterait négativement la mise de fonds des actionnaires. L'auteur conclut que ces deux facteurs élimineraient toute possibilité de changement du niveau de la dette et qu'il ne serait donc pas opportun de la renouveler même si les coûts de refinancement étaient nuls. La dette ainsi définie, verse un coupon perpétuel dont le niveau demeure constant sauf si la compagnie tombe en faillite, un évènement qui est déclenché de façon endogène. Si cette situation se présente, des coûts de faillite, proportionnels à la valeur liquidative de la compagnie sont consentis par cette dernière. Les détenteurs de la dette prennent alors possession de la compagnie dont la valeur se situe au niveau de sa valeur liquidative, diminuée du montant des coûts proportionnels de faillite en raison de la responsabilité des actionnaires laquelle est limitée à leur mise de fonds. En dérivant l'équation ordinaire du modèle et en considérant les conditions terminales des titres contingents, on obtient les expressions respectives de ces titres, ce qui permet de dériver l'expression de l'avoir des actionnaires.

Dans le même ordre d'idées, Longstaff, F. A. et E. S. Schwartz. (1995) partent de la même équation dynamique de Merton[14]. Ils utilisent cependant une structure des taux d'intérêt qui suit le processus de retour à la moyenne de

---

14) L'équation différentielle remplie par les titres contingents de ce modèle est la suivante

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 G}{\partial V^2} + rV\frac{\partial G}{\partial V} - rG + \rho\sigma\eta V\frac{\partial^2 G}{\partial V \partial r} + \frac{1}{2}\eta^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + (\alpha - \beta r)\frac{\partial G}{\partial r} = 0$$

où

η représente la volatilité du taux d'intérêt;

β représente la vitesse de retour à la moyenne du taux d'intérêt;

α représente la valeur marchande du taux d'intérêt augmentée de la constante du modèle de Vasicek (1977);

σ représente la volatilité des actifs de la compagnie;

ρ représente la corrélation entre les processus suivis par la valeur des actifs de la compagnie et le taux d'intérêt.

Vasicek (1977). Par ailleurs, le coefficient de corrélation entre l'équation dynamique du modèle de Longstaff et Schwartz et celle du taux d'intérêt est non nul et évolue de façon déterministe en fonction du temps. Ceci permet aux deux auteurs de dériver une solution analytique de leur équation différentielle ordinaire. Cette expression est applicable à divers types de titres de dette. Ainsi, on pourrait l'utiliser pour évaluer la dette à taux fixe mais aussi la dette à taux variable. Les deux auteurs l'utilisent également pour évaluer une dette à dates de versements multiples.

Leland, H. et K. B. Toft. (1996) prolongent le débat en partant des mêmes hypothèses[15] que Merton et Leland mais en considérant une dette finie. Le facteur temps influence, désormais, la structure optimale du capital laquelle devient sujette à un arbitrage entre avantages fiscaux d'une part, et coûts de faillite et coûts d'agence d'autre part. Les deux auteurs arrivent à une solution fermée de l'équation de la dette plus générale que celle de Leland.

Dans la deuxième génération des modèles structurels, on retrouve d'autres articles qui traitent de la structure optimale du capital de l'entreprise. Ainsi, Mella-Barall, P. et W. Perraudin (1997) partent du fait que les actionnaires peuvent choisir le niveau stratégique de la dette qui permettrait à l'entreprise d'éliminer les coûts de faillite ainsi que les coûts d'agence dus au sous-investissement et ainsi atteindre le niveau optimal de sa structure du capital.

---

15) Les auteurs considèrent la valeur des actifs de la compagnie comme variable d'état et que cette variable suit un processus log-normal. L'équation dynamique de cette variable se présente de la façon suivante:

$$\frac{dV}{V} = (\mu - \delta)dt + \sigma dz$$

où

V représente la valeur des actifs de la compagn ie;
μ représente le taux de rendement des actifs de la compagnie;
δ représente les flux monétaires totaux reçus par les détenteurs des titres de la compagnie;
σ représente l'écart type instantané des rendements;
dz suit un processus de Wiener.

Les deux auteurs partent de la valeur marchande de la production unitaire comme variable d'état, une variable qui suit un processus log-normal. Ils obtiennent une solution fermée de leur équation différentielle partielle[16] sans considération pour les déductions fiscales des intérêts comme le préconisent Modigliani et Miller (1958).

Poursuivant dans la même voie que Leland et Toft (1996), H. Leland (1998) part de la même équation dynamique mais considère comme variable d'état[17], la valeur marchande des actifs obtenue par la somme des cash-flows nets générés par l'activité de l'entreprise. L'auteur introduit également les coûts d'agence dans son analyse. Il les définit comme étant l'émanation de l'écart entre le risque stratégique choisi par l'entreprise avant endettement et le risque financier produit par la dette. Mais l'auteur déplore que le fait de contrôler la structure optimale du capital en décidant du niveau stratégique du risque profite aux actionnaires, qui voient leur avoir augmenter, plutôt qu'à la compagnie.

Collin-Dufresne, P. et R. S. Goldstein. (2001) traitent un autre volet de la question en revenant sur l'équation de Merton[18] mais en considérant un taux d'intérêt stochastique associé à un levier qui remplit les conditions de retour à la moyenne[19]. Les deux auteurs partent du fait que les compagnies possédant

---

16) $\frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial p^2} + rp\frac{\partial w}{\partial p} - rw + p - w = 0$

où

p représente le prix de la production unitaire de la compagnie;
w représente le coût de production périodique;
μ représente la croissance instantanée du prix unitaire de production sur le marché;
σ représente la volatilité des prix des unités produites.

17) Cette variable d'état suit un processus log-normal.

18) Les auteurs considèrent la même équation dynamique remplie par la valeur des actifs de la compagnie selon le modèle de Merton ainsi que le même processus suivi par cette variable.

19) Les équations dynamiques de ces processus sont les suivantes :

$\frac{dy}{y} = (\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dz_1$

un ratio de solvabilité élevé sont en droit d'émettre des titres de dette d'un niveau de priorité identique à celui de leur dette initiale même si cette dette est protégée. Ceci rend difficile la détermination de l'écart effectif de crédit associé aux titres de dette considérés. Les deux auteurs proposent alors un nouveau modèle structurel qui permet de mesurer l'écart de crédit en prenant en considération l'actuelle structure de la dette de la compagnie ainsi que la possibilité de changement de cette structure à l'avenir. Ils obtiennent un écart de crédit plus élevé, ce qui permet de diminuer la surévaluation de la dette obligataire de la compagnie. Par ailleurs, afin de contourner le problème de passage sous le niveau de faillite, les auteurs considèrent que la faillite est enclenchée dès que son seuil est atteint pour la première fois. Ce seuil est déterminé de façon exogène, ce qui permet d'accommoder les structures compliquées de dette et de taux de rendement ainsi que le caractère stochastique du taux d'intérêt. Le fait de considérer un seuil de faillite dynamique dans le temps associé à un effet conjoint du taux d'intérêt stochastique et du ratio de levier financier lequel effet est supposé suivre un processus de retour à la moyenne, permet aux auteurs d'arriver à des résultats qui concordent avec l'évidence empirique.

Pour leur part, Goldstein, Ju et Leland (2001) soulignent que le modèle de Leland (1994) est statique dans la mesure où, selon ce modèle, la valeur de la

---

$$dk = \lambda(y - v - k)dt$$
$$dr = k(\theta - r)dt + \eta dz_2$$
$$dz_1 dz_2 = \rho dt$$

où

y représente le logarithme népérien de la valeur des actifs de la compagnie;

ρ représente le coefficient de corrélation entre les processus suivis par le logarithme de la valeur des actifs de la compagnie et celui suivi par le taux d'intérêt;

k représente le logarithme népérien du seuil de faillite.

firme ne change pas une fois que la dette a été émise. Selon ces auteurs, les modèles qui partent de la valeur des actifs comme variable d'état présentent un problème d'incertitude qui affecte la transigibilité de ces actifs. L'autre problème dont souffrent ces modèles est qu'ils traitent les impôts de façon différente de celle dont sont traités l'avoir des actionnaires et la dette. Ceci conduit, selon Goldstein, Ju et Leland, à des situations de confusion. Ainsi, on obtient contrairement à l'évidence empirique, une relation positive entre le taux d'impôt et la valeur des fonds propres. En effet, si on considère une relation positive entre le taux d'impôt et les déductions fiscales des intérêts laquelle est censée contribuer à une augmentation de la valeur des fonds propres, on obtient également une relation positive entre ces mêmes fonds propres et le taux d'impôt. Le modèle proposé par les trois auteurs suppose par contre une relation négative entre la valeur des fonds propres et le taux d'impôt. Par ailleurs, les auteurs trouvent que les structures statiques ont tendance à surestimer le taux de croissance instantané, ce qui a pour effet de réduire la probabilité de faillite. Pour contourner ce problème, ils intègrent l'effet de l'impôt dans l'analyse. Ceci conduit à une baisse du niveau de ce paramètre et par voie de conséquence à une augmentation de la probabilité de faillite conformément à l'évidence empirique. Le troisième problème soulevé par les trois auteurs est que les modèles classiques n'expliquent pas la raison pour laquelle le ratio des déboursés à la valeur de la compagnie est censé demeurer constant. Selon Goldstein, Ju et Leland, pour faire en sorte que les versements des intérêts et les déductions fiscales qui en découlent demeurent constants, les modèles classiques font varier, de façon dramatique, le ratio de l'avoir des actionnaires aux dividendes chaque fois que la valeur de la compagnie change, ce qui contredit les résultats empiriques. Les auteurs trouvent que le fait de traiter les impôts de la même façon que les fonds propres et la dette conduit à une augmentation du montant des impôts à payer, consécutive à une augmentation de la valeur de la compagnie. Ceci rend le raisonnement cohérent avec les hypothèses de constance de la croissance instantanée de la valeur des actifs. Ils proposent alors une solution alternative au modèle de Leland, jugé statique, en prenant comme variable d'état les bénéfices avant impôt et intérêts (BAII). Ce paramètre regroupe, selon les trois auteurs, toute l'information pertinente pour les parties prenantes de l'entreprise « StakeHolders ». Ils dérivent alors l'équation dynamique de leur modèle en supposant un processus log-normal[20] et obtiennent une solution fermée. Ceci leur permet de déterminer une solution analytique pour les expressions respectives des titres contingents ainsi que pour l'avoir des actionnaires.

De son côté, C. Zhou (2001) utilise un modèle structurel hybride[21] pour évaluer la dette obligataire. Pour ce faire, il considère une variable d'état qui

---

20) L'équation dynamique pour ce modèle se présente de la façon suivante :

$$\frac{dV + \delta dt}{V} = rdt + \sigma dz$$

où

V représente la valeur marchande des actifs de la compagnie dont la valeur est obtenue par l'expression suivante :

$$V(t) = \frac{\delta t}{r - \mu}$$

et

où
δt représente le BAII à l'instant t;
μ représente le taux de rendement des actifs de la compagnie;
σ représente l'écart type instantané des rendements;
dz suit un processus de Wiener.
21) L'équation dynamique de ce modèle se présente de la façon suivante

$$\frac{dV}{V} = (\mu - \lambda v)dt + \sigma dz + (\pi - 1)dY$$

μ représente le taux de rendement des actifs de la compagnie;

dY est un processus de Poisson d'intensité λ;

∏ reprsésente l'amplitude du saut ayant une valeur espérée de v+1. Il suit un processus log-normal.

suit conjointement un processus de diffusion et un processus de sauts afin de capter l'arrivée de nouvelles informations susceptibles d'occasionner une variation marginale de la valeur de la compagnie. Ceci lui permet d'évaluer les obligations en tout temps et de déterminer ainsi la valeur de l'avoir des actionnaires, abstraction faite de l'instant où peut se produire la faillite. Ainsi, contrairement aux autres modèles structurels, la flexibilité offerte par ce modèle donne à son utilisateur l'occasion d'évaluer correctement l'écart de crédit. Ce faisant, on arrive conformément à l'évidence empirique, à expliquer l'évolution des prix des obligations ainsi que celle des probabilités de faillite.

Dans les modèles structurels de seconde génération, on trouve également le modèle de S. Sarkar (2003), un modèle où l'auteur élargit le débat en prenant en compte, comme titres de dette, les obligations rachetables par anticipation ainsi que les obligations convertibles. Nous pensons que ces deux volets, si considérés, peuvent influencer le niveau de la relation d'agence entre créanciers et actionnaires. Cependant, dans le cadre de cette thèse, nous nous pencherons plutôt sur le cas général à savoir : une dette perpétuelle comme définie par Merton et Leland.

Poursuivant sur la lancée de Goldstein, Ju et Leland (2001), Sarkar, S. et F. Zapatero (2003) partent du BAII comme variable d'état[22] mais utilisent plutôt un processus de retour à la moyenne pour dériver la valeur d'une

---

22) L'équation dynamique de ce modèle se présente de la façon suivante

$$dx=k(\theta-x)dt+\sigma x dz$$

où

x représente le bénéfice avant intérêts et impôt;

k représente la vitesse de retour à la moyenne;

θ représente la valeur moyenne, à terme, des bénéfices avant intérêts et impôt;

σ représente la volatilité des actifs de la compagnie;

dz suit un processus de Wiener d'incrément dt.

compagnie à partir de cette variable. Ce phénomène vient se substituer aux modèles log-normaux de Leland et de Goldstein, Ju et Leland. Les deux auteurs trouvent que la théorie d'arbitrage présente des contradictions avec les résultats empiriques. Selon eux, cette théorie considère une relation positive entre le levier optimal et les gains alors que les résultats empiriques plaident en faveur d'une relation négative entre les deux paramètres. Notons que Leland arrive à la conclusion que ces deux paramètres devraient être indépendants en partant d'une variable d'état qui suit un processus Log-normal. Sarkar et Zapatero considèrent que l'ambigüité qui entoure la relation entre le taux d'impôt et la valeur de la compagnie serait due au choix du processus suivi par la variable d'état. Ils proposent alors un modèle où cette variable d'état, représentée par les gains actualisés, suit un processus de retour à la moyenne. En procédant ainsi, les deux auteurs obtiennent des résultats cohérents avec la théorie d'arbitrage et lèvent ainsi la contradiction qui existe entre cette théorie et l'évidence empirique. Selon Sarkar et Zapatero, dans une économie concurrentielle, à long terme, les cash-flows des projets devraient retourner vers des niveaux qui rendraient les entreprises indifférentes vis-à-vis des opportunités offertes par les nouveaux projets. D'autre part, les deux auteurs trouvent inappropriée l'idée de Leland selon laquelle, le taux de coupon de la dette serait proportionnel à la valeur de la compagnie dans le sens où cette valeur suit un processus stochastique. Considérer une relation de proportionnalité entre les deux serait affirmer que le coupon est stochastique également. Ceci constituerait une contradiction avec l'hypothèse qui veut que ce paramètre soit constant. Les deux auteurs concluent que les hypothèses sous-jacentes à leur modèle rendent le coupon insensible à une variation des gains puisqu'il dépend désormais de la structure du capital de la compagnie laquelle est constante.

Raisonnant de la même manière que Leland et Toft (1996) et Leland (1998), Sarkar, S. et D. C. Mauer (2005)[23] trouvent que les coûts d'agence agissent au niveau du levier optimal et par voie de conséquence, influencent beaucoup la structure du capital de la compagnie. En effet, l'optimisation du niveau de la dette passe par un arbitrage entre les coûts de faillite, les déductions fiscales des intérêts et les coûts d'agence émanant du conflit d'intérêt qui oppose les actionnaires aux créanciers. Ce conflit découle du choix fait par les actionnaires à un moment donné pour exercer leur option d'investir et donc de maximiser leur avoir aux dépens des créanciers. Les deux auteurs arrivent à la conclusion que les actionnaires ont une forte motivation à surinvestir du moment que ceci permet de transférer le risque aux créanciers, ce qui engendre des coûts d'agence qui réduisent la valeur de la compagnie. Ce faisant, on se retrouve à maximiser la valeur de l'avoir des actionnaires plutôt que celle de l'entreprise entière.

Toujours sur la même lancée de Leland et Toft (1996) et de Leland (1998), Ju, N., R. Parrino, A. M. Poteshman, et M. S. Weisbach (2005) partent de la valeur des actifs de la compagnie comme variable d'état, exprimée comme la somme des cash-flows réalisés par l'entreprise et supposent que cette variable suit un processus log-normal[24]. En revanche, ils considèrent que la compagnie

23) L'équation dynamique du modèle présenté par les deux auteurs est la suivante :

$$\frac{dP}{P} = \mu \, dt + \sigma \, dz$$

où

P représente le prix d'une denrée produite et vendue par l'entreprise;
μ représente la croissance instantanée du prix de la denrée;
σ représente l'écart type instantané du prix de la denrée;

24) L'équation dynamique de ce modèle est la suivante :

$$\frac{dV}{V} = (\mu - \delta)dt + \sigma dz$$

peut cibler une structure du capital qui lui permet de décider du moment opportun pour refinancer sa dette à l'échéance. De plus, les auteurs étendent le raisonnement de Leland et Toft (1996) et de Leland (1998) relatif à l'arbitrage entre déductions fiscales des intérêts et coûts de faillite, en y intégrant le risque associé aux actifs de la compagnie lequel risque est choisi de façon exogène et évolue de façon dynamique, la capacité des détenteurs de la dette à mettre l'entreprise en faillite ainsi que des coûts de faillite progressifs en fonction du niveau de solvabilité de l'entreprise.

De leur côté, Hackbarth, D., J. Miao et E. Morellec (2005) partent des mêmes hypothèses que Leland (1998) en y ajoutant deux chocs[25] susceptibles d'influencer la structure du capital de la compagnie. Ainsi, en plus des flux monétaires émanant du coupon et du principal des obligations, les auteurs considèrent un choc spécifique et un autre relié à l'état de l'économie. Ces deux évènements influencent le niveau du levier financier, le risque de faillite à travers la probabilité de faillite, l'écart de crédit et donc la valeur des obligations. Les auteurs considèrent que les déductions fiscales des intérêts sont plus prononcées en cas d'expansion et que les coûts de faillite augmentent avec la probabilité de faillite laquelle est plus prononcée en période de récession. Ils montrent alors que les actionnaires peuvent choisir de façon

---

où

V représente la valeur des actifs de la compagnie obtenue par la somme des cash-flows générés par son activité;
μ représente le taux de rendement des actifs de la compagnie;
δ représente le taux des dividendes, obtenu de façon exogène;
σ représente l'écart type instantané des rendements;
dz suit un processus de Wiener

25) Les deux chocs ne sont pas corrélés entre eux et répondent aux conditions suivantes :
$f(x_t,y_t)=x_ty_t$
où
x_t représente le choc spécifique dont le processus est log-normal;
y_t représente le choc relatif à l'état de l'économie et suit un processus de poisson.

endogène divers seuils de faillite qui permettraient d'ajuster la structure du capital en fonction de l'état de l'économie, ce dernier étant l'élément primordial dans l'explication des phénomènes observés sur le marché.

Pour leur part, Hackbarth, D., C. A. Henessy et H. Leland (2007)[26] étendent le raisonnement de Leland (1994) et de Leland, Goldstein et Ju (2001) à deux catégories de dette : une dette bancaire et une dette obligataire. Selon les trois auteurs, la flexibilité offerte par la dette bancaire agit positivement au niveau de l'arbitrage entre déductions fiscales des intérêts et coûts de faillite en ce sens que ces derniers s'en trouvent réduits. De ce fait, les petites entreprises se contenteront de la dette bancaire alors que les grandes compagnies opteront pour une dette mixte avec une priorité pour la dette bancaire[27]. Ainsi, elles iront chercher de la dette obligataire uniquement si la dette bancaire ne suffit pas pour leur permettre d'atteindre leur capacité optimale d'endettement. Un régime de faillite flexible contribuerait cependant à rehausser le niveau de la dette obligataire contractée par ces compagnies.

Sur le plan empirique, très peu d'auteurs se sont penchés sur la question d'évaluer l'avoir des actionnaires et les options écrites sur cet avoir. Parmi ces auteurs, certains sont partis de modèles structurels alors que d'autres se sont plutôt basés sur des modèles d'équilibre.

Ainsi, Eom, Y. H., J. Helwedge et J. Huang (2004) ont testé l'efficacité de cinq modèles structurels qui s'attardent sur l'évaluation de la dette obligataire.

---

26) L'équation dynamique de ce modèle est la suivante :

$$\frac{dx}{x} = \mu \, dt + \sigma \, dz$$

où

x représente le BAII;
μ représente la croissance instantanée du BAII;
σ représente l'écart type instantané du BAII;

27) Cette priorité est également respectée en cas de faillite de la compagnie.

Les modèles qui font l'objet de cette analyse sont celui de Merton (1974), celui de Geske (1979), celui de Longstaff et Shwartz (1995), celui de Leland et Toft (1996) et celui de Collin-Dufresne et Goldstein (2001)[28]. Pour ce faire, Eom, Helwedge et Huang partent d'un échantillon initial de 8 700 prix d'obligations et retiennent un échantillon final d'évaluation de 182 prix seulement[29]. Les résultats de l'analyse montrent que les obligations peu risquées offrent un faible écart de crédit en raison du faible levier auquel font appel les compagnies émettrices et de la faible volatilité des actifs de cette dernière. En revanche, les obligations très risquées offrent un écart de crédit élevé. Les auteurs constatent également que les modèles de Merton et de Geske surévaluent les obligations. Cette surévaluation est moins prononcée dans le cas du modèle de Geske en raison du caractère endogène de la faillite qui permet d'améliorer l'écart de crédit. Par ailleurs, les auteurs trouvent que dans le cas des modèles de Longstaff et Schwartz et de Collin-Dufresne et Goldstein, la corrélation entre la dynamique de la firme et celle du taux d'intérêt stochastique[30] n'est pas pertinente au niveau empirique en ce sens que ces deux modèles surévaluent également les prix des obligations.

À l'opposé, les deux auteurs trouvent que le modèle de Leland et Toft sous-évalue les obligations en raison d'un coupon continu et d'une dette sous-jacente finie. Selon les auteurs, les cinq modèles analysés ne permettent pas d'évaluer correctement l'écart de crédit associé aux obligations risquées et par

28) La période d'évaluation choisie par les auteurs commence en 1986 et se termine en 1997.

29) C'est ainsi qu'ils ont considéré des obligations non rachetables, en éliminant celles émises par les institutions financières et les firmes pétrolières et de distribution d'électricité. Ces deux dernières formes étant sujettes à beaucoup de réglementations. Les obligations choisies par les auteurs ont des échéances respectives de plus d'un an et donnent droit à des coupons faciles à évaluer comme des flux monétaires relatifs à leur détention. Les obligations subordonnées sont également exclues de l'échantillon d'évaluation. Pour terminer, les auteurs choisissent les compagnies qui émettent un ou deux types d'obligations transigées sur le marché.

30) Les auteurs trouvent que le caractère stochastique du taux d'intérêt n'améliore pas de façon considérable l'écart de crédit, ce qui n'aide pas vraiment à réduire la surévaluation des obligations. Le modèle de Vacisek devrait être remplacé par un modèle plus performant, selon les deux auteurs en vue de capter l'effet de la volatilité du taux d'intérêt.

conséquent la valeur de ces dernières. Ce biais d'évaluation est attribuable à un levier, à une volatilité des actifs ainsi qu'à des taux de dividende et de coupon[31] élevés. Eom, Helwedge et Huang concluent que de nouveaux modèles devraient être conçus afin d'améliorer la qualité de l'étude de l'écart de crédit associé aux obligations peu risquées plutôt que celui des obligations plus risquées.

Nous arrivons maintenant aux modèles structurels qui se sont penchés sur l'évaluation des options écrites sur l'avoir des actionnaires à commencer par le modèle de Toft, K. B. et B. Prucyk (1997). Les deux auteurs utilisent l'expression de l'avoir des actionnaires de la manière dont elle a été dérivée par Leland et évaluent une option d'achat et de vente écrites dessus à l'aide du modèle de Black-Scholes. Ils démontrent alors que le levier financier et les engagements reliés à la dette peuvent rendre inapplicable le modèle de Black-Scholes, en raison du biais qu'ils engendrent au niveau de la volatilité implicite. Ce biais se fait davantage ressentir dans le cas des compagnies à levier élevé mais aussi au niveau de celles dont la dette est protégée. Ceci réduit, selon les deux auteurs, la valeur des options d'achat hors jeu. Les deux auteurs ajoutent qu'une dette à court terme occasionne des coûts supplémentaires inutiles, ce qui corrobore le raisonnement de Leland qui préfère utiliser une dette à long terme pour générer les expressions respectives des titres contingents. Afin de dériver leurs équations stochastique et ordinaire[32], Toft et Prucyk considèrent une volatilité endogène qu'ils déterminent à partir des variables structurelles de leur modèle. Les deux auteurs montrent que la valeur des fonds propres est une fonction croissante de

31) Les auteurs trouvent que l'utilisation d'obligations sans coupon ou avec coupon continu est non pertinente pour l'analyse
32) L'équation dynamique que suit la variable d'état de ce modèle est identique à celle de Leland.

la volatilité en raison de la convexité de la courbe qui relie l'avoir des actionnaires à la valeur de la compagnie et du caractère endogène de la volatilité. Aussi, dans leur modèle, l'entreprise choisit de se mettre en faillite lorsque la valeur de ses actifs tombe à un très bas niveau. Le fait que la faillite soit déclenchée de façon endogène provoque ainsi un biais au niveau de la volatilité implicite de Black-Scholes en cas de ratio, dette à court terme sur dette totale, élevé.

Toft et Prucyk partent de la valeur d'une compagnie qui suit un processus brownien et qui verse des dividendes à ses actionnaires une fois que le coupon a été versé aux détenteurs de la dette hypothécaire. Les deux auteurs trouvent que la courbe qui relie l'avoir des actionnaires à la valeur de la compagnie devient concave en présence d'une dette protégée et que seule la considération d'une faillite endogène permet d'avoir une courbe convexe de cet avoir, ce qui rend possible de considérer que la valeur de ce dernier représente une option d'achat écrite sur la valeur de la compagnie. Dans ce dernier cas, le modèle de Black-Scholes devient applicable pour évaluer une telle option. Un autre point important souligné par Toft et Prucyk est celui qui traite de l'effet de la volatilité sur la valeur de l'avoir des actionnaires. Cette relation devient, selon les deux auteurs, plus prononcée dans le cas d'une faillite exogène. La valeur de l'avoir des actionnaires se retrouve également augmentée en cas de forte volatilité implicite, ce qui produit une surévaluation de la valeur de la compagnie.

Par ailleurs, les deux auteurs obtiennent une solution analytique d'une option d'achat et de vente écrites sur l'avoir des actionnaires. Nous pensons que cette solution devrait être dérivée de façon numérique en raison de la variabilité des coefficients de l'équation ordinaire de ce paramètre[33]. Nous dériverons cette expression pour une option d'achat dans le cas de Leland ainsi que dans le cas des deux autres modèles analysés dans le cadre de cette recherche. Nous vérifierons si nos allégations sont vraies ou si au contraire, il serait opportun de dériver l'équation d'une option d'achat de façon analytique.

Le fait d'obtenir des coefficients variables des équations respectives d'une option d'achat en considération au modèle utilisé nous permettra d'affirmer que la valeur d'une option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires peut uniquement être déterminée de façon numérique dans le cadre des modèles qui partent de la structure du capital.

Les autres études empiriques qui partent de la structure du capital se sont plutôt attardées sur l'évaluation de la dette obligataire en partant de l'avoir des actionnaires. Ainsi, Ericsson, J. et J. Reneby (2005) utilisent une simulation Monte-Carlo pour comparer la performance de trois modèles structurels au niveau de l'évaluation des obligations qui présentent des écarts de crédit compris entre 104 et 600 points de base et ce, pour des périodes de 90 jours, de 250 jours, de 500 jours et de 750 jours respectivement. La simulation effectuée par les deux auteurs consiste à dériver 2 000 trajectoires de prix de l'action pour générer les trajectoires des prix de l'actif de la compagnie afin d'en dériver le prix de l'obligation à évaluer. Les modèles que tentent de comparer les deux auteurs sont celui de Black-Scholes-Merton (1974), celui de Leland et Toft (1996) et celui de Briys et Varenne (1997). Par ailleurs, les auteurs supposent que le biais constaté au niveau des évaluations passées des obligations, effectuées à l'aide des modèles structurels, est dû au choix de la

[33] Ceci devrait corroborer le raisonnement de Perrakis, S. et P Ryan (1984) selon lequel le modèle de Merton-Black-Scholes permet uniquement d'estimer la valeur d'une option écrite sur l'avoir des actionnaires d'une compagnie.

méthode d'estimation des processus suivis par les variables de ces modèles. Ils comparent alors les résultats de la méthode moyenne-variance à ceux de l'estimateur non biaisé du maximum de vraisemblance et obtiennent dans ce dernier cas des résultats plus cohérents avec l'évidence empirique au niveau des écarts de crédit, du levier financier, de la volatilité des actifs ainsi que de la valeur de ces derniers. Cela étant, les deux auteurs montrent que le modèle de Leland et Toft (1996) offre des résultats peu pertinents en raison d'une volatilité des actifs très prononcée à l'approche de la barrière de faillite laquelle faillite est enclenchée seulement au moment où la valeur de l'action devient nulle. Ceci aboutit, selon eux, en une surestimation de la valeur des actions et donc en une sous-estimation de la valeur des obligations dans le cas de ce modèle. En revanche, le modèle de Briys et Varenne (1997) offre de meilleurs résultats aussi bien dans le cas de la méthode moyenne-variance que dans le cas de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Les résultats obtenus à l'aide de cette dernière méthode demeurent, toutefois, meilleurs. Ceci est dû selon les deux auteurs au caractère stochastique du taux d'intérêt dans le cas de ce dernier modèle, associé à une faillite exogène. Par ailleurs, le modèle de Black-Scholes-Merton offre des écarts de crédit plus faibles que ceux offerts par le modèle de Briys et Varenne car il utilise un taux d'intérêt constant. Ce faisant, ce modèle surévalue les obligations.

Les études empiriques portant sur les options écrites sur actions ont également été l'œuvre d'auteurs qui se sont basés sur des modèles d'équilibre. Ainsi, Bakshi, G., N. Kapadia et D. Madan (2003) ont procédé à une étude empirique portant sur un échantillon de 358 851 options d'achat et de vente faisant partie de l'indice S&P 100 et écrites sur les 30 titres les plus transigés à la bourse de Chicago et ce, pour la période allant de janvier 1991 à décembre 1995. L'objet de l'étude est de déterminer la source d'asymétrie de la distribution risque-neutre et les implications de cette asymétrie sur les prix des options. Les auteurs utilisent les moments supérieurs de la distribution pour expliquer que l'aversion au risque des investisseurs est à l'origine de l'aplatissement de la courbe de la distribution ainsi que de son asymétrie, une asymétrie qui comprend une dimension systématique et une dimension spécifique. Cette dernière dimension se veut moins asymétrique cependant. Par ailleurs, les auteurs montrent que la pente de la courbe de volatilité implicite est moins négative dans le cas des options sur actions, comparée à celle des options sur indice en raison d'un coefficient d'asymétrie plus négatif, ce qui explique l'asymétrie plus prononcée dans le cas de ce dernier et une moins bonne évaluation des options écrites dessus si l'on la compare à celle relative aux options écrites sur actions.

Sur la même lancée, Bollen, N. et E. R. Whaley (2004) montrent que la volatilité implicite peut monter ou baisser, selon l'effet net entre les achats et les ventes d'options, dans le but d'équilibrer les prix. Pour ce faire, les auteurs analysent l'effet de l'offre et de la demande relatives aux options sur la volatilité implicite de l'indice S&P 500 pour la période allant de juin 1988 à décembre 2000 ainsi que sur celle des 20 options écrites sur les actions formant cet indice et ayant présenté une forte activité pour la période qui commence en janvier 1995 et qui se termine en décembre 2000. Les auteurs partent de l'hypothèse que la différence entre les volatilités implicites des options sur actions et de l'indice vient du fait que les investisseurs qui ont un penchant pour l'indice choisiraient des options de vente alors que ceux qui désirent investir dans les options sur actions choisiraient plutôt les options d'achat. Ils arrivent au résultat que la volatilité implicite est plus prononcée dans le cas des options sur indice, rendant celles-ci plus chères et provoquant une forte asymétrie de leur courbe de profits, des profits non symétriques d'ailleurs, contrairement à ceux relatifs aux options sur actions. Le biais de volatilité ne devrait donc pas être attribué uniquement au processus, complexe et non observable, suivi par le sous-jacent mais aussi à la capacité limitée des arbitragistes à absorber les pertes conduisant à une augmentation des prix lesquels sont ajustés par les mainteneurs du marché en fonction de l'activité des investisseurs. Cette activité permet à ces derniers de comprendre la dynamique des prix qu'ils ajustent à l'aide d'une prime de risque servant à corriger le biais causé par la volatilité implicite.

Driessen, J., P. J. Maenhout et G. Vilkov (2009) trouvent plutôt que le biais constaté au niveau des prix des options est attribuable uniquement au risque de corrélation qui réduit l'effet de diversification. Pour illustrer ce point, ils comparent les prix cotés quotidiens des options écrites sur toutes les actions composant l'indice S&P 100 avec ceux des options écrites sur cet indice, pour la période allant de janvier 1996 à décembre 2003. Ces options présentent la particularité d'être continuellement actives durant la période d'évaluation. Les auteurs limitent leur échantillon aux options de courte échéance et ne possédant pas une très forte volatilité implicite. En décomposant le risque du marché en un risque spécifique et un risque de corrélation, ils montrent que les options écrites sur l'indice coûtent plus cher, et que le différentiel de prix avec les options écrites sur actions s'explique uniquement par ce risque de corrélation lequel est rémunéré par une prime de risque négative représentant le coût de diversification. Les auteurs concluent que le « CAPM » donne la juste valeur des options sur actions mais pas des options sur indice en raison justement de la prime du risque de corrélation qui tient lieu de prime d'assurance.

Dans le même ordre d'idées, Duan, J-C. et J. Wei (2009) trouvent qu'un risque systématique élevé conduit à une volatilité implicite élevée ainsi qu'à une forte pente de la courbe de celle-ci. Ils ajoutent que la différence de prix entre deux options écrites sur action s'explique par la proportion de risque systématique contenue dans leurs titres sous-jacents respectifs. Pour effectuer leur étude, les auteurs utilisent les données quotidiennes des options écrites sur l'indice S&P 100 ainsi que celles écrites sur les 30 plus grands titres de cet indice. L'étude porte sur des données quotidiennes sur la période allant de janvier 1991 à décembre 1995. À l'instar de Bakshi, Kapadia et Madan, les auteurs arrivent à la conclusion que la différence entre les distributions risque-neutre et les distributions réelles est explicable par la prime du risque systématique. Ce risque est mesuré par le rapport entre la variance systématique et la variance totale. Les auteurs démontrent également que ce risque systématique est à la base du comportement de la volatilité implicite en ce sens qu'une prime de risque négative produit une volatilité implicite, un coefficient d'asymétrie et un coefficient d'aplatissement élevés. Les auteurs reprochent à Bollen et Whaley (2004) le fait de ne pas expliquer pourquoi il y aurait une pression des achats nets. Ils leur reprochent également le fait d'expliquer les raisons de la raideur de la courbe de volatilité implicite de l'indice plutôt que de se pencher sur la structure des prix des options sur actions.

Goyal, A. et A. Saretto (2009) se sont également penchés sur la question en analysant la différence entre la volatilité réalisée et la volatilité implicite des options à parité afin de contourner le problème du « Smile ». Les auteurs utilisent des données quotidiennes relatives à des options d'une échéance d'un mois, pour la période allant de janvier 1996 à décembre 2006. Ceci leur permet d'avoir un échantillon homogène formé d'options liquides. Après élimination des options qui violent les conditions d'arbitrage, des options qui ne présentent pas de données « bid-ask » continues ou de celles qui présentent des « bid » plus élevés que les « ask » ainsi que l'élimination des options illiquides, ils se retrouvent avec un échantillon de 4 344 actions sous-jacentes et de 75 627 paires d'options d'achat et de vente écrites sur ces actions. L'analyse effectuée leur permet d'expliquer les rendements élevés par l'écart entre les deux types de volatilité précités. Ces écarts, accompagnés de coefficients d'asymétrie et d'aplatissement élevés, sont donc à la base de l'inexactitude constatée au niveau de l'évaluation des options. Selon les auteurs, les rendements élevés ne sont pas explicables uniquement par la co-variabilité[34] entre les options et certaines caractéristiques déterminantes des actions sous-jacentes. Les auteurs concluent que la volatilité implicite et la volatilité historique comprennent toutes deux de l'information pertinente pour estimer la volatilité future et que les deux volatilités ne contiennent pas de l'information qui s'entrecoupe. Ils ajoutent que la volatilité implicite, interprétée comme une représentation des prix des options, pourrait donner une bonne estimation de la volatilité future pourvu que les paramètres des modèles utilisés pour faire cette estimation soient bien spécifiés et que la volatilité actuelle soit connue.

---

34) Cette covariance ne suffit pas, selon les auteurs, pour contenir la capacité prédictive de la différence entre les deux formes de volatilité, à expliquer les différences des rendements observés au niveau des options.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons essayé de brosser un tableau sommaire de l'évolution des modèles d'évaluation qui traitent des options, ainsi que des actions et des obligations perçues comme des options lesquels modèles sont directement pertinents pour notre étude. Comme nous l'avons vu, ces modèles peuvent être groupés du point de vue de notre recherche en deux grandes catégories à savoir : les modèles structurels de première génération et ceux de seconde génération. Dans le premier groupe, on retrouve des modèles qui traitent de l'évaluation des actions et des obligations. Il s'agit principalement de modèles structurels dont la variable d'état est le plus souvent l'actif total de la compagnie qui est supposé suivre un processus log-normal.

Par contre, les modèles de deuxième génération se sont surtout attardés sur le rôle de l'arbitrage entre déductions fiscales des intérêts, coûts de faillite, coûts d'agence et coûts de transaction dans la détermination de la valeur optimale des titres contingents de la compagnie. Ces modèles utilisent comme variable d'état tantôt la valeur des actifs de la compagnie, tantôt le bénéfice avant intérêts et impôt. Certains d'entre eux ont adopté l'hypothèse d'évolution log-normale de la variable d'état alors que d'autres ont adopté l'hypothèse de retour à la moyenne.

Par ailleurs, les études empiriques ont utilisé tantôt des modèles structurels, tantôt des modèles d'équilibre et se sont surtout attardées sur l'évaluation des options sur indice boursier. Très peu de recherches se sont cependant attardées sur l'évaluation des options sur actions dont le sujet est directement pertinent pour notre thèse. Ces dernières ont utilisé tantôt des modèles structurels tantôt des modèles d'équilibre et ont surtout cherché à comparer les résultats empiriques de l'évaluation des options sur actions à ceux des options sur indice. Aucune de ces recherches ne s'est cependant penchée sur la vérification empirique de l'évaluation de l'avoir des actionnaires en tant qu'option, ce que nous tenterons de faire dans cette étude.

L'objet de cette thèse est de comparer théoriquement et empiriquement trois modèles structurels de la seconde génération qui portent sur l'évaluation de l'avoir des actionnaires perçu comme option ainsi que des options écrites dessus. Ainsi notre choix a porté sur les modèles de Leland (1994), de Goldstein, Ju et Leland (2001) et de Sarkar et Zapatero (2003). Ce choix est motivé par plusieurs facteurs. En premier lieu, nous avons constaté que les trois modèles présentaient des similitudes et des différences. Ceci nous incite à essayer de les réconcilier en cherchant à déterminer les conditions qui les rendront parfaitement identiques sachant qu'ils présentent des variables d'état et des processus suivis par cette variable qui sont différents. Par ailleurs, les auteurs de ces modèles n'ont pas élaboré plusieurs aspects de leurs modèles que nous jugeons pertinents à commencer par leur opérationnalisation, afin de les rendre utilisables pour l'évaluation de l'avoir des actionnaires ainsi que des options écrites dessus.

À ce niveau, nous essayerons de trouver des solutions finies pour les titres contingents du modèle de Sarkar et Zapatero et tenterons ensuite de rendre possible l'évaluation de l'avoir des actionnaires à l'aide des trois modèles en procédant à une optimisation de type Newton-Raphson. Par ailleurs, les auteurs n'ont pas analysé l'effet de l'impôt sur la convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires ainsi que sur la valeur de ce dernier, ce que nous chercherons à faire dans le cadre de notre étude. Nous déterminerons ensuite les conditions de convergence entre les trois modèles afin de mette en évidence leurs similitudes et leurs différences. Ces développements conduisent à l'étape essentielle de notre étude et qui consiste en la dérivation des expressions respectives des options d'achat écrites sur l'avoir des actionnaires. Cette dérivation se veut une extension du travail effectué par les auteurs de ces trois modèles. À l'aide de ces expressions, nous pourrons procéder à une analyse empirique exploratoire qui nous permettra de vérifier les performances respectives des trois modèles au niveau de l'évaluation de l'avoir des actionnaires ainsi que des options écrites dessus.

CHAPITRE II

DÉRIVATION DE L'EXPRESSION DE L'AVOIR DES ACTIONNAIRES À L'AIDE DES MODÈLES ANALYSÉS

Avant de pouvoir comparer, sur la base de résultats empiriques, les modèles qui utilisent soit le bénéfice avant impôt et intérêts ou la valeur de la compagnie comme variable d'état, il y a lieu de relater les différences entre les deux types de modèles sur le plan théorique. À cette fin, nous partons des équations dynamiques des trois modèles basés sur la structure du capital, objets de notre comparaison à savoir : le modèle de Leland d'une part et les modèles de Goldstein, Ju et Leland et de Sarkar et Zapatero d'autre part. Le premier modèle utilise comme variable d'état la valeur de la compagnie avant levier financier, alors que les deux autres modèles partent du bénéfice avant impôt et intérêts pour évaluer les titres contingents. Nous verrons qu'il est possible d'établir la convergence entre ces trois modèles sous certaines conditions.

Une analyse supplémentaire nous permettra d'établir le parallèle avec le modèle de Merton. Ce modèle servira de base de comparaison pour les trois modèles précités.

Nous passons maintenant aux comparaisons théoriques des équations respectives, du sous-jacent, des modèles sous étude.

2.1 Comparaison des trois modèles sur la base de leurs équations différentielles partielles respectives

L'objet de cette comparaison est de déterminer lequel des trois modèles analysés permet le mieux d'évaluer correctement l'avoir des actionnaires d'une compagnie. Pour ce faire, nous consacrerons ce chapitre à une comparaison théorique entre les trois modèles, basée sur leurs équations différentielles partielles respectives.

Le troisième chapitre mettra l'accent sur les dérivations théoriques relatives aux options d'achat écrites sur cet avoir, alors que les chapitres subséquents seront réservés à la comparaison entre ces mêmes modèles sur la base de leurs résultats empiriques.

Nous passons maintenant à la dérivation de l'équation différentielle partielle de Leland.

2.1.1 Modèle de Hayne Leland (1994)

Afin de faire cette dérivation, nous partons d'une variable aléatoire « x » qui suit un processus d'Itô et nous formons un portefeuille réplique. La valeur d'un tel portefeuille peut être exprimée comme suit :

$$\Pi = -G + \frac{\partial G}{\partial V} V \qquad \textbf{(1)}$$

Une variation infinitésimale de ce portefeuille peut être présentée de la façon suivante :

$$d\Pi = -\left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 G}{\partial V^2} \right] dt \qquad \textbf{(2)}$$

Or, notre portefeuille est sans risque. Ceci nous permet, également, d'exprimer la variation infinitésimale de la valeur du portefeuille de la façon suivante :

$$d\Pi = r\Pi dt \qquad \textbf{(3)}$$

En mettant égales les équations (2) et (3), on obtient :

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2V^2\frac{\partial^2 G}{\partial V^2}+rV\frac{\partial G}{\partial V}=rG \qquad \textbf{(4)}$$

L'expression (4) ainsi obtenue, représente l'équation différentielle partielle remplie par un titre qui ne verse pas de coupon.

En considérant que les titres ne dépendent pas du temps, en raison de la perpétuité, et en supposant l'existence d'un titre qui verse un coupon constant, l'équation (4) devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2\frac{\partial^2 G}{\partial V^2}+rV\frac{\partial G}{\partial V}+C=rG \qquad \textbf{(5)}$$

Pour déterminer la solution de ce système, nous en résoudrons d'abord l'équation homogène. Nous tenterons, ensuite, d'y trouver une solution particulière. La somme des deux solutions obtenues constituera la solution générale de notre système.

Ainsi, en omettant le coupon, l'équation (5) devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2\frac{\partial^2 G}{\partial V^2}+rV\frac{\partial G}{\partial V}-rG=0 \qquad \textbf{(6)}$$

En mettant en évidence le facteur de dérivation, l'équation (6) devient :

$$\left[\frac{1}{2}\sigma^2V^2\frac{\partial^2}{\partial V^2}+rV\frac{\partial}{\partial V}-r\right]G=0 \qquad \textbf{(7)}$$

Pour résoudre cette équation, nous ferons le changement de variable suivant :

$$V=e^k \qquad \textbf{(8)}$$

En utilisant les dérivations en chaîne, nous pouvons déterminer les valeurs respectives des facteurs de dérivation. En effet, le facteur de dérivation du premier ordre peut être exprimé de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial k}=\frac{\partial}{\partial V}x\frac{\partial V}{\partial k}$$ [35] **(9)**

Et nous savons que la dérivée première de « V » par rapport à « k » peut être exprimée comme suit :

$$\frac{\partial V}{\partial k}=V$$

En intégrant ce dernier résultat dans l'équation (9), celle-ci devient :

$$\frac{\partial}{\partial k}=\frac{\partial}{\partial V}xV$$ **(10)**

Mais nous savons également que le facteur de dérivation du deuxième ordre peut être exprimé de la façon suivante :

$$(\partial^2/\partial k^2)=\partial^2/\partial V^2 * V^2+\partial/\partial V * V$$ [36] **(11)**

En soustrayant deux à deux, les termes des équations (10) et (11), on obtient :

$$(\partial^2/\partial k^2)-(\partial/\partial k)=\partial^2/\partial V^2 * V^2$$ **(12)**

Pour obtenir une forme explicite de l'équation du modèle, effectuons encore le changement de variable suivant :

$$(\partial/\partial k)=D$$ **(13)**

En remplaçant, dans l'équation (7), les termes de dérivation par leurs valeurs respectives, cette équation devient :

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2(D^2-D)+rD-r\right)G=0$$ **(14)**

En mettant en évidence le terme (D-1), l'équation (14) devient :

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2(D-1)D+r(D-1)\right)G=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}(\sigma^2 D+r)(D-1)\right)G=0$$ **(15)**

L'équation obtenue peut également être exprimée de la façon suivante :

35) Les dérivations sont fournies à l'annexe (E).
36) Les dérivations sont fournies à l'annexe (E).

$$\left((D+\frac{2r}{\sigma^2})(D-1)\right)G=0 \quad \textbf{(16)}$$

Cette équation admet comme solution, l'expression suivante :

$$G = A_1 e^{k} + A_2 e^{-\frac{2r}{\sigma^2}k} \quad \textbf{(17)}$$

En remplaçant « V » par sa valeur, on obtient la solution du système homogène. Cette solution peut être exprimée de la façon suivante :

$$G = A_1 V + A_2 V^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \quad \textbf{(18)}$$

La solution particulière du système dépendra du titre dont nous voulons résoudre l'équation. Notre solution générale[37] aura donc la forme suivante :

$$G = A_0 + A_1 V + A_2 V^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \quad \textbf{(19)}$$

Nous passons maintenant à la dérivation des expressions des titres contingents à l'aide du modèle de Hayne Leland.

2.1.1.1 Dérivation des équations respectives des titres contingents

Les titres dont nous allons déterminer les expressions respectives sont la dette, les déductions fiscales des intérêts et les coûts de faillite. Nous commencerons par déterminer l'équation de la dette. Nous procéderons ensuite à la dérivation des expressions respectives des déductions fiscales des intérêts et des coûts de faillite.

37) Les dérivations ayant permis d'obtenir cette solution sont fournies à l'annexe (F).

La dette perpétuelle : Un titre qui verse un coupon perpétuel continu

En considérant comme titre contingent la dette, on arrive à la solution particulière suivante :

$$G_P = A_0 = \frac{C}{r} \tag{20}$$

En effet, on voit bien que les dérivées première "$\frac{\partial G_P}{\partial V}$" et seconde "$\frac{\partial^2 G_P}{\partial V^2}$" de ce terme par rapport à "V" sont nulles puisqu'elles n'en dépendent pas, ce qui signifie que le terme $C = rG_P$ remplit bien les conditions de l'équation (6). L'équation générale de la dette devient alors :

$$D = \frac{C}{r} + A_1 V + A_2 V^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \tag{21}$$

En considérant les conditions terminales relatives à ce titre contingent, on obtient comme solution finale[38] de ce titre, le terme suivant :

$$D(V) = \frac{C}{r} + \left[(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2} \tag{22}$$

Nous passons maintenant à la dérivation de l'expression des déductions fiscales des intérêts à l'aide du modèle de Leland.

Équation des déductions fiscales des intérêts

Revenons à l'équation (19) et appliquons-la aux déductions fiscales des intérêts considérées comme titres contingents. Pour ce faire, utilisons les conditions terminales relatives à ces titres en vue d'en déterminer l'expression. Ainsi, si la compagnie tombe en faillite, les déductions fiscales des intérêts sont perdues. Ceci peut être exprimé analytiquement de la façon suivante :

38) Les dérivations ayant permis d'obtenir cette solution sont fournies à l'annexe (G).

$$V=V_B \Rightarrow TB(V)=A_0+A_1V_B+A_2V_B^{-\frac{2r}{\sigma^2}}=0 \qquad \textbf{(23)}$$

D'autre part, si la compagnie demeure indéfiniment solvable, les déductions fiscales des intérêts atteindront leur valeur maximale, soit le taux d'imposition que multiplie la valeur perpétuelle de la dette. Ceci se traduit analytiquement par l'expression suivante :

$$V \to \infty \Rightarrow TB(V)=A_0+A_1V+A_2V^{-\frac{2r}{\sigma^2}}=\tau\frac{C}{r} \qquad \textbf{(24)}$$

En appliquant les conditions terminales relatives à ce titre contingent[39], on obtient comme solution finale de ce dernier, l'expression suivante :

$$TB(V)=\tau\frac{C}{r}-\tau\frac{C}{r}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2} \qquad \textbf{(25)}$$

Nous passons maintenant à la dérivation de l'équation des coûts de faillite à l'aide du modèle de Leland.

Coûts de faillite

Selon Leland, les coûts de faillite remplissent également les conditions de l'équation différentielle de son modèle. Afin de déterminer les conditions terminales relatives à ce titre contingent, nous utiliserons le fait que ces coûts ne seraient engagés que dans l'éventualité d'une faillite et que si cela devait se produire, ces coûts seraient proportionnels à la valeur liquidative de la compagnie que nous avons appelée "V_B". Ceci peut être exprimé analytiquement de la façon suivante :

$$V=V_B \Rightarrow BC(V)=\alpha V_B$$

---

39) Les dérivations ayant permis d'obtenir cette solution sont fournies à l'annexe (G).

$$V \to \infty \Rightarrow BC(V)=0$$

En intégrant ces conditions dans l'équation (19), on obtient l'équation des coûts de faillite[40] qui se présente alors de la façon suivante :

$$BC(V)=\alpha_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \qquad \textbf{(26)}$$

La valeur de la compagnie après levier financier, que nous cherchons à déterminer, est sujette à un arbitrage entre les déductions fiscales des intérêts et les coûts de faillite. Ceci nous permet d'exprimer cette valeur comme étant :

$$v(V)=V+TB(V)-BC(V) \qquad \textbf{(27)}$$

En remplaçant chaque terme de l'équation par sa valeur précédemment dérivée, on obtient comme valeur totale de v :

$$v(V)=V+\frac{\tau C}{r}\left[1-\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\right]-\alpha V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \qquad \textbf{(28)}$$

Or, cette valeur totale est la somme de la dette et de l'avoir des actionnaires. Ceci nous permet de dériver la valeur de l'avoir des actionnaires de la façon suivante :

$$E(V)=V+\tau\frac{C}{r}\left[1-\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}\right]-\alpha V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}-D(V)$$

En remplaçant D(V) par sa valeur obtenue à l'équation (22), on arrive à l'équation finale de E(V)[41]. Cette équation peut être exprimée de la façon suivante :

$$E(V)=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2} \qquad \textbf{(29)}$$

Le tableau 2.1, permet de récapituler les résultats relatifs aux titres contingents, obtenus en utilisant le modèle de Leland.

---

40) Les dérivations ayant permis d'obtenir cette solution sont fournies à l'annexe (G).
41) Les dérivations ayant permis d'obtenir cette solution sont fournies à l'annexe (G).

Tableau 2.1

Récapitulatif des résultats obtenus en utilisant le modèle de Leland, H. (1994)

Modèle	dette	déductions fiscales	coûts de faillite	avoir des actionnaires
Leland	$D(V)=\frac{C}{r}+\left[(1-\alpha)V_B-\frac{C}{r}\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}$	$TB(V)=\tau\frac{C}{r}-\tau\frac{C}{r}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}$	$BC(V)=\alpha V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$	$E(V)=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}$

Nous passons maintenant aux dérivations mathématiques relatives aux modèles partant du bénéfice avant impôt et intérêts comme variable d'état.

2.1.2 Modèles utilisant le bénéfice avant impôt et intérêts comme variable d'état

Comme nous l'avons fait lors de l'analyse du modèle de Leland, nous essayerons de dériver les équations différentielles partielles des modèles partant du bénéfice avant impôt et intérêts, avant de les utiliser pour dériver les solutions relatives aux titres contingents. Cependant, pour être en mesure d'évaluer la capacité prédictive des deux modèles choisis à savoir : le modèle de Goldstein, Ju et Leland et le modèle de Sarkar et Zapatero, il serait intéressant de les comparer sur une base empirique. Pour ce faire, nous allons devoir les modéliser en vue de les appliquer aux données empiriques. Une telle modélisation pose plusieurs problèmes dont, particulièrement dans le cas du modèle de Sarkar et Zapatero, la recherche de la convergence en vue d'avoir une solution opérationnelle. Ensuite, les modèles doivent être optimisés. Une fonction d'optimisation de Newton pourrait s'avérer utile dans ce cas.

Le premier point cité, à savoir la convergence pose beaucoup de problèmes d'ordre mathématique mais aussi au niveau de la modélisation. Tel est le cas pour le modèle Sarkar et Zapatero où on est contraint d'utiliser des séries hypergéométriques pour arriver à une solution de l'équation dynamique, ce qui nécessite d'effectuer un développement en série de puissances pour arriver à la solution finale de l'équation du modèle. Or, pour faire un développement en série de puissances, il est nécessaire d'établir la convergence sans quoi, la solution obtenue ne peut être considérée comme une solution exacte. Sur le plan de la modélisation, maintenant, l'expression des titres présente un terme formé d'un numérateur qui va à l'infini et d'un dénominateur qui va à l'infini également. Ce genre de problème est parmi les plus délicats à résoudre dans la mesure où, assez souvent, il est difficile, voire impossible, de réduire l'expression à modéliser à une fonction usuelle dont on connaît la monotonie et les valeurs prises par les éléments appartenant au domaine de définition.

Dans cet ordre d'idée, on voit que le terme $M(a,b;z)=1+\frac{a}{b}z+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!}+.....$ revient dans les expressions de tous les titres contingents. À priori, ce terme ne devrait pas converger, car ses composantes vont à l'infini. Ceci rend le raisonnement ardu. La dérivation d'une solution à ce genre de problème nécessite bien évidemment beaucoup de temps, mais cet exercice est inévitable dans notre cas. Ceci rendra opérationnel le modèle de Sarkar et Zapatero. Nous verrons que le terme indiqué tend vers la fonction exponentielle qui est une fonction qui converge facilement lorsqu'elle est négative. Nous reviendrons sur ce point, essentiel pour la suite du raisonnement, quand viendra le moment de déterminer une solution finie pour les titres contingents de ce modèle. Nous commencerons notre développement en nous penchant d'abord sur le modèle de Goldstein, Ju et Leland et nous enchaînerons ensuite avec le modèle de Sarkar et Zapatero.

2.1.2.1 Le modèle de Goldstein, R., N. Ju et H. Leland. (2001)

Les titres contingents, que nous cherchons à évaluer, remplissent les conditions de l'équation différentielle partielle de Goldstein, Ju et Leland. Pour être en mesure d'en dériver les expressions respectives, il y a lieu de résoudre cette équation différentielle partielle. Nous commencerons par en déterminer la solution homogène après quoi, nous dériverons les équations respectives des titres contingents en utilisant leurs conditions terminales respectives.

Équation différentielle partielle

Nous partons de l'hypothèse que la valeur de la compagnie suit un processus log-normal. Ceci nous permet d'écrire :

$$dV = \mu V dt + \sigma V dz \qquad \textbf{(30)}$$

où

μ représente la croissance instantanée des actifs de la compagnie;

σ représente la volatilité des actifs de la compagnie ;

dz est un processus de Wiener d'incrément dt.

Notons que $\mu = r - \frac{\delta}{V}$

où δ représente le bénéfice avant impôt et intérêts de la compagnie.

Pour simplifier le raisonnement, remplaçons l'équation (30) par l'expression suivante :

$$dV = adt + bdz \qquad \textbf{(31)}$$

En appliquant, à nouveau, le lemme d'itô à un titre contingent et en considérant un portefeuille réplique, on obtient comme solution ordinaire du modèle, l'expression suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial V}\mu V+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial V^2}\sigma^2 V^2-rG=0 \qquad \textbf{(32)}$$

Cette expression est similaire à celle obtenue en utilisant le modèle de Leland. Pour en dériver la solution, nous procéderons donc de la même façon. Ainsi, en mettant en évidence le facteur de dérivation et en appliquant la règle de dérivation en chaîne, on obtient comme équation ordinaire du modèle, l'expression suivante :

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2 D^2+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)D-r\right)G=0 \qquad \textbf{(33)}$$

Nous nous retrouvons, alors, en présence d'une équation du second degré qui possède comme solutions, les deux expressions suivantes :

$$\alpha=\frac{-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sqrt{\left((\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)^2+(2r\sigma^2)\right)}}{\sigma^2} \qquad \textbf{(34)}$$

et

$$\beta=\frac{-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)-\sqrt{\left((\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)^2+(2r\sigma^2)\right)}}{\sigma^2} \qquad \textbf{(35)}$$

En intégrant les deux racines dans l'équation (33), cette dernière devient :

$$((D-\alpha)(D-\beta))G=0 \qquad \textbf{(36)}$$

L'équation (36) admet pour solution, l'expression suivante :

$$G=A_1V^{-y}+A_2V^{-x} \qquad \textbf{(37)}$$ [42]

où

$$x=-\beta \qquad \textbf{(38)}$$

et

$$y=-\alpha \qquad \textbf{(39)}$$

L'expression que nous venons d'obtenir représente la solution homogène de notre système. Les solutions particulières de cette équation dépendront des

---

42) Cette expression est dérivée à l'annexe (I).

conditions terminales des titres contingents que nous dériverons un peu plus loin dans cette analyse.

Nous passons maintenant à la dérivation de l'équation de l'avoir des actionnaires.

Équation de l'avoir des actionnaires

Afin de déterminer la valeur de l'avoir des actionnaires, nous avons d'abord besoin de connaître la valeur de ses deux composantes principales qui sont la valeur de la compagnie lorsqu'elle demeure solvable que nous noterons "Vsolv" et la valeur de la dette que nous appellerons "Vint". Pour ce faire, nous allons recourir à la solution de l'équation ordinaire du modèle de Goldstein, Ju et Leland. Nous y appliquerons les conditions terminales qui correspondent aux deux paramètres dont nous désirons déterminer la valeur à savoir : "Vsolv" et "Vint". Ceci nous permettra de déterminer la valeur de "E" en fonction de "V". Mais auparavant, nous commencerons par dériver l'équation de la valeur présente d'un titre "P_b" qui paye 1$ si la faillite se produit. Ce titre est une solution de l'équation ordinaire du modèle. Son expression se présente de la façon suivante :

$$P_b = A_1 V^{-y} + A_2 V^{-x} \tag{40}$$

où

$$x = \frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sqrt{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2r\sigma^2}\right]$$

et

$$y = \frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sqrt{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2r\sigma^2}\right]$$

En considérant les conditions terminales applicables à ce paramètre, on obtient comme solution, l'expression suivante :

$$P_b = \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x} \quad \textbf{(41)}$$

Revenons maintenant à l'équation différentielle partielle du modèle. Comme nous venons de le signaler, afin de déterminer les solutions particulières du système, nous avons besoin de considérer les conditions terminales des paramètres dont nous désirons déterminer les équations respectives.

En considérant ces conditions terminales, on obtient comme expressions respectives de la valeur de la compagnie lorsqu'elle demeure solvable[43] et de la dette[44], les équations suivantes :

$$Vsolv = V - V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x} \quad \textbf{(42)}$$

$$V\,\text{int} = \frac{C}{r}\left[1 - \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right] \quad \textbf{(43)}$$

Maintenant que nous avons déterminé les expressions respectives des deux composantes de l'avoir des actionnaires, nous sommes en mesure de déterminer l'équation de cette variable. Ainsi, en partant du fait que la valeur de l'avoir des actionnaires peut être exprimée de la façon suivante :

$$E = (1-\tau)(Vsolv - V\,\text{int}) \quad \textbf{(44)}$$

et en remplaçant "Vsolv"et "Vint" par leurs expressions respectives, on obtient comme équation de ce paramètre, l'expression suivante :

$$E = (1-\tau)\left(V - V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x} - \frac{C}{r}\left[1 - \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right]\right) \quad \textbf{(45)}$$

43) Cette expression est dérivée à l'annexe (I).
44) Cette expression est dérivée à l'annexe (I).

En mettant en évidence le terme $\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}$, l'expression (45) devient :

$$E=(1-\tau)\left(V+\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)-\frac{C}{r}\right) \quad \textbf{(46)}$$

Cette expression représente la valeur de l'avoir des actionnaires selon le modèle de Goldstein, Ju et Leland [45]. Le tableau 2.2, permet de récapituler les résultats obtenus en utilisant ce modèle.

Nous passons maintenant à la dérivation des équations des titres contingents selon le modèle de Sarkar et Zapatero.

Tableau 2.2

Récapitulatif des résultats obtenus en utilisant le modèle de Goldstein, Ju et Leland (2001)

Modèle	Équation de Vsolvable	dette	Équation de l'avoir des actionnaires
GJL	$Vsolv = V - V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}$	$V\,int = \frac{C}{r}\left[1-\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\right]$	$E=(1-\tau)\left(V+\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)-\frac{C}{r}\right)$

45) Cette expression est dérivée à l'annexe (I).

2.1.2.2 Sarkar et Zapatero (2003)

Comme cité précédemment, il y a lieu d'établir la convergence de certains termes en vue d'obtenir une solution finie pour les titres contingents tels que définis par le modèle de Sarkar et Zapatero. Pour ce faire, nous utiliserons des développements en série de puissances afin de déterminer une expression explicite du terme $M(a,b;z)$[46] qui suscite notre intérêt. Auparavant, nous procéderons à la dérivation des équations respectives des titres contingents du modèle indiqué. Pour ce faire, nous partons de la dynamique de ce dernier. Cette équation se présente de la façon suivante :

$$dx=k(\theta-x)dt+\sigma x dz \tag{47}$$

où

x représente le bénéfice avant intérêts et impôt;

k représente la vitesse de retour à la moyenne;

θ représente la valeur moyenne, à terme, des bénéfices avant intérêts et impôt;

σ représente la volatilité des actifs de la compagnie;

dz suit un processus de Wiener d'incrément dt.

46) L'expression de ce terme est la suivante : $M(a,b;z)=1+\frac{a}{b}z+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!}+\ldots$

Équation différentielle partielle du modèle et valeur des titres contingents

En remplaçant, dans l'équation (47), les termes "$k(\theta - x)$" et "σx" par les termes "a(x)" et "b(x)" respectivement, cette expression devient :

$$dx = a(x)dt + b(x)dz \tag{48}$$

Cette expression admet comme solution :

$$\frac{1}{2}b^2(x)D'' + a(x)D' - rD = 0 \tag{49}$$

Si on remplace les termes "a(x)" et "b(x)" par leurs expressions respectives dans l'équation que nous venons d'obtenir, cette équation devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D'' + k(\theta - x)D' - rD = 0 \tag{50}$$

L'expression, ainsi obtenue, représente notre équation différentielle à intégrer en vue de déterminer les expressions respectives des titres contingents du modèle. En observant cette équation, on voit qu'il ne s'agit pas d'une fonction polynomiale. Son intégration est donc difficile à effectuer. En effet, le terme "x^2" présent dans le premier terme de la partie gauche de l'équation rend impossible l'intégration de celle-ci, sauf si on passe par le développement en série de puissances. Pour cela, supposons que notre équation possède une solution de la forme suivante :

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n+\gamma} \tag{51}$$

Afin d'avoir une expression explicite de ce terme, nous aurons besoin de déterminer les coefficients "b_n" et "γ". Pour cela, déterminons les expressions respectives des dérivées première et seconde de ce terme et intégrons-les dans l'équation (51). Ces dérivées peuvent être exprimées de la façon suivante :

$$D'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-n+\gamma) b_n \, x^{-n+\gamma-1} \tag{52}$$

et

$$D''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-\gamma)(n+1-\gamma) b_n \, x^{-n+\gamma-2} \tag{53}$$

Si nous intégrons, dans l'équation homogène, les valeurs respectives de D(x) et de ses dérivées première et seconde, cette équation devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n-\gamma)(n+1-\gamma) b_n \, x^{-n-2+\gamma} + k(\theta - x) \sum_{n=0}^{\infty} (-n+\gamma) b_n \, x^{-n+\gamma-1} - r \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, x^{-n+\gamma} = 0 \tag{54}$$

Cette équation peut également être écrite de la façon suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-\gamma)(n+1-\gamma) b_n \, x^{-n-2+\gamma} + \frac{2k}{\sigma^2} \frac{(\theta - x)}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-n+\gamma) b_n \, x^{-n-1+\gamma} - \frac{2r}{\sigma^2 x^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, x^{-n+\gamma} = 0 \tag{55}$$

En développant ce terme, on obtient l'expression suivante :

$$\left[(n(n+2-\gamma) + (1-\gamma)(n+2) + \frac{2k}{\sigma^2}(n+1) \right] b_{n+1} = \frac{2k\theta}{\sigma^2}(n-\gamma) b_n \tag{56}$$

Ceci établit la relation d'induction entre les termes de la série. Afin de déterminer le terme général de cette série, calculons la valeur de ses premiers termes. Ainsi,

pour n = 0

L'équation (56) devient :

$$\left[2(1-\gamma) + \frac{2k}{\sigma^2} \right] b_1 = -\frac{2k\theta}{\sigma^2} \gamma b_0 \tag{57}$$

Ceci signifie que :

$$b_1 = \frac{2k\theta}{\sigma^2} b_0 \frac{-\gamma}{\left[2(1-\gamma) + \frac{2k}{\sigma^2} \right]} \tag{58}$$

Appelons $-\gamma \rightarrow \alpha$ et $\left[2(1-\gamma) + \frac{2k}{\sigma^2} \right] \rightarrow \beta$

Nous obtenons ainsi, la relation d'induction qui relie le premier terme de la série au second. Cette relation se présente de la façon suivante :

$$b_1 = \frac{2k\theta}{\sigma^2} b_0 \frac{\alpha}{\beta} \tag{59}$$

Poursuivons notre raisonnement pour les termes d'indices supérieurs. Ainsi,

pour n = 1, on obtient :

$$b_2 = \frac{2k\theta}{\sigma^2} b_1 \frac{(1-\gamma)}{\left[3-\gamma+3-3\gamma+2\frac{2k}{\sigma^2}\right]} = \frac{(1-\gamma)}{2\left[3-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2}\right]} \frac{2k\theta}{\sigma^2} b_1 = \frac{(1+\alpha)}{[1+\beta]} \frac{2k\theta}{\sigma^2} \frac{b_1}{2} \tag{60}$$

En remplaçant, le terme "b_1" par sa valeur, l'équation (60) devient :

$$b_2 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{\beta[1+\beta]} \left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)^2 \frac{b_0}{2!} \tag{61}$$

En poursuivant le raisonnement par récurrence, on obtient l'expression du terme général en fonction du premier terme de la série. Ce terme se présente de la façon suivante :

$$b_{n+1} = \frac{\alpha(1+\alpha)......(n+\alpha)}{\beta[1+\beta]........[n+\beta]} \left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)^n \frac{b_0}{n!} \tag{62}$$

L'expression obtenue représente la relation d'induction que nous cherchions à déterminer. Cette relation va nous permettre de déterminer l'expression de chaque terme de la série en fonction de celle du terme qui le précède. D'autre part, nous avons établi précédemment que le terme D(x) pouvait être exprimé de la façon suivante :

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n+\gamma}$$

En développant ce terme, on obtient :

$$D(x) = x^{\gamma} b_0 \left[1 + \frac{b_1}{b_0} x^{-1} + \frac{b_2}{b_0} x^{-2} + ... + \frac{b_{n+1}}{b_0} x^{-n} + ..\right] \tag{63}$$

Remplaçons maintenant les termes de cette somme par leurs valeurs respectives obtenues à partir du développement en série. Ceci nous permet d'écrire :

$$D(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n+\gamma}=x^{\gamma} b_0\left[1+\frac{2k\theta}{\sigma^2}\frac{\alpha}{\beta}x^{-1}+\frac{\alpha(1+\alpha)}{\beta[1+\beta]}\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)^2\frac{x^{-2}}{2!}+....+\frac{\alpha(1+\alpha)......(n+\alpha)}{\beta[1+\beta]........[n+\beta]}\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)^n\frac{x^{-n}}{n!}+..\right] \quad \textbf{(64)}$$

Posons :

$$M(x)=\left[1+\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(1+\alpha)}{\beta[1+\beta]}\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}\right)^2\frac{1}{2!}+....+\frac{\alpha(1+\alpha)......(n+\alpha)}{\beta[1+\beta]........[n+\beta]}\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}\right)^n\frac{1}{n!}+..\right] \quad \textbf{(65)}$$

L'équation de D(x) devient alors :

$$D(x)=x^{\gamma} b_0 M(x) \quad \textbf{(66)}$$

Or, nous avons prouvé que le terme "γ" pouvait prendre deux valeurs distinctes. Nous avons retenu le terme négatif pour avoir des solutions finies. Mais en réalité, nous avons deux solutions linéairement indépendantes du système homogène. Pour obtenir une solution générale du système, nous rajouterons une solution particulière qui sera déterminée selon les conditions terminales de chaque titre contingent qui remplit les conditions de l'équation différentielle partielle du modèle. Notre solution générale prend alors la forme suivante :

$$D(x)=D_0+D_1 x^{\gamma_1} M_1(x)+D_2 x^{\gamma_2} M_2(x) \quad \textbf{(67)}$$

où

$\gamma_1>0$ et $\gamma_2<0$ sont les racines de l'équation : $\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)-k\gamma-r=0$

et

$M_1(x)=M(-\gamma_1, 2-2\gamma_1+\frac{2k}{\sigma^2}; \frac{2k\theta}{\sigma^2 x})$; $M_2(x)=M(-\gamma_2, 2-2\gamma_2+\frac{2k}{\sigma^2}; \frac{2k\theta}{\sigma^2 x})$

Ou, si on omet les indices :

$$M(x)=M(a,b;z)=1+\frac{a}{b}z+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!}+.....$$

Les coefficients D_0, D_1 et D_2 sont déterminés en considérant les conditions terminales des titres contingents. On obtient, ainsi, comme équations respectives de la dette, des déductions fiscales des intérêts, des coûts de faillites éventuels et de l'avoir des actionnaires, les expressions suivantes[47] :

$$D(x)=\frac{C}{r}+\left[(1-\alpha)(V_1x_L+V_2)-\frac{C}{r}\right]\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\gamma}\left(\frac{M(x)}{M(x_L)}\right) \tag{68}$$

$$TB(x)=\tau\frac{C}{r}-\tau\frac{C}{r}*\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\gamma}*\frac{M(x)}{M(x_L)} \tag{69}$$

$$BC(x)=\alpha(V_1x_L+V_2)*\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\gamma}*\frac{M(x)}{M(x_L)} \tag{70}$$

$$E=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*\left[\frac{M(x)}{M(x_L)}\right]\left[\frac{x}{x_L}\right]^{\gamma} \tag{71}$$

Maintenant que nous avons déterminé la solution du système, essayons de trouver une fonction finie vers laquelle converge le terme M(x) en vue d'élaborer une solution numérique pour les équations du modèle de Sarkar et Zapatero. Pour ce faire, nous aurons besoin de trouver des bornes pour le terme M(x). Pour cela, nous avons établi précédemment que le terme "γ" était une solution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)-k\gamma-r=0$$

Nous avons retenu la solution négative pour obtenir une solution finie du système. Cette solution pouvait être exprimée de la façon suivante :

$$\gamma=\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}$$

Nous savons aussi, d'après la définition de M(x), que :

$$b=2-2x\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}+\frac{2k}{\sigma^2} \tag{72}$$

47) Ces expressions sont dérivées à l'annexe (K).

En développant le terme b, on obtient :

$$b=1+\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}} \qquad \textbf{(73)}$$

Or

$$b=1+\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}\geq\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}\geq\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}-(1+\frac{2k}{\sigma^2})\geq\frac{\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}-(1+\frac{2k}{\sigma^2})}{2}=-\gamma \qquad \textbf{(74)}$$

Nous en concluons que le terme "-γ" est toujours inférieur au terme "b". Par ailleurs, le $n^{\text{ième}}$ coefficient de M(x), peut être exprimé de la façon suivante :

$$\frac{-\gamma(-\gamma+1)......(-\gamma+n)}{b(b+1)......(b+n)} \qquad \textbf{(75)}$$

À travers cette expression, nous pouvons voir que quand le terme "n" tend vers l'infini, le terme "$\frac{(-\gamma+n)}{(b+n)}$" tend vers 1. Nous en déduisons que les coefficients de l'expression de M(x) ne s'éloignent jamais de 1. Or, nous venons de démontrer que le terme "-γ" est inférieur au terme "b". Ceci nous permet de majorer les coefficients de M(x) par 1.

D'où, l'approximation de M(x) :

$$M(a,b;z)\rightarrow \mathbf{1}+z+\frac{z^2}{\mathbf{2}!}+..... \qquad \textbf{(76)}$$

La relation, ainsi obtenue, représente le développement limité de la fonction exponentielle. Cette relation peut être exprimée de la façon suivante :

$$M(x)\rightarrow M'(x)=e^{z}=e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}} \qquad \textbf{(77)}$$

Et puisque les termes "k", "θ" et "σ" sont finis, l'expression de M(x) converge, nécessairement quand "x" devient très grand.

Équation de l'avoir des actionnaires selon SZ (2003)

Le fait d'avoir obtenu une forme explicite du terme M(x) nous permet de dériver des expressions plus explicites, pour les titres qui remplissent les conditions de l'équation ordinaire du modèle. Il s'agit de la dette, des déductions fiscales des intérêts et des coûts de faillite. Ces expressions deviennent respectivement pour les titres cités :

$$D(x)=\frac{C}{r}+\left[(1-\alpha)(V_1 x_L+V_2)-\frac{C}{r}\right]e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_L})}\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}} \quad \textbf{(78)}$$

$$TB=\frac{\tau C}{r}-\frac{\tau C}{r}e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_l})}\left(\frac{x}{x_l}\right)^{\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}} \quad \textbf{(79)}$$

$$BC=\alpha\left[x_L V_1+V_2\right]e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_l})}\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}} \quad \textbf{(80)}$$

Remarquons que si "k" prend la valeur 0 , les expressions respectives des titres contingents tendent vers celles du modèle de Leland. Nous reviendrons sur ce point quand viendra le moment d'établir la convergence entre les trois modèles sous étude.

Afin de modéliser les expressions que nous venons de dériver, il va falloir déterminer une expression explicite de "x_L". Ce terme représente la valeur du bénéfice avant impôt et intérêts au moment où l'entreprise atteint le seuil de la faillite. Pour cela, partons de l'expression de la valeur des actifs de la compagnie. Cette valeur peut être exprimée de la façon suivante :

$$V(t)=(1-\tau)\left[\frac{\theta k}{r(k+r)}+\frac{x}{(k+r)}\right]=v_1 x+v_2 \quad \textbf{(81)}$$

En utilisant cette expression ainsi que celles des titres contingents, nous pouvons dériver l'équation de l'avoir des actionnaires. Cette dernière peut être exprimée de la façon suivante :

$$E=v_1x+v_2-(1-\tau)\frac{C}{r}-\left[v_1x_L+v_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left[\frac{M(x)}{M(x_L)}\right]\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\gamma} \quad \textbf{(82)}$$

En maximisant "E" conditionnellement à "x" et en l'évaluant au point "x_L", on obtient :

$$\left.\frac{\partial E}{\partial x}\right|_{xL}=v_1-\left[v_1x_L+v_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left[\frac{M'(x_L)}{M(x_L)}+\frac{\gamma}{x_L}\right]\left(\frac{x_L}{x_L}\right)^{\gamma}=0 \quad \textbf{(83)}$$

On en déduit que :

$$\frac{M'(x_L)}{M(x_L)}+\frac{\gamma}{x_L}-\frac{v_1}{\left[v_1x_L+v_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]}=0 \quad \textbf{(84)}$$ [48]

L'expression de « x_L » devient alors :

$$x_L=\frac{\gamma\left[\left[\frac{k\theta}{(1-\gamma)\sigma^2+k}\right]V_1+V_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]\pm\sqrt{\Delta}}{2(1-\gamma)V_1} \quad \textbf{(85)}$$ [49]

où

$$\Delta=\left[\gamma\left(\left[\frac{k\theta}{(1-\gamma)\sigma^2+k}\right]V_1+V_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right)\right]^2+4(1-\gamma)V_1\left[\frac{\gamma k\theta\left(V_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right)}{\left[(1-\gamma)\sigma^2+k\right]}\right] \quad \textbf{(86)}$$

Maintenant que nous avons déterminé la valeur de "x_L", nous pouvons rendre opérationnel le modèle de Sarkar et Zapatero. Ceci nous permettra d'en comparer les résultats empiriques avec ceux obtenus à l'aide des modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland respectivement en considérant comme standard de comparaison, la valeur marchande moyenne[50] des titres évalués. Cette comparaison est motivée par le fait que le marché représente le

48) Le terme $M'(x_L)$ représente la dérivée première de M(x), évaluée au point "x_L".

49) Cette expression est dérivée à l'annexe (L).

50) Cette valeur est obtenue par la moyenne arithmétique entre les prix haut et bas de la journée.

consensus quant à la valeur intrinsèque des titres qui s'y transigent. À cette fin, nous appliquerons ces trois modèles à l'évaluation de l'avoir des actionnaires des compagnies listées à l'indice "TSX60" ainsi qu'à celle des options d'achat écrites sur cet avoir, aux dates respectives de leurs états financiers de 2006 et de 2002. Notre choix pour ces deux dates est motivé par le fait qu'elles constituent deux périodes d'expansion et de récession respectivement. Nous reviendrons sur ce point au moment d'entamer notre analyse empirique. Le tableau 2.3 permet de récapituler les résultats obtenus à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero.

Nous passons maintenant aux dérivations effectuées à l'aide du modèle de Merton. Ce modèle sera utilisé uniquement comme référence.

Tableau 2.3

Récapitulatif des résultats obtenus en utilisant le modèle de Sarkar et Zapatero (2003)

Modèle	Équation de la dette	Équation de l'avoir des actionnaires
SZ	$D(x)=\frac{C}{r}+\left[(1-\alpha)(V_1 x_L+V_2)-\frac{C}{r}\right]e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_L})}(\frac{x}{x_L})^{\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}}$	$E=v_1 x+v_2-(1-\tau)\frac{C}{r}-\left[v_1 x_L+v_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_L})}(\frac{x}{x_L})^{\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}}$

2.1.3 Valeur de l'avoir des actionnaires selon le modèle de Merton-Black-Scholes (1974)

Comme nous l'avons signalé précédemment, le modèle de Merton servira de référence pour les trois modèles qui font l'objet de notre analyse. Nous l'utiliserons donc, pour dériver l'équation de l'avoir des actionnaires et de l'option d'achat écrite sur cet avoir. Les valeurs de ces deux termes, calculées à l'aide du modèle indiqué, serviront également de référence pour celles obtenues à l'aide des modèles analysés.

Afin de déterminer l'expression de l'avoir des actionnaires selon Merton-Black-Scholes, nous partons du fait que la valeur actuelle de ce paramètre se présente de la façon suivante :

$$E = e^{-r\tau} E\left[\max(0; V_T - D\right] \tag{87}$$

En utilisant la fonction de densité de la valeur de la compagnie, l'équation (87) devient :

$$E = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} (V_T - D) f(V) dV \tag{88}$$

En effectuant les développements qui s'imposent, on obtient la solution de l'avoir des actionnaires selon ce modèle[51]. Cette solution est la suivante :

$$E = V_t e^{-\frac{\delta}{1}\tau} N(d1) - D e^{-r\tau} N(d2) \text{ [52]} \tag{89}$$

51) Ces dérivations ont déjà été effectuées par de nombreux auteurs. Nous les avons reprises en annexe à titre indicatif seulement.

52) Cette expression est dérivée à l'annexe (R).

2.2 Récapitulation des résultats obtenus à l'aide des quatre modèles

Dans ce chapitre, nous avons dérivé les équations ordinaires des modèles sous étude. Ceci nous a permis de déterminer l'équation de l'avoir des actionnaires à l'aide de ces modèles. Le tableau 2.4 permet de récapituler les résultats de ces dérivations.

Comme le tableau 2.4 le montre, les expressions respectives de "E" obtenues à l'aide des modèles sous étude présentent beaucoup de similitudes. Plus tard dans ce développement, nous verrons sous quelles conditions les trois expressions deviennent identiques.

Nous nous penchons maintenant sur l'effet de l'impôt sur la valeur de l'avoir des actionnaires ainsi que sur la convexité de la courbe de cet avoir. Nous mettrons ensuite l'accent sur les conditions de convergence entre les modèles sous étude.

Tableau 2.4

Récapitulation des résultats obtenus à l'aide des quatre modèles

Modèle	Équation de l'avoir des actionnaires
Leland	$E(V)=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}$
GJL	$E=(1-\tau)\left(V+\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)-\frac{C}{r}\right)$
SZ	$E=V-(1-\tau)\frac{C}{r}-\left[V_B-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left(\frac{Mx}{Mx_0}\right)\left[\frac{\frac{V-V_2}{V_1}}{\frac{V_B-V_2}{V_1}}\right]^{\gamma}$
Merton	$E=V_t e^{-\frac{\eta}{V}(T-t)}N(d1)-De^{-r(T-t)}N(d2)$

2.3 Effet de l'impôt sur la valeur de l'avoir des actionnaires ainsi que sur la convexité de la courbe de ce paramètre

Dans cette partie de l'analyse, nous vérifierons deux effets essentiels de l'impôt sur les deux modèles qui utilisent le bénéfice avant impôt et intérêts comme variable d'état à savoir : le modèle de Sarkar et Zapatero et le modèle Goldstein, Ju et Leland. Les deux aspects que nous cherchons à vérifier sont : l'effet de l'impôt sur la valeur de l'avoir des actionnaires ainsi que sur la convexité de la courbe de cet avoir. Ceci nous permettra d'établir le parallèle avec le modèle de Leland. Nous commencerons par vérifier le premier aspect et procéderons, ensuite, à la vérification du second.

2.3.1 Effet de l'impôt sur la valeur de l'avoir des actionnaires

Pour commencer, nous analyserons l'effet de ce facteur sur la valeur de l'avoir des actionnaires selon Goldstein, Ju et Leland. Nous effectuerons ensuite la même analyse à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero.

2.3.1.1 Cas de Goldstein, Ju et Leland

Reprenons l'expression de "dE". Nous avons prouvé que ce terme pouvait être exprimé de la façon suivante :

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial V}(rV - \delta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2 V^2 \right) dt + \frac{\partial E}{\partial V}\sigma V dz \qquad \textbf{(90)}$$

Nous avons, également, établi précédemment que les dérivées première et seconde de "E" par rapport à "V" pouvaient être exprimées respectivement de la façon suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial V}=(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right) \tag{91}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right) \tag{92}$$

Ceci nous a permis de dériver l'expression finale de l'équation dynamique de l'avoir des actionnaires. Cette équation se présentait de la façon suivante :

$$dE=\left(\frac{\partial E}{\partial t}+(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)(rV-\delta)+\frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)dt$$
$$+(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V dz \tag{93}$$

À travers l'expression de "dE", on remarque que le taux d'imposition vient en déduction de la valeur de "E". En effet, plus élevée est la valeur de ce paramètre, moindre est la valeur de l'avoir des actionnaires étant donné que le terme "$(1-\tau)$" revient dans tous les termes de l'expression qui donne "dE".

L'avoir des actionnaires est donc une fonction décroissante du taux d'imposition de la compagnie. Vérifions maintenant le signe de cette relation dans le cas du modèle de Sarkar et Zapatero.

2.3.1.2 Cas de Sarkar et Zapatero

Reprenons l'expression de "E" telle qu'elle a été dérivée dans le cas du modèle de Sarkar et Zapatero. Nous avons établi précédemment que cette expression pouvait être obtenue de la façon suivante :

$$E=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*\left[\exp\left(\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)\right]\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma} \tag{94}$$

où

$$V(t)=(1-\tau)\left[\frac{\theta k}{r(k+r)}+\frac{x}{(k+r)}\right] \tag{95}$$

et

$$V_B=(1-\tau)\left[\frac{\theta k}{r(k+r)}+\frac{x_L}{(k+r)}\right] \tag{96}$$

À la lecture de l'expression de "E", on voit clairement que la valeur de cette variable est affectée négativement par le taux d'imposition. En effet, le terme "$(1-\tau)$" revient dans tous les termes de cette équation. Ceci veut dire qu'on peut le mettre à l'extérieur de la parenthèse. Ceci signifie également qu'à mesure que le taux d'imposition augmente, le terme $(1-\tau)$ s'affaiblit, ce qui affecte négativement la valeur de l'avoir des actionnaires. Nous arrivons, ainsi, à un résultat similaire à celui obtenu en utilisant le modèle de Goldstein, Ju et Leland. À l'opposé, en considérant l'expression de l'avoir des actionnaires selon le modèle de Leland, on obtient une relation positive entre la valeur de cet avoir et le taux d'impôt. Ainsi, en reprenant cette expression, on peut écrire :

$$E(V)=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-\mathrm{V_B}\right]\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V_B}}\right)^{-2r/\sigma^2}$$

On peut voir à travers l'expression de l'avoir des actionnaires que le taux d'imposition vient augmenter la valeur de l'avoir des actionnaires. En effet, le terme $\left[(1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V_B}}\right)^{-2r/\sigma^2}$ est toujours inférieur au terme $(1-\tau)\frac{C}{r}$. Ceci veut dire que le terme $-(1-\tau)\frac{C}{r}\left[1-\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V_B}}\right)^{-2r/\sigma^2}\right]$ est toujours négatif et donc à mesure que le taux d'imposition augmente, l'effet de ce dernier terme, sur la valeur de l'avoir des actionnaires, devient moins négatif. En d'autres termes, selon le modèle de Leland, le taux d'imposition vient augmenter la valeur de l'avoir des actionnaires. Ceci est l'une des principales divergences entre ce modèle et les modèles qui utilisent le bénéfice avant impôt et intérêts comme variable d'état. Examinons maintenant l'effet de l'impôt sur la convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires selon les trois modèles.

2.3.2 Effet de l'impôt sur la convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires

Nous commencerons par vérifier l'effet de l'impôt sur la convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires selon le modèle de Leland. Nous comparerons ensuite les résultats à ceux obtenus à l'aide des deux autres modèles sous étude.

2.3.2.1 Cas de Leland

Dans le cas du modèle de Leland, la dérivée seconde[53] de « E » par rapport à « V » peut être exprimée de la façon suivante :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right) \quad \textbf{(97)}$$

où

$$V_B=(1-\tau)\frac{C}{(r+0{,}5*\sigma^2)} \quad \textbf{(98)}$$

À travers cette expression, on peut voir que la courbe de l'avoir des actionnaires demeure convexe en présence de l'impôt. Vérifions si c'est le cas également pour les autres modèles.

2.3.2.2 Cas de Goldstein, Ju et Leland

Reprenons l'expression de "dE" ainsi que les dérivées première et seconde[54] de l'avoir des actionnaires par rapport à la valeur de la compagnie. Nous avons établi précédemment que ces variables pouvaient respectivement être exprimées de la façon suivante :

---

53) Cette expression est dérivée à l'annexe (P).
54) Cette expression est dérivée à l'annexe (P).

$$dE=\left(\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial V}(rV-\delta)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2 V^2\right)dt+\frac{\partial E}{\partial V}\sigma V dz \tag{99}$$

$$\frac{\partial E}{\partial V}=(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right) \tag{100}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right) \tag{101}$$

En examinant l'expression de la dérivée seconde, on voit que l'impôt n'intervient pas dans la détermination de la convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires. En effet, à part pour le terme $\left(\frac{C}{r}-V_B\right)$, les autres termes de l'expression ne deviennent jamais négatifs. Le seul terme qui peut changer de signe et donc influencer la convexité de la courbe est le facteur $\left(\frac{C}{r}-V_B\right)$. Nous pouvons donc affirmer avec certitude que l'impôt n'a aucun effet sur la convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires dans le cas du modèle de Goldstein, Ju et Leland. Examinons maintenant l'expression de l'avoir des actionnaires dans le cas du modèle de Sarkar et Zapatero et regardons quel effet a l'impôt sur la convexité de sa courbe.

2.3.2.3 Cas de Sarkar et Zapatero

En ayant supposé une faillite exogène, nous avons pu déterminer les dérivées première et seconde de "E" par rapport à "V". "E" étant fonction de "V" seulement. Nous avons vu que ces dérivées pouvaient être exprimées de la façon suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial V}=1+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)} \tag{102}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*\left[\Omega+\Psi+\Delta\right] \tag{103}$$

où

$$\Omega=\left[\frac{4k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^3}-\frac{\gamma}{(V-V_2)^2}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)} \quad \textbf{(104)}$$

$$\Psi=\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]x\frac{\gamma}{(V_B-V_2)^{\gamma}}[V-V_2]^{\gamma-1}xe^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)} \quad \textbf{(105)}$$

$$\Delta=\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}*\frac{-1}{(V-V_2)^2}*\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)} \quad \textbf{(106)}$$

$$V_B=(1-\tau)\left[\frac{\theta k}{r(k+r)}+\frac{x_L}{(k+r)}\right] \quad \textbf{(107)}$$

Comme on peut le constater, les facteurs Ω , Ψ et Δ sont positifs étant donné que le terme " γ " est toujours négatif, que " V_2 " constitue une valeur plancher pour la valeur de la compagnie et que l'exponentielle est une fonction qui est toujours positive. La convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires dépend donc uniquement du terme $\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]$. En examinant cette dernière expression, on voit que l'impôt n'influence pas le niveau de convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires. Par contre, cette convexité est influencée par les paramètres de retour à la moyenne. En effet, on peut voir que l'expression de la dérivée seconde[55] de « E » par rapport à « V » peut être écrite de la façon suivante :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=(1-\tau)\left[\frac{C}{r}-\left[\frac{\theta k}{r(k+r)}+\frac{x_L}{(k+r)}\right]\right]*[\Omega+\Psi+\Delta] \quad \textbf{(108)}$$

Ceci voudrait dire que le signe du terme entre crochets dépend de ses composants. Remarquons qu'en cas de vitesse de retour à la moyenne nulle, la dérivée seconde de « E » par rapport à « V » devient :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=(1-\tau)\left[\frac{C}{r}-\frac{x_L}{r}\right]*[\Omega+\Psi+\Delta] \quad \textbf{(109)}$$

---

55) Cette expression est dérivée à l'annexe (P).

Ainsi, la courbe de l'avoir des actionnaires devient parfaitement convexe comme dans les deux autres modèles. Par ailleurs, on vérifie que dans ce dernier cas, la valeur liquidative de la compagnie devient parfaitement identique à celle de Leland. On peut voir également, dans ce cas, que la dérivée seconde de « E » par rapport à « V » devient parfaitement identique à celle de Leland. En effet, dans le cas d'une vitesse de retour à la moyenne nulle, les termes Ω , Ψ et Δ prennent respectivement les valeurs suivantes :

$$\left(\frac{x}{V^2}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right), \left(\frac{x^2}{V^2}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right) \text{ et } 0$$

où

$$x=-\gamma=\frac{2r}{\sigma^2}$$

L'expression de la dérivée seconde de « E » par rapport à « V » devient alors :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right) \qquad \textbf{(110)}$$

Cette expression est identique à celle obtenue à l'aide du modèle de Leland. Nous verrons justement, plus tard dans ce raisonnement que les modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland constituent des cas particuliers du modèle de Sarkar et Zapatero.

Dans cette dernière section, nous avons mis en évidence deux points essentiels reliés à l'impôt. Le premier est que, contrairement au modèle de Leland, l'impôt contribue négativement dans la valeur de l'avoir des actionnaires dans le cas des modèles de Sarkar et Zapatero et de Goldstein, Ju et Leland. Le second point est que le taux d'impôt n'influence pas le niveau de convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires dans le cas des trois modèles mais que cette convexité est influencée par les paramètres de retour à la moyenne. Déterminons maintenant les conditions qui permettent d'obtenir la convergence parfaite entre les trois modèles faisant l'objet de notre comparaison.

2.4 Vérification de la convergence des trois modèles

Dans cette partie, nous verrons que sous certaines conditions, les trois modèles peuvent permettre d'aboutir à des solutions similaires. Nous commencerons par déterminer les conditions nécessaires à l'obtention de la convergence entre le modèle de Leland et celui de Sarkar et Zapatero. Nous procéderons, ensuite, à la détermination des conditions de convergence entre ce dernier modèle et le modèle de Goldstein, Ju et Leland.

2.4.1 Sarkar et Zapatero (2003) Vs Leland (1994)

Nous avons établi précédemment que la valeur de l'avoir des actionnaires pouvait être exprimée, selon le modèle de Leland, de la façon suivante :

$$E = V - (1-\tau)\frac{C}{r} - \left[V_B - (1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left[\frac{V}{V_B}\right]^{\frac{2r}{\sigma^2}} \quad \textbf{(111)}$$

Et nous avons établi également, que le terme "M(x) " prenait la valeur 1, dans le cas d'une vitesse de retour à la moyenne nulle et ce, quelle que soit la valeur que pouvait prendre "x". La valeur de l'avoir des actionnaires selon le modèle de Sarkar et Zapatero devient dans ce cas :

$$E = V - (1-\tau)\frac{C}{r} - \left[V_B - (1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left[\frac{V - V_2}{V_B - V_2}\right]^{\gamma} \quad \textbf{(112)}$$

Or $V_2 = \frac{(1-\tau)k\theta}{r(r+k)}$. Là encore, ce terme s'annule car k = 0. L'expression de "E" devient alors :

$$E = V - (1-\tau)\frac{C}{r} - \left[V_B - (1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left[\frac{V}{V_B}\right]^{\gamma} \quad \textbf{(113)}$$

Par ailleurs, nous avons démontré que :

$$\gamma = \frac{\left[1+\frac{2k}{\sigma^2}\right]-\sqrt{\left[1+\frac{2k}{\sigma^2}\right]^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}$$

Si k = 0, ce terme devient :

$$\gamma = \frac{1-\sqrt{1+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2} \qquad \textbf{(114)}$$

Mais nous savons aussi que :

$$\sqrt{1+\frac{8r}{\sigma^2}} = \left[1+\frac{8r}{\sigma^2}\right]^{1/2} = \left[1+\frac{1}{2}*\frac{8r}{\sigma^2}\right] = \left[1+\frac{4r}{\sigma^2}\right] \qquad \textbf{(115)}$$

Le terme " γ " peut donc être réécrit de la façon suivante:

$$\gamma = \frac{1-\left(1+\frac{4r}{\sigma^2}\right)}{2} \qquad \textbf{(116)}$$

L'expression définitive du terme "γ" [56] devient :

$$\gamma = -\frac{2r}{\sigma^2} \qquad \textbf{(117)}$$

Nous en concluons que les expressions respectives de l'avoir des actionnaires selon les modèles de Leland et de Sarkar et Zapatero deviennent parfaitement identiques en cas de vitesse de retour à la moyenne, nulle.

Vérifions maintenant sous quelles conditions les modèles de Sarkar et Zapatero, et de Goldstein, Ju et Leland convergent l'un vers l'autre.

2.4.2 Sarkar et Zapatero (2003) Vs Goldstein, Ju et Leland (2001)

Nous avons établi précédemment que la valeur de l'avoir des actionnaires selon le modèle de Goldstein, Ju et Leland était de :

$$E=(1-\tau)V-(1-\tau)\frac{C}{r}-\left[(1-\tau)V_B-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left[\frac{V}{V_B}\right]^{-x}$$

où le terme "x" à l'exposant pouvait être exprimé de la façon suivante :

---

56) Le détail des calculs ayant permis d'obtenir ce résultat est fourni à l'annexe (Q).

$$x=\frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\sqrt{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2+2r\sigma^2}\right]$$

Ainsi, si $\mu = r$, alors le terme "x" devient :

$$x=\frac{1}{\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\sqrt{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2+2r\sigma^2}\right) \quad \textbf{(118)}$$

En développant cette expression[57], on obtient

$$x=\frac{2r}{\sigma^2} \quad \textbf{(119)}$$

Les deux expressions de l'avoir des actionnaires selon les modèles de Sarkar et Zapatero et de Goldsein, Ju et Leland deviennent alors parfaitement identiques. De ce qui précède, nous pouvons conclure que les modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland représentent des cas particuliers du modèle de Sarkar et Zapatero.

57) Le détail des calculs ayant permis d'obtenir ce résultat est fourni à l'annexe (Q).

CONCLUSION

Ce chapitre porte en premier lieu sur la dérivation des expressions respectives des titres contingents selon les trois modèles sous étude. En second lieu, il met l'accent sur la convergence entre ces trois modèles et en troisième lieu, il se penche sur l'effet de l'impôt sur la valeur de l'avoir des actionnaires ainsi que sur la convexité de la courbe qui relie cet avoir à la valeur marchande de la compagnie.

La dérivation des expressions des titres contingents des trois modèles montre des similitudes mais aussi plusieurs différences. Cependant, comme nous l'avons démontré, la convergence entre ces expressions est possible si la vitesse de retour à la moyenne était identiquement nulle, ce qui nous porte à dire que les modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland sont des cas particuliers du modèle de Sarkar et Zapatero. Par ailleurs, comme nous l'avons montré, la convexité de la courbe qui relie l'avoir des actionnaires à la valeur de la compagnie n'est pas affectée par l'impôt. Par contre, cet impôt affecte négativement la valeur de l'avoir des actionnaires. Aussi, pour rendre opérationnel le modèle de Sarkar et Zapatero, nous avons pu lever une indétermination qui rendait impossible l'utilisation de ce modèle au niveau empirique et ce, en faisant tendre le terme qui causait l'indétermination vers une fonction usuelle finie en l'occurrence l'exponentielle négative.

Nous nous penchons, à présent, sur la dérivation de l'expression théorique d'une option d'achat à l'aide de ces mêmes modèles.

CHAPITRE III

DÉRIVATION, À L'AIDE DES TROIS MODÈLES ANALYSÉS, DE L'EXPRESSION D'UNE OPTION D'ACHAT ÉCRITE SUR L'AVOIR DES ACTIONNAIRES

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes penchés sur la dérivation des équations différentielles partielles des modèles sous étude, en partant de leurs équations dynamiques respectives. Ceci nous a permis de déterminer les expressions respectives des titres contingents, et à travers elles, celle de l'avoir des actionnaires. Plus tard, ceci nous permettra de comparer empiriquement les trois modèles au niveau de leur efficacité prédictive à évaluer cet avoir. Afin d'avoir une comparabilité parfaite entre les trois modèles, nous allons les utiliser pour dériver les expressions respectives d'une option d'achat écrite sur ce même avoir. Ceci nous permettra d'évaluer l'option d'achat indiquée à l'aide des trois modèles et d'en comparer la valeur à celle du marché. Cette dernière représente le consensus quant à la valeur intrinsèque des titres qui s'y transigent. Pour ce faire, nous allons partir des équations dynamiques respectives des trois modèles en vue de déterminer les équations stochastique et ordinaire que remplit une option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires. Nous verrons que les solutions de ces équations peuvent être déterminées, uniquement, de façon numérique en raison de la variabilité de leurs coefficients respectifs. Nous commencerons par les dérivations relatives au modèle de Leland et enchaînerons avec celles relatives aux autres modèles.

3.1 Dérivation de l'expression d'une option d'achat à l'aide du modèle de Leland

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes penchés sur la dérivation des équations différentielles partielles des modèles sous étude, en partant de leurs équations dynamiques respectives. Ceci nous a permis de déterminer les expressions respectives des titres contingents, et à travers elles, celle de l'avoir des actionnaires. Plus tard, ceci nous permettra de comparer empiriquement les trois modèles au niveau de leur efficacité prédictive à évaluer cet avoir. Afin d'avoir une comparabilité parfaite entre les trois modèles, nous allons les utiliser pour dériver les expressions respectives d'une option d'achat écrite sur ce même avoir. Ceci nous permettra d'évaluer l'option d'achat indiquée à l'aide des trois modèles et d'en comparer la valeur à celle du marché. Cette dernière représente le consensus quant à la valeur intrinsèque des titres qui s'y transigent. Pour ce faire, nous allons partir des équations dynamiques respectives des trois modèles en vue de déterminer les équations stochastique et ordinaire que remplit une option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires. Nous verrons que les solutions de ces équations peuvent être déterminées, uniquement, de façon numérique en raison de la variabilité de leurs coefficients respectifs. Nous commencerons par les dérivations relatives au modèle de Leland et enchaînerons avec celles relatives aux autres modèles.

Afin de déterminer l'expression d'une option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires, à l'aide de ce modèle, nous appliquerons le lemme d'itô, d'abord une première fois, à cet avoir considéré comme titre dérivé de la valeur de la compagnie. Ceci nous permettra d'en déterminer l'équation dynamique. Ensuite, nous appliquerons à nouveau le lemme d'itô à un titre dérivé du même avoir, en l'occurrence une option d'achat. Pour cela, nous en reprenons l'expression obtenue à l'aide du modèle de Hayne Leland. Cette expression se présentait de la façon suivante :

$$E = (1 - \tau)\left(V + \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\left(\frac{C}{r} - V_B\right) - \frac{C}{r}\right) \tag{120}$$

où

τ représente le taux d'impôt ;

V représente la valeur des actifs de la compagnie ;

C représente le coupon continu versé aux détenteurs de la dette ;

r représente le taux sans risque ;

V_B représente la valeur liquidative de la compagnie.

Pour la suite du raisonnement, nous supposerons les hypothèses suivantes :

a- V_B et τ sont exogènes ;

b- C et r sont constants.

Ceci nous permet de dire que « E » dépend uniquement de « V » et de «t». Ainsi, nous pouvons utiliser le lemme d'itô pour établir la relation qui relie les variations de « E » à celles de ces deux variables. En effet, si on revient à la dynamique de « V » exprimée selon le modèle de Leland, on peut écrire :

$$\frac{dV}{V} = \mu dt + \sigma dz \tag{121}$$

En appliquant le lemme d'itô et en considérant la perpétuité et la neutralité au risque, on obtient :

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial V}(rV) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2 V^2\right)dt + \frac{\partial E}{\partial V}\sigma V dz \tag{122}$$

où

E représente l'avoir des actionnaires;

r représente le taux sans risque ,

V représente la valeur aux livres des actifs de la compagnie;

σ représente la volatilité des actifs de la compagnie ;

dz est un processus de Wiener d'incrément dt.

L'équation ainsi obtenue représente la dynamique de l'avoir des actionnaires selon le modèle de Leland. Partant de là, nous pouvons déterminer l'expression d'une option d'achat écrite sur cet avoir. Pour cela, cherchons d'abord les dérivées première et seconde de "E" par rapport à "V". Nous avons établi précédemment que l'équation de l'avoir des actionnaires pouvait être exprimée de la façon suivante :

$$E=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left(\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)$$

où

τ représente le taux d'impôt;

C représente le coupon continu reçu par les détenteurs de la dette;

V_B représente la valeur liquidative de la compagnie:

$$x=\frac{2r}{\sigma^2}$$

Étant donné que tous les paramètres sont exogènes, nous pouvons considérer que "E" dépend uniquement de "V". Ainsi, les dérivées première et seconde de "E" par rapport à "V" peuvent être exprimées respectivement de la façon suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial V}=\left(1-\frac{x}{V(E)}\left(\frac{V(E)}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right) \tag{123}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=\left(\left(\frac{x}{V(E)^2}+\frac{x^2}{V(E)^2}\right)\left(\frac{V(E)}{V_B}\right)^{-x}\right)\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right) \tag{124}$$

En remplaçant, dans l'expression de "dE", les dérivées première et seconde de « E » par rapport à « V », par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$dE=\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)rV+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)dt+\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V dz \tag{125}$$

Pour simplifier cette expression, posons :

$$a(E)=\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)(rV)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right) \qquad \textbf{(126)}$$

et

$$b(E)=\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V \qquad \textbf{(127)}$$

L'expression de "dE" devient alors :

$$dE=a(E)dt+b(E)dz \qquad \textbf{(128)}$$

Pour obtenir l'équation différentielle que remplit un titre dérivé de l'avoir des actionnaires, nous appliquerons à nouveau le lemme d'itô, à l'expression (128). Pour cela, supposons que "E" suit un processus d'itô et soit "G", un instrument continu et dérivable qui dépend de "E" et de "t". En appliquant le lemme d'itô, on obtient :

$$dG=\left(\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2\right)dt+\frac{\partial G}{\partial E}bdz \qquad \textbf{(129)}$$

Prenons maintenant deux instruments financiers, "G_1" et "G_2", qui dépendent de "E" et supposons que les deux instruments cités répondent aux conditions de l'équation dynamique suivante :

$$dG = Gmdt + GsdW \qquad \textbf{(130)}$$

Et formons un portefeuille réplique composé de :

"s_2G_2" titres "G_1" et de "- s_1G_1" titres "G_2"

En considérant la perpétuité et la neutralité au risque, on obtient :

$$\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2=rG \qquad \textbf{(131)}$$

En remplaçant les termes a(E) et b(E) par leurs valeurs respectives, l'expression (131) devient :

$$\frac{\partial G}{\partial E}\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)(rV)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V\right)^2=rG \qquad \textbf{(132)}$$

L'expression ainsi obtenue, représente l'équation ordinaire que remplit une option d'achat écrite sur la valeur de l'avoir des actionnaires [58] que nous avons dérivée en partant du modèle de Leland. La solution de l'équation (132) sera déterminée de façon numérique étant donné qu'elle présente des coefficients non constants. Le tableau 3.1 permet de récapituler les résultats obtenus en utilisant le modèle de Leland.

Nous passons maintenant, aux dérivations relatives à une option d'achat écrite sur la valeur de l'avoir des actionnaires, à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland.

3.2 Dérivation de l'équation d'une option d'achat à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland

Afin de déterminer l'équation d'une option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires, à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland, nous établirons d'abord une relation dynamique entre cet avoir et la valeur de la compagnie.

Tableau 3.1
Équation de l'avoir des actionnaires ainsi que celle d'une option d'achat écrite sur cet avoir selon le modèle de Leland. H. (1994)

Modèle	Équation de l'avoir des actionnaires	Terme a	Terme b	Équation ordinaire de l'option d'achat
Leland	$E(V)=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}$	$a=\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)(rV)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)\right)$	$b=\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V$	$\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2=rG$

58) Cette expression est dérivée à l'annexe (H).

3.2.1 Équation dynamique de l'avoir des actionnaires

Pour commencer, supposons les hypothèses suivantes :

a- V_B et τ sont exogènes ;

b- C et r sont constants.

Ceci nous permet d'affirmer que "E" dépend uniquement de "V". Nous aurons donc la possibilité d'utiliser le lemme d'itô pour établir la relation dynamique qui existe entre les variations infinitésimales de "E" et celles de "V", dans le temps. Pour ce faire, reprenons la dynamique de "V" telle qu'elle a été dérivée à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland. Selon les trois auteurs, cette dynamique peut être exprimée de la façon suivante :

$$\frac{dV}{V}=(r-\frac{\delta}{V})dt+\sigma dz \qquad \textbf{(133)}$$

où

μ représente la croissance instantanée des actifs de la compagnie;

σ représente la volatilité des actifs de la compagnie ;

δ représente le bénéfice avant impôt et intérêts de la compagnie;

dz est un processus de Wiener d'incrément dt.

Appelons le terme $(r-\frac{\delta}{V})$, μ

L'équation (133) devient alors :

$$\frac{dV}{V}=\mu dt+\sigma dz \qquad \textbf{(134)}$$

De la même façon que nous l'avons fait pour le modèle de Leland, nous partons d'une fonction "f" qui vaut au voisinage de "V" :

$$f(V+\Delta V)=f(V)+\Delta V\frac{\partial f}{\partial V}+\frac{1}{2!}\sigma^2 V^2 \Delta t\frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \qquad \textbf{(135)}$$

Ceci nous permet de dériver la dynamique de "E" en fonction de "V" et de "t" puisque nous avons établi précédemment que "E" dépendait uniquement de ces deux paramètres. Ainsi, en utilisant le lemme d'itô, on obtient :

$$dE=\left(\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial V}(rV-\delta)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2 V^2\right)dt+\frac{\partial E}{\partial V}\sigma V dz \qquad \textbf{(136)}$$

En considérant la perpétuité, cette expression peut être récrite de la façon suivante :

$$dE=\left(\frac{\partial E}{\partial V}(rV-\delta)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2 V^2\right)dt+\frac{\partial E}{\partial V}\sigma V dz \qquad \textbf{(137)}$$

Or, nous avons établi précédemment que la valeur de l'avoir des actionnaires pouvait être obtenue à partir de l'expression suivante :

$$E=(1-\tau)\left(V+\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)-\frac{C}{r}\right)$$

où

$$x=\frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\sqrt{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2+2r\sigma^2}\right]$$

Mais puisque "E" dépend uniquement de "V"[59], on peut en obtenir les dérivées première et seconde par rapport à ce paramètre. Celles-ci peuvent être exprimées de la façon suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial V}=(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right) \qquad \textbf{(138)}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right) \qquad \textbf{(139)}$$

Si on remplace dans l'expression de "dE", on obtient :

---

59) Le terme "t" disparaît en raison de la perpétuité.

$$dE = \left((1-\tau)\left(1 - \frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r} - V_B\right)\right)(rV-\delta) + \frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r} - V_B\right)\sigma^2 V^2 \right) dt \qquad \textbf{(140)}$$
$$+ (1-\tau)\left(1 - \frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r} - V_B\right)\right)\sigma V dz$$

L'expression ainsi obtenue représente la dynamique de l'avoir des actionnaires. Nous allons maintenant utiliser cette expression pour déterminer la valeur d'une option d'achat écrite sur cet avoir.

3.2.2 Valeur d'une option d'achat selon le modèle de Goldstein, Ju et Leland

Afin d'être en mesure d'établir le lien entre la valeur de l'avoir des actionnaires et celle de l'option d'achat écrite sur cet avoir, nous avons besoin d'émettre les hypothèses supplémentaires suivantes :

- σ est constant comme spécifié par le modèle de Goldstein, Ju et Leland ;
- La compagnie demeure solvable ;
- Nous sommes en situation de neutralité au risque puisque $\frac{\delta}{V} = Cste$ [60].
- $\mu = r - \frac{\delta}{V}$.

En principe, en effectuant notre développement, nous devrions arriver à une solution de type Black & Scholes. Pour vérifier cette allégation, reprenons l'expression de "dE". Nous avons établi plus tôt dans ce raisonnement que :

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial V}(rV - \delta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2 V^2 \right) dt + \frac{\partial E}{\partial V}\sigma V dz$$

Nous avons également déterminé les dérivées première et seconde de "E" par rapport à "V" . Les valeurs respectives de ces termes pouvaient être exprimées de la façon suivante :

---

60) Cette hypothèse est sous-jacente au modèle de Goldstein, Ju et Leland.

$$\frac{\partial E}{\partial V}=(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)$$

et

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)$$

En ayant remplacé dans l'expression de "dE", nous avons pu dériver l'équation suivante :

$$dE=\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)(rV-\delta)+\frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)dt+(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V dz$$

Où

τ représente le taux d'impôt;

δ représente les bénéfices avant intérêts et impôt;

V_B représente la valeur liquidative de la compagnie.

Pour simplifier cette expression, posons :

$$a(E)=(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)(rV-\delta)+\frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2 \quad \textbf{(141)}$$

et

$$b(E)=(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V \quad \textbf{(142)}$$

En remplaçant dans l'expression de "dE", celle-ci devient :

$$dE=a(E)dt+b(E)dz \quad \textbf{(143)}$$

Supposons que "E" suit un processus d'itô et soit "G", un instrument continu et dérivable qui dépend de "E" et de "t".

En appliquant le lemme d'itô, on obtient :

$$dG=\left(\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2\right)dt+\frac{\partial G}{\partial E}bdz \quad \textbf{(144)}$$

Comme dans le cas de Leland, nous considérons deux instruments financiers, "G_1" et "G_2", qui dépendent de "E" et qui répondent aux conditions de l'équation dynamique suivante :

$$dG = Gmdt + GsdW \quad \textbf{(145)}$$

En formant un portefeuille réplique composé de : "s_2G_2" titres "G_1" et de "- s_1G_1" titres "G_2" et en considérant la perpétuité et la neutralité au risque, on obtient :

$$\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2=rG \quad \textbf{(146)}$$

L'expression, ainsi obtenue, représente l'équation ordinaire de notre modèle. Cette équation ressemble à celle de Black-Scholes sauf qu'elle présente des coefficients différents et non constants. En effet, en remplaçant les coefficients a(E) et b(E) par leurs expressions respectives, l'équation (145) devient[61] :

$$\frac{\partial G}{\partial E}\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)(rV-\delta)+\frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right) \quad \textbf{(147)}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V\right)^2=rG$$

Une solution numérique nous permettra de déterminer la valeur de l'option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires. Le tableau 3.2 permet de récapituler les résultats obtenus à l'aide de ce modèle.

Nous passons maintenant au modèle de Sarkar et Zapatero. Comme nous l'avons fait au moment de l'analyse du modèle de Goldstein, Ju et Leland, nous dériverons l'expression d'une option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires en partant de la dynamique de ce modèle.

---

61) Cette expression est dérivée à l'annexe (J).

Tableau 3.2
Expression d'une option d'achat écrite sur l'avoir
des actionnaires selon le modèle de Goldstein, Ju et Leland

Modèle	Équation de l'avoir des actionnaires	Équation ordinaire de l'option d'achat
GJL	$E=(1-\tau)\left(V+\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)-\frac{C}{r}\right)$	$\frac{\partial G}{\partial E}\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\mu V+\frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V\right)^2=rG$

3.3 Dérivation de l'expression d'une option d'achat à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero

Afin de déterminer l'expression d'une option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires, nous partons de la dynamique de "E". À ce niveau, nous avons déjà établi que :

$$E=V-(1-\tau)\frac{C}{r}-\left[V_1x_L+V_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left(\frac{Mx}{Mx_L}\right)\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\gamma}$$

Cette expression pouvait également être écrite de la façon suivante :

$$E=V-(1-\tau)\frac{C}{r}-\left[V_B-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left(\frac{Mx}{Mx_L}\right)\left[\frac{\frac{V-V_2}{V_1}}{\frac{V_B-V_2}{V_1}}\right]^{\gamma}$$

Nous avons également prouvé que le terme "M(x)" pouvait être exprimé de la façon suivante :

$$M(x)\rightarrow e^{z}=e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2x}}$$

Ceci nous a permis de récrire l'expression de "E" sous la forme suivante :

$$E=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*\left[e^{\left(\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}\right]\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}$$

k représente la vitesse de retour à la moyenne;

θ représente la valeur moyenne, à terme, des bénéfices avant intérêts et impôt:

σ représente la volatilité des actifs de la compagnie;

V_B représente la valeur liquidative de la compagnie;

τ représente le taux d'impôt;

$$\gamma = \frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2}) - \sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2 + \frac{8r}{\sigma^2}}}{2};$$

$$V = (1-\tau)\left[\frac{\theta k}{r(k+r)} + \frac{x}{(k+r)}\right] = v_1 x + v_2;$$

C représente le coupon continu versé aux créanciers de la compagnie.

Mais puisque la faillite est exogène, "E" devient fonction de "V" seulement. Nous pouvons alors déterminer les dérivées première et seconde de "E" par rapport à "V".

En effectuant ces dérivations, on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial V} = 1 + \left[(1-\tau)\frac{C}{r} - V_B\right] * \left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2 (V - V_2)^2} + \frac{\gamma}{(V - V_2)}\right] * \left[\frac{V - V_2}{V_B - V_2}\right]^{\gamma} * e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2} * \left(\frac{1}{V - V_2} - \frac{1}{V_B - V_2}\right)} \tag{148}$$

et

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} = \left[(1-\tau)\frac{C}{r} - V_B\right] * [\Omega + \Psi + \Delta] \tag{149}$$

avec

$$\Omega = \left[\frac{4k\theta V_1}{\sigma^2 (V - V_2)^3} - \frac{\gamma}{(V - V_2)^2}\right] * \left[\frac{V - V_2}{V_B - V_2}\right]^{\gamma} * e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2} * \left(\frac{1}{V - V_2} - \frac{1}{V_B - V_2}\right)} \tag{150}$$

$$\Psi = \left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2 (V - V_2)^2} + \frac{\gamma}{(V - V_2)}\right] x \frac{\gamma}{(V_B - V_2)^{\gamma}} [V - V_2]^{\gamma - 1} x\, e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2} * \left(\frac{1}{V - V_2} - \frac{1}{V_B - V_2}\right)} \tag{151}$$

$$\Delta = \left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2 (V - V_2)^2} + \frac{\gamma}{(V - V_2)}\right] * \left[\frac{V - V_2}{V_B - V_2}\right]^{\gamma} * \frac{-1}{(V - V_2)^2} * \frac{2k\theta V_1}{\sigma^2} * e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2} * \left(\frac{1}{V - V_2} - \frac{1}{V_B - V_2}\right)} \tag{152}$$

Si on applique le lemme d'itô, on obtient :

$$dE=\left(\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial V}\left(k(V_1\theta-V)+V_2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2(V-V_2)^2\right)dt+\frac{\partial E}{\partial V}\sigma(V-V_2)dz \qquad \textbf{(153)}$$

En considérant la perpétuité, on obtient :

$$dE=\left(\frac{\partial E}{\partial V}\left(k(V_1\theta-V)+V_2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2(V-V_2)^2\right)dt+\frac{\partial E}{\partial V}\sigma(V-V_2)dz \qquad \textbf{(154)}$$

Pour simplifier cette expression posons :

$$a(E)=\left(\frac{\partial E}{\partial V}\left(k(V_1\theta-V)+V_2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2(V-V_2)^2\right) \qquad \textbf{(155)}$$

et

$$b(E)=\frac{\partial E}{\partial V}\sigma(V-V_2) \qquad \textbf{(156)}$$

L'expression de "dE" devient alors :

$$dE=a(E)dt+b(E)dz \qquad \textbf{(157)}$$

Supposons que "E" suit un processus d'itô et soit "G", un instrument continu et dérivable qui dépend de "E" et de "t". En appliquant le lemme d'itô, on obtient :

$$dG=\left(\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2\right)dt+\frac{\partial G}{\partial E}bdz \qquad \textbf{(158)}$$

Considérons, à nouveau, deux instruments financiers, "G_1" et "G_2", qui dépendent de "E" et supposons que les deux instruments cités répondent aux conditions de l'équation dynamique suivante :

dG = Gmdt + GsdW **(159)**

En formant un portefeuille réplique composé de : "s_2G_2" titres "G_1" et de "- s_1G_1" titres "G_2" et en considérant la perpétuité et la neutralité au risque, on obtient :

$$\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2=rG \qquad \textbf{(160)}$$

L'expression (160) représente l'équation ordinaire que remplit une option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires. Cette expression est similaire à celle obtenue en utilisant les autres modèles. Toutefois, elle présente des coefficients variables et différents de ceux des autres modèles. En effet, en remplaçant les termes a(E) et b(E) par leurs valeurs respectives, l'équation ordinaire du modèle devient [62]:

$$\frac{\partial G}{\partial E}\left(\frac{\partial E}{\partial V}(k(V_1\theta - V) + V_2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2(V - V_2)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\sigma(V - V_2)\right)^2 = rG \tag{161}$$

où

$$\frac{\partial E}{\partial V} = 1 + \left[(1-\tau)\frac{C}{r} - V_B\right] * \left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V - V_2)^2} + \frac{\gamma}{(V - V_2)}\right] * \left[\frac{V - V_2}{V_B - V_2}\right]^{\gamma} * e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2} * \left(\frac{1}{V - V_2} - \frac{1}{V_B - V_2}\right)} \tag{162}$$

et

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} = \left[(1-\tau)\frac{C}{r} - V_B\right] * [\Omega + \Psi + \Delta] \tag{163}$$

et où

$$\Omega = \left[\frac{4k\theta V_1}{\sigma^2(V - V_2)^3} - \frac{\gamma}{(V - V_2)^2}\right] * \left[\frac{V - V_2}{V_B - V_2}\right]^{\gamma} * e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2} * \left(\frac{1}{V - V_2} - \frac{1}{V_B - V_2}\right)} \tag{164}$$

$$\Psi = \left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V - V_2)^2} + \frac{\gamma}{(V - V_2)}\right] x \frac{\gamma}{(V_B - V_2)^{\gamma}}[V - V_2]^{\gamma - 1} \; x\, e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2} * \left(\frac{1}{V - V_2} - \frac{1}{V_B - V_2}\right)} \tag{165}$$

62) Cette expression est dérivée à l'annexe (M).

$$\Delta = \left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2 (V - V_2)^2} + \frac{\gamma}{(V - V_2)} \right] * \left[\frac{V - V_2}{V_B - V_2} \right]^{\gamma} * \frac{-1}{(V - V_2)^2} * \frac{2k\theta V_1}{\sigma^2} \qquad \textbf{(166)}$$

$$* e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2} * \left(\frac{1}{V - V_2} - \frac{1}{V_B - V_2} \right)}$$

Le tableau 3.3 permet de récapituler les résultats obtenus en utilisant ce modèle. Nous nous penchons à présent sur la dérivation de l'expression d'une option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires en utilisant le modèle de Merton. Comme nous l'avons cité précédemment, ce modèle servira uniquement de référence.

3.4 Dérivation de l'équation d'une option d'achat à l'aide du modèle de Merton

Dans cette section, nous mettons l'accent sur la dérivation de l'équation d'une option d'achat portant sur la valeur de l'action d'une compagnie, en utilisant le modèle de Merton. Ainsi, si on applique le lemme d'itô, on obtient la dynamique de "E" qui se présente de la façon suivante :

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial V} (rV - \eta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \sigma^2 V^2 \right) dt + \frac{\partial E}{\partial V} \sigma V dz \qquad \textbf{(167)}$$

Tableau 3.3

Dérivation de l'expression d'une option d'achat au moyen du modèle de Sarkar et Zapatero

Modèle	Équation de l'avoir des actionnaires	Équation option d'achat
SZ	$E=v_1x+v_2-(1-\tau)\frac{C}{r}-\left[v_1x_L+v_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_L})}(\frac{x}{x_L})^{\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}}$	$\frac{\partial G}{\partial E}\left(\frac{\partial E}{\partial V}(k(V_1\theta-V)+V_2)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2(V-V_2)^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}(\frac{\partial E}{\partial V}\sigma(V-V_2))^2=rG$ $\frac{\partial E}{\partial V}=1+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}$ $\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*[\Omega+\Psi+\Delta]$ $\Omega=\left[\frac{4k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^3}-\frac{\gamma}{(V-V_2)^2}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}$ $\Psi=\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]x\frac{\gamma}{(V_B-V_2)^{\gamma}}[V-V_2]^{\gamma-1}xe^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}$ $\Delta=\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}*\frac{-1}{(V-V_2)^2}*\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}$

Or "E" dépend uniquement de "V". Ceci nous permet de déterminer les dérivées première et seconde de "E" par rapport à "V". En effet, nous savons que dans un contexte de neutralité au risque, le terme N(d1) peut être exprimé de la façon suivante :

$$N(d_1)=\frac{\partial E}{\partial V} \quad \textbf{(168)}$$

Nous savons également que le terme N(d2) peut être exprimé de la façon suivante :

$$N(d_2)=1-N(d_1) \quad \textbf{(169)}$$

Si on remplace ces expressions dans celle de l'avoir des actionnaires, celle-ci devient :

$$E_t=V_t e^{[illegible]}\frac{\partial E}{\partial V}-De^{-r\tau}(1-\frac{\partial E}{\partial V}) \quad \textbf{(170)}$$

Cette expression peut être réécrite de la façon suivante :

$$E_t = (V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau})\frac{\partial E}{\partial V} - De^{-r\tau} \quad \textbf{(171)}$$

Ceci nous permet d'isoler la dérivée première de "E" par rapport à "V".

Celle-ci se présente alors de la façon suivante :

$$\frac{E_t + De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau})} = \frac{\partial E}{\partial V} \quad \textbf{(172)}$$

Si on suppose que l'avoir des actionnaires dépend uniquement de la valeur de la compagnie, on détermine la dérivée seconde de "E" par rapport à "V", de la façon suivante :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} = V_t \cdot \frac{\eta\tau}{V^2} \cdot e^{-\frac{\eta}{V}\tau} \frac{E_t + De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau})^2} \quad \textbf{(173)}$$

Pour simplifier le raisonnement, posons :

$$a(E) = \left(\frac{E + De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau})}(rV - \eta) - V_t \cdot \frac{\eta\tau}{V^2} \cdot e^{-\frac{\eta}{V}\tau} \frac{E + De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau})^2} \sigma^2 V^2 \right) \quad \textbf{(174)}$$

Soit après simplification :

$$a(E) = \left(\frac{E + De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau})}(rV - \eta) - V_t \cdot \eta\tau \cdot e^{-\frac{\eta}{V}\tau} \frac{E + De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau})^2} \sigma^2 \right) \quad \textbf{(175)}$$

et

$$b(E) = \frac{E + De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau})} \sigma V \quad \textbf{(176)}$$

L'expression de "dE" devient alors :

$$dE = a(E)dt + b(E)dz \quad \textbf{(177)}$$

Nous avons vu précédemment que cette forme de dynamique permettait d'arriver à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial E}(a - \lambda b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2} b^2 = rG \quad \textbf{(178)}$$

Nous avons vu également que si on considérait la perpétuité et la neutralité au risque, cette équation devenait :

$$\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2=rG \tag{179}$$

Cette expression est similaire à celles obtenues à l'aide des autres modèles.

Elle présente cependant des coefficients différents mais variables surtout.

En effet, si on remplace les termes a(E) et b(E) par leurs expressions respectives, l'équation (179) devient :

$$\frac{\partial G}{\partial E}\left(\frac{E+De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau}+De^{-r\tau})}(rV-\eta)-V_t\cdot\eta\tau\cdot e^{-\frac{\eta}{V}\tau}\frac{E+De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau}+De^{-r\tau})^2}\sigma^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left(\frac{E+De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau}+De^{-r\tau})}\sigma V\right)^2=rG \tag{180}$$

On voit clairement qu'il est impossible de trouver une solution analytique pour cette expression[63]. Seule une solution numérique est possible dans ce cas, ce qui corrobore le raisonnement de Perrakis, S. et P. Ryan (1984) selon lequel le modèle de Merton-Black-Scholes permet uniquement d'estimer la valeur d'une option écrite sur l'avoir des actionnaires d'une compagnie. Le tableau 3.4 permet de récapituler les résultats obtenus à l'aide des quatre modèles.

63) Cette expression est dérivée à l'annexe (S).

CONCLUSION

L'objet de ce chapitre était de dériver l'expression théorique d'une option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires dans le cadre de chacun des trois modèles sous étude. Cette dérivation constitue une extension qui va au delà de ce qu'ont fait les auteurs. Comme l'analyse le montre, les expressions que nous avons développées sont similaires mais présentent des coefficients différents et surtout variables. À ce niveau, il convient de souligner que dans le cas des trois modèles, la solution obtenue n'est pas analytique. L'étude empirique relative aux options que nous effectuons de façon exploratoire nécessitera donc le recours à une solution numérique.

Nous passons maintenant à l'étude empirique exploratoire des trois modèles en utilisant les formules développées dans ce chapitre et dans le chapitre précédent dans le but de vérifier leurs performances respectives au niveau de l'évaluation de l'avoir des actionnaires et des options d'achat écrites dessus.

Tableau 3.4
Récapitulation des résultats obtenus
au moyen des quatre modèles

Modèle	Équation de l'avoir des actionnaires	EDP de l'option	Expression du terme a	Expression du terme b	Solution Équation de l'option
Leland	$E(V)=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}$	$\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2=rG$	$a=\left(\frac{\partial E}{\partial t}+\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}(1-\tau)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)(rV)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)(1-\tau)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)$	$b=\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V$	
GJL	$E=(1-\tau_{eff})\left(V+\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)-\frac{C}{r}\right)$	$\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2=rG$	$a=\left(\frac{\partial E}{\partial t}+(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)(\mu V)+\frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)$	$b=(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V$	
SZ	$E=V-(1-\tau)\frac{C}{r}-\left[V_B-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left(\frac{Mx}{Mx}\right)\left[\frac{\frac{V-V_2}{V_1}}{\frac{V_B-V_2}{V_1}}\right]^{\gamma}$	$\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2=rG$	$a=\left(\frac{\partial E}{\partial V}\left(k(V_1\theta-V)+V_2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2(V-V_2)^2\right)$ $\frac{\partial E}{\partial V}=1+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}$ $\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*[\Omega+\Psi+\Delta]$ $\Omega=\left[\frac{4k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^3}-\frac{\gamma}{(V-V_2)^2}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}$ $\Psi=\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]x\frac{\gamma}{(V_B-V_2)^{\gamma}}[V-V_2]^{\gamma-1}xe^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}$ $\Delta=\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}*\frac{-1}{(V-V_2)^2}*\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}$	$b=\frac{\partial E}{\partial V}\sigma(V-V_2)$	$G(E)=g_1e^{R_1E}+g_2e^{R_2E}$ $R_1=\frac{-a-\sqrt{a^2+2rb^2}}{b^2}$ $R_2=\frac{-a+\sqrt{a^2+2rb^2}}{b^2}$
Merton	$E=V_te^{-\frac{\eta}{V}\tau}N(d1)-De^{-r\tau}N(d2)$	$\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2=rG$	$a=\left(\frac{E+De^{-r\tau}}{(V_te^{-\frac{\eta}{V}\tau}+De^{-r\tau})}(rV-\eta)-V_t\cdot\eta\tau\cdot e^{-\frac{\eta}{V}\tau}\frac{E+De^{-r\tau}}{(V_te^{-\frac{\eta}{V}\tau}+De^{-r\tau})^2}\sigma^2\right)$	$b=\frac{E+De^{-r\tau}}{(V_te^{-\frac{\eta}{V}\tau}+De^{-r\tau})}\sigma V$	

CHAPITRE IV

COMPARAISON DES TROIS MODÈLES SOUS ÉTUDE SUR LA BASE DE LEURS RÉSULTATS EMPIRIQUES RELATIFS À L'ÉVALUATION DE L'AVOIR DES ACTIONNAIRES

Dans ce chapitre, nous mettons l'accent sur l'évaluation de l'avoir des actionnaires à l'aide des modèles sous étude. En effet, ayant établi la comparabilité de ces derniers sur une base théorique, nous aimerions les comparer sur une base empirique également. L'objectif est de vérifier lequel d'entre eux permet le mieux d'évaluer l'avoir des actionnaires. Pour ce faire, nous comparerons les résultats obtenus à l'aide de ces trois modèles, à la moyenne du haut et du bas de la journée que nous avons choisie comme standard de comparaison. Afin de mesurer l'efficacité de ces mêmes modèles abstraction faite de l'état de l'économie, nous effectuons cette évaluation pour les années 2006 et 2002 respectivement[64]. Comme le tableau 4.1 le montre, ces deux années représentent des périodes d'expansion et de récession respectivement. En effet, les rendements respectifs des indices boursiers canadien, américain et international étaient négatifs en 2002. Ceci nous permet d'affirmer qu'il s'agissait d'une année de récession. En revanche, ce rendement était fort et stable en 2006, ce qui témoigne d'une année prospère.

Le chapitre V sera réservé à la comparaison de ces mêmes modèles au niveau de l'évaluation des options d'achat écrites sur l'avoir des actionnaires, aux mêmes dates d'évaluation choisies. Le reste du travail sera organisé de la façon suivante :

[64]) Des périodes plus allongées seront considérées dans une analyse ultérieure en vue de tester la robustesse des modèles analysés au niveau de l'évaluation des actions et des options écrites dessus. Dans le cadre de cette recherche, nous procédons uniquement à une analyse empirique exploratoire des modèles sous étude.

Tableau 4.1
Rendement en (%) des indices canadien, américain et international entre 2000 et 2007

Année	Indice S&P/TSX ($CAN) Actions canadiennes	Indice S&P 500 ($US) Actions américaines	Indice MSCI EAFE($US) Actions internationales
2000	7,40	(9,10)	(14)
2001	(12,60)	(11,90)	(21,20)
2002	(12,40)	(22,10)	(15,70)
2003	26,70	28,70	39,20
2004	14,50	10,90	20,70
2005	24,10	4,90	14
2006	17,30	15,80	26,90
2007	9,80	5,50	11,60

Source Data Stream (extrait)

À la première section de ce chapitre, nous procéderons à une comparaison des trois modèles sous étude sur la base de leurs résultats empiriques de 2006.
La deuxième section sera réservée à une comparaison des mêmes modèles sur la base de leurs résultats empiriques de 2002.

4.1 Évaluation en 2006

Cette section sera subdivisée en deux parties. À la première sous-section, nous mettrons l'accent sur la comparaison des valeurs des titres individuels, obtenues à l'aide des modèles sous étude. La deuxième sous-section sera réservée à la comparaison des valeurs des portefeuilles de ces titres, calculées à l'aide de ces mêmes modèles.

4.1.1 Comparaison des valeurs des titres sur une base individuelle

Dans cette partie nous utiliserons les trois modèles sous étude pour évaluer, sur une base individuelle, l'avoir des actionnaires des compagnies qui font l'objet de notre analyse et enchaînerons avec l'évaluation des titres des compagnies indiquées, pris ensemble. Pour ce faire, nous nous servirons de la valeur marchande moyenne[65] de ces titres, comme standard de comparaison. Auparavant, nous procéderons à l'estimation des paramètres du modèle de Sarkar et Zapatero. Ceci rendra ce dernier modèle opérationnel en vue d'une évaluation des titres contingents.

4.1.1.1 Estimation des paramètres du modèle de Sarkar et Zapatero

Afin d'estimer les paramètres du modèle de Sarkar et Zapatero, nous procéderons de la même manière que l'ont fait les deux auteurs. Pour cela, nous partirons de la dynamique du modèle présentée à l'équation (47) du deuxième chapitre. Nous analyserons la variabilité de cette dynamique dans le temps. Ainsi, l'équation de la régression qui permet de déterminer les paramètres de retour à la moyenne[66] peut être présentée de la façon la suivante :

$$\frac{\Delta x}{x} = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x} + \tilde{\varepsilon} \qquad \textbf{(160)}$$

où

$\beta_0 = -k$; $\beta_1 = k\theta$;

k représente la vitesse de retour à la moyenne;

θ représente la valeur moyenne des bénéfices avant intérêts et impôt;

$\tilde{\varepsilon}$ représente le terme d'erreur.

65) Cette valeur représente la moyenne des prix haut et bas de la journée pour les titres indiqués.

66) Le détail du développement est fourni à l'annexe (A).

D'après l'équation (160), si les gains suivent un processus de retour à la moyenne alors le terme " β_0 " doit être négatif, ce qui signifierait que le terme "k" est positif. Ce coefficient doit être statistiquement significatif.
Pour sa part, le terme " β_1 " devrait être positif et le simple fait de le diviser par le terme "- β_0 " nous permettra de déterminer la valeur de " θ ". Ainsi, de la même manière qu'ont procédé Sarkar et Zapatero, nous exclurons de notre échantillon[67] les compagnies dont les paramètres ne remplissent pas les conditions de retour à la moyenne.
Nous avons effectué la régression de la variation relative du bénéfice avant impôt et intérêts sur l'inverse de ce facteur pour les compagnies qui forment notre échantillon. Les résultats de ce test sont présentés au tableau 4.2.
Comme on peut le voir à la lecture du tableau 4.2, un total de 27 compagnies remplissent les conditions de retour à la moyenne. Parmi ces dernières, figure la compagnie Nortel qui a présenté beaucoup d'instabilité durant ces dernières années[68]. C'est la raison pour laquelle nous l'excluons de notre échantillon d'évaluation qui sera composé, désormais, de 26 compagnies[69]. Ce sous-échantillon sera retenu pour effectuer la comparaison des trois modèles sous étude.

---

67) L'échantillon que nous avons utilisé pour effectuer ce test est composé des quarante-deux compagnies listées à l'indice "TSX60". Cet échantillon représente les compagnies pour lesquelles nous avons pu obtenir de l'information continue sur Bloomberg et Sedar, et ce pour une période de temps allant de janvier 2000 à décembre 2006.
68) Le bénéfice avant intérêts et impôt de cette compagnie était négatif durant la période d'évaluation. Ceci rend impossible son évaluation à l'aide des modèles qui partent du BAII comme variable d'état.
69) Seules ces compagnies sont évaluables à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero, ce qui rend possible la comparaison des résultats obtenus à l'aide de ce modèle à ceux obtenus à l'aide des deux autres modèles sous étude. Un test hors échantillon composé des 15 compagnies qui ne remplissent pas la condition de retour à la moyenne a été effectué à l'aide des deux autres modèles sous étude. Les résultats de ce test sont présentés à l'annexe AC.

Tableau 4.2
Estimation des paramètres
du modèle de Sarkar et Zapatero

$$\frac{\Delta x_t}{x_t} = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x_t} + \tilde{\varepsilon} \quad ; t = 1,\ldots,T$$ [70]

Symbole	$\beta_0 = -k$ Valeur	$\beta_0 = -k$ Seuil de signification	$\beta_1 = k\,\theta$ Valeur	$\beta_1 = k\,\theta$ Seuil de signification
AEM	-.3869548E-06	0.403	.0578732	0.001
AGU	-1.224867E-06	0.007 ***	1.001154	0.000 ***
AL	-.3180921E-06	0.092 *	.5790152	0.061 *
ABX	-.1597184E-06	0.444	.0985384	0.242
BCE	-.4759423E-06	0.005 ***	1.0097	0.005 ***
BVF	-.8729776E-06	0.000 ***	.4332583	0.000 ***
BBD	-1.001656E-06	0.000 ***	.5775766	0.000 ***
CCO	-.733843 E-06	0.001 ***	.1775098	0.000 ***
CNR	-.7095916E-06	0.000 ***	1.330523	0.000 ***
CNQ	-.3168576E-06	0.046 **	.5991031	0.004 ***
CTC	-.5993294E-06	0.004 ***	1.281243	0.001 ***
COS	-.9079402E-06	0.000 ***	.3618571	0.000 ***
CLS	-.1669352E-06	0.17	.0631924	0.077
CSN	-.3961172E-06	0.000 ***	.169207	0.000 ***
BCB	-.7496428E-06	0.001 ***	.4486531	0.001 ***
ENB	-.7136144E-06	0.000 ***	.758797	0.000 ***
FM	.3212461E-06	0.052 *	-.0086471	0.021 **
WN	-.4337991E-06	0.002 ***	1.879583	0.001 ***
HSE	-1.019439E-06	0.000 ***	1.733898	0.000 ***
IMO	-.1550967E-06	0.203	.1371999	0.070
IPS	-.0058976E-06	0.957	.1133067	0.097
K	-1.798636E-06	0.000 ***	.1425686	0.000 ***
L	-.5210404E-06	0.011 **	39.03341	0.007 ***
LUN	-.2165305E-06	0.534	-.0133034	0.053
MDS	-.3831811E-06	0.059 **	.120955	0.059 **
NXY	-.5773991E-06	0.003 ***	1.02968	0.001 ***
NT	-8.515638E-06	0.008 ***	.240831	0.000 ***
NCX	-.5806325E-06	0.001 ***	.6423939	0.000 ***
PWT	-.2210328E-06	0.126	.3139187	0.043
PCA	-.8505244E-06	0.001 ***	1.408804	0.000 ***
POT	-.1085672E-06	0.436	.2240603	0.169
RIM	.4664321E-06	0.794	-.1183157	0.000 ***
RCI	-.0507173E-06	0.550	.1334892	0.275
SJR	-.1193027E-06	0.199	.1076212	0.090 *
SU	-.5912692E-06	0.001 ***	.4767387	0.000 ***
TLM	-.1594057E-06	0.337	.309927	0.286
TCK	-.0997731E-06	0.769	.2714033	0.115
T	-.3340941E-06	0.031 **	.7513675	0.027 **
TOC	-.630309E-06	0.000 ***	.5500623	0.000 ***
TA	-1.087119E-06	0.000 ***	1.154658	0.000 ***
TRP	-.3389903E-06	0.056 ***	.542767	0.048 **
YRI	.7534227E-06	0.337	.0171748	0.000

* Statistiquement significatif au seuil de 10%.
** Statistiquement significatif au seuil de 5%.
*** Statistiquement significatif au seuil de 1%.

a) $k = -\beta_0$

b) $\theta = -\frac{\beta_1}{\beta_0}$

c) Le terme x représente le bénéfice avant intérêts et impôt.

70) Les données ayant servi à déterminer les paramètres de retour à la moyenne pour les compagnies de notre échantillon proviennent de Bloomberg et de Sedar et couvrent la période allant de janvier 2000 à décembre 2006.

Auparavant, nous aurons déterminé les valeurs respectives des paramètres "k" et " θ " en utilisant les données du tableau 4.2. Ces valeurs sont présentées au tableau 4.3.

Avant de procéder à l'évaluation de l'avoir des actionnaires, nous allons répertorier les compagnies faisant l'objet de notre évaluation selon divers critères en vue d'essayer de comprendre les raisons pour lesquelles elles présentent un phénomène de retour à la moyenne.

Tableau 4.3
Paramètres des compagnies qui remplissent les conditions de retour à la moyenne

Symbole	k [a]	θ [b]
AGU	1,22487E-06	0,817357313 E06
AL	3,18092E-07	1,820275323 E06
BCE	4,75942E-07	2,121475649 E06
BVF	8,72978E-07	0,496299447 E06
BBD	1,00166E-06	0,576621714 E06
CCO	7,33843E-07	0,241890704 E06
CNR	7,09592E-07	1,875054609 E06
CNQ	3,16858E-07	1,890764495 E06
CTC	5,99329E-07	2,137794341 E06
COS	9,0794E-07	0,398547283 E06
CSN	3,96117E-07	0,427163981 E06
BCB	7,49643E-07	0,598489174 E06
ENB	7,13614E-07	1,063315146 E06
WN	4,33799E-07	4.332842092 E06
HSE	1,01944E-06	1,70083546 E06
K	1,79864E-06	0,079264843 E06
L	5,2104E-07	74,91436365 E06
MDS	3,83181E-07	0,315660141 E06
NXY	5,77399E-07	1,783307248 E06
NT	8,51564E-06	0,028281028 E06
NCX	5,80633E-07	1,106369175 E06
PCA	8,50524E-07	1,656394573 E06
SU	5,91269E-07	0,806297199 E06
T	3,34094E-07	2,248969677 E06
TOC	6,30309E-07	0,87268673 E06
TA	1,08712E-06	1,062126593 E06
TRP	3,3899E-07	1,60112841 E06

a) $k = -\beta_0$

b) $\theta = -\frac{\beta_1}{\beta_0}$

Comme le tableau 4.4 le montre, les compagnies qui remplissent les conditions de retour à la moyenne présentent des caractéristiques différentes. Ainsi, on remarque que les tailles respectives de ces compagnies, mesurées par leurs chiffres d'affaires respectifs, sont très différentes. Plus tard dans ce développement, nous formerons des portefeuilles pondérés par ces chiffres d'affaires[71]. Nous comparerons ensuite les valeurs de ces portefeuilles, calculées à l'aide des modèles sous étude, à leurs valeurs marchandes moyennes respectives. Ceci nous permettra de mesurer la robustesse des modèles analysés, une fois que nous les aurons utilisés pour déterminer la valeur de l'avoir des actionnaires des mêmes compagnies.

Au niveau du secteur d'activité, on voit bien que les compagnies opèrent dans des domaines différents. Le fait d'obtenir de bons résultats à l'aide des modèles sous étude nous permettra d'affirmer leur applicabilité à toutes sortes d'industries.

Pour ce qui est de la volatilité, on observe que les compagnies évaluées présentent beaucoup de divergences. Nous verrons si les modèles utilisés

---

71) Si on veut utiliser la capitalisation boursière comme base de pondération du portefeuille, il ne faut pas se limiter seulement à la valeur marchande des actions en circulation, sinon on aura une idée partielle de la valeur du capital-actions des grandes compagnies canadiennes. Il faut donc commencer par ajouter le nombre d'actions détenues par les gros blocs de contrôle qui ne sont pas en circulation et qui sont une caractéristique du marché canadien afin d'avoir une idée plus claire du capital-actions total. Il s'agit là d'un phénomène canadien beaucoup plus qu'américain. Par ailleurs, la capitalisation boursière ne constitue pas une bonne pondération dans le cas de notre étude parce que premièrement, étant donné que nous évaluons l'avoir des actionnaires à partir du bénéfice avant intérêts et impôt, il est important d'utiliser une variable de pondération qui sert d'indicateur des caractéristiques fondamentales de l'entreprise en l'occurrence le chiffre d'affaires comme le montrent Arnott, Hsu et Moore dans leur article de 2005. Cette dernière variable cadre davantage avec nos modèles qui partent du bénéfice avant intérêts et impôt comme variable d'état. Par ailleurs, la capitalisation boursière reflète à la fois l'évaluation des investisseurs, du risque global du marché et celle du risque spécifique de la compagnie. Il s'en suit que cette pondération n'est pas stable car elle change avec la perception du risque, alors que le chiffre d'affaires n'est pas soumis à ce genre d'évaluation. Par ailleurs, comme Ranaldo et Häberle l'ont montré dans leur article de 2007, la pondération par la capitalisation boursière peut être perçue comme une stratégie active, alors que nous voulons opter pour une stratégie passive qui permet d'évaluer l'avoir des actionnaires tel que le perçoit le marché pour être en mesure de comparer les résultats obtenus à l'aide des trois modèles sous étude.

permettent de contrôler l'effet de ce paramètre au moment d'évaluer les options d'achat.

Concernant la dette, on remarque également beaucoup de divergences entre les compagnies. Ce paramètre représente un titre contingent pour les trois modèles sous étude. Sa valeur contribue énormément dans la détermination de celle de l'avoir des actionnaires.

Nous passons maintenant à l'évaluation de cet avoir à l'aide des trois modèles analysés.

Tableau 4.4
Caractéristiques des compagnies qui remplissent
les conditions de retour à la moyenne

	2006		2002			
Compagnie	Taille [a]	Dette [b]	Taille	Dette	Volatilité [c]	Activité principale
Nova Chemicals Corporation	8 350 840 000	13 452 520 000	6 555 610 176	1 912 710 528	145,45%	Industrie chimique
George Weston Limited	32 167 000 000	5 918 066 968	16 663 000 000	9 950 907 200	40,73%	Industrie de l'alimentation
Enbridge Inc	10 644 500 000	11 355 310 000	12 987 400 000	6 692 600 000	87,78%	Industrie de l'énergie
TransCanada Corporation	7 520 000 000	23 352 659 881	19 916 000 000	11 570 000 000	10,35%	
Agrium Inc	5 072 680 000	3 082 940 000	3 422 994 336	1 896 929 088	322,00%	Industrie du détail
Canadian Tire Corporation	8 269 100 000	4 603 900 000	4 875 400 000	3 236 200 000	53,84%	
Cott Corporation	2 055 288 000	831 695 155	1 239 474 298	695 645 875	57,03%	
Loblaw Companies Limited	28 640 000 000	4 212 408 049	11 110 000 000	4 940 000 000	48,59%	
Bombardier Inc	17 186 560 000	11 409 121 737	29 009 400 000	10 456 644 567	84,12%	Industrie du transport
Canadian National Railway	7 716 000 000	12 988 000 000	18 924 000 000	8 063 300 000	69,00%	
TransAlta Corporation	2 796 500 000	3 293 119 982	7 419 600 000	2 758 800 000	29,69%	Industrie Marketing
Alcan	27 423 560 000	18 640 784 153	27 678 892 265	5 495 097 408	36,87%	Industrie minière
Cameco Corporation	1 831 690 000	1 915 932 716	2 945 179 000	2 183 088 144	103,82%	
Kinross Gold Corporation	1 050 496 000	689 137 813	943 730 112	182 117 818	190,57%	
Canadian Natural Resources	11 643 000 000	13 461 000 000	13 358 900 000	11 335 000 000	68,08%	Industrie pétrolière
Canadian Oil Sands Trust	2 692 000 000	4 197 000 000	1 850 401 000	1 667 528 000	124,70%	
Husky Energy Inc	12 664 000 000	12 479 000 000	10 575 000 000	5 737 000 000	79,79%	
Nexen Inc	5 386 000 000	10 019 000 000	6 560 000 000	3 637 000 000	55,40%	
Petro-Canada	18 669 000 000	8 912 000 000	13 439 000 000	6 173 000 000	154,04%	
Suncor Energy Inc	15 829 000 000	9 556 000 000	8 683 000 000	4 684 000 000	149,54%	
Biovail Corporation	1 241 813 640	628 009 902	3 531 359 172	1 190 845 368	112,00%	Industrie Pharmaceutique
MDS Inc	1 140 000 000	579 000 000	2 542 000 000	787 000 000	40.95%	
BCE Inc	17 713 000 000	39 766 000 000	39 563 000 000	28 738 000 000	18,97%	Industrie Technologique
Cognos	1 135 946 240	506 073 971	1 039 288 309	103 836 460	72,32%	
Telus Corporation	8 681 000 000	16 220 261 093	11 974 500 000	9 217 300 000	17,16%	
THOMSON	7 703 560 000	9 341 486 739	29 261 946 048	12 590 432 832	67,16%	

a) Mesurée par le chiffre d'affaires des compagnies analysées et exprimée en dollar canadien. La pondération par la capitalisation boursière nécessiterait l'ajout du nombre d'actions détenues par les gros blocs de contrôle. Par ailleurs, contrairement, au chiffre d'affaires, la capitalisation boursière, instable à cause de la perception du risque par les investisseurs, n'est pas un indicateur des caractéristiques fondamentales de l'entreprise comme le montrent Arnott, Hsu et Moore dans leur article de 2005. Par ailleurs, comme le soulignent Ranaldo et Häberle dans leur article de 2007, la pondération par la capitalisation boursière peut être perçue comme une stratégie active, alors que nous voulons opter pour une stratégie passive susceptible de nous permettre de comparer les performances respectives des modèles sous étude.

b) Formée du passif à long terme et des engagements à long terme et est exprimée en dollar canadien.

c) Générée par la régression de la variation relative du BAII sur son inverse. L'expression utilisée pour effectuer cette régression est présentée au tableau 4.2.

4.1.1.2 Évaluation de l'avoir des actionnaires à l'aide des modèles sous étude

Dans cette partie, nous procéderons à l'évaluation de l'avoir des actionnaires des compagnies analysées, à l'aide des trois modèles sous étude, aux dates respectives de leurs états financiers de 2006. À ce niveau, nous constatons que ces dates arrivent, pour la plupart d'entre elles, soit le 30 soit le 31 décembre. Ces deux jours ne sont pas ouvrables puisqu'ils coïncident avec un samedi et un dimanche respectivement. Ceci pose problème au niveau de la comparaison entre la valeur calculée et la valeur marchande[72] de l'avoir des actionnaires, obtenue par la moyenne des prix haut et bas du jour. C'est la raison pour laquelle nous avons effectué cette comparaison deux fois. Une fois en date du 29 décembre 2006 et une seconde fois en date du 02 janvier 2007. Comme nous allons le voir plus tard dans ce développement, les écarts moyens calculés en date du 29 décembre 2006, à l'aide des modèles de Sarkar et Zapatero, de Hayne Leland et de Goldstein, Ju et Leland, s'établissent respectivement à -1,09%, à -6,44% et à 2,21%. Les mêmes écarts, calculés en date du 02 janvier 2007[73], à l'aide des mêmes modèles, s'établissent à -0,60%, à -5,96% et à 2,74% respectivement. Ces résultats montrent que les écarts moyens sont sensiblement identiques pour les deux journées. De plus, leurs signes ne changent pas, ce qui justifie l'utilisation des valeurs marchandes du 29 décembre 2006 comme standard de comparaison. Les résultats de l'évaluation effectuée à cette date sont présentés au tableau 4.5.

Comme le tableau 4.5 le montre, si on considère un niveau de précision de ±15 %, on voit que les trois modèles présentent une excellente performance.

---

72) Cette valeur représente la moyenne des prix haut et bas de la journée.

73) Dans cette section, nous présentons les résultats de la comparaison effectuée en date du 29 décembre 2006. Le lecteur pourra se rendre à l'annexe (AA) pour consulter les résultats de la comparaison effectuée en date du 02 janvier 2007.

Tableau 4.5
Nombre de titres correctement évalués à la date de l'état financier de 2006 selon divers seuils de précision [74]

Modèle	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
SZ [a]	25	22	18	6
HL [b]	23	19	16	3
GJL [c]	25	19	14	0

a) Il s'agit du modèle de Sarkar et Zapatero. L'expression de l'avoir des actionnaires selon ce modèle, dont la dérivation se trouve à l'annexe (N), est la suivante :

$$E = v_1 x + v_2 - (1-\tau)\frac{C}{r} - \left[v_1 x_L + v_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}\right] e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_L}\right)} \left(\frac{x}{x_L}\right)^{\frac{\left(1+\frac{2k}{\sigma^2}\right) - \sqrt{\left(1+\frac{2k}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{8r}{\sigma^2}}}{2}}$$

où

x représente le bénéfice avant intérêts et impôt. La valeur de cette variable est obtenue à partir de Bloomberg;
k, Θ et σ représentent respectivement la vitesse de retour à la moyenne, la valeur moyenne à terme des bénéfices avant intérêts et impôt et la volatilité de la valeur de la compagnie. Les valeurs de ces paramètres sont générées par la régression de la variation relative du BAII sur son inverse;
C représente le coupon versé aux créanciers. Il est obtenu à partir de la valeur de la dette de la compagnie, en utilisant une optimisation de Newton-Raphson. La valeur de la dette est la somme de sa valeur aux livres à long terme et de tous les engagements à long terme de la compagnie.
x_L est la valeur liquidative de la compagnie. Elle est dérivée à partir des paramètres du modèle.
b) Il s'agit du modèle de Hayne Leland. L'expression de l'avoir des actionnaires selon ce modèle, dont la dérivation se trouve à l'annexe (G), est la suivante :

$$E(V) = V - (1-\tau)\frac{C}{r} + \left[(1-\tau)\frac{C}{r} - V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}$$

V représente la valeur aux livres de la compagnie;

V_B représente la valeur liquidative de la compagnie. Elle est dérivée à partir des paramètres du modèle.
c) Il s'agit du modèle de Goldstein, Ju et Leland. L'expression de l'avoir des actionnaires selon ce modèle, dont la dérivation se trouve à l'annexe (I), est la suivante :

$$E = (1-\tau)\left(V + \left(\frac{V}{V_B}\right)^{x}\left(\frac{C}{r} - V_B\right) - \frac{C}{r}\right)$$

où

V représente la valeur marchande des actifs de la compagnie. Elle est obtenue à partir du BAII.

En effet, à ce niveau de précision, le modèle de Sarkar et Zapatero évalue correctement l'avoir des actionnaires de 25 compagnies sur un total de 26. À ce même niveau, les modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland évaluent correctement l'avoir des actionnaires de 23 et de 25 compagnies respectivement. Si on se limite à un seuil de précision de ±10 %, ce nombre

74) La comparaison est faite par rapport à la valeur marchande du titre, obtenue par la moyenne des prix haut et bas du jour.

tombe à 22 dans le cas du modèle de Sarkar et Zapatero[75]. En revanche, les modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland offrent une performance relativement inférieure en évaluant correctement l'avoir des actionnaires de 19 compagnies. Le tableau 4.5 montre également que si on considère un niveau de précision de ±5%, le modèle de Sarkar et Zapatero permet d'évaluer correctement l'avoir des actionnaires de 18 compagnies, alors que les modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland en évaluent correctement 16 et 14 respectivement. Finalement, si on se limite à un niveau de précision de ±1%, on voit que le modèle de Sarkar et Zapatero permet d'évaluer correctement l'avoir des actionnaires de 6 compagnies, alors que les modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland en évaluent correctement 3 et 0 respectivement. Ceci témoigne de la bonne performance du modèle de Sarkar et Zapatero au niveau de l'évaluation de l'avoir des actionnaires.

Dans un souci de robustesse, nous recalculons, à la section suivante, l'écart moyen quotidien en considérant l'ensemble des titres représentant notre échantillon d'évaluation, et ce pour une période de 3 jours autour de la date de l'état financier de 2006.

75) Ces résultats semblent très proches les uns des autres. Ceci est dû au fait que la vitesse de retour à la moyenne de toutes les compagnies faisant l'objet de notre échantillon d'évaluation est de l'ordre de 10^{-6} qui est une valeur très proche de 0. Nous avons démontré dans la partie théorique qu'en cas de vitesse de retour à la moyenne identiquement nulle, les modèles devenaient parfaitement identiques.

4.1.2 Comparaison des valeurs des titres, considérés ensemble, obtenues à l'aide des trois modèles

Afin de faire cette comparaison, nous avons utilisé les modèles sous étude pour calculer l'écart moyen quotidien[76] ainsi que l'écart moyen quotidien cumulé[77] par rapport au standard de comparaison, et ce pour les 3 jours entourant la date de l'état financier de 2006. Les résultats de cette comparaison sont présentés au tableau 4.6.

Comme le tableau 4.6 le montre, le modèle de Sarkar et Zapatero offre des écarts relatifs moyens quotidiens compris entre -0,57% et 2,32% pour les 3 jours entourant la date de l'état financier de 2006. À cette même date, l'écart enregistré à l'aide du modèle indiqué s'établit à -1,09% et continue de se rétrécir durant les trois jours subséquents. Pour sa part, l'écart quotidien cumulé, calculé à l'aide du même modèle, s'établit à 0,57% à la date de l'état financier de 2006 et devient pratiquement nul durant les trois jours subséquents. Ceci veut dire que les analystes sont à l'affût de l'information, ce qui leur permet de devancer le marché. Le tableau 4.6 montre également que l'écart moyen quotidien calculé à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland est compris entre 2,21% et 5,68% pour les 3 jours entourant la date de l'état financier de 2006. L'écart le plus faible, calculé à l'aide de ce même modèle est enregistré à cette même date et s'établit à 2,21%. Le même modèle offre un écart quotidien cumulé de 3,90% en ce même jour. Cet écart demeure assez éloigné de l'axe des abscisses durant les trois jours subséquents. Le tableau 4.6 montre également que l'écart moyen quotidien, calculé à l'aide du modèle de

---

76) Il s'agit de la moyenne des écarts relatifs des valeurs estimées des 26 titres faisant l'objet de notre évaluation, par rapport à leurs valeurs marchandes respectives. Ces dernières représentent la moyenne arithmétique des prix haut et bas de la journée des titres en question.
77) Il s'agit de la moyenne cumulée des écarts relatifs moyens quotidiens.

Tableau 4.6

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide des modèles sous étude par rapport aux valeurs marchandes correspondantes, 3 jours autour de la date de l'état financier de 2006 [78]

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} E_i}{26} \; 79$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N} \; 80$$

Modèle		Jour -3	-2	-1	0	1	2	3
SZ	E_M	2,32%	1,30%	-0,24%	-1,09%	-0,57%	-0,33%	0,42%
	E_{MC}	2,32%	1,81%	1,13%	0,57%	0,35%	0,23%	0,26%
HL[81]	E_M	-3,02%	-3,97%	-5,54%	-6,44%	-5,95%	-5,73%	-5,03%
	E_{MC}	-3,02%	-3,50%	-4,18%	-4,74%	-4,99%	-5,11%	-5,10%
GJL[82]	E_M	5,68%	4,63%	3,07%	2,21%	2,75%	3,00%	3,77%
	E_{MC}	5,68%	5,15%	4,46%	3,90%	3,67%	3,56%	3,59%

Hayne Leland est compris entre -6,44% et -3,02% pour les 3 jours entourant la date de l'état financier de 2006. L'écart le plus prononcé, calculé à l'aide du même modèle, est enregistré à cette même date et se situe à -6,44%. Toujours à la même date, l'écart quotidien cumulé calculé à l'aide du même modèle s'établit à -4,74% et devient plus prononcé durant les trois jours subséquents. Ces résultats confirment que le modèle de Sarkar et Zapatero offre une meilleure performance par rapport aux deux autres modèles sous étude, en terme d'évaluation de l'avoir des actionnaires. Afin de vérifier si les écarts observés entre les résultats obtenus à l'aide des trois modèles, sont statistiquement significatifs, nous avons effectué un test GARCH (1,1) où nous

78) Le détail des calculs de ces écarts est fourni à l'annexe (U).

79) E_M représente l'écart moyen quotidien. Il est obtenu par la moyenne des écarts relatifs quotidiens des 26 titres composant l'échantillon d'évaluation.

80) E_{MC} représente l'écart moyen cumulé. Il est obtenu par le cumul des écarts moyens quotidiens, divisé par le nombre d'observations quotidiennes considérées.

81) À travers ces résultats, on observe que le modèle de H. Leland sous-estime les titres évalués. Ceci est dû au fait que ce modèle part de la valeur aux livres des actifs de la compagnie comme variable d'état, alors que les deux autres modèles sous-étude utilisent le BAII, source de valeur comme le préconise la théorie financière, comme point de départ de l'analyse.

82) Le modèle de Goldstein, Ju et Leland surestime les titres évalués en raison d'une variable d'état qui suit un processus log-normal. Il semblerait que l'hypothèse de retour à la moyenne l'emporte sur celle de la log-normalité.

Tableau 4.7
Régression de la valeur marchande des titres sur leur valeur calculée
à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero, à la date de l'état financier de 2006
Variable dépendante . VM (exprime les valeurs marchandes des titres à la date de l'état financier de 2006)
Variable Indépendante :SZ (exprime les valeurs des titres calculées à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero)

$$VM_t = \beta_0 + \beta_1 SZ_t + \tilde{\varepsilon}_t \; a, \; t = 1,\ldots,T$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 \; {}^{83}; \; t = 1,\ldots,T$$

$$\tilde{\varepsilon} = v_t \sqrt{h_t} \; b$$

$$v_t \sim N(0,1)$$

Variable indépendante	Signe	Coefficient	Statistique Z
SZ	+	.940925	34.42487 ***
C	+	2.136319	1.801886 *

R^2	0.955251	Moyenne de la variable dépendante	44.81615
R^2 ajusté	0 941120	Écart type de la variable dépendante	21.27015
Erreur type du coefficient de régression	5 161233	Critère d'information Akaike	5.665946
Somme des carrés des résidus	506.1283	Critère de Schwarz	6 004664
Logarithme du maximum de vraisemblance	-66.65730	Critère de Hannan-Quinn	5.763485
Statistique F	67.59906	Statistique de Durbin-Watson	1.787152
Probabilité de la statistique F	0.000000		

***Statistiquement significatif au seuil de 1%
*Statistiquement significatif au seuil de 10%
a) Il s'agit d'une régression des moindres carrés ordinaires.
b) Représente l'innovation ou le terme d'erreur.

Régressons les valeurs marchandes des titres formant notre échantillon d'évaluation sur leurs valeurs calculées respectives, obtenues à l'aide des trois modèles. Les résultats de ces tests sont présentés aux tableaux 4.7, 4.8 et 4.9. Comme le tableau 4.7 le montre, le coefficient de la variable explicative est de 0,9409 avec une valeur du critère d'information « AIC » de 5,66. Ce résultat est statistiquement significatif au seuil de 1%. Ceci signifie que les résultats obtenus à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero expliquent à hauteur de 94,09% les valeurs marchandes des titres évalués. Nous avons choisi d'effectuer l'estimation de la variance conditionnelle à l'aide d'un GARCH (1,1) en vue de mesurer la variabilité future de la relation entre la

83) Un GARCH(1,1) suppose un décalage de la variance conditionnelle dans cette équation et un décalage de l'innovation élevée au carré. Cette équation est estimée simultanément avec l'équation de la régression de la valeur marchande sur la valeur estimée. Nous avons choisi ce test pour vérifier si les modèles sous étude demeuraient performants le jour suivant la date d'évaluation.

Tableau 4.8
Régression de la valeur marchande des titres sur leur valeur calculée
à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland, à la date de l'état financier de 2006
Variable dépendante : VM (exprime les valeurs marchandes des titres à la date de l'état financier de 2006)
Variable Indépendante GJL (exprime les valeurs des titres calculées à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland)

$$VM_t = \beta_0 + \beta_1 GJL_t + \tilde{\varepsilon}_t \; ; \; t = 1,\ldots,T$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 \; ; \; t = 1,\ldots,T$$

$$\tilde{\varepsilon} = v_t \sqrt{h_t}$$

$$v_t \sim N(0,1)$$

Variable indépendante	Signe	Coefficient	Statistique Z
GJL	+	0.910363	20.16399***
C	+	1.783157	0.644708

R^2	0.947250	Moyenne de la variable dépendante	44.81615
R^2 ajusté	0.930592	Écart type de la variable dépendante	21.27015
Erreur type du coefficient de régression	5.603722	Critère d'information Akaike	5.672007
Somme des carrés des résidus	596.6323	Critère de Schwarz	6.010726
Logarithme du maximum de vraisemblance	-66.73610	Critère de Hannan-Quinn	5.769546
Statistique F	56.86450	Statistique de Durbin-Watson	1.675000
Probabilité de la statistique F	0.000000		

***Statistiquement significatif au seuil de 1%

variable explicative et la variable expliquée.

Comme le tableau 4.8 le montre, le coefficient de la variable explicative est de 0,9103 avec une valeur du critère d'information « AIC » de 5,67, soit une valeur inférieure à celle obtenue pour le même critère dans le cas du modèle de Sarkar et Zapatero. Ce résultat est statistiquement significatif au seuil de 1%. Ceci signifie que les résultats obtenus à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland expliquent à hauteur de 91,03%, les valeurs marchandes des titres évalués, soit une performance inférieure à celle offerte par le modèle de Sarkar et Zapatero[84].

84) La valeur inférieure du critère AIC dans le cas du modèle de Sarkar et Zapatero corrobore ce résultat. Ce critère permet de corriger l'erreur non Gaussienne constatée au niveau des modèles d'estimation qui utilisent le maximum de vraisemblance pour estimer leurs paramètres comme c'est le cas du modèle GARCH. Le modèle sélectionné par ce critère est celui qui en présente la valeur la plus faible. Dans notre cas, il s'agit du modèle de Sarkar et Zapatero.

Tableau 4.9
Régression de la valeur marchande des titres sur leur valeur calculée
à l'aide du modèle de Hayne Leland, à la date de l'état financier de 2006
Variable dépendante : VM (exprime les valeurs marchandes des titres à la date de l'état financier de 2006)
Variable Indépendante HL (exprime les valeurs des titres calculées à l'aide du modèle de Hayne Leland)

$$VM_t = \beta_0 + \beta_1 HL_t + \tilde{\varepsilon}_t \; ; t = 1,\dots,T$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 \; ; t = 1,\dots,T$$

$$\tilde{\varepsilon} = v_t \sqrt{h_t}$$

$$v_t \sim N(0,1)$$

Variable indépendante	Signe	Coefficient	Statistique Z
HL	+	0.899829	11.39718***
C	+	5.920159	0.0431**

R^2	0.912997	Moyenne de la variable dépendante	44.81615
R^2 ajusté	0.885523	Écart type de la variable dépendante	21.27015
Erreur type du coefficient de régression	7.196651	Critère d'information Akaike	6.540442
Somme des carrés des résidus	984.0439	Critère de Schwarz	6.879161
Logarithme du maximum de vraisemblance	-78.02575	Critère de Hannan-Quinn	6.637981
Statistique F	33.23063	Statistique de Durbin-Watson	1.810974
Probabilité de la statistique F	0.000000		

*** Statistiquement significatif au seuil de 1%
** Statistiquement significatif au seuil de 5%

Comme le tableau 4.9 le montre, le coefficient de la variable explicative est de 0,8998 avec une valeur du critère d'information « AIC » de 6,54 soit une valeur beaucoup plus élevée que celle obtenue dans le cas des deux modèles qui partent du bénéfice avant intérêts et impôt comme variable d'état. Ceci signifie que le modèle de Leland offre une précision, inférieure à celle de ces deux derniers modèles, au niveau de l'évaluation de l'avoir des actionnaires. Les résultats enregistrés corroborent ceux que nous avons obtenus en évaluant individuellement et collectivement les titres de notre échantillon. Ces résultats montrent que parmi les trois modèles sous étude, Sarkar et Zapatero est celui qui permet le mieux de se rapprocher du standard de comparaison. Nous verrons si ce modèle demeure performant lors de l'évaluation de l'avoir des actionnaires à la date de l'état financier de 2002. Le tableau 4.10 permet de récapituler les résultats obtenus à l'aide des trois modèles.

Tableau 4.10
Récapitulatif des résultats de l'évaluation de l'avoir des actionnaires effectuée à l'aide des trois modèle sous étude, à la date de l'état financier de 2006

	Nombre de titres correctement évalués à la date de l'état financier de 2006 [a]				Écart relatif quotidien à la date de l'état financier de 2006		variable explicative [b]	
Modèle	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%	$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} Ei}{26}$	$E_{MC} = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_{MC\ i}}{N}$	Coefficient	Niveau de signification
SZ	25	22	18	6	-1,09%	0,57%	0,94	0,0000
HL	23	19	16	3	-6,44%	-4,74%	0,90	0,0000
GJL	25	19	14	0	2,21%	3,90%	0,91	0,0000

a) La comparaison est faite par rapport à la valeur marchande du titre. Cette valeur marchande représente la moyenne des prix haut et bas de la journée.
b) Les coefficients et leurs niveaux de signification respectifs proviennent de la régression de la valeur marchande des titres évalués sur leur valeur estimée à l'aide de chacun des trois modèles. Pour faire cette régression, nous avons eu recours à un test GARCH(1,1).

Comme le tableau 4.10 le montre, les résultats penchent en faveur du modèle de Sarkar et Zapatero. Les deux autres modèles présentent une certaine efficacité au niveau du calcul de la valeur de l'avoir des actionnaires, ce qui plaide en faveur d'une étroite relation entre la structure du capital et la valeur de cet avoir. Ces modèles demeurent toutefois, relativement moins précis que le premier. L'hypothèse de log-normalité semble moins appropriée que l'hypothèse de retour à la moyenne. L'analyse empirique effectuée à l'aide de ces trois modèles a permis de vérifier leur efficacité à évaluer l'avoir des actionnaires. Toutefois, les écarts entre la valeur marchande moyenne de cet avoir et sa valeur calculée changeaient de signe de compagnie en compagnie. Afin de vérifier si les écarts positifs et négatifs s'annulent, nous avons formé des portefeuilles, à partir des titres des compagnies faisant l'objet de notre échantillon d'évaluation. Nous n'aurions pas pu évaluer directement ces portefeuilles à l'aide des trois modèles sous étude car ces derniers sont conçus pour évaluer l'avoir des actionnaires. Ceci est dû au fait que les paramètres qu'ils utilisent sont tirés des états financiers des compagnies. Les résultats de l'évaluation des portefeuilles ainsi formés sont présentés à la section suivante.

4.1.3 Évaluation de portefeuilles d'actions en utilisant les données de 2006

Afin de déterminer l'effet de la taille sur la valeur marchande de l'avoir des actionnaires, nous avons formé des portefeuilles à partir des titres évalués précédemment. Trois portefeuilles ont ainsi été composés en vue de mesurer la robustesse des prédictions des modèles sous étude. Nous évaluerons, dans un premier temps, l'évolution des écarts relatifs de la valeur calculée de ces portefeuilles par rapport à leur valeur marchande, sur un intervalle de trois jours autour de la date de l'état financier. Dans un deuxième temps, nous identifierons les portefeuilles surévalués et sous-évalués par le marché, selon chacun des trois modèles, et nous évaluerons leurs rendements excédentaires sur les intervalles de vingt jours et de neuf jours après la date de l'état financier.

4.1.3.1 Écarts relatifs de la valeur calculée des portefeuilles par rapport à leur valeur marchande

Pour commencer, nous avons formé un portefeuille équipondéré composé des 26 titres évalués précédemment à l'aide des trois modèles. Nous avons investi 100 dollars dans chaque titre. Ce choix est motivé par les études d'évaluation de la performance des portefeuilles où on utilise des portefeuilles équipondérés afin d'éviter une sous représentation, du point de vue de l'investissement, des titres dont le prix est relativement plus faible que les autres. Nous avons ensuite repris l'analyse en utilisant cette fois-ci, un portefeuille pondéré par le chiffre d'affaires afin de mesurer l'effet de la taille sur la performance des modèles sous étude. Finalement, nous avons formé un troisième portefeuille composé d'une action par compagnie. La valeur marchande de ces trois portefeuilles est la somme des prix haut et bas moyens quotidiens des 26 titres qui les composent. Afin de mesurer le pouvoir prédictif des trois modèles, à évaluer ces portefeuilles, nous avons considéré un intervalle de temps de ± 3 jours autour de la date de l'état financier de 2006. Les résultats de cette évaluation sont présentés au tableau 4.11.

Comme le tableau 4.11 le montre, les trois modèles permettent d'obtenir une certaine convergence entre la valeur calculée et la valeur marchande des portefeuilles formés, autour de la date de l'état financier de 2006. Toutefois, à cette même date, on voit clairement que le modèle de Sarkar et Zapatero présente une performance meilleure que celle offerte par les deux autres modèles sous étude. Ainsi, à la date de l'état financier de 2006, ce modèle offre des écarts relatifs moyens quotidiens et moyens quotidiens cumulés de -1,09% et 0,39% dans le cas du portefeuille équipondéré, de -1,21% et 0,54% dans le cas du portefeuille pondéré par le chiffre d'affaires et de -0,89% et 0,95% dans le cas du portefeuille non pondéré. Ces écarts deviennent encore plus faibles un jour après la date de l'état financier. En revanche, les deux autres modèles offrent une moins bonne performance à ce niveau. Ceci nous permet de conclure en la primauté du modèle de Sarkar et Zapatero quant à l'évaluation de l'avoir des actionnaires. Nous verrons comment se comportera ce dernier modèle durant une année de récession, en l'occurrence l'année 2002. Auparavant, nous effectuerons des tests non paramétriques afin de mesurer le niveau de signification des écarts entre la valeur marchande et la valeur calculée des portefeuilles analysés.

Tableau 4.11
Évolution de l'écart moyen quotidien pour une période
de 3 jours autour de la date de l'état financier de 2006 [85]

			Jour								
			-3	-2	-1	0	1	2	3	Moyenne	Écart type
SZ	NP [a]	Écart relatif quotidien [b]	2,97%	1,97%	-0,24%	-0,89%	-0,39%	-0,40%	0,23%	0,46%	1,44%
		Écart relatif quotidien cumulé	2,97%	2,47%	1,57%	0,95%	0,68%	0,50%	0,46%		
	PCA [c]	Écart relatif quotidien	2,27%	1,37%	-0,24%	-1,22%	-1,02%	-1,21%	-0,51%	-0,08%	1,37%
		Écart relatif quotidien cumulé	2,27%	1,82%	1,13%	0,54%	0,23%	-0,01%	-0,08%		
	ÉQUIPOND [d]	Écart relatif quotidien	1,96%	1,00%	-0,31%	-1,09%	-0,58%	-0,41%	0,30%	0,12%	1,05%
		Écart relatif quotidien cumulé	1,96%	1,48%	0,88%	0,39%	0,20%	0,10%	0,12%		
HL	NP	Écart relatif quotidien	-1,50%	-2,46%	-4,01%	-5,19%	-4,71%	-4,72%	-4,12%	-3,81%	1,35%
		Écart relatif quotidien cumulé	-1,50%	-1,98%	-2,65%	-3,29%	-3,57%	-3,76%	-3,81%		
	PCA	Écart relatif quotidien	-1,59%	-2,46%	-4,01%	-4,96%	-4,76%	-4,95%	-4,27%	-3,86%	1,32%
		Écart relatif quotidien cumulé	-1,59%	-2,03%	-2,69%	-3,26%	-3,56%	-3,79%	-3,86%		
	ÉQUIPOND	Écart relatif quotidien	-3,56%	-4,46%	-5,71%	-6,44%	-5,96%	-5,80%	-5,13%	-5,29%	0,99%
		Écart relatif quotidien cumulé	-3,56%	-4,01%	-4,58%	-5,04%	-5,23%	-5,32%	-5,29%		
GJL	NP	Écart relatif quotidien	6,30%	5,27%	2,61%	2,32%	2,83%	2,83%	3,48%	3,66%	1,52%
		Écart relatif quotidien cumulé	6,30%	5,79%	4,73%	4,12%	3,87%	3,69%	3,66%		
	PCA	Écart relatif quotidien	5,19%	4,26%	2,61%	1,59%	1,80%	1,61%	2,33%	2,77%	1,41%
		Écart relatif quotidien cumulé	5,19%	4,72%	4,02%	3,41%	3,09%	2,84%	2,77%		
	ÉQUIPOND	Écart relatif quotidien	5,36%	4,37%	3,01%	2,21%	2,74%	2,92%	3,65%	3,47%	1,09%
		Écart relatif quotidien cumulé	5,36%	4,87%	4,25%	3,74%	3,54%	3,43%	3,47%		

a) Représente le portefeuille pondéré par les prix. Sa valeur est la somme des valeurs marchandes unitaires des actions qui composent l'échantillon d'évaluation.
b) L'écart relatif quotidien est la différence entre la valeur du portefeuille, calculée à l'aide du modèle concerné et sa valeur marchande obtenue par la somme des prix haut et bas moyens quotidiens des titres qui composent ce portefeuille, rapportée à cette même valeur marchande.
c) Représente le portefeuille pondéré par le chiffre d'affaires. Sa valeur est obtenue en additionnant entre elles, les valeurs respectives des titres qui le composent, pondérées par la proportion du chiffre d'affaires de la compagnie en question, dans le chiffre d'affaires global.
d) Représente le portefeuille équipondéré. Sa valeur est obtenue en additionnant entre elles, les valeurs respectives des titres qui le composent. pondérées chacune par le nombre de titres concernés. que l'investisseur est en mesure de se procurer sur le marché. à la date de l'état financier, avec les 100$ en sa possession.

85) Le détail des calculs effectués pour obtenir ces écarts est présenté à l'annexe (U).

4.1.3.2 Tests non paramétriques

Nous commencerons par effectuer un test de Kruskal-Wallis en vue de vérifier l'existence de telles différences. Le cas échéant, nous procéderons à un test de Wilcoxon pour vérifier lequel des modèles présente des résultats qui s'écartent de ceux offerts par le marché.

4.1.3.2. a Test de Kruskal Wallis[86]

Afin d'effectuer ce test, nous avons utilisé les valeurs des portefeuilles, calculées à l'aide des trois modèles ainsi que leurs valeurs marchandes respectives et ce, pour une période de 3 jours autour de la date de l'état financier de 2006. Puisqu'il s'agit de la comparaison de petits échantillons dont on ne connait pas la distribution, le test de Kruskal-Wallis semble approprié pour effectuer une telle comparaison. D'après ce test, l'hypothèse nulle veut que les résultats obtenus à l'aide des trois modèles ne présentent pas de différence significative par rapport au marché. Nous retenons un seuil de signification de 5% au-delà duquel, nous ne pouvons rejeter l'hypothèse nulle. Les résultats de ce test sont présentés au tableau 4.12.

Comme le tableau 4.12 le montre, tous les résultats obtenus à l'aide du test de Kruskal-Wallis sont statistiquement significatifs au seuil de 1%. Ceci veut dire

Tableau 4.12

Analyse statistique des écarts entre les valeurs des portefeuilles calculées à l'aide des trois modèles sous étude, 3 jours autour de la date de l'état financier de 2006 (Test de Kruskal-Wallis)

Année	2006 ***		
Portefeuille	EQUIPOND I	NP II	PCA III
	20.81	20.53	22.17

*** Les résultats sont statistiquement significatifs au seuil de 1%.
I) Portefeuilles équipondérés.
II) Portefeuilles pondérés par les prix.
III) Portefeuilles pondérés par le chiffre d'affaires.

86) Siegel et Castellan (1988), nonparametric statistics for the behavioral sciences, second edition, p.35.

qu'au moins un des trois modèles sous étude présente des résultats différents de ceux obtenus à l'aide des autres modèles. Le test de Wilcoxon s'avère nécessaire dans ce cas.

4.1.3.2.b Test de Wilcoxon[87]

Ce test, dont les résultats sont présentés au tableau 4.13, nous a permis de comparer les valeurs des portefeuilles, calculées à l'aide de chacun des trois modèles, aux valeurs marchandes correspondantes de ces portefeuilles. Là aussi, il s'agit de la comparaison, mais deux-à-deux, de petits échantillons dont on ne connait pas la distribution. Le test de Wilcoxon[88] semble approprié pour effectuer une telle comparaison. D'après l'hypothèse nulle de ce test, au seuil de signification de 5%, les résultats obtenus à l'aide des modèles analysés ne devraient pas présenter de différence significative par rapport au marché. Au-delà de ce seuil, nous retiendrons cette hypothèse nulle.

Tableau 4.13
Analyse statistique des écarts par rapport à la valeur marchande des portefeuilles, calculée à l'aide des trois modèles sous étude, 3 jours autour de la date de l'état financier de 2006 (Test de Wilcoxon)

Année	2006		
Portefeuilles	VM Vs SZ	VM Vs GJL	VM Vs HL
EQUIP^I	0.38	3.07***	3.07***
NP^II	0.38	3.07***	3.07***
PCA^III	1.28	3.07***	3.07***

***Résultats statistiquement significatifs au seuil de 1%.
I) Portefeuilles équipondérés.
II) Portefeuilles pondérés par les prix.
III) Portefeuilles pondérés par le chiffre d'affaires.

87) Ce test est l'un des tests non paramétriques les plus robustes. Il permet de comparer les médianes des échantillons et donc la variabilité de ces derniers. C'est aussi l'équivalent du test t avec moins d'hypothèses restrictives. Cela fonctionne pour des échantillons de 10 observations et moins. Voir Siegel et Castellan (1988), nonparametric statistics for the behavioral sciences, second edition, p.p. 128-130, 137.
88) Siegel et Castellan (1988), nonparametric statistics for the behavioral sciences, second edition, p.35.

Comme le tableau 4.13 le montre, aucun résultat obtenu à l'aide du test de Wilcoxon n'est statistiquement significatif dans le cas du modèle de Sarkar et Zapatero. Par contre, tous les résultats obtenus à l'aide de ce même test sont statistiquement significatifs au seuil de 1% dans le cas des deux autres modèles. Ceci nous porte à dire que, contrairement aux modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland, le modèle de Sarkar et Zapatero arrive à prédire, avec une assez forte précision, les valeurs marchandes respectives des portefeuilles formés quelle que soit leur composition.

4.1.3.3 Rendements des portefeuilles sous-évalués et surévalués

Du point de vue de l'investisseur, les modèles devraient être en mesure d'identifier les portefeuilles surévalués et sous-évalués par le marché, par rapport à leurs valeurs respectives calculées à l'aide des trois modèles sous étude. Ceci permettrait à ce dernier de bâtir une stratégie d'investissement qui lui conférerait la possibilité de réaliser un profit. Nous avons identifié ces portefeuilles en observant le signe de l'écart entre leur valeur calculée à l'aide de chacun des trois modèles et leur valeur marchande respective, à la date de l'état financier de 2006. Nous avons ensuite suivi l'évolution des rendements quotidiens des portefeuilles ainsi identifiés pour des périodes de 9 et de 20 jours respectivement, à compter de la date de l'état financier de 2006. Ces rendements représentent la moyenne géométrique des rendements quotidiens pour les intervalles de temps considérés. Le tableau 4.14 permet de récapituler les résultats de cette évaluation.

En examinant le tableau 4.14 pour la période de 9 jours, on remarque en tout premier lieu que les portefeuilles équipondérés et identifiés comme étant

Tableau 4.14

Rendements des portefeuilles surévalués et sous-évalués par le marché, selon les trois modèles sous étude et rendement du marché, calculés sur des périodes de 9 et de 20 jours respectivement, à compter de la date de l'état financier de 2006[89]

	Rendement	Portefeuilles surévalués			Portefeuilles sous-évalués			R_{M9} VII	R_{M20} VIII
		R_{p9} IV	R_{p20} V	$ß_P$ VI	R_{p9}	R_{p20}	$ß_P$		
SZ	NP	-0,06%	-0,01%		0,03%	-0,13%			
	PCA	-0,17%	-0,08%	0,9768	0,09%	-0,10%	0,8772		
	ÉQUIPOND	-1,69%	-1,08%		-1,46%	-1,56%			
HL	NP	0,04%	-0,04%		-0,08%	-0,14%			
	PCA	-0,06%	-0,09%	0,9825	-0,01%	-0,09%	0,8513	-0,21%	0,00%
	ÉQUIPOND	-1,38%	-0,90%		-1,84%	-1,90%			
GJL	NP	-0,16%	-0,11%		0,04%	-0,07%			
	PCA	-0,36%	-0,22%	0,9201	0,13%	-0,03%	0,9295		
	ÉQUIPOND	-1,51%	-1,45%		-1,60%	-1,27%			

IV) Représente le rendement du marché pour une période de 9 jours après la date de l'état financier
V) Représente le rendement du marché pour une période de 20 jours après la date de l'état financier
VI) Représente le rendement du portefeuille considéré, calculé pour une période de 9 jours, à compter de la date de l'état financier.
VII) Représente le rendement du portefeuille considéré, calculé pour une période de 20 jours, à compter de la date de l'état financier.
VIII) Représente le bêta du portefeuille. Sa valeur est obtenue par la moyenne arithmétique des bêtas des titres qui composent le portefeuille non pondéré. Les données ayant servi à calculer les bêtas des portefeuilles proviennent de Bloomberg et de la bourse de Montréal. Ce paramètre est présenté au tableau 4.14 à titre indicatif seulement. Il y aurait lieu de conduire l'analyse dans un deuxième temps en terme de risque-rendement.

surévalués par les modèles sous étude ont donné des rendements beaucoup plus négatifs que le marché alors que leurs bêtas respectifs sont tous inférieurs à 1. Ainsi, le portefeuille équipondéré et identifié comme étant surévalué par le marché selon le modèle de Sarkar et Zapatero a donné un rendement négatif de -1,69%, alors que ceux de Goldstein, Ju et Leland et de Leland ont offert des rendements de -1,51% et de -1,38% respectivement. Durant cette même période, le marché a offert un rendement de -0,21%. Tous les autres

89) Le détail des calculs effectués pour obtenir ces résultats est fourni à l'annexe (U).

portefeuilles ont donné des rendements négatifs mais pas autant que le marché, exception faite du portefeuille pondéré par le chiffre d'affaires et identifié par le modèle de Goldstein, Ju et Leland comme étant surévalué par le marché.

Pour la période de 20 jours, les portefeuilles équipondérés et identifiés comme étant surévalués par le marché selon les modèles sous étude ont baissé beaucoup plus que le marché malgré leurs bêtas. Ainsi, le portefeuille de Sarkar et Zapatero a offert un rendement de -1,08%, celui de Goldstein, Ju et Leland a offert un rendement de -0,90% et celui de Leland a offert un rendement de -1,45%, alors que le marché a offert un rendement de 0,00%. Tous les autres portefeuilles ont aussi baissé par rapport au marché. Ceci veut dire que les trois modèles identifient correctement les portefeuilles surévalués mais l'investisseur qui désire investir dans des portefeuilles surévalués à l'aide de ces trois modèles ferait mieux de choisir les portefeuilles équipondérés.

Par rapport aux portefeuilles sous-évalués, on remarque que les portefeuilles non pondérés et pondérés par le chiffre d'affaires de Sarkar et Zapatero et de Goldstein, Ju et Leland ont donné des rendements positifs alors que le marché a offert un rendement négatif de -0,21% pour la période de 9 jours. Les résultats de tous les autres portefeuilles ne sont pas conformes à nos attentes. Par contre, sur la période d'observation de 20 jours, aucun des rendements ne rencontre nos attentes. Les modèles évaluent mieux les portefeuilles surévalués plutôt que les portefeuilles sous-évalués. Ces résultats ouvrent la voie à des études futures intéressantes.

Nous allons maintenant procéder à des tests non paramétriques afin d'analyser la signification des différences constatées au niveau des rendements des portefeuilles obtenus à l'aide des trois modèles sous étude.

4.1.3.4 Tests non paramétriques

4.1.3.4.a Test de Kruskal-Wallis

Les résultats obtenus pour un intervalle de temps de 9 jours s'étant avérés non concluants en raison de l'étroitesse de cet horizon du temps, nous nous sommes rabattus sur l'analyse pour une période de 20 jours, à compter de la date de l'état financier de 2006. Tel que mentionné à la section 4.1.3.2.a, le test de Kruskal-Wallis semble approprié pour comparer les résultats obtenus à l'aide des trois modèles sous étude. Les résultats de cette analyse sont présentés au tableau 4.15.

Comme le tableau 4.15 le montre, hormis les portefeuilles sous-évalués non pondérés et pondérés par le chiffre d'affaires, les différences constatées au niveau des rendements des autres portefeuilles sont toutes statistiquement significatives au seuil de 5%. Ceci nous porte à croire que dans ces derniers cas, au moins un des trois modèles présente des rendements significativement différents de ceux obtenus à l'aide des deux autres. Afin de vérifier ceci, nous procéderons encore une fois à un test de Wilcoxon où nous comparerons deux-à-deux les rendements obtenus à l'aide des trois modèles analysés. Comme mentionné à la section 4.1.3.2.b, ce test est approprié pour l'analyse de petits échantillons.

Tableau 4.15

Analyse statistique des rendements des portefeuilles calculés à l'aide des trois modèles sous étude, 20 jours après la date de l'état financier de 2006 (Test de Kruskal-Wallis)

Portefeuilles		EQUIPOND	NP	PCA
20 jours	Surévalués	6,46**	6,71**	8,73**
	Sous-évalués	14,92***	5,39	2,82

***Statistiquement significatif au seuil de 1%.

**Statistiquement significatif au seuil de 5%.

4.1.3.4.b Test de Wilcoxon

Le tableau 4.16 présente les résultats du test de Wilcoxon appliqué aux rendements des portefeuilles analysés.

À la lecture du tableau 4.16, on observe que dans le cas des portefeuilles équipondérés, les différences entre les rendements obtenus à l'aide des modèles de Sarkar et Zapatero et de Leland d'une part et de Goldstein, Ju et Leland et de Leland d'autre part, sont statistiquement significatives au seuil de 5%. Ainsi, les rendements des portefeuilles surévalués sont plus négatifs dans le cas des modèles de Sarkar et Zapatero et de Goldstein, Ju et Leland, alors que les rendements des portefeuilles sous-évalués selon ces deux modèles sont plus positifs que ceux des portefeuilles obtenus à l'aide du modèle de Hayne Leland.

Si on considère les portefeuilles surévalués non pondérés, les deux premiers modèles présentent des rendements plus négatifs que le modèle de Leland. Les mêmes modèles offrent des rendements plus positifs ou à défaut moins négatifs que ceux offerts par le modèle de Leland dans le cas des portefeuilles sous-évalués. Le même constat peut être observé au niveau des portefeuilles pondérés par le chiffre d'affaires. Ceci nous porte à dire que les deux modèles qui partent du bénéfice avant intérêts et impôt comme variable d'état permettent d'identifier avec plus de précision les portefeuilles surévalués et sous-évalués par le marché.

Tableau 4.16

Comparaison des rendements des portefeuilles, calculés à l'aide
des trois modèles sous étude, 20 jours après la date de l'état financier de 2006 (Test de Wilcoxon)

PTF	SZ Vs HL						SZ Vs GJL						HL Vs GJL					
	Surévalués			Sous-évalués			Surévalués			Sous-évalués			Surévalués			Sous-évalués		
	Rdt [a]		Stat [b]	Rdt		Stat	Rdt		Stat	Rdt		Stat	Rdt		Stat	Rdt		Stat
EQUIPOND	-0,013	-0,010	$2,07^{**}$	-0,013	-0,017	$3,58^{***}$	-0,013	-0,014	0,04	-0,013	-0,013	0,01	-0.010	-0,014	$2,29^{**}$	-0,017	-0,013	$3,04^{***}$
NP	-0,0004	-0,0002	1,12	NA			-0,0004	-0,0014	1,88	NA			-0,0002	-0,0014	$2,29^{**}$	NA		
PCA	-0,001	-0,001	0,18	NA			-0,001	-0,003	$2,42^{**}$	NA			-0,001	-0,003	$2,64^{***}$	NA		

**Statistiquement significatif au seuil de 5%.
***Statistiquement significatif au seuil de 1%.
a) Il s'agit du rendement médian obtenu à l'aide du modèle en question.
b) Représente la valeur calculée que nous comparons à la valeur tabulée de la statistique.

Afin de déterminer l'efficacité prédictive des trois modèles en fonction de l'état de l'économie, nous les avons appliqués à l'évaluation de l'avoir des actionnaires des mêmes compagnies, aux dates respectives de leurs états financiers de 2002. Ce choix a été motivé, comme nous l'avons cité précédemment, par le fait que l'année 2002 était une année de récession. Le fait d'obtenir de bons résultats à l'aide des modèles sous étude, en utilisant les données de 2002, nous permettra de conclure que ces derniers demeurent robustes quel que soit l'état de l'économie.

4.2 Évaluation en 2002

Cette section sera subdivisée, à son tour, en deux sous-sections. La première sous-section sera consacrée à la comparaison des valeurs des titres, calculées à l'aide des trois modèles, sur une base individuelle. À la deuxième section, nous mettrons l'accent sur la comparaison des valeurs des portefeuilles que nous aurons formés, obtenues à l'aide de ces mêmes modèles.

4.2.1 Comparaison des valeurs des titres sur une base individuelle

Comme pour l'année 2006, nous commencerons par l'évaluation, sur une base individuelle, de l'avoir des actionnaires des compagnies. Dans un souci de robustesse, nous enchaînerons avec l'évaluation de cet avoir pour l'ensemble de ces compagnies. Nous nous servirons toujours de la valeur marchande moyenne des titres à évaluer, comme standard de comparaison. L'évaluation effectuée à l'aide des trois modèles sous étude a révélé une certaine efficience de ces derniers. Le tableau 4.17 présente les résultats de cette évaluation.

Tableau 4.17
Nombre de titres correctement évalués à la date de l'état financier de 2002 selon divers seuils de précision [90]

Modèle	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
SZ	17	14	11	2
HL	14	12	9	3
GJL	16	12	6	1

Comme le tableau 4.17 le montre, au niveau de précision de ±15%, les modèles de Sarkar et Zapatero, de Leland et de Goldstein, Ju et Leland permettent d'évaluer correctement l'avoir des actionnaires de 17, de 14 et de 16 compagnies respectivement. Si on se limite à un seuil de précision de ±10%, ces modèles permettent d'en évaluer correctement 14, 14 et 12 respectivement. Ce nombre tombe à 11, à 9 et à 6 compagnies respectivement si on se limite à un niveau de précision de ±5%. Il est de 2, de 3 et d'une compagnie respectivement pour les trois modèles si on considère un seuil de précision de ±1%. Comme on peut le constater, les résultats obtenus en 2002, à l'aide des modèles sous étude, sont relativement plus faibles que ceux présentés par les mêmes modèles en 2006. Ceci nous semble logique dans la mesure où en 2002 le marché ne reflétait pas la vraie valeur des titres transigés, en raison de la récession. Dans un souci de robustesse, nous avons recalculé l'écart moyen quotidien ainsi que l'écart moyen quotidien cumulé en considérant l'ensemble des titres. Cet écart est calculé pour une période de 3 jours autour de la date de l'état financier de 2002. Les résultats de cette évaluation sont présentés au tableau 4.18.

90) La comparaison est faite par rapport à la valeur marchande moyenne du titre.

Tableau 4.18
Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide des modèles sous étude par rapport aux valeurs marchandes correspondantes, 3 jours autour de la date de l'état financier de 2002[91]

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} E_i}{26}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

Modèle		Jour -3	-2	-1	0	1	2	3
SZ	E_M	-2,19%	-1,68%	-0,81%	-0,24%	0,14%	0,10%	0,24%
	E_{MC}	-2,19%	-1,93%	-1,56%	-1,23%	-0,95%	-0,78%	-0,63%
HL[92]	E_M	-5,64%	-5,15%	-4,31%	-3,76%	-3,38%	-3,42%	-3,27%
	E_{MC}	-5,64%	-5,39%	-5,03%	-4,72%	-4,45%	-4,28%	-4,13%
GJL[93]	E_M	0,18%	0,77%	1,67%	2,30%	2,66%	2,60%	2,70%
	E_{MC}	0,18%	0,47%	0,87%	1,23%	1,52%	1,70%	1,84%

Comme le tableau 4.18 le montre, le modèle de Sarkar et Zapatero présente des écarts relatifs moyens compris entre -2,19% et 0,24% durant les trois jours entourant la date de l'état financier de 2002. À cette même date, les écarts moyen et moyen cumulé obtenus à l'aide de ce modèle s'établissent respectivement à -0,24% et à -1,23%. Ces écarts demeurent très proches de l'axe des abscisses durant les trois jours subséquents. Le tableau 4.14 montre également que l'écart moyen calculé à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland, est compris entre 0,18% et 2,70% pour les 3 jours entourant la date de l'état financier de 2002. À cette date, cet écart s'établit à 2,30%, alors que l'écart cumulé s'établit à 1,23%. Les deux écarts s'éloignent de l'axe des abscisses pour les trois jours subséquents. Le tableau 4.18 montre aussi que l'écart moyen calculé à l'aide du modèle de Hayne Leland est compris entre -5,64% et -3,27% pour les trois jours entourant la date de l'état financier de 2002. Cet écart s'établit à -3,76% à cette date, alors que l'écart moyen

91) Le détail des calculs est fourni à l'annexe (V).
92) Encore une fois, le modèle de H. Leland sous-estime les titres évalués en raison de sa variable d'état statique.
93)L'hypothèse de retour à la moyenne semble encore l'emporter sur celle de la log-normalité des variables d'état.

quotidien cumulé calculé à l'aide de ce même modèle se situe à -4,72% en ce même jour et ne se rapproche jamais de l'axe des abscisses durant les jours subséquents. Les résultats obtenus confirment encore une fois la primauté du modèle de Sarkar et Zapatero au niveau de l'évaluation de l'avoir des actionnaires. Afin de vérifier si les écarts observés entre les résultats obtenus à l'aide des trois modèles, sont statistiquement significatifs, nous avons encore une fois effectué un test GARCH(1,1) où nous régressons les valeurs marchandes des titres formant notre échantillon d'analyse sur leurs valeurs calculées respectives, obtenues à l'aide des trois modèles. Les résultats de ces tests sont présentés aux tableaux 4.19, 4.20 et 4.21.

Tableau 4.19

Régression de la valeur marchande des titres sur leur valeur, calculée à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero, à la date de l'état financier de 2002

Variable dépendante VM (exprime les valeurs marchandes des titres à la date de l'état financier de 2002)

Variable Indépendante :SZ (exprime les valeurs des titres calculées à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero)

$$VM = \beta_0 + \beta_1 SZ + \tilde{\varepsilon} \ ; t = 1,\ldots,T$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 \ ; t = 1,\ldots,T$$

$$\tilde{\varepsilon} = v_t \sqrt{h_t}$$

$$v_t \sim N(0,1)$$

Variable indépendante	Signe	Coefficient	Statistique Z
SZ	+	0.861609	17.04946***
C	+	4 493693	2 487560**

R^2	0 843226	Moyenne de la variable dépendante	34.84788
R^2 ajusté	0.793718	Écart type de la variable dépendante	18.21885
Erreur type du coefficient de régression	8.274683	Critère d'information Akaike	6.830735
Somme des carrés des residus	1300.937	Critère de Schwarz	7 169453
Logarithme du maximum de vraisemblance	-81 79956	Critère de Hannan-Quinn	6.928274
Statistique F	17.03223	Statistique de Durbin-Watson	1.592817
Probabilité de la statistique F	0.000001		

***Statistiquement significatif au seuil de 1%.
** Statistiquement significatif au seuil de 5%.

Comme le tableau 4.19 le montre, dans le cas du modèle de Sarkar et Zapatero, le coefficient de la variable explicative est de 0,8616 avec une valeur du critère d'information « AIC » de 6,83. Ce résultat, statistiquement significatif au seuil de 1%, est largement inférieur à celui obtenu en 2006. Nous verrons si les autres modèles présentent également un coefficient moins fort durant l'année 2002.

Tableau 4.20

Régression de la valeur marchande des titres sur leur valeur, calculée à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland, à la date de l'état financier de 2002

Variable dépendante VM (exprime les valeurs marchandes des titres à la date de l'état financier de 2002)

Variable Indépendante GJL (exprime les valeurs des titres calculées à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland)

$$VM = \beta_0 + \beta_1 GJL + \tilde{\varepsilon} \; ; t = 1,\dots,T$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 \; ; t = 1,\dots,T$$

$$\tilde{\varepsilon} = v_t \sqrt{h_t}$$

$$v_t \sim N(0,1)$$

Variable indépendante	Signe	Coefficient	Statistique Z
GJL	+	0.956743	10.99283***
C	+	0.675847	0.192132

R^2	0.857588	Moyenne de la variable dépendante	34.84788
R^2 ajusté	0.812616	Écart type de la variable dépendante	18.21885
Erreur type du coefficient de régression	7.886545	Critère d'information Akaike	6.621427
Somme des carrés des résidus	1181.754	Critère de Schwarz	6.960145
Logarithme du maximum de vraisemblance	-79.07855	Critère de Hannan-Quinn	6.718966
Statistique F	19.06935	Statistique de Durbin-Watson	1.767375
Probabilité de la statistique F	0.000000		

***Statistiquement significatif au seuil de 1%.

Comme le tableau 4.20 le montre, dans le cas du modèle de Goldstein, Ju et Leland, la valeur du critère d'information « AIC » est de 6,62 alors que le coefficient de la variable explicative, statistiquement significatif au seuil de 1%, se situe à 0,9567. Ce résultat est nettement meilleur que celui obtenu à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero. Ceci nous laisse croire qu'au niveau de l'analyse des portefeuilles, ce dernier modèle aura du mal à s'imposer en 2002. Nous avons également effectué la même régression en utilisant comme variable explicative, l'ensemble des valeurs calculées à l'aide du modèle de Hayne Leland. Les résultats de cette régression sont présentés au tableau 4.21.

Tableau 4.21

Régression de la valeur marchande des titres sur leur valeur, calculée à l'aide du modèle de Hayne Leland, à la date de l'état financier de 2002

Variable dépendante VM (exprime les valeurs marchandes des titres à la date de l'état financier de 2002)

Variable Indépendante HL (exprime les valeurs des titres calculées à l'aide du modèle de Hayne Leland)

$$VM = \beta_0 + \beta_1 HL + \tilde{\varepsilon} \; ; t = 1,\ldots,T$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 \; ; t = 1,\ldots,T$$

$$\tilde{\varepsilon} = v_t \sqrt{h_t}$$

$$v_t \sim N(0,1)$$

Variable indépendante	Signe	Coefficient	Statistique Z
HL	+	0.872326	16.42923*
C	+	5.745221	4.861430*

R^2	0.815961	Moyenne de la variable dépendante	34.84788
R^2 ajusté	0.757844	Écart type de la variable dépendante	18.21885
Erreur type du coefficient de régression	8.965384	Critère d'information Akaike	6.998444
Somme des carrés des résidus	1527.184	Critère de Schwarz	7.337162
Logarithme du maximum de vraisemblance	-83.97977	Critère de Hannan-Quinn	7.095983
Statistique F	14.03984	Statistique de Durbin-Watson	1.429265
Probabilité de la statistique F	0.000004		

***Statistiquement significatif au seuil de 1%.

Comme le tableau 4.21 le montre, dans le cas du modèle de Hayne Leland, le coefficient de la variable explicative est de 0,8723[94], avec un niveau de signification de 1% et une valeur du critère d'information «AIC » de 6,99.

Le tableau 4.22 permet de récapituler les résultats obtenus à l'aide des trois modèles.

Tableau 4.22

Récapitulatif des résultats de l'évaluation de l'avoir des actionnaires effectuée à l'aide des trois modèles sous étude, à la date de l'état financier de 2002

Nombre de titres correctement évalués à la date de l'état financier de 2002 [a]					Écart relatif quotidien à la date de l'état financier de 2002		variable explicative [b]	
Modèle	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%	$E_M = \frac{\sum_{t=1}^{26} E_t}{26}$	$E_{MC} = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_{MC,i}}{N}$	Coefficient	Niveau de signification
SZ	17	14	11	2	-0,24%	-1,23%	0.8616	0,0000
HL	14	12	9	3	-3,76%	-4.72%	0.8723	0,0000
GJL	16	12	6	1	2,30%	1,23%	0.9567	0,0000

a) La comparaison est faite par rapport à la valeur marchande moyenne du titre.

b) Les coefficients et leurs niveaux de signification respectifs proviennent de la régression de la valeur marchande des titres évalués sur leur valeur estimée à l'aide de chacun des trois modèles. Pour faire cette régression, nous avons eu recours à un test GARCH(1,1).

94) Encore une fois, ce coefficient est supérieur à celui obtenu à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero. Nous verrons si ce dernier modèle demeure performant au niveau de l'évaluation des portefeuilles à l'année 2002.

Comme le tableau 4.22 le montre, hormis le coefficient de la variable explicative qui donne un avantage au modèle de Goldstein, Ju et Leland, les résultats penchent en faveur du modèle de Sarkar et Zapatero. À la lumière de ces résultats, on peut voir que les trois modèles sous étude présentent une certaine efficacité au niveau de l'évaluation de l'avoir des actionnaires, mais cette performance demeure inférieure à celle obtenue à l'aide des mêmes modèles en 2006.

De la même manière que nous l'avons fait pour l'année 2006, nous avons formé un portefeuille équipondéré, un portefeuille pondéré par la taille et un portefeuille sans pondération en vue de mesurer la capacité des trois modèles à évaluer de tels portefeuilles. Les résultats de cette comparaison sont présentés à la section suivante.

4.2.2 Évaluation de portefeuilles d'actions en utilisant les données de 2002

Cette section sera divisée en deux parties. La première partie traitera de l'évaluation des portefeuilles que nous aurons formés. La deuxième partie mettra l'accent sur le rendement des portefeuilles sous-évalués ou surévalués par le marché, à la date de l'état financier de 2002.

4.2.2.1 Écarts relatifs de la valeur calculée des portefeuilles par rapport à leur valeur marchande

Pour commencer, nous avons formé un portefeuille équipondéré composé des 26 titres évalués à l'aide des trois modèles. Tout comme pour l'année 2006, nous avons investi 100 dollars dans chaque titre afin d'éviter une sous représentation des titres ayant de faibles prix. Nous avons encore une fois suivi l'évolution de ce portefeuille pendant une durée de 3 jours autour de la date de l'état financier de 2002. Nous avons ensuite repris l'analyse pour le même intervalle de temps en considérant des portefeuilles pondérés par le chiffre d'affaires. Finalement, nous avons formé un troisième portefeuille formé d'une action par compagnie. Les résultats de ces évaluations sont présentés au tableau 4.23.

Comme le tableau 4.23 le montre, hormis dans le cas du portefeuille pondéré par la taille, le modèle de Sarkar et Zapatero offre une meilleure estimation de la valeur des portefeuilles que nous avons formés. Nous vérifierons un peu plus tard si l'investisseur qui s'y fie verra ses anticipations se réaliser.

Tableau 4.23
Évolution de l'écart moyen quotidien pour une période
de 3 jours autour de la date de l'état financier de 2002[95]

			Jour								
			-3	-2	-1	0	1	2	3	Moyenne	Écart type
SZ	NP	Écart relatif quotidien	-1,84%	-1,27%	4,12%	0,24%	0,79%	0,67%	0,74%	0,49%	1,91%
		Écart relatif quotidien cumulé	-1,84%	-1,56%	0,33%	0,31%	0,41%	0,45%	0,49%		
	PCA	Écart relatif quotidien	2,68%	3,39%	4,12%	4,64%	5,06%	5,14%	4,93%	4,28%	0,94%
		Écart relatif quotidien cumulé	2,68%	3,03%	3,40%	3,71%	3,98%	4,17%	4,28%		
	ÉQUIPOND	Écart relatif quotidien	-2,31%	-1,73%	-0,78%	-0,24%	0,08%	-0,03%	0,18%	-0,69%	0,97%
		Écart relatif quotidien cumulé	-2,31%	-2,02%	-1,61%	-1,26%	-0,99%	-0,83%	-0,69%		
HL	NP	Écart relatif quotidien	-5,23%	-4,68%	1,73%	-3,22%	-2,68%	-2,81%	-2,74%	-2,80%	2,24%
		Écart relatif quotidien cumulé	-5,23%	-4,95%	-2,72%	-2,85%	-2,81%	-2,81%	-2,80%		
	PCA	Écart relatif quotidien	0,32%	1,02%	1,73%	2,25%	2,65%	2,73%	2,52%	1,89%	0,92%
		Écart relatif quotidien cumulé	0,32%	0,67%	1,03%	1,33%	1,60%	1,78%	1,89%		
	ÉQUIPOND	Écart relatif quotidien	-5,76%	-5,20%	-4,29%	-3,76%	-3,45%	-3,56%	-3,36%	-4,20%	0,94%
		Écart relatif quotidien cumulé	-5,76%	-5,48%	-5,08%	-4,75%	-4,49%	-4,34%	-4,20%		
GJL	NP	Écart relatif quotidien	1,12%	1,71%	3,66%	3,27%	3,84%	3,71%	3,78%	3,01%	1,12%
		Écart relatif quotidien cumulé	1,12%	1,42%	2,16%	2,44%	2,72%	2,88%	3,01%		
	PCA	Écart relatif quotidien	2,22%	2,94%	3,66%	4,18%	4,60%	4,67%	4,47%	3,82%	0,93%
		Écart relatif quotidien cumulé	2,22%	2,58%	2,94%	3,25%	3,52%	3,71%	3,82%		
	ÉQUIPOND	Écart relatif quotidien	0,18%	0,77%	1,75%	2,30%	2,63%	2,52%	2,73%	1,84%	1,00%
		Écart relatif quotidien cumulé	0,18%	0,48%	0,90%	1,25%	1,53%	1,69%	1,84%		

95) Le détail des calculs de ces écarts est fourni à l'annexe (V).

En effet, à la date de l'état financier de 2002, ce modèle offre des écarts moyens quotidiens et moyens quotidiens cumulés de -0,24% et de -1,26% dans le cas du portefeuille équipondéré, de 4,64% et de 3,71% dans le cas du portefeuille pondéré par le chiffre d'affaires et de 0,24% et de 0,31% dans le cas du portefeuille non pondéré. Ces écarts sont en général plus étroits que ceux obtenus à l'aide deux autres modèles sous étude. Ainsi, on peut conclure que le modèle de Sarkar et Zapatero présente une très forte stabilité quel que soit l'état de l'économie[96]. Par contre, le modèle de Goldstein, Ju et Leland a tendance à surévaluer l'avoir des actionnaires. À l'opposé, le modèle de Leland sous-évalue plutôt cet avoir. Afin de compléter notre analyse quant aux écarts entre les valeurs calculées des portefeuilles selon les trois modèles et leurs valeurs marchandes respectives, nous procéderons à des tests non paramétriques.

4.2.2.2 Tests non paramétriques

Encore une fois, nous utiliserons le test de Kruskal-Wallis pour déceler d'éventuelles différences entre les résultats exhibés par les trois modèles. Au besoin, nous procéderons au test de Wilcoxon pour les départager. Tel que mentionné à la section 4.1.3.2, le choix pour les deux tests est motivé par la petite taille des échantillons comparés et pour la flexibilité de ces tests au niveau des hypothèses qu'ils sous-tendent.

---

96) Ces résultats demeurent provisoires du moment qu'il s'agit d'une analyse empirique exploratoire. Des études ultérieures basées sur de plus grands échantillons pourraient corroborer ces résultats.

.4.2.2.2. a Test de Kruskal-Wallis

Afin d'effectuer ce test, nous avons utilisé les valeurs des portefeuilles, calculées à l'aide des trois modèles ainsi que leurs valeurs marchandes respectives et ce, pour une période de 3 jours autour de la date de l'état financier de 2002. Les résultats de ce test sont présentés au tableau 4.24.

Comme le tableau 4.24 le montre, tous les résultats obtenus à l'aide du test de Kruskal-Wallis sont statistiquement significatifs au seuil de 1%. Ceci veut dire que pour chaque composition de portefeuille, au moins un des trois modèles sous étude présente des résultats différents de ceux obtenus à l'aide des autres modèles. Ceci nous incite donc à procéder au test de Wilcoxon afin de vérifier lequel des trois modèles offre des résultats qui diffèrent de ceux des autres.

Tableau 4.24

Analyse statistique des écarts entre les valeurs des portefeuilles calculées à l'aide des trois modèles sous étude, 3 jours autour de la date de l'état financier de 2002 (Test de Kruskal-Wallis)

Année	2002		
Portefeuille	EQUIPOND I	NP II	PCA III
	22.17***	20.53***	28***

*** Résultats statistiquement significatifs au seuil de 1%.

I) Portefeuilles équipondérés.

II) Portefeuille non pondérés.

III) Portefeuilles pondérés par le chiffre d'affaires.

4.2.2.2.b Test de Wilcoxon

L'utilisation du test de Wilcoxon nous permettra de mesurer le niveau de précision des modèles à prédire la valeur marchande des portefeuilles qu'ils évaluent. Les résultats du test sont présentés au tableau 4.25.

Comme le tableau 4.25 le montre, hormis le portefeuille pondéré par le chiffre d'affaires selon le modèle de Sarkar et Zapatero, aucun résultat obtenu à l'aide du test de Wilcoxon n'est statistiquement significatif dans le cas de ce modèle. Par contre, tous les résultats obtenus à l'aide de ce même test sont statistiquement significatifs au seuil de 1% dans le cas des deux autres modèles. Ceci nous permet de conclure que, contrairement aux modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland, le modèle de Sarkar et Zapatero arrive en général, à prédire les valeurs marchandes respectives des portefeuilles formés quelle que soit leur composition et quel que soit l'état de l'économie.

4.2.2.3 Rendements des portefeuilles surévalués et sous-évalués

Afin de permettre à l'investisseur de bâtir sa stratégie d'investissement, nous avons encore une fois répertorié les portefeuilles formés en sous-portefeuilles sous-évalués et surévalués par le marché. Nous avons fait cette répartition en utilisant les écarts par rapport à la valeur marchande, des valeurs calculées à

Tableau 4.25
Analyse statistique des écarts par rapport à la valeur marchande des portefeuilles calculée à l'aide des trois modèles sous étude, 3 jours autour de la date de l'état financier de 2002 (Test de Wilcoxon)

Année	2002		
Portefeuilles	VM Vs SZ	VM Vs GJL	VM Vs HL
EQUIP	1.28	3.07***	3.07***
NP	0.38	3.07***	3.07***
PCA	3.07***	3.07***	3.07***

*** Résultats statistiquement significatifs au seuil de 1%.

l'aide des trois modèles. Le signe de ces écarts nous a permis de départager les portefeuilles ainsi formés. Nous avons ensuite suivi l'évolution de ces portefeuilles pour une période de 9 et de 20 jours respectivement, à compter de la date de l'état financier de 2002 en vue d'en déterminer le rendement. Ce dernier représente la moyenne géométrique des rendements quotidiens pour les intervalles de temps considérés. Le tableau 4.26 permet de récapituler les résultats de cette évaluation.

En examinant le tableau 4.26 pour la période de 9 jours, on remarque en premier lieu que les portefeuilles équipondérés et identifiés comme étant surévalués par les modèles sous étude ont donné des rendements négatifs alors

Tableau 4.26

Rendements des portefeuilles surévalués et sous-évalués par le marché, selon les trois modèles sous étude et rendement du marché, calculés sur des périodes de 9 et de 20 jours respectivement, à compter de la date de l'état financier de 2002[97]

	Rendement	Portefeuilles surévalués			Portefeuilles sous-évalués			R_{M9}	R_{M20}
		R_{p9}	R_{p20}	$ß_P$	R_{p9}	R_{p20}	$ß_P$		
	PTF_NP	-0,07%	-0,06%		-0,04%	-0,02%			
SZ	PTF_POND_CA	0,17%	-0,06%	0,7127	0,06%	0,08%	0,5492		
	PTF_ÉQUIPOND	-0,78%	-0,61%		-0,75%	-1,06%			
	PTF_NP	0,00%	-0,02%		-0,13%	-0,05%			
HL	PTF_POND_CA	0,22%	0,09%	0,6697	-0,06%	0,02%	0,5780	0,41%	-0,02%
	PTF_ÉQUIPOND	-0,61%	-0,53%		-0,97%	-1,25%			
	PTF_NP	-0,21%	-0,09%		0,09%	0,01%			
GJL	PTF_POND_CA	-0,02%	0,01%	0,6328	0,14%	0,12%	0,6290		
	PTF_ÉQUIPOND	-0,75%	-1,18%		-0,78%	-0,48%			

97) Le détail des calculs est fourni à l'annexe (V).

que leurs bêtas respectifs sont inférieurs au bêta du marché. Ainsi, le portefeuille équipondéré et identifié comme étant surévalué par le marché selon le modèle de Sarkar et Zapatero a donné un rendement de -0,78%, alors que ceux de Goldstein, Ju et Leland et de Leland ont offert des rendements de -0,75% et de -0,61% respectivement. Durant cette même période, le marché a offert un rendement positif de 0,41%. Tous les autres portefeuilles ont donné des rendements conformes à nos attentes dans le sens où ils n'ont pas monté autant que le marché. Des fois ils offrent même des rendements négatifs.

Pour un horizon de 20 jours, tous les portefeuilles donnent des rendements conformes à nos attentes sauf les deux portefeuilles pondérés par le chiffre d'affaires et identifiés par Leland et Goldstein, Ju et Leland comme étant surévalués par le marché. Par contre, pour un horizon de 9 jours, aucun portefeuille parmi ceux identifiés comme étant sous-évalués par le marché, selon les trois modèles, ne donne des résultats conformes à nos attentes.

Pour l'horizon de 20 jours, en plus du portefeuille non pondéré de Goldstein, Ju et Leland, seuls les portefeuilles pondérés par le chiffre d'affaires ont donné des rendements conformes à nos attentes. En effet, pour l'horizon considéré, le portefeuille pondéré par le chiffre d'affaires de Sarkar et Zapatero a offert un rendement de 0,08%, celui de Goldstein, Ju et Leland a offert un rendement de 0,12%, celui de Leland a offert un rendement de 0,02%, alors que le portefeuille non pondéré de Goldstein, Ju et Leland a offert un rendement de 0,01%. Durant cette même période, le marché a offert un rendement négatif de -0,02%. Tout comme l'observation précédente relative à l'année 2006, l'investisseur qui désire investir dans des portefeuilles identifiés comme étant surévalués selon les trois modèles sous étude devrait se rabattre sur les portefeuilles équipondérés que ce soit pour un horizon de 9 ou de 20 jours.

Pour ce qui est des portefeuilles sous-évalués, les modèles permettent une bonne identification dans le cas des portefeuilles pondérés par le chiffre d'affaires sur un horizon de 20 jours alors qu'en 2006, l'identification des portefeuilles sous-évalués était valable pour l'horizon de 9 jours.

Il semble donc que dans le cas des portefeuilles sous-évalués, un horizon de 20 jours est nécessaire avant de réaliser les attentes en cas de récession, alors que pour une période d'expansion, les résultats se manifestent au bout de 9 jours.

Dans le cas des portefeuilles surévalués, les résultats sont conformes à nos attentes que ce soit pour un horizon de 9 ou de 20 jours. Ces résultats ouvrent la voie à des études futures intéressantes.

Nous allons, à présent, nous pencher sur l'analyse statistique des rendements des portefeuilles, obtenus à l'aide des trois modèles sous étude. L'objectif étant de vérifier lequel des trois offre une meilleure précision au niveau de la prédiction de tels rendements.

4.2.3 Tests non paramétriques

4.2.3.1 Test de Kruskal-Wallis

Afin d'effectuer ce test, nous nous sommes rabattus encore une fois sur l'analyse pour un horizon de 20 jours, à compter de la date de l'état financier de 2002, pour les raisons citées précédemment. Tel que mentionné à la section 4.1.3.2, ce test ainsi que le test de Wilcoxon que nous utiliserons au besoin, sont tout à fait appropriés pour les petits échantillons dont on ignore la distribution. Les résultats du test de Kruskal-Wallis sont présentés au tableau 4.27.

Tableau 4.27
Analyse statistique des rendements des portefeuilles calculés à l'aide des trois modèles sous étude, 20 jours après la date de l'état financier de 2002 (Test de Kruskal-Wallis)

Année		2002		
Portefeuilles		EQUIPOND	NP	PCA
20 jours	Surévalués	10,92***	6,35**	3,50
	Sous-évalués	18,29***	10,04***	9,28***

*** Résultats statistiquement significatifs au seuil de 1%.
** Résultats statistiquement significatifs au seuil de 5%.

Comme le tableau 4.27 le montre, exception faite des portefeuilles surévalués pondérés par le chiffre d'affaires, les différences constatées au niveau des rendements des autres portefeuilles sont toutes statistiquement significatives au seuil de 5%. Ceci veut dire qu'au moins un des trois modèles présente des rendements significativement différents de ceux obtenus à l'aide des deux autres modèles sous étude. Afin de vérifier cela, nous procéderons encore une fois au test de Wilcoxon.

4.2.3.2 Test de Wilcoxon

Ce test nous permet de comparer, deux-à-deux, les rendements obtenus à l'aide des trois modèles analysés. Les résultats du test sont présentés au tableau 4.28. Comme le tableau 4.28 le montre, on observe tout comme en 2006 que les rendements des portefeuilles surévalués selon les modèles de Sarkar et Zapatero et de Goldstein, Ju et Leland sont plus négatifs que ceux des portefeuilles obtenus à l'aide du modèle de Leland, alors que les rendements des portefeuilles sous-évalués selon les deux premiers modèles sont plus positifs ou à défaut moins négatifs que ceux obtenus à l'aide du modèle de Leland. Ceci corrobore notre constatation de 2006 quant à la capacité des modèles qui partent des bénéfices avant intérêts et impôt comme variable d'état à identifier, avec une meilleure précision, les portefeuilles surévalués et sous-évalués par le marché. Le tableau 4.29 permet de récapituler les résultats des évaluations effectuées en 2006 et en 2002 à l'aide des trois modèles.

Tableau 4.28

Analyse statistique des rendements des portefeuilles calculés à l'aide des trois modèles sous étude. 20 jours après la date de l'état financier de 2002 (Test de Wilcoxon)

Année	2002																	
PTF	SZ Vs HL						SZ Vs GJL						HL Vs GJL					
	Surévalués			Sous-évalués			Surévalués			Sous-évalués			Surévalués			Sous-évalués		
	Rdt [a]	Rdt [a]	Stat [b]	Rdt	Rdt	Stat	Rdt	Rdt	Stat	Rdt	Rdt	Stat	Rdt	Rdt	Stat	Rdt	Rdt	Stat
EQUIPOND	-0,0047	-0,004	1,69	-0,0078	-0,01	2,61**	-0,0047	-0,007	1,72	-0,0078	-0,005	2,04*	-0,004	-0,007	3,21**	-0,01	-0,005	4,02**
NP	-0,0006	-0,0001	0,74	-0,00076	-0,0013	2,45**	-0,0006	-0,0015	1,66	-0,00076	0,00016	2,04*	-0,0001	-0,0015	2,45**	-0,0013	0,00016	2,45**
PCA	NA			-0,00004	-0,00045	2,18*	NA			-0,00004	0,00018	0,88	NA			-0,00045	0,00018	2,85**

*** Résultats statistiquement significatifs au seuil de 1%.

** Résultats statistiquement significatifs au seuil de 5%.

a) Il s'agit du rendement médian obtenu à l'aide du modèle en question.

b) Représente la valeur calculée que nous comparons à la valeur tabulée de la statistique.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons examiné la performance des trois modèles sous étude en rapport avec l'évaluation de l'avoir des actionnaires des compagnies formant notre échantillon. Pour ce faire, nous avons effectué la comparaison par rapport à la valeur marchande qui est notre standard de comparaison. Ainsi, nous avons effectué l'analyse en termes d'actions et de portefeuilles composés de ces actions et ce, en utilisant comme échantillon d'évaluation les 26 compagnies dont le BAII obéit aux deux conditions de retour à la moyenne[98]. Les résultats obtenus en 2006 montrent qu'aussi bien dans le cas des actions, prises individuellement ou globalement, que dans le cas des portefeuilles que nous avons composés à partir de ces actions, le modèle de Sarkar et Zapatero est celui qui offre les résultats qui se rapprochent le plus du standard de comparaison. Pour leur part, les modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland offrent des résultats un peu plus éloignés de la valeur marchande.

Nous avons ensuite composé des portefeuilles équipondérés, pondérés par le chiffre d'affaires et non pondérés à l'aide des trois modèles sous-étude et que nous avons suivis pour une période de ± 3 jours autour de la date de l'état financier de 2006 afin de comparer leur comportent à celui du portefeuille du marché. Encore une fois, le modèle de Sarkar et Zapatero a permis d'obtenir des résultats qui se rapprochent le plus du standard de comparaison et qui sont statistiquement significatifs au seuil de 1%.

98) Cette contrainte dans le choix de l'échantillon a été introduite afin de se conformer aux hypothèses sous-jacentes au modèle de Sarkar et Zapatero. Ceci peut porter à croire que les résultats présentés dans ce chapitre pourraient être biaisés en faveur du modèle de Sarkar et Zapatero. Afin de vérifier ce point, nous avons procédé à une évaluation hors échantillon en utilisant les 15 compagnies dont le BAII ne se conforme pas aux conditions de retour à la moyenne en 2006. Les résultats de cette analyse se trouvent à l'annexe AC. Comme les tableaux AC1 et AC2, présentés en annexe le montrent, au seuil de précision de ±15%, le modèle de Goldstein, Ju et Leland évalue correctement 2 compagnies alors que le modèle de Leland n'en évalue correctement aucune à ce seuil de précision. Ces résultats sont pires que ceux obtenus à l'aide de ces deux modèles pour les compagnies dont les variables ne répondent pas aux conditions de retour à la moyenne.

Nous avons ensuite scindé les portefeuilles que nous avons formés à l'aide des trois modèles sous étude en portefeuilles surévalués et sous-évalués et nous les avons suivis pendant 20 jours à partir de la date de l'état financier de 2006 pour savoir lequel d'entre eux présente des rendements qui réagissent le plus à la surévaluation et à la sous-évaluation. Ainsi, nous avons pu constater que les modèles de Sarkar et Zapatero et de Goldstein, Ju et Leland qui partent du BAII comme variable d'état offrent des rendements qui remplissent le mieux ce critère. Ces résultats sont statistiquement significatifs au seuil de 5%.

Nous avons répété tous ces tests pour l'année 2002. Les résultats obtenus penchent encore, en général, en faveur du modèle de Sarkar et Zapatero à l'exception d'un écart relatif moyen du portefeuille pondéré par le chiffre d'affaires selon ce modèle qui est plus élevé que celui que présente le modèle de Hayne Leland. Tous les résultats sont statistiquement significatifs au seuil de 1%. Par ailleurs, les résultats obtenus en 2002 sont, de façon générale, moins bons que ceux obtenus en 2006 et ce, pour les trois modèles. Ceci nous porte à croire qu'en 2002, qui est une année de récession, le marché ne reflétait pas les vraies valeurs des titres qui s'y transigeaient.

Nous passons maintenant à l'évaluation des options d'achat écrites sur la valeur de l'avoir des actionnaires en utilisant les trois modèles faisant l'objet de notre analyse, et ce pour les années 2006 et 2002 respectivement. Nous verrons lequel des trois modèles permet le mieux d'évaluer correctement ces options.

Tableau 4.29
Récapitulatif des résultats de l'évaluation de l'avoir des actionnaires et des portefeuilles formés à partir des actions des compagnies évaluées, effectuée à l'aide des trois modèles sous étude, aux dates respectives des états financiers de 2006 et de 2002

	Actions									Rendement des portefeuilles													
	Année	Nombre de titres correctement évalués à la date de l'état financier [a]				Écart relatif quotidien à la date de l'état financier		variable explicative		Surévalués par le marché							Sous-évalués par le marché						
Modèle		Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%	$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} E_i}{26}$	$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$	Coefficient	Niveau de signification	PTF_NP		PTF_CA		PTF_ÉQUIP		R_{M20}	PTF_NP		PTF_CA		PTF_EQUIP		R_{M9}
										20j	9j	20j	9j	20j	9j		20j	9j	20j	9j	20j	9j	
SZ	2006	25	22	18	6	-1,09%	0,57%	0.94	0,0000	-0,01%	-0,06%	-0,08%	-0,17%	-1,08%	-1,69%		-0,13%	0,03%	-0,10%	0,09%	-1,56%	-1,46%	
HL		23	19	16	3	-6,44%	-4,74%	0.90	0,0000	-0,04%	0,04%	-0,09%	-0,06%	-0,90%	-1,38%	0,00%	-0,14%	-0,08%	-0,09%	-0,01%	-1,90%	-1,84%	-0,21%
GJL		25	19	14	0	2,21%	3,90%	0,91	0,0000	-0,11%	-0,16%	-0,22%	-0,36%	-1,45%	-1,51%		-0,07%	0,04%	-0,03%	0,13%	-0,14%	-1,60%	
SZ	2002	17	14	11	2	-0,24%	-1,23%	0.8616	0,0000	-0,06%	-0,07%	-0,06%	0,17%	-0,61%	-0,78%		-0,02%	-0,04%	0,08%	0,06%	-1,06%	-0.75%	
HL		14	12	9	3	-3,76%	-4,72%	0.8723	0,0000	-0,02%	0,00%	0,09%	0,22%	-0,53%	-0,61%	-0,02%	-0,05%	-0,19%	0,02%	-0,06%	-1,25%	-0,97%	0,41%
GJL		16	12	6	1	2,30%	1,23%	0.9567	0,0000	-0,09%	-0,21%	0,01%	-0,02%	-1,18%	-0,75%		0,01%	0,09%	0,12%	0,14%	-0,05%	-0,78%	

a) La comparaison est faite par rapport à la valeur marchande du titre. Cette valeur est obtenue par la moyenne des prix haut et bas de la journée.

CHAPITRE V

COMPARAISON DES TROIS MODÈLES SOUS ÉTUDE SUR LA BASE DE LEURS RÉSULTATS EMPIRIQUES RELATIFS À L'ÉVALUATION DES OPTIONS D'ACHAT

Dans cette partie, nous procédons à l'évaluation des options d'achat écrites sur l'avoir des actionnaires, en utilisant les trois modèles sous étude. Cette évaluation sera effectuée par simulation étant donné que les coefficients de l'équation de l'option d'achat, dérivée à l'aide de ces modèles, sont variables au même titre que devraient logiquement l'être ceux de l'équation de Black-Scholes[99] .

Nous effectuerons l'évaluation d'abord en 2006, puis enchaînerons avec la même évaluation en utilisant les données de 2002. Encore une fois, nous porterons une attention particulière au modèle de Sarkar et Zapatero. Nous prenons position pour ce modèle et pensons qu'il pourrait permettre de mieux évaluer les options d'achat, écrites sur la valeur de l'avoir des actionnaires, que ne le feraient les deux

---

[99]) Ce raisonnement corrobore celui de Perrakis, S. et P. J. Ryan. (1984) qui trouvent que le re-balancement continuel du portefeuille couvert et la discontinuité des transactions limitent l'applicabilité du modèle de Black-Scholes. Ce modèle ne permet de donner, selon Perrakis et Ryan, qu'une approximation de la valeur du titre contingent.

Sur la même lancée, Constantinides G. M., J. C. Jackwert et S. Perrakis. (2005) trouvent que le modèle de Black-Scholes-Merton est applicable uniquement dans un marché complet où les transactions sont continues sans possibilité de sauts et où la volatilité de l'actif sous-jacent est constante. Le modèle de Black-Scholes-Merton devient ainsi un cas particulier seulement, qui permet de déterminer la solution d'une option en cas de marché complet et d'absence de frictions.

Ritchken, P. (1985) utilise la programmation linéaire pour dériver les bornes de Perrakis et Ryan. Il considère alors comme fonction-objectif à optimiser, la valeur d'une option d'achat. En minimisant et en maximisant cette fonction, il en détermine les bornes inférieure et supérieure respectivement. La borne supérieure obtenue est identique à celle de Perrakis et Ryan. Par contre, la borne inférieure à laquelle aboutit l'auteur est, sauf si l'option est très en jeu, différente de celle dérivée par ces derniers.

De son côté, Levy, H. (1985) part du fait que les coûts de transaction et les impôts ne constituent pas une entrave pour l'évaluation si les portefeuilles ne sont pas ajustés, de façon continue, par les investisseurs. Son modèle supporte des transactions en discret et est adapté aux frictions du marché. Tout comme Perrakis et Ryan ainsi que Ritchken, l'auteur détermine un intervalle de valeurs à l'intérieur duquel évolue le prix d'équilibre avec des bornes inférieures et des bornes supérieures.

Pour leur part, Ritchken, P. et S. Kuo. (1988) considèrent que, pour être applicables, les bornes de Perrakis demandent plus d'informations que Black-Scholes. Ils ajoutent que ces bornes ne tiennent pas compte des hypothèses de couverture continue, considérées par Black-Scholes, ni de celles du modèle binomial. Ceci les rend selon ces deux auteurs, applicables à l'évaluation de tout titre contingent que ce titre soit transigé ou non sur le marché. Les deux auteurs se penchent sur les modèles d'évaluation des options multi-périodes. Ils partent de l'hypothèse que la valeur du sous-jacent suit un processus multinomial multiplicatif. Ils obtiennent, à leur tour, des bornes supérieures identiques à celles de Perrakis et Ryan mais des bornes inférieures plus serrées.

autres modèles sous étude. Afin d'effectuer cette évaluation, nous avons utilisé des options d'achat à parité ou à défaut, légèrement en jeu ou légèrement hors jeu écrites sur les actions des 26 compagnies formant notre échantillon d'évaluation[100]. Nous avons également considéré les options d'achat à échéances les plus rapprochées, soient celles du mois suivant la date de l'état financier de la compagnie dont nous désirions évaluer les options d'achat[101]. Nous avons calculé ces échéances en tenant compte uniquement des jours ouvrables afin de nous conformer à la pratique de la bourse de Montréal, ce qui devrait nous permettre de comparer la performance de nos modèles à celle du modèle de Black-Scholes, utilisé par cette dernière pour évaluer des options sur actions sous-jacentes. Nous avons comparé la valeur calculée par les modèles analysés d'abord à la moyenne du « bid-ask » de la journée, en raison d'une activité plus faible du marché des options, comparée à celle du marché des actions. Nous avons ensuite comparé cette même valeur à la moyenne des prix haut et bas à la même date, en vue de rester cohérents avec la technique utilisée pour évaluer l'avoir des actionnaires. Parmi les 26 titres analysés, 20 présentent des transactions aux dates des états financiers de leurs compagnies respectives. Ce sont ces 20 titres qui feront l'objet de notre analyse dans la deuxième partie de cette section.

5.1 Évaluation en 2006

Pour commencer, nous comparerons les valeurs des options d'achat, calculées à l'aide des modèles sous étude, au « bid-ask » moyen de la journée de l'état financier de 2006. Nous enchaînerons ensuite avec la comparaison de ces mêmes valeurs aux valeurs marchandes moyennes correspondantes, enregistrées à cette même date.

---

100) En 2006, les 26 compagnies faisant l'objet de notre échantillon d'évaluation étaient cotées à la bourse des options. Parmi ces options, 20 présentaient des transactions à la date de l'état financier. En 2002, seules 21 des 26 compagnies étaient cotées à la bourse des options. Parmi ces options, 13 présentaient des transactions à la date de l'état financier.
101) Cette date coïncide avec le troisième vendredi du mois d'échéance de l'option en question.

5.1.1 Comparaison à la moyenne du « bid-ask » de la journée

Dans cette partie, nous procéderons à l'évaluation, à l'aide des modèles sous étude, des options d'achat considérées individuellement. Nous évaluerons ensuite ces mêmes options d'achat prises ensemble.

5.1.1.1 Comparaison des valeurs calculées des options d'achat sur une base individuelle

Dans le chapitre précédent, nous avons pu établir que le modèle de Sarkar et Zapatero permettait d'évaluer correctement l'avoir des actionnaires et ce, avec un degré de précision qui dépassait celui des autres modèles. À présent, nous désirons examiner si ce modèle demeure mieux approprié que les autres au niveau de l'évaluation des options d'achat écrites sur cet avoir. Comme nous l'avons annoncé précédemment, nous effectuerons cette évaluation de façon numérique étant donné la variabilité des coefficients de l'équation ordinaire des modèles sous étude. Pour faire cette évaluation, nous avons eu recours aux équations dynamiques de l'avoir des actionnaires que nous avons utilisées pour dériver les équations différentielles stochastiques et ordinaires respectives des modèles analysés[102]. Partant de là, nous pouvons évaluer des options d'achat écrites sur cet avoir, en considérant comme point de départ la structure du capital. Nous avons programmé cette relation et sommes parvenus à calculer la valeur des options indiquées à l'aide des trois modèles. Ensuite, nous avons comparé les valeurs calculées de ces optons d'achat aux valeurs moyennes de leurs bid-ask respectifs[103], le jour de l'état financier de 2006. Le tableau 5.1 présente les

102) Le détail de ces dérivations est fourni aux annexe (O), (H) et (K)

103) La comparaison est faite par rapport au 'bid-ask' le plus large de la journée. Ceci nous permet de demeurer cohérents avec le raisonnement effectués dans le cas des actions et où nous avons considéré comme standard de comparaison, la moyenne des prix haut et bas de la journée. Le choix pour le 'bid-ask' comme standard de comparaison

Tableau 5.1
Nombre de titres correctement évalués à la date de l'état financier de 2006, selon divers seuils de précision [104]

Modèle	Seuil 15% [a]	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
SZ	16	12	10	3
HL	10	7	5	1
GJL	5	4	3	0
B&S [b]	8	5	3	1

a) L'expression utilisée pour déterminer le seuil de précision est la suivante :

$$\frac{Valeur\ Calculée - Bid\_Ask\ moyen}{Bid\_Ask\ moyen}$$

b) Il s'agit du modèle de Black-Scholes. L'équation ordinaire de l'option d'achat selon ce modèle, est la suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial E} rE + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}(\sigma E)^2 = rG$$

résultats de cette comparaison. Comme le tableau 5.1 le montre, au seuil de précision de ±15%, le modèle de Sarkar et Zapatero permet d'évaluer correctement 16 options d'achat parmi les 26 titres faisant l'objet de notre échantillon d'évaluation. Ceci constitue, à notre avis, une bonne performance. En effet, à ce même seuil de précision, le modèle de Black-Scholes évalue correctement 8 options d'achat seulement. Au même niveau de précision, les modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland en évaluent correctement 10 et 5 respectivement. Par ailleurs, si on se limite à un seuil de précision de ±10%, le modèle de Sarkar et Zapatero évalue correctement 12 options d'achat. Au même niveau de précision, les modèles de Black-Scholes, de Leland et de Goldstein, Ju et Leland permettent d'évaluer correctement 5, 7 et 4 options d'achat respectivement. Le tableau 5.1 montre également que le modèle de Sarkar et Zapatero demeure relativement performant au niveau de précision de ±5% avec 10 options d'achat correctement évaluées. À ce niveau de précision, le modèle de Leland évalue correctement 5 options d'achat, alors que les modèles de Black-Scholes et de Goldstein, Ju et Leland en évaluent correctement 3. Finalement, au

est motivé par l'étroitesse du marché des options comparé à celui des actions. Plus tard dans ce développement, nous utiliserons la moyenne des prix haut et bas des transactions de la journée comme autre standard de comparaison toujours en vue de demeurer cohérent avec l'analyse effectuée pour les actions. Les coefficients des équations stochastiques et ordinaires des options, selon les modèles sous étude, étant variables, seule une simulation Monte-Carlo permettra d'évaluer de telles options.

104) Le détail des calculs est fourni à l'annexe (W).

seuil de précision de ±1%, le modèle de Sarkar et Zapatero permet d'évaluer correctement 3 options d'achat alors, que les modèles de Leland et de Black-Scholes en évaluent correctement une seule. À ce même niveau de précision, le modèle de Goldstein, Ju et Leland devient complètement inefficace.

À travers ces résultats, on voit bien que le modèle de Sarkar et Zapatero offre une meilleure performance en terme d'évaluation des options d'achat, comparée à celle offerte par les autres modèles.

5.1.1.2 Comparaison des valeurs calculées des options d'achat prises ensemble

Dans un souci de robustesse, nous utilisons les trois modèles sous étude pour calculer l'écart moyen quotidien en considérant l'ensemble des titres. Nous suivons l'évolution de cet écart pendant un intervalle de temps d'un jour autour de la date de l'état financier de 2006. Nous n'aurions pas pu considérer un intervalle de temps plus large car les options sont beaucoup plus sensibles aux variations des paramètres des modèles utilisés.

À cet effet, Gendron, M., N. Khoury et P. Yourougou. (1994) montrent que la probabilité de changement est plus ressentie au niveau des options qu'au niveau de leurs titres sous-jacents ou des actions sans options. Ils attribuent cela à de l'information voilée dans le prix des options d'intensité supérieure à celle contenue dans le prix des actions. Les trois auteurs ajoutent que les options possèdent une composante d'erreur plus élevée que celle des actions sous-jacentes. Ceci crée un bruit autour de la valeur de l'option, plus prononcé que celui qui entoure la valeur de ces actions.

Tableau 5.2
Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs des options d'achat calculées à l'aide des modèles sous étude par rapport au bid-ask moyen de la date de l'état financier et de la journée antérieure et postérieure à cette date en 2006[105]

$$E_M = \frac{\sum_{t=1}^{M} Et}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

Modèle		Jour -1	Jour 0	Jour 1
SZ	E_M	37,98%	48,70%	27,57%
	E_{MC}	37,98%	43,34%	38,08%
HL	E_M	22,86%	32,01%	13,18%
	E_{MC}	22,86%	27,44%	22,69%
GJL	E_M	84,48%	94,95%	72,07%
	E_{MC}	84,48%	89,71%	83,83%
B&S	E_M	101,74%	139,26%	108,04%
	E_{MC}	101,74%	120,50%	116,35%

Les résultats de la comparaison entre la valeur totale des 26 options d'achat que nous avons calculée, et leur 'bid-ask' moyen, pris comme standard de comparaison, sont présentés au tableau 5.2.

Comme le tableau 5.2 le montre, pour un intervalle de temps d'un jour autour de la date de l'état financier de 2006, l'écart moyen quotidien, enregistré à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero, est compris entre 27,57% et 48,70%. L'écart le plus faible, calculé à l'aide du même modèle, s'établit à 27,57% et est obtenu un jour après cette date. D'autre part, l'écart quotidien cumulé entre la valeur calculée à l'aide de ce même modèle et le standard de comparaison s'établit à 43,34% en ce même jour. Cet écart se rapproche légèrement de l'axe des abscisses durant le jour suivant. Ces résultats montrent la sensibilité des options aux paramètres du modèle de Sarkar et Zapatero.

De son côté, le modèle de Goldstein, Ju et Leland offre un écart moyen quotidien compris entre 72,07% et 94,95% durant le même intervalle de temps. L'écart le plus faible enregistré à l'aide de ce dernier modèle s'établit à 72,07% et est obtenu

105) Le détail des calculs est fourni à l'annexe (W).

un jour après cette date. Par ailleurs, l'écart moyen quotidien cumulé enregistré en ce même jour, à l'aide du même modèle, s'établit à 89,71%. Cet écart se rapproche légèrement de l'axe des abscisses le jour suivant. Le tableau 5.2 montre également que, pour le même intervalle de temps considéré, l'écart moyen quotidien enregistré à l'aide du modèle de Hayne Leland est compris entre 13,18% et 32,01%. L'écart le plus faible obtenu à l'aide de ce modèle s'établit à 13,18% et est obtenu un jour après la date de l'état financier de 2006. À cette même date, le modèle offre un écart quotidien cumulé de 27,44%. Cet écart s'amenuise sensiblement un jour plus tard. Le tableau 5.2 montre également que l'écart moyen quotidien, calculé à l'aide du modèle de Black-Scholes, est compris entre 101,74% et 139,26%. L'écart le plus faible, enregistré à l'aide de ce modèle s'établit à 101,74% et est obtenu le jour précédant la date de l'état financier. Par ailleurs, l'écart moyen cumulé, enregistré à l'aide de ce dernier modèle s'établit à 120,50% en ce même jour de l'état financier et demeure élevé le jour suivant. Étant donné que les écarts enregistrés à l'aide des modèles sous étude sont hauts, nous en avons éliminé les valeurs extrêmes[106] et avons procédé à leur évaluation une seconde fois. Les résultats[107] de cette évaluation montrent que les écarts moyens calculés à l'aide des modèles de Sarkar et Zapatero, de Leland, de Goldstein, Ju et Leland et de Black-Scholes s'établissent respectivement à 1,67%, à -2,20%, à 12,84% et à 47,41%. Ces résultats plaident en faveur des deux premiers modèles et montrent encore une fois les limites du modèle de Black-Scholes. Le tableau 5.3 permet de récapituler les résultats obtenus à l'aide des quatre modèles.

À la lecture du tableau 5.3, on voit clairement que le modèle de Black-Scholes offre une performance inférieure à celle du modèle de Sarkar et Zapatero. Ce modèle est, certes convivial et facile à appliquer, mais ne peut aucunement être considéré comme référence absolue pour évaluer des options d'achat.

106) Nous avons éliminé les écarts obtenus pour les compagnies Agrium, Kinross, Nova Chemicals, Petro-Canada et Thomson.

107) Ces résultats sont fournis à l'annexe (AB).

Tableau 5.3
Récapitulatif des résultats de l'évaluation des options d'achat écrites sur l'avoir des actionnaires, effectuée à l'aide des modèles sous étude, à la date de l'état financier de 2006

	Nombre de titres correctement évalués [a]				Écart relatif quotidien	
Modèle	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%	$E_M = \frac{\sum_{t=1}^{26} E_t}{26}$	$E_{MC} = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_{MC,i}}{N}$
SZ	16	12	10	3	48,70%	43,34%
HL	10	7	5	1	32,01%	27,44%
GJL	5	4	3	0	94,95%	89,71%
B&S	8	5	3	1	139,26	120,50

a) La comparaison est faite par rapport à la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

Afin de compléter notre analyse, nous allons comparer les résultats obtenus à l'aide des modèles sous étude, aux valeurs marchandes[108] respectives des options évaluées.

5.1.2 Comparaison à la moyenne des prix haut et bas de la journée

Nous commencerons par comparer les valeurs respectives des options d'achat, évaluées de façon individuelle, à l'aide des modèles sous étude, à la moyenne des prix haut et bas à la date de l'état financier de 2006. Dans un souci de robustesse, nous enchaînerons avec la comparaison entre la valeur calculée de ces options d'achat, prises conjointement, et leur valeur marchande totale.

5.1.2.1 Comparaison des valeurs calculées des options d'achat sur une base individuelle

Nous avons effectué la comparaison entre la valeur obtenue à l'aide des modèles sous étude et la valeur marchande respective des options d'achat pour lesquelles il existait des transactions le jour de l'état financier de 2006. Le tableau 5.4 présente les résultats de cette comparaison.

108) Cette valeur représente la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau 5.4
Nombre de titres correctement évalués à la date de l'état financier de 2006 selon divers seuils de précision [109]

Modèle	Seuil 15% [a]	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
SZ	12	11	5	3
HL	12	10	5	1
GJL	7	5	3	1
B&S	3	2	1	1

a) L'expression utilisée pour déterminer le seuil de précision est la suivante .

$$\frac{Valeur\ Calculee - Valeur\_Marchande\_Moyenne}{Valeur\_Marchande\_Moyenne}$$

Comme le tableau 5.4 le montre, au niveau de précision de ±15%, les modèles de Sarkar et Zapatero et de Leland permettent d'évaluer correctement 12 options d'achat parmi les 20 options transigées[110]. Ce résultat constitue une bonne performance à notre avis. Au même niveau de précision, les modèles de Black-Scholes et de Goldstein, Ju et Leland permettent d'évaluer correctement 3 et 7 options d'achat respectivement. Au niveau de précision de ±10%, les modèles de Sarkar et Zapatero et de Leland permettent d'évaluer correctement 11 et 10 options d'achat respectivement. Au même niveau de précision, les modèles de Black-Scholes et de Goldstein, Ju et Leland permettent d'évaluer correctement 2 et 5 options d'achat respectivement. Ce nombre s'établit à 5, dans le cas des modèles de Sarkar et Zapatero et de Leland respectivement si on se limite à un niveau de précision de ±5%. À ce même niveau de précision, les modèles de Black-Scholes et de Goldstein, Ju et Leland évaluent correctement 1 et 3 options d'achat respectivement. Le tableau 5.4 montre également qu'au niveau de précision de ±1%, le modèle de Sarkar et Zapatero permet d'évaluer correctement 3 options d'achat, alors que les trois autres modèles permettent d'évaluer correctement une seule option d'achat. Ces résultats montrent que les modèles de Sarkar et Zapatero et de Leland offrent une performance meilleure que celles des deux autres modèles, au niveau de l'évaluation des options d'achat. Les résultats montrent également que le modèle de Black-Scholes n'est pas approprié pour l'évaluation de ces mêmes options.

---

109) La comparaison est faite par rapport à la moyenne du haut et du bas de la journée. Le détail des calculs est fourni à l'annexe (X).

110) Il s'agit des options pour lesquelles il y a eu des transactions le jour de l'état financier de 2006.

5.1.2.2 Comparaison des valeurs calculées des options d'achat prises ensemble

Dans un souci de robustesse, nous avons utilisé les modèles sous étude pour calculer l'écart moyen quotidien entre la valeur totale calculée des 20 options d'achat transigées et leur valeur marchande moyenne, et ce pour une période d'un jour autour de la date de l'état financier de 2006. Les résultats de cette évaluation sont présentés au tableau 5.5.

Comme le tableau 5.5 le montre, pour un intervalle de temps d'un jour autour de la date de l'état financier de 2006, l'écart moyen quotidien obtenu à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero est compris entre 45,46% et 56,11%. L'écart le plus faible enregistré à l'aide de ce modèle est réalisé à cette même date et s'établit à 45,46%. Par ailleurs, le modèle permet d'obtenir, en ce même jour, un écart quotidien cumulé de 49,79%.

Tableau 5.5

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs des options d'achat calculées à l'aide des modèles sous étude par rapport à la moyenne des prix haut et bas de la date de l'état financier et de la journée antérieure et postérieure à cette date en 2006 [111]

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} E_i}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

Modèle		Jour -1	Jour 0	Jour 1
SZ	E_M	54,11%	45,46%	45,65%
	E_{MC}	54,11%	49,79%	48,41%
HL	E_M	41,03%	33,36%	33,46%
	E_{MC}	41,03%	37,20%	35,95%
GJL	E_M	84,48%	71,73%	72,17%
	E_{MC}	84,48%	78,10%	76,12%
B&S	E_M	175,68%	163,68%	164,77%
	E_{MC}	175,68%	169,68%	168,04%

111) Le détail des calculs est fourni à l'annexe (X).

Cet écart demeure éloigné de l'axe des abscisses un jour plus tard. Ces résultats montrent encore une fois, la sensibilité des options aux paramètres du modèle de Sarkar et Zapatero. Le tableau 5.5 montre également que l'écart moyen calculé à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland est compris entre 71,73% et 84,48%. L'écart le plus faible enregistré à l'aide de ce modèle s'établit à 71,73% et est obtenu à cette même date. De son côté, l'écart quotidien cumulé calculé à l'aide du même modèle s'établit à 78,10% en ce même jour et demeure très éloigné de l'axe des abscisses le jour suivant. Le tableau 5.5 montre également, qu'à la date de l'état financier de 2006, les écarts moyen et moyen cumulé enregistrés à l'aide du modèle de Leland s'établissent à 33,36% et à 37,20% respectivement. Ces écarts ne s'améliorent pas le jour suivant, mais demeurent relativement meilleurs que ceux enregistrés à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero. Par ailleurs, les écarts moyens enregistrés à l'aide du modèle de Black-Scholes sont compris entre 163,68% et 175,68%. Ces écarts sont très élevés comparés à ceux obtenus à l'aide des autres modèles. Comme les écarts enregistrés à l'aide des modèles sous étude sont encore une fois élevés, nous en avons éliminé les valeurs extrêmes[112] et avons procédé à leur évaluation à nouveau. Les résultats montrent que les écarts moyens[113] calculés à l'aide des modèles de Sarkar et Zapatero, de Leland, de Goldstein, Ju et Leland et de Black-Scholes s'établissent respectivement à 2,36%, à -3,03%, à 15,97% et à 65,79%. Ces résultats plaident, encore une fois, en faveur des modèles de Sarkar et Zapatero et confirment les limites du modèle de Black-

Tableau 5.6
Récapitulatif des résultats de l'évaluation des options d'achat, effectuée à l'aide des modèles sous étude, à la date de l'état financier de 2006

	Nombre de titres correctement évalués [a]				Écart relatif quotidien	
Modèle	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%	$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} E_i}{26}$	$E_{MC} = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_{M}}{N}$
SZ	12	11	5	3	45,46%	49,79%
HL	12	10	5	1	33,36%	37,20%
GJL	7	5	3	1	71,73%	78,10%
B&S	3	2	1	1	163,68%	169,68%

a) La comparaison est faite par rapport à la moyenne des prix haut et bas de la journée.

112) Il s'agit des écarts enregistrés pour les compagnies Agrium, Bombardier, Petro-Canada, Nexen et Suncor Energy.

113) Ces écarts sont fournis à l'annexe (AB).

Scholes. Le tableau 5.6 permet de récapituler les résultats obtenus à l'aide des modèles sous étude.

À la lecture du tableau 5.6, on voit clairement que le modèle de Black-Scholes offre une performance nettement inférieure à celle du modèle de Sarkar et Zapatero. La section suivante sera réservée à l'évaluation des options d'achat, aux dates respectives des états financiers de 2002 des compagnies faisant l'objet de notre étude.

5.2 Évaluation en 2002

Pour commencer, nous comparerons les valeurs calculées, à l'aide des trois modèles, au « bid-ask » moyen de la journée de l'état financier de 2002. Nous nous attarderons ensuite sur la comparaison de ces mêmes valeurs à la moyenne des prix haut et bas des options d'achat évaluées à cette même date.

5.2.1 Comparaison à la moyenne du « bid-ask » de la journée

Afin de mesurer les performances respectives des modèles sous étude, nous les utiliserons d'abord pour évaluer, sur une base individuelle, les options d'achat formant notre échantillon. Nous procéderons ensuite à l'évaluation de ces mêmes options considérées ensemble.

5.2.1.1 Comparaison des valeurs calculées des options d'achat sur une base individuelle

Nous avons calculé la valeur des options d'achat écrites sur l'avoir des actionnaires à l'aide des modèles sous étude. Les résultats de cette évaluation sont présentés au tableau 5.7.

Tableau 5.7
Nombre de titres correctement évalués à la date de l'état financier de 2002 selon divers seuils de précision [114]

Modèle	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
SZ	9	8	5	1
HL	6	4	2	0
GJL	2	2	1	0
B&S	5	4	2	0

Comme le tableau 5.7 le montre, au niveau de précision de ±15%, le modèle de Sarkar et Zapatero permet d'évaluer correctement 9 options d'achat parmi les 21 options faisant l'objet de notre échantillon d'évaluation[115]. Ce résultat constitue une moins bonne performance comparée à celle obtenue à l'aide du même modèle en 2006. Au même niveau de précision, les modèles de Leland, de Goldstein, Ju et Leland et de Black-Scholes permettent d'évaluer correctement 6, 2 et 5 options d'achat respectivement.

Au niveau de précision de ±10%, le modèle de Sarkar et Zapatero évalue correctement 8 options d'achat. À ce même niveau de précision, les modèles de Leland et de Black-Scholes permettent d'évaluer correctement 4 options d'achat chacun, alors que le modèle de Goldstein, Ju et Leland permet d'en évaluer correctement 2. Le tableau 5.7 montre également qu'au niveau de précision de ±5%, le modèle de Sarkar et Zapatero permet d'évaluer correctement 5 options d'achat. À ce même niveau de précision, les modèles de Leland et de Black-Scholes permettent d'évaluer correctement 2 options d'achat chacun, alors que le modèle de Goldstein, Ju et Leland permet d'en évaluer une seule. Finalement, au niveau de précision de ±1%, le nombre d'options d'achat correctement évaluées à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero tombe à une option seulement. Les autres modèles deviennent complètement inefficaces au même niveau de précision. À travers ces résultats, on voit que la performance des modèles sous étude est nettement inférieure à celle qu'ils ont présentée en 2006. Les résultats montrent

114) La comparaison est faite par rapport au bid-ask moyen de la journée. Le détail des calculs est fourni à l'annexe (Y).
115) Ceci constitue le nombre d'options, parmi celles formant notre échantillon, qui se transigeaient à la bourse de Montréal en 2002.

également que, même en période de récession, le modèle de Sarkar et Zapatero demeure mieux performant que les autres modèles en terme d'évaluation des options d'achat.

Dans un souci de robustesse, nous avons évalué l'écart entre la valeur totale calculée des titres faisant l'objet de notre échantillon d'évaluation et leur 'bid-ask' correspondant. Les résultats de cette évaluation sont présentés à la section suivante.

5.2.1.2 Comparaison des valeurs calculées des options d'achat prises ensemble

Nous avons utilisé les quatre modèles pour déterminer l'écart entre la valeur totale calculée des 21 options d'achat retenues et leur 'bid-ask' moyen de la date de l'état financier de 2002 et de la journée antérieure et postérieure à cette date. Les résultats de cette comparaison sont présentés au tableau 5.8.

Tableau 5.8

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs des options d'achat calculées à l'aide des modèles sous étude par rapport au bid-ask moyen de la date de l'état financier et de la journée antérieure et postérieure à cette date en 2002[116]

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} E_i}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

Modèle		Jour -1	Jour 0	Jour 1
SZ	E_M	42,82%	24,29%	17,69%
	E_{MC}	42,82%	33,55%	28,27%
HL	E_M	30,50%	14,19%	10,47%
	E_{MC}	30,50%	22,34%	18,38%
GJL	E_M	80,49%	57,37%	49,59%
	E_{MC}	80,49%	68,93%	62,48%
B&S	E_M	99,83%	73,67%	67,08%
	E_{MC}	99,83%	86,75%	80,19%

116) Le détail des calculs est fourni à l'annexe (Y).

Comme le tableau 5.8 le montre, pour un intervalle de temps d'un jour autour de la date de l'état financier de 2002, l'écart moyen quotidien calculé à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero est compris entre 17,69% et 42,82%. À cette date, l'écart moyen et l'écart moyen cumulé, enregistrés à l'aide de ce même modèle, s'établissent respectivement à 24,29 et à 33,55%. Le tableau 5.8 montre également que l'écart moyen et l'écart moyen cumulé, calculés à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland s'établissent à 57,37% et à 68,93% respectivement. Le tableau montre aussi que ces mêmes écarts calculés à la date de l'état financier de 2002, à l'aide du modèle de Hayne Leland, s'établissent respectivement à 14,19% et à 22,34%. Par ailleurs, l'écart moyen et l'écart moyen cumulé calculés à la même date, à l'aide du modèle de Black-Scholes, s'établissent respectivement à 73,67% et à 86,75%.

Comme on peut le constater, les écarts calculés à l'aide des quatre modèles sont assez élevés. Ceci nous a incités à éliminer les valeurs extrêmes[117] de ces écarts et à en effectuer l'évaluation de nouveau. Cette nouvelle évaluation[118] nous a permis d'obtenir des écarts moyens de 0,79%, de -2,17%, de 34,55% et de 48,73% pour les modèles de Sarkar et Zapatero, de Leland, de Goldstein, Ju et Leland et de Black-Scholes respectivement. Ces résultats plaident encore en faveur des deux premiers modèles et dénotent la faible performance du modèle de Black-Schole au niveau de l'évaluation des options d'achat. Le tableau 5.9 permet de récapituler les résultats obtenus à l'aide des quatre modèles. À la lecture du tableau 5.9, on voit clairement que le modèle de Black-Scholes offre une performance inférieure à celle exhibée par le modèle de Sarkar et Zapatero. Ceci corrobore nos résultats obtenus en 2006. Afin de compléter notre analyse, nous procéderons à présent à la comparaison des résultats obtenus, à l'aide des modèles sous étude, aux valeurs marchandes respectives des options d'achat évaluées.

117) Les écarts que nous avons éliminés sont ceux relatifs aux compagnies Agrium, Enbridge, MDS, Nexen, Petro-Canada et Telus.

118) Les résultats de cette évaluation sont fournis à l'annexe (AB).

Tableau 5.9
Récapitulatif des résultats de l'évaluation des options d'achat, effectuée à l'aide des trois modèles sous étude, à la date de l'état financier de 2002

	Nombre de titres correctement évalués [a]				Écart relatif quotidien	
Modèle	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%	$E_u = \frac{\sum_{i=1}^{26} E_i}{26}$	$E_{ar} = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_{ar,i}}{N}$
SZ	9	8	5	1	24,29%	33,55%
HL	6	4	2	0	14,19%	22,34%
GJL	2	2	1	0	57,37%	68,93%
B&S	5	4	2	0	73,67%	86,75%%

a) La comparaison est faite par rapport à la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

5.2.2 Comparaison à la moyenne des prix haut et bas de la journée

Nous commencerons par effectuer l'évaluation, sur une base individuelle, des options d'achat en utilisant les modèles sous étude. Ces modèles serviront ensuite à évaluer ces options prises ensemble.

5.2.2.1 Comparaison des valeurs calculées des options d'achat sur une base individuelle

Nous avons effectué la comparaison entre la valeur calculée à l'aide des modèles sous étude, et la valeur marchande moyenne des options d'achat pour lesquelles il existait des transactions le jour de l'état financier de 2002[119].
Le tableau 5.10 présente les résultats de cette comparaison.
Comme le tableau 5.10 le montre, au seuil de précision de ±15%, le modèle de Sarkar et Zapatero permet d'évaluer correctement 4 options d'achat parmi les 13 options transigées à la date de l'état financier de 2002. Au même niveau de précision, les modèles de Leland, de Goldstein, Ju et Leland et de Black-Scholes permettent d'évaluer correctement 2, 3 et 1 option d'achat respectivement. Au seuil de précision de ±10%, le modèle de Sarkar et Zapatero permet d'évaluer correctement 3 options d'achat. Au même niveau de précision, le modèle de Goldstein, Ju et Leland permet d'évaluer correctement 2 options d'achat, alors que

119) Parmi les 21 options dont nous disposions, 13 présentaient des transactions à cette date.

Tableau 5.10
Nombre de titres correctement évalués à la date de l'état financier de 2002 selon divers seuils de précision [120]

Modèle	Seuil 15% [a]	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
SZ	4	3	2	0
HL	2	0	0	0
GJL	3	2	0	0
B&S	1	0	0	0

a) L'expression utilisée pour déterminer le seuil de précision est la suivante .

$$\frac{Valeur\ Calculée - Valeur\_Marchande\_Moyenne}{Valeur\_Marchande\_Moyenne}$$

les deux autres modèles n'en évaluent correctement aucune. Au niveau de précision de ±5%, le modèle de Goldstein, Ju et Leland devient également inefficace, alors que le modèle de Sarkar et Zapatero permet d'évaluer correctement 2 options d'achat. Si, par contre, on restreint le seuil de précision à ±1%, ce dernier modèle n'évalue correctement aucune option d'achat. Ces résultats, certes relativement faibles par rapport à ceux obtenus en 2006, penchent en faveur du modèle de Sarkar et Zapatero.

5.2.2.2 Comparaison des valeurs calculées des options d'achat prises ensemble

Afin de demeurer cohérents avec le travail effectué précédemment, nous avons utilisé les modèles sous étude pour évaluer l'écart entre la valeur totale calculée des 13 titres et leur valeur marchande, et ce pour une journée antérieure et postérieure à la date de l'état financier de 2002. Les résultats de cette évaluation sont présentés au tableau 5.11.

Comme le tableau 5.11 le montre, l'écart moyen calculé à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero s'établit à 23,56%, alors que l'écart cumulé calculé à l'aide de ce même modèle s'établit à 27,26%, le jour de l'état financier. Le dernier écart se rapproche davantage de l'axe des abscisses, le jour suivant. Le tableau 5.11 montre également qu'à la date de l'état financier de 2002, les écarts moyen et moyen cumulé calculés à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland s'établissent à 55,03% et à 59,69% respectivement. À cette même date, les écarts moyen et

120) La comparaison est faite par rapport à la moyenne du haut et du bas de la journée. Le détail des calculs est fourni à l'annexe (Z).

Tableau 5.11
Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs des options d'achat calculées à l'aide des modèles sous étude par rapport à la moyenne des prix haut et bas de la date de l'état financier et de la journée antérieure et postérieure à cette date en 2002[121]

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} E_i}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_{MC,i}}{N}$$

Modèle		Jour		
		-1	0	1
SZ	E_M	30,96%	23,56%	17,07%
	E_{MC}	30,96%	27,26%	23,86%
HL	E_M	27,62%	20,40%	14,85%
	E_{MC}	27,62%	24,01%	20,96%
GJL	E_M	64,36%	55,03%	49,19%
	E_{MC}	64,36%	59,69%	56,19%
B&S	E_M	97,97%	85,33%	75,19%
	E_{MC}	97,97%	91,65%	86,16%

moyen cumulé enregistrés à l'aide du modèle de Leland s'établissent à 20,40% et à 24,01% respectivement, alors que ceux calculés à l'aide du modèle de Black-Scholes s'établissent respectivement à 85,33% et à 91,65%. Ayant remarqué encore une fois le niveau élevé des écarts obtenus à l'aide des quatre modèles, nous en avons éliminé les valeurs extrêmes[122]. Nous avons ensuite recalculé ces écarts. Les résultats de cette évaluation[123] nous ont permis d'obtenir des écarts moyens de 2,08%, de -0,53% de 26,61% et de 44,82% pour les modèles de Sarkar et Zapatero, de Leland, de Goldstein, Ju et Leland et de Black-Scholes. Les résultats obtenus nous permettent de conclure définitivement qu'au niveau de l'évaluation des options d'achat, ce dernier modèle offre une performance inférieure à celle présentée par les modèles qui partent de la structure du capital. Le tableau 5.12 permet de récapituler les résultats obtenus dans cette section. Ce tableau montre clairement que même en situation de récession, les modèles qui partent de la structure du capital offrent une performance meilleure que celle offerte par le modèle de Black-Scholes. Parmi ces derniers, le modèle de Sarkar et Zapatero est celui qui présente, en général, les résultats les plus robustes

[121] Le détail des calculs est fourni à l'annexe (Z).
[122] Nous avons éliminé les écarts associés aux compagnies Petro-Canada, Telus et CNR.
[123] Ces résultats sont fournis à l'annexe (AB).

au niveau de l'évaluation des options d'achat.

Tableau 5.12
Récapitulatif des résultats de l'évaluation des options d'achat,
effectuée à l'aide des modèles sous étude, à la date de l'état financier de 2002

	Nombre de titres correctement évalués [a]				Écart relatif quotidien	
Modèle	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%	$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} E_i}{26}$	$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$
SZ	4	3	2	0	23,56%	27,26%
HL	2	0	0	0	20,40%	24,01%
GJL	3	2	0	0	55,03%	59,69%
B&S	1	0	0	0	85,33%	91,65%

a) La comparaison est faite par rapport à la moyenne des prix haut et bas de la journée.

CONCLUSION

Ce chapitre poursuit l'analyse des trois modèles sous étude en rapport avec l'évaluation des options d'achat écrites sur l'avoir des actionnaires. Sur la base des résultats obtenus en comparaison avec la valeur moyenne du 'bid-ask' de la journée et avec la valeur marchande moyenne de options évaluées, on peut dire qu'en 2006, le modèle de Sarkar et Zapatero est celui qui présente les résultats qui se rapprochent le plus du standard de comparaison. Pour leur part, les modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland présentent des résultats plus éloignés de ce standard. Par ailleurs, le modèle de Black-Scholes a montré ses limites au niveau de l'évaluation des options d'achat. Les modèles qui partent de la structure du capital offrent une bien meilleure performance et une certaine robustesse à ce niveau.

Nous avons répété les tests pour l'année 2002 et les résultats montrent encore une fois que le modèle de Sarkar et Zapatero offre des résultats qui se rapprochent le plus du standard de comparaison. Les résultats obtenus en 2002 sont toutefois moins bons que ceux obtenus en 2006 et ce, pour les trois modèles sous étude. Nous pensons que le marché ne reflétait pas la vraie valeur des titres qui s'y transigeaient en 2002 à cause de la récession qu'a connue cette période.

Dans un souci de robustesse, nous avons utilisé les trois modèles sous étude pour calculer l'écart moyen quotidien en considérant l'ensemble des options et nous avons suivi l'évolution de cet écart pour une période de ± 1 jour autour de la date de l'état financier de 2006 et de 2002. Les résultats que nous avons obtenus sont beaucoup moins bons que ceux obtenus pour les actions probablement à cause de la composante d'erreur dans le prix des options qui est plus élevée que celle des actions sous-jacentes comme le soulignent Gendron, Khoury et Yourougou dans leur article de (1994).

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail, nous avons essayé de comparer les performances respectives de trois modèles d'options qui partent de la structure du capital. Pour cela, nous les avons appliqués à l'évaluation de l'avoir des actionnaires et des options d'achat écrites sur cet avoir. Les modèles que nous avons comparés sont ceux de Sarkar et Zapatero, de Leland et de Goldstein, Ju et Leland.

Le premier modèle utilise le bénéfice avant impôt et intérêts comme variable d'état. Cette variable suit un processus de retour à la moyenne. Le second modèle part de la valeur de la compagnie comme variable d'état. Cette dernière suit un processus log-normal. Le troisième modèle utilise la même variable d'état que le premier, mais au même titre que le deuxième modèle, cette variable suit un processus log-normal.

Par ailleurs, le travail s'est articulé autour de deux axes principaux. Le premier axe a traité du volet théorique de la problématique, alors que le deuxième a mis l'accent sur le côté empirique de l'analyse. Ainsi, les chapitres 2 et 3 ont été réservés aux dérivations, à l'aide des modèles sous étude, des équations stochastiques et ordinaires de l'avoir des actionnaires et de l'option d'achat écrite sur cet avoir. L'analyse théorique a montré que les expressions respectives de l'avoir des actionnaires, obtenues à l'aide des trois modèles, présentaient beaucoup de similitudes mais également beaucoup de divergences. La même constatation pouvait être relevée au niveau des expressions respectives des options d'achat.

Les nouveaux développements que nous présentons dans cette thèse commencent alors à partir de ce point. Ainsi, nous avons cherché dans un premier temps à déterminer les conditions de convergence et de divergence entre les expressions des titres contingents de ces trois modèles. Nous avons pu démontrer qu'en cas d'absence de vitesse de retour à la moyenne, les trois modèles sous étude devenaient parfaitement identiques. Ceci nous porte à dire que les modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland représentent des cas particuliers du modèle de

Sarkar et Zapatero. Par ailleurs, les expressions des titres contingents, dérivées à l'aide de ce dernier modèle, présentent toutes un terme hypergéométrique synonyme d'indétermination, ce qui rend impossible son opérationnalisation. Nous avons essayé de faire converger ce terme vers une fonction usuelle en utilisant des développements en série de puissances. Ceci nous a permis de le faire tendre vers la fonction exponentielle négative qui est une fonction convergente et finie. Nous avons ensuite utilisé la fonction d'optimisation de Newton-Raphson pour rendre opérationnels, les trois modèles. D'autre part, la variabilité des coefficients des expressions des options d'achat que nous avons dérivées en extension des trois modèles nous a obligés à recourir à l'évaluation numérique.

Par ailleurs, nous avons également cherché à mesurer l'effet de l'impôt sur la valeur de l'avoir des actionnaires ainsi que sur la convexité de la courbe qui relie cet avoir à la valeur marchande de la compagnie. L'analyse a montré que cette variable affectait négativement la valeur de l'avoir des actionnaires dans le cas des modèles qui utilisent le bénéfice avant impôt et intérêts comme variable d'état. Ceci constitue une première divergence avec le modèle de Leland qui prône une relation positive entre les deux variables en raison des déductions fiscales des intérêts. Au niveau de la convexité de la courbe qui relie l'avoir des actionnaires à la valeur marchande de la compagnie, nous avons pu établir que le taux d'impôt n'affectait pas cette dernière du moment que l'arbitrage se fait uniquement entre la dette perpétuelle et la valeur liquidative de la compagnie. En revanche, l'analyse a révélé que cette convexité était conditionnée par les paramètres de retour à la moyenne dans le cas du modèle de Sarkar et Zapatero. Ceci constitue une deuxième divergence de ce modèle vis-à-vis du modèle de Hayne Leland, mais aussi vis-à-vis du modèle de Goldstein, Ju et Leland.

Dans la partie empirique exploratoire, développée aux chapitres 4 et 5, nous avons examiné la performance des trois modèles sous étude en rapport avec l'évaluation de l'avoir des actionnaires ainsi que des options d'achat écrites sur cet avoir. Après estimation des paramètres de retour à la moyenne, nous avons retenu comme échantillon final d'évaluation[124] les 26 compagnies de l'indice « TSX60 » dont le « BAII » respecte les deux conditions de retour à la moyenne à savoir : la vitesse de retour à la moyenne et la valeur moyenne à long terme des bénéfices avant intérêts et impôt. Nous avons utilisé cet échantillon pour évaluer l'avoir des actionnaires ainsi que les options d'achat écrites sur cet avoir, à l'aide des trois modèles sous étude, en 2006 et en 2002 respectivement[125]. Pour ce faire, nous avons considéré comme standard de comparaison, la valeur marchande moyenne des prix haut et bas de la journée dans le cas de l'avoir des actionnaires.

Ainsi, en 2006, le modèle de Sarkar et Zapatero a permis d'évaluer correctement l'avoir des actionnaires de 25, de 22, de 18 et de 6 compagnies, aux seuils de précision respectifs de ±15%, de ±10%, de ±5% et de ±1%, ce qui représente un résultat meilleur que celui réalisé par les deux autres modèles. Dans un souci de robustesse, nous avons utilisé les modèles sous étude pour calculer les écarts quotidiens moyens ainsi que les écarts quotidiens moyens cumulés, pour les titres considérés ensemble, ±3 jours autour de la date de l'état financier de 2006. Les résultats ont corroboré ceux obtenus précédemment. Toujours dans un souci de robustesse, nous avons effectué un test GARCH(1,1) qui a révélé également que le modèle de Sarkar et Zapatero permettait de mieux expliquer la valeur marchande des titres que ne pouvaient le faire les deux autres modèles sous étude.

Et pour nous assurer de l'absence d'un biais de sélection dans le choix de l'échantillon d'évaluation, nous avons effectué une évaluation hors échantillon, à l'aide des modèles de Leland et de Goldstein, Ju et Leland, portant sur les 15 compagnies dont les variables d'état ne remplissent pas les deux conditions de retour à la moyenne. Les résultats de cette évaluation ont révélé qu'au seuil de

124) À la base, cet échantillon était composé de 42 compagnies, soient celles pour lesquelles nous disposions de données continues de janvier 2000 à décembre 2006. Afin de pouvoir comparer les résultats des trois modèles, nous avons retenu les 26 compagnies dont la variable d'état remplit les conditions de retour à la moyenne à savoir : la vitesse de retour à la moyenne et la valeur moyenne à long terme des bénéfices avant intérêts et impôt. Ceci peut porter à croire que les résultats présentés dans ce chapitre pourraient être biaisés en faveur du modèle de Sarkar et Zapatero. Afin de vérifier ce point, nous avons procédé à une évaluation hors échantillon en utilisant les 15 compagnies dont le BAII ne se conforme pas aux conditions de retour à la moyenne en 2006. Les résultats de cette analyse se trouvent à l'annexe AC.

125) Ce choix a été motivé par le fait que les deux années étaient des années d'expansion et de récession respectivement.

précision de ±15%, seules deux compagnies étaient correctement évaluées à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland alors qu'au même niveau de précision, aucune compagnie n'était correctement évaluée à l'aide du modèle de Leland, ce qui représente une performance de ces modèles, pire que celles obtenues pour les compagnies faisant partie de l'échantillon initial d'évaluation.

Nous avons ensuite formé des portefeuilles équipondérés, pondérés par le chiffre d'affaires et non pondérés à l'aide de ces trois modèles et nous avons analysé l'évolution de leur valeur calculée selon les modèles avec leur valeur marchande pour une période de ± 3 jours autour de la date de l'état financier de 2006. Encore là, les portefeuilles formés selon le modèle de Sarkar et Zapatero ont offert l'écart le plus faible entre leur valeur calculée et leur valeur marchande. Les tests non paramétriques que nous avons effectués montrent que ces résultats sont statistiquement significatifs au seuil de 5%.

Nous avons ensuite scindé les portefeuilles que nous avons formés à l'aide des trois modèles sous étude en portefeuilles surévalués et sous-évalués et nous les avons suivis pendant 20 jours à partir de la date de l'état financier de 2006 pour savoir lequel d'entre eux présente des rendements qui réagissent le plus à la surévaluation et à la sous-évaluation. Ainsi, nous avons pu constater que les portefeuilles identifiés comme étant surévalués par le marché, selon les modèles de Sarkar et Zapatero et de Goldstein, Ju et Leland, ont offert des rendements respectifs négatifs, alors que les portefeuilles identifiés comme étant sous-évalués par les mêmes modèles ont présenté, en général, des rendements positifs pour la période de 20 jours, à compter de la date de l'état financier de 2006. Des tests non paramétriques montrent que ces résultats sont statistiquement significatifs au seuil de 5%. L'investisseur qui s'était fié à ces deux modèles pour composer ses portefeuilles pouvait alors voir ses anticipations se réaliser. Par ailleurs, ces portefeuilles présentaient généralement des rendements moyens moins faibles que le portefeuille du marché, alors que leurs bêtas respectifs sont tous inférieurs à 1. Ce point mérite qu'on s'y attarde dans le cadre d'une étude future.

Afin d'analyser l'efficacité prédictive des trois modèles en fonction de l'état de l'économie, nous les avons appliqués à l'évaluation de l'avoir des actionnaires et des options d'achat des mêmes compagnies, aux dates respectives de leurs états financiers de 2002. En regard de l'avoir des actionnaires, les résultats ont encore une fois penché, dans la plupart des cas, en faveur du modèle de Sarkar et Zapatero.

Les résultats montrent que c'est ce dernier modèle qui évalue correctement le plus grand nombre d'actions quel que soit le seuil de précision retenu. Ce modèle offre également les écarts les plus faibles entre les valeurs estimées des actions, prises ensemble, et leur valeur marchande ainsi que les écarts les plus faibles entre les valeurs estimées des portefeuilles équipondérés et non pondérés et leur valeur marchande sur une période de ±3 jour autour de la date de l'état financier de 2002. Et tout comme en 2006, ce modèle de même que celui de Goldstein, Ju et Leland présentent des rendements qui réagissent le plus à la surévaluation et à la sous-évaluation sur une période d'observation de 20 jours. Les tests non paramétriques montrent que ces derniers résultats sont statistiquement significatifs au seuil de 5%.

Au niveau de l'évaluation des options d'achat, l'analyse a révélé que le modèle de Sarkar et Zapatero offrait en général une performance meilleure que celle des deux autres modèles sous étude. Ainsi, en comparant les résultats obtenus à la moyenne des « bid-ask »[126] respectifs observés en 2006, ce modèle a permis d'évaluer correctement, à partir de l'échantillon des 26 options, 16, 12, 10 et 3 options d'achat respectivement, aux niveaux de précision de ±15%, de ±10%, de ±5% et de ±1%. En prenant comme standard de comparaison la moyenne des prix haut et bas de la journée[127], ce modèle a permis d'évaluer correctement, aux mêmes seuils de précision, 12, 11, 5 et 3 options d'achat respectivement. Ces résultats sont

126) Le choix pour cette base de comparaison a été motivé par le fait que le marché des options est plus étroit que le marché des titres sous-jacents.

127) Nous avons choisi ce second standard de comparaison afin de demeurer cohérents avec l'analyse effectuée pour l'avoir des actionnaires.

meilleurs que ceux obtenus à l'aide des deux autres modèles ainsi que ceux obtenus à l'aide du modèle de Black-Scholes.

Dans un souci de robustesse, nous avons calculé l'écart moyen et l'écart moyen cumulé des valeurs des options, prises ensemble, calculées à l'aide des modèles sous étude par rapport au « bid-ask » moyen le plus large et à la moyenne des prix haut et bas de la journée. Nous avons suivi l'évolution de cet écart pour une période de ±1 jour autour de la date de l'état financier de 2006 afin de vérifier lequel des trois modèles offre des résultats qui se rapprochent le plus du standard de comparaison. À cet égard, le modèle de Leland offre les écarts les plus faibles par rapport à ce standard. Cependant, après élimination des valeurs extrêmes et en considérant le « bid-ask » moyen le plus large de la journée comme standard de comparaison, le modèle de Sarkar et Zapatero donne l'écart moyen le plus faible (1,67%), suivi du modèle de Leland (-2,20%), puis du modèle de Goldstein, Ju et Leland (12,84%). Le modèle de Black-Scholes donne l'écart moyen le plus élevé (47,41%). En considérant la valeur moyenne des prix haut et bas de la journée comme standard de comparaison au lieu du « bid-ask » moyen le plus large de la journée, nous avons obtenu des résultats qui favorisent toujours le modèle de Sarkar et Zapatero.

Nous avons repris la même analyse aux dates respectives des états financiers de 2002 des compagnies analysées. Les résultats ont encore, en général, penché en faveur du modèle de Sarkar et Zapatero. De plus, le modèle de Black-Scholes continuait à afficher des performances inférieures à celles présentées par les modèles qui partent de la structure du capital.

Cela étant, l'analyse que nous avons effectuée dans cette thèse nous a permis de comparer trois modèles structurels dont deux utilisent le bénéfice avant intérêts et impôt comme variable d'état alors que le troisième utilisent l'actif total de la compagnie comme variable d'état. Nous avons pu montrer que dans le cas des deux premiers modèles, quand cette variable suit un processus de retour à la moyenne, les résultats de l'évaluation des actions et des options d'achat se rapprochaient le plus de l'évaluation du marché. C'est ainsi que nous avons pu constater que le modèle de Sarkar et Zapatero donne des résultats plus fiables que ceux présentés par les deux autres modèles. Pour cette raison, on pourrait le recommander pour évaluer l'avoir des actionnaires ainsi que les options d'achat écrites dessus.

Dans ce travail, nous avons mis l'accent sur des modèles qui partent de la structure du capital pour évaluer l'avoir des actionnaires ainsi que les options d'achat écrites sur cet avoir. En revanche, nous n'avons pas considéré les options de vente ni les options combinées. Il serait intéressant d'évaluer ce type d'option, en vue de généraliser les résultats obtenus à l'aide des modèles analysés.

D'autre part, nous n'avons pas considéré des options intégrées aux obligations émises par les compagnies évaluées, notamment les options de rachat et les options de conversion. Nous pensons que si ce volet est considéré dans l'analyse, ceci pourrait avoir un impact sur la relation d'arbitrage entre les déductions fiscales des intérêts et les coûts de faillite, ce qui influencerait les valeurs respectives des titres contingents ainsi que celles des options d'achat écrites sur ces titres. Par ailleurs, un autre sujet qui pourrait intéresser le chercheur est celui qui traite de l'effet de la volatilité sur la valeur marchande de la dette. L'intuition veut que cette valeur marchande baisse à mesure que le risque augmente.

Un autre sujet d'intérêt pourrait être l'analyse de la relation entre le levier optimal et la valeur de la compagnie. Sarkar et Zapatero considèrent que cette relation devrait être négative contrairement aux résultats basés sur la théorie de l'arbitrage. Les auteurs trouvent que le processus suivi par la variable d'état est à la base de cette conclusion. Nous pensons que c'est la variable d'état elle-même qui détermine le signe de cette relation. Le chercheur pourrait approfondir cette analyse en mettant l'accent sur les deux aspects pour déterminer avec précision les paramètres qui permettent d'expliquer cette relation.

ANNEXE A

ESTIMATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE SARKAR ET ZAPATERO (2003)

$$\frac{\Delta x}{x} = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x} + \tilde{\varepsilon}$$

Où

$\beta_0 = -k$

$\beta_1 = k\,\theta$

$\tilde{\varepsilon}$ est le terme d'erreur

Δx est une discrétisation de la dynamique de x.

En partant de cette dynamique, on peut écrire :

$dx = k(\theta - x)dt + \sigma x dz$

En discrétisant cette expression et en divisant par x, on obtient :

$$\frac{\Delta x}{x} = (-k + k\,\theta \frac{1}{x})\Delta t + \sigma \Delta z$$

En considérant des variations périodiques, on obtient comme premier terme :

$(-k + k\,\theta \frac{1}{x})$ et comme second terme $\tilde{\varepsilon}$. De là, la régression effectuée.

Comme dans Sarkar et Zapatero, si les gains suivent un processus de retour à la moyenne alors le terme β_0 doit être négatif. De plus, il faut que ce coefficient soit statistiquement significatif à un seuil raisonnable pour nous permettre de retenir la compagnie dans l'échantillon d'évaluation. Le terme β_1 doit être positif et significatif également. Les auteurs excluent de leur échantillon les compagnies dont les paramètres ne remplissent pas cette condition. Nous optons pour la même technique pour vérifier le processus suivi par la variable d'état avant de procéder à l'évaluation de l'avoir des actionnaires de la compagnie en question.

ANNEXE B

ÉQUATION DE LA VALEUR D'UNE COMPAGNIE SELON LE MODÈLE DE SARKAR ET ZAPATERO

Partant de l'hypothèse que la valeur d'une compagnie est égale à la valeur actuelle des flux monétaires que ses actifs sont susceptibles de générer, on peut écrire :

$$V(t)=E_t^Q((1-\tau)\int_0^{\infty} x_t e^{-rt} dt) \qquad \textbf{(B.1)}$$

Les termes τ et r sont supposés exogènes et x représente le bénéfice avant impôt et intérêts de la compagnie.

Le terme $(1-\tau)$ peut donc sortir de l'expression de l'espérance. Ainsi, l'équation **(B.1)** devient :

$$V(t)=\left[(1-\tau)\int_0^{\infty} E(x_t)e^{-rt}dt\right] \qquad \textbf{(B.2)}$$

Pour être en mesure d'intégrer cette expression, nous avons besoin de déterminer la valeur de $E(x_t)$. Pour cela, revenons à l'expression de la dynamique de x. Celle-ci se présente de la façon suivante :

$$d(x)=k(\theta-x)dt+\sigma dz \qquad \textbf{(B.3)}$$

Cette expression peut être réécrite de la façon suivante :

$$\frac{-d(\theta-x)}{(\theta-x)}=kdt+\frac{\sigma}{(\theta-x)}dz \qquad \textbf{(B.4)}$$

En considérant les espérances respectives des deux termes de l'égalité, on obtient :

$$E\left(\frac{-d(\theta-x)}{(\theta-x)}\right)=kdt \quad \text{(car } E(dz)=E(\varepsilon\sqrt{dt})=\sqrt{dt}\,E(\varepsilon)=0\text{)} \qquad \textbf{(B.5)}$$

En intégrant les deux termes de l'égalité, on obtient :

$$E\left(\ln(\theta-x)\right)_x^{x_t} = -\int kdt$$

En définitive, on obtient comme valeur de $E(x_t)$:

$$E(x_t)=\theta-(\theta-x)e^{-\int kdt} \qquad \textbf{(B.6)}$$

En intégrant, dans l'équation **(B.2),** le résultat trouvé en **(B.6)** , on obtient :

$$V(t)=(1-\tau)E_t^Q\left[\int_0^{\infty}\theta e^{-rt}dt-\int_0^{\infty}(\theta-x)e^{-kt}e^{-rt}dt\right] \qquad \textbf{(B.7)}$$

Cette expression évaluée entre 0 et l'infini possède comme solution :

$$V(t)=(1-\tau)E_t^Q\left[-\frac{\theta}{r}e^{-rt}\Big|_0^{\infty}+\frac{\theta}{(k+r)}e^{-(k+r)t}\Big|_0^{\infty}-\frac{x}{(k+r)}e^{-(k+r)t}\Big|_0^{\infty}\right] \qquad \textbf{(B.8)}$$

Soit après réarrangement des termes de l'expression (B.8) :

$$V(t)=(1-\tau)\left[\frac{\theta}{r}-\frac{\theta}{(k+r)}+\frac{x}{(k+r)}\right] \qquad \textbf{(B.9)}$$

Ce qui nous permet d'obtenir en définitive :

$$V(t)=(1-\tau)\left[\frac{\theta k}{r(k+r)}+\frac{x}{(k+r)}\right] \qquad \textbf{(B.10)}$$

L'expression ainsi obtenue représente l'équation de la valeur de la compagnie.

ANNEXE C

ÉQUATION DE LA VALEUR D'UNE COMPAGNIE SELON LE MODÈLE DE GOLDSTEIN, JU ET LELAND

Partant du fait que la valeur de la compagnie, lorsqu'elle demeure solvable, est égale à la somme actualisée des flux monétaires que génèrent ses actifs, on peut écrire :

$$V(t)=E_t^Q\left(\int_t^\infty ds\,\delta_s e^{-rxs}\right) \qquad \textbf{(C.1)}$$

Si on suppose que ces flux monétaires suivent un processus d'itô, cela nous permet d'écrire :

$$\frac{d\delta}{\delta}=\mu\, dt+\sigma dz \qquad \textbf{(C.2)}$$

Si on considère les espérances des deux termes de l'égalité, le terme aléatoire disparaît. Ceci nous permet d'écrire :

$$E\left(\frac{d\delta}{\delta}\right)=\mu\, dt \qquad \textbf{(C.3)}$$

En intégrant les deux termes de l'expression **(C.3)**, on obtient :

$$E\left(\frac{\delta_T}{\delta_t}\right)=e^{\mu(T-t)}\Rightarrow \delta_T=E(\delta_t)e^{\mu(T-t)} \qquad \textbf{(C.4)}$$

En mettant le résultat obtenu dans l'expression (C.1) et en considérant la perpétuité, cette expression devient :

$$V(t)=E_t^Q\left(\int_t^\infty ds\,\delta_t\, e^{-(r-\mu)xs}\right) \qquad \textbf{(C.5)}$$

Cette expression peut être réécrite de la façon suivante :

$$V(t)=-\frac{\delta_t}{r-\mu}E_t^Q\left(\int_t^\infty -(r-\mu)e^{-(r-\mu)xs}\right)ds \qquad \textbf{(C.6)}$$

car μ, r et δ_t sont constants.

En évaluant cette expression entre l'instant t et l'infini, on obtient :

$$V(t) = -\frac{\delta_t}{r-\mu} E_t^Q e^{-(r-\mu)xs} \Big|_t^{\infty} \quad \textbf{(C.7)}$$

Si on fait une translation de t à gauche, on obtient :

$$V(t) = -\frac{\delta_t}{r-\mu} E_t^Q (e^{-(r-\mu)x\infty} - 1) \quad \textbf{(C.8)}$$

soit en définitive :

$$V(t) = \frac{\delta_t}{r-\mu} \quad \textbf{(C.9)}$$

L'expression ainsi obtenue représente la valeur de la compagnie à perpétuité.

Ceci veut dire que la croissance instantanée des actifs peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\mu == r - \frac{\delta}{V} \quad \textbf{(C.10)}$$

ANNEXE D

ÉQUATION DE L'AVOIR DES ACTIONNAIRES D'UNE COMPAGNIE SELON LE MODÈLE DE GOLDSTEIN, JU ET LELAND

Selon Goldstein, Ju et Leland, la valeur de la compagnie lorsqu'elle demeure solvable, peut être répartie en trois composantes :

Le montant de la dette. Ce paramètre peut s'exprimer de la façon suivante :

1- $Dsolv=(1-\tau i)Vint$ **(D.1)**

Ceci représente le montant de la dette, net des déductions fiscales des intérêts.

2-Le montant qui va au gouvernement. Ce paramètre s'exprime de la façon suivante :

$Gsolv=\tau eff(Vsolv-Vint)+\tau iVint$ **(D.2)**

Ceci veut dire que le gouvernement reçoit des impôts sur la dette mais aussi sur les bénéfices d'exploitation. On obtient alors comme équation de l'avoir des actionnaires l'expression suivante :

$Esolv=Vsolv+Dsolv+Gsolv=(1-\tau eff)(Vsolv-V\,\mathrm{int})$ **(D.3)**

ANNEXE E

DERIVATIONS EN CHAINE

En utilisant les dérivations en chaîne, on détermine la valeur du facteur de dérivation qui se présente de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial k}=\frac{\partial}{\partial V}x\frac{\partial V}{\partial k} \qquad \textbf{(E.1)}$$

Si on opte pour le changement de variable suivant :

$V=e^{k}$

On obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial k}=V \qquad \textbf{(E.2)}$$

En intégrant ce résultat dans l'expression (E.1), celle-ci devient :

$$\frac{\partial}{\partial k}=\frac{\partial}{\partial V}xV \qquad \textbf{(E.3)}$$

La dérivée de l'expression (E.3) peut être obtenue de la façon suivante :

$$(\partial^2/\partial k^2)=\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial}{\partial V}xV\right) \qquad \textbf{(E.4)}$$

En développant cette expression, on obtient :

$$(\partial^2/\partial k^2)=\frac{\partial V}{\partial k}x\frac{\partial}{\partial V}+\left(\partial^2/\partial V^2x\partial V^2/\partial k^2xV\right) \qquad \textbf{(E.5)}$$

Ou encore :

$$(\partial^2/\partial k^2)=Vx\frac{\partial}{\partial V}+\left(\partial^2/\partial V^2x\partial V^2/\partial k^2xV\right) \qquad \textbf{(E.6)}$$

Or, $\partial V^2/\partial k^2=V$

Si on remplace dans l'expression (E.6), on obtient :

$$(\partial^2/\partial k^2)=\frac{\partial}{\partial V}xV+\left(\partial^2/\partial V^2xV^2\right) \qquad \textbf{(E.7)}$$

En soustrayant membre à membre, les termes de l'équation (E.7) de ceux de l'équation (E.3), on obtient :

$$(\partial^2/\partial k^2)-(\partial/\partial k)=\partial^2/\partial V^2*V^2 \qquad \textbf{(E.8)}$$

ANNEXE F

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE PARTIELLE DE L'AVOIR DES ACTIONNAIRES SELON LE MODÈLE DE LELAND, H. (1994)

Partant d'une variable aléatoire « x » qui suit un processus d'itô, on peut écrire :

$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$ **(F.1)**

En appliquant le théorème de Taylor au voisinage de « x », on obtient :

$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\, \partial f/\partial x + 1/2!(\Delta x)^2 \partial^2 f/\partial x^2 + R$

En négligeant le terme de troisième ordre, notre équation devient :

$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\, \partial f/\partial x + 1/2!(\Delta x)^2 \partial^2 f/\partial x^2$ **(F.2)**

Considérons maintenant une fonction « G » de « x ». En utilisant l'approximation de Taylor pour cette fonction, on obtient :

$\Delta G \approx (\partial G/\partial x)\, \Delta x + (\partial G/\partial t)\, \Delta t + ½(\partial^2 G/\partial x^2)\, \Delta x^2$ **(F.3)**

En discrétisant l'expression de « x », on obtient :

$\Delta x = a\Delta t + b\Delta z$

Ceci signifie que :

$$\begin{aligned}\Delta x^2 &= a^2\Delta t^2 + b^2\Delta z^2 + 2a\Delta t b\Delta z \\ &= b^2\varepsilon^2\Delta t + a^2\Delta t^2 + 2b\varepsilon\Delta t^{3/2}\end{aligned}$$

où $\varepsilon^2\Delta t = \Delta z^2$. Remarquons que quand $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta z^2 \rightarrow \Delta t$ et $\Delta x^2 \rightarrow b^2\Delta t$.

En introduisant ces résultats dans l'expression de la dynamique de « G », on obtient :

$\Delta G = (\partial G/\partial x)\, \Delta x + (\partial G/\partial t)\, \Delta t + ½(\partial^2 G/\partial x^2) b^2 \Delta t$ **(F.4)**

Ou encore, en situation continue :

$dG = (\partial G/\partial x)dx + (\partial G/\partial t)dt + ½(\partial^2 G/\partial x^2) b^2 dt$ **(F.5)**

<u>Équation différentielle partielle du modèle</u>

Partant de la dynamique de « V » qui se présente comme suit:

$dV = \mu V dt + \sigma V dz$ **(F.6)**

et considérant un titre dérivé « G » qui dépend de « V » et de « t » seulement, nous pouvons former un portefeuille réplique composé de :

-1 titre dérivé G ;

$(\partial G/\partial V)$ titres sous-jacents.

La valeur du portefeuille ainsi formé se présente alors de la façon suivante :

$$\Pi = -G + (\partial G/\partial V)V \tag{F.7}$$

Par ailleurs, une variation du portefeuille réplique dans un intervalle de temps de Δt produit un rendement sans risque de r, ce qui peut être exprimé de la façon suivante :

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \tag{F.8}$$

Soit en situation continue :

$$d\Pi = r\Pi dt \tag{F.9}$$

Par ailleurs, d'après l'équation (F.5), la dynamique de « G » peut être exprimée de la façon suivante :

$$dG = (\partial G/\partial V)\, dV + (\partial G/\partial t)\, dt + ½\, (\partial^2 G/\partial V^2)\sigma^2 V^2 dt \tag{F.10}$$

En remplaçant dG par cette expression, dans l'équation (F.7), celle-ci devient :

$$\begin{aligned} d\Pi &= d(-G + (\partial G/\partial V)V) = -d(G) + (\partial G/\partial V)dV \\ &= -((\partial G/\partial V)\, dV + (\partial G/\partial t)\, dt + ½\, (\partial^2 G/\partial V^2)\, \sigma^2 V^2 dt) + (\partial G/\partial V)dV \\ &= -((\partial G/\partial t)\, dt + ½\, (\partial^2 G/\partial V^2)\sigma^2 V^2 dt) \end{aligned} \tag{F.11}$$

En mettant égales les expressions (F.9) et (F.11), on obtient :

$$-((\partial G/\partial t)\, dt + ½\, (\partial^2 G/\partial V^2)\sigma^2 V^2 dt) = -r(-G + (\partial G/\partial V)V)dt$$

Soit pour un titre qui ne verse pas de coupon :

$$(\partial G/\partial t) + ½\, (\partial^2 G/\partial V^2)\, \sigma^2 V^2 + r(\partial G/\partial V)V = rG \tag{F.12}$$

Si on considère que les titres ne dépendent pas du temps en raison de la perpétuité et qu'ils versent un coupon continu, on obtient l'équation ordinaire suivante:

$$½\, (\partial^2 G/\partial V^2)\, \sigma^2 V^2 + r(\partial G/\partial V)V + C = rG \tag{F.13}$$

Une solution de cette équation serait la somme entre une solution homogène et une solution particulière. Trouvons d'abord la solution homogène du système. Pour cela, considérons l'équation suivante :

$(\frac{1}{2}\,(\partial^2/\partial V^2)\,\sigma^2V^2+r\,(\partial/\partial V)V\,-r)G = 0$ **(F.14)**

Faisons le changement de variable suivant:

$V=e^t$ **(F.15)**

En utilisant les dérivations en chaîne, on obtient :

$(\partial/\partial t) = \partial/\partial V * \partial V/\partial t = \partial/\partial V * V$ **(F.16)**

$(\partial^2/\partial t^2) = \partial^2/\partial V^2 * V^2 + \partial/\partial V * V$ **(F.17)**

En soustrayant (F.16) de (F.17), on obtient :

$(\partial^2/\partial t^2) - (\partial/\partial t) = \partial^2/\partial V^2 * V^2$ **(F.18)**

Pour simplifier le raisonnement, faisons le changement de variable suivant :

$(\partial/\partial t) = D$ **(F.19)**

L'équation (F.14) devient alors :

$(\frac{1}{2}\,\sigma^2\,(D^2-D)+rD-r)G = 0$ **(F.20)**

En mettant en évidence le terme (D-1), cette expression devient :

$(\frac{1}{2}\,\sigma^2\,(D-1)D+r(D-1))G = 0$ **(F.21)**

En réarrangeant les termes, on obtient :

$(\frac{1}{2}\,\sigma^2D\,+r)(D-1))G = 0$ **(F.22)**

Soit en définitive :

$(D\,+2r/\,\sigma^2)(D-1))G = 0$ **(F.23)**

L'équation (F.23) admet comme solution, l'expression suivante :

$G=A_1e^t+A_2e^{(-2r/\,\sigma2)*t}$ **(F.24)**

En remplaçant e^t par sa valeur, on obtient la solution du système homogène, qui se présente de la façon suivante :

$G=A_1V+A_2V^{-2r/\,\sigma2}$ **(F.25)**

Les solutions particulières dépendront des conditions terminales des titres contingents. La solution générale du système aura donc la forme suivante :

$G=A_0+A_1V+A_2V^{-2r/\,\sigma2}$ **(F.26)**

ANNEXE G

ÉQUATIONS RESPECTIVES DES TITRES CONTINGENTS SELON LE MODELE DE LELAND, H. (1994)

La solution générale du système se présente de la façon suivante :

$$G=A_0+A_1V+A_2V^{-2r/\sigma 2} \qquad \textbf{(G.1)}$$

Partant de là, nous pouvons déterminer les équations respectives des titres contingents.

Équation de la dette

Reprenons l'équation générale du système :

$$\tfrac{1}{2}\,(\partial^2 G/\partial V^2)\,\sigma^2 V^2+r\,(\partial G/\partial V)V+C=rG \qquad \textbf{(G.2)}$$

Une solution particulière de l'équation (G.2), dans le cas de la dette est $G = C/r$.

En effet, on vérifie facilement que les dérivées première et seconde de cette solution par rapport à V ($\partial^2 G/\partial V^2$ et $(\partial G/\partial V)$) sont toutes deux nulles, ce qui veut dire que c=G/r ou encore G=C/r. La solution globale de la dette peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$D = C/r + A_1V+A_2V^{-2r/\sigma 2} \qquad \textbf{(G.3)}$$

Pour déterminer les autres coefficients, nous considérerons les conditions terminales relatives à la dette. Ainsi :

$$\text{Si } V = V_B \textit{ alors } D(V) \rightarrow (1-\alpha)V_B \qquad \textbf{(G.4)}$$

$$\text{D'autre part, si } V \longrightarrow \infty \textit{ alors } D(V) \rightarrow \frac{C}{r} \qquad \textbf{(G.5)}$$

Quand $V=V_B$, l'équation (G.1) appliquée à la dette devient :

$$D = A_0 + A_1 V_B + A_2 V_B^{-2r/\sigma 2} = (1-\alpha)V_B \quad \textbf{(G.6)}$$

$$\text{Quand } V \to \infty,\ D(V) = \frac{C}{r} = A_0 + A_1 V + A_2 V^{-\frac{2r}{\sigma 2}} \quad \textbf{(G.7)}$$

Pour avoir une valeur finie de la dette, le terme A_1 doit s'annuler. Mais cette valeur finie est égale à $\frac{C}{r}$ à cause du terme en V ayant un exposant négatif.

En intégrant ces deux informations dans l'équation (G.6), on obtient l'expression de A_2 qui s'exprime alors de la façon suivante :

$$A_2 = \left[(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}\right] V_B^{2r/\sigma^2} \quad \textbf{(G.8)}$$

L'équation finale de la dette devient alors :

$$D(V) = A_0 + A_2 V^{-\frac{2r}{\sigma 2}} = \frac{C}{r} + \left[(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{2r/\sigma^2} \quad \textbf{(G.9)}$$

Équation des déductions fiscales des intérêts

Quand la compagnie tombe en faillite, les déductions fiscales sont perdues. Si par contre, elle demeure solvable, ce terme atteint son maximum. Ceci se traduit analytiquement de la façon suivante :

$$V = V_B \Rightarrow TB(V) = A_0 + A_1 V_B + A_2 V_B^{-2r/\sigma 2} = 0 \quad \textbf{(G.10)}$$

$$V \longrightarrow \infty \Rightarrow TB(V) = A_0 + A_1 V + A_2 V^{-2r/\sigma 2} \Rightarrow A_0 = \tau \frac{C}{r} \quad \textbf{(G.11)}$$

Là encore le terme A_1 doit s'annuler si on désire avoir une valeur finie des déductions fiscales des intérêts.

En intégrant le résultat de l'équation (G.11) dans l'équation (G.10), on obtient :

$$A_2 = -\tau \frac{C}{r} V_B^{2r/\sigma^2} \quad \textbf{(G.12)}$$

Ceci nous permet d'exprimer la solution finale des déductions fiscales des intérêts de la façon suivante :

$$TB(V)=\tau\frac{C}{r}-\tau\frac{C}{r}V_B^{2r/\sigma^2}V^{-2r/\sigma^2}=\tau\frac{C}{r}-\tau\frac{C}{r}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2} \quad \textbf{(G.13)}$$

Coûts de faillite

Si on considère que les coûts de faillite sont proportionnels à la valeur liquidative de la compagnie et que ces coûts n'interviennent qu'en cas d'insolvabilité de celle-ci, on peut écrire :

$$V=V_B \Rightarrow BC(V)=\alpha V_B \quad \textbf{(G.14)}$$

$$V \to \infty \Rightarrow BC(V)=0 \quad \textbf{(G.15)}$$

Encore une fois, pour éviter que la solution soit infinie, le terme A_1 doit s'annuler. Mais dans ce cas, il n'y a pas de faillite, ce qui veut dire que le terme A_0 s'annule aussi. On obtient alors une valeur du terme A_2 de :

$$\alpha V_B=A_2 V_B^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \Rightarrow A_2=\alpha V_B V_B^{\frac{2r}{\sigma^2}} \quad \textbf{(G.16)}$$

Et donc une valeur des coûts de faillite de :

$$BC(V)=A_2 V^{\frac{2r}{\sigma^2}}=\alpha V_B V_B^{\frac{2r}{\sigma^2}} V^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \quad \textbf{(G.17)}$$

Ou encore

$$BC(V)=\alpha V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \quad \textbf{(G.18)}$$

La valeur totale de la compagnie devient alors:

$$v(V)=V+TB(V)-BC(V)=V+\frac{\tau C}{r}\left[1-\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\right]-\alpha V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \quad \textbf{(G.19)}$$

En utilisant l'équation comptable, on peut écrire :

$$E(V)=V+\tau\frac{C}{r}\left[1-\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}\right]-\alpha V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}-D(V) \quad \textbf{(G.20)}$$

Soit, en remplaçant la dette par sa valeur obtenue précédemment :

$$E(V)=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2} \quad \textbf{(G.21)}$$

ANNEXE H

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE PARTIELLE D'UNE OPTION D'ACHAT SELON LE MODÈLE DE LELAND, H. (1994)

$$E=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left(\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right) \qquad \textbf{(H.1)}$$

"E" dépend uniquement de "V", ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial E}{\partial V}=\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right) \qquad \textbf{(H.2)}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right) \qquad \textbf{(H.3)}$$

En remplaçant, par sa valeur, chaque terme dans l'expression de "dE", on obtient :

$$dE=\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\mu V+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)dt+\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V dz \qquad \textbf{(H.4)}$$

Pour simplifier cette expression, posons :

$$a=\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\mu V+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right) \qquad \textbf{(H.5)}$$

et

$$b=\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V \qquad \textbf{(H.6)}$$

L'expression de "dE" devient alors :

$$dE=adt+bdz \qquad \textbf{(H.7)}$$

Si on considère une fonction f de E, cette fonction vaut au voisinage de E :

$$f(E+\Delta E)=f(E)+\Delta E\frac{\partial f}{\partial E}+\frac{1}{2!}\Delta E^2\frac{\partial^2 f}{\partial E^2}+R \qquad \textbf{(H.8)}$$

Si on retient l'approximation du second ordre, ce terme devient :

$$f(E+\Delta E)=f(E)+\Delta E\frac{\partial f}{\partial E}+\frac{1}{2!}\Delta E^2\frac{\partial^2 f}{\partial E^2} \qquad \textbf{(H.9)}$$

Calculons maintenant le terme $(\Delta E)^2$

En discrétisant les termes de l'équation (H-7), on obtient :

$$\Delta E = a\Delta t + b\Delta z \qquad \textbf{(H.10)}$$

En élevant cette expression au carré, on obtient:

$$\Delta E^2 = a^2\Delta t^2 + b^2\Delta z^2 + 2ab\,\Delta t\Delta z \qquad \textbf{(H.11)}$$

Ou encore :

$$\Delta E^2 = a^2\Delta t^2 + b^2\varepsilon^2\Delta t + 2ab\,\varepsilon\,\Delta t^{\frac{3}{2}} \qquad \textbf{(H.12)}$$

car $\varepsilon^2\Delta t = \Delta z^2$

Les termes déterministes en Δt d'ordres supérieurs à 1 vont disparaître mais le terme d'ordre 1 ne peut être ignoré car il comprend une composante stochastique.

Ainsi, quand $\Delta t \longrightarrow 0$, $\Delta z^2 \longrightarrow \Delta t$ et $\Delta E^2 \longrightarrow b^2\Delta t$

Si on remplace ΔE^2 par sa valeur dans l'équation, on obtient :

$$f(E+\Delta E) = f(E) + \Delta E\frac{\partial f}{\partial E} + \frac{1}{2!}b^2\Delta t\frac{\partial^2 f}{\partial E^2} \qquad \textbf{(H.13)}$$

Application du lemme d'itô

Soit « G » un instrument dérivé qui dépend uniquement de « E » et de « t ». En effectuant le développement de Taylor, on obtient :

$$\Delta G = \Delta E\frac{\partial G}{\partial E} + \Delta t\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2!}\Delta E^2\frac{\partial^2 G}{\partial E^2} + \Delta E\Delta t\,\frac{\partial^2 G}{\partial E\partial t} + \ldots \qquad \textbf{(H.14)}$$

Si on remplace, dans l'équation (H.14), ΔE et ΔE^2 par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$\Delta G = (a\Delta t + b\Delta z)\frac{\partial G}{\partial E} + \Delta t\,\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\Delta t\frac{\partial^2 G}{\partial E^2} \qquad \textbf{(H.15)}$$

En mettant cette expression en continu et en réarrangeant les termes, on obtient :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial E}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial E}bdz \qquad \textbf{(H.16)}$$

Considérons deux instruments financiers, "G_1" et "G_2", qui dépendent de "E".

Supposons que les deux instruments cités remplissent conditions de l'équation dynamique suivante :

$$dG = Gmdt + GsdW \qquad \textbf{(H.17)}$$

et formons un portefeuille réplique composé de :

"s_2G_2" de "G_1" et "- s_1G_1" de "G_2".

La valeur de notre portefeuille sera alors de :

$$\pi = S_2 G_2 G_1 - S_1 G_1 G_2 \qquad \textbf{(H.18)}$$

En différentiant cette expression et en la discrétisant, on obtient :

$$\Delta\pi = S_2 G_2 \Delta G_1 - S_1 G_1 \Delta G_2 \qquad \textbf{(H.19)}$$

En remplaçant "G_1" et "G_2" par leurs équations dynamiques respectives, on obtient :

$$\Delta\pi = S_2 G_2 \,(G_1 m_1 \Delta t + G_1 S_1 \Delta W) \; - S_1 G_1 (\, G_2 m_2 \Delta t + G_2 S_2 \Delta W) \qquad \textbf{(H.20)}$$

Après simplification, cette équation devient :

$$\Delta\pi = G_1\, G_2 (S_2 m_1 - S_1 m_2\,) \Delta t \qquad \textbf{(H.21)}$$

Or, notre portefeuille est neutre au risque. Ceci nous permet d'écrire :

$$\Delta\pi = r\,\pi\Delta t = r(S_2 G_2 G_1 - S_1 G_1 G_2) \Delta t \qquad \textbf{(H.22)}$$

En mettant égales les équations (H.21) et (H.22), on obtient :

$$(S_2 m_1 - S_1 m_2\,) = (r S_2 - r S_1\,) \qquad \textbf{(H.23)}$$

Ceci implique que :

$$S_2 (m_1 - r) = S_1 (m_2 - r\,) \qquad \textbf{(H.24)}$$

Cette égalité peut être réécrite de la façon suivante :

$$\frac{(m_1 - r)}{S_1} = \frac{(m_2 - r\,)}{S_2} \qquad \textbf{(H.25)}$$

Si on omet les indices, cette expression peut être écrite de la façon suivante :

$$\frac{m - r}{s} = \lambda \qquad \textbf{(H.26)}$$

L'expression obtenue représente le risque pour tout instrument financier qui se transige sur le marché. Or, on sait, d'après l'équation (H.16), que :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial E} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial E^2} b^2\right) dt + \frac{\partial G}{\partial E} b dz$$

Si on divise cette expression par le terme "G", on obtient :

$$\frac{dG}{G} = \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial E} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial E^2} b^2\right)}{G} dt + \frac{\frac{\partial G}{\partial E} b}{G} dz \qquad \textbf{(H.27)}$$

Or, nous avons établi précédemment que : $\frac{dG}{G}=mdt+sdW$

Ceci veut dire que :

$$m=\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2\right)}{G} \tag{H.28}$$

et

$$s=\frac{\frac{\partial G}{\partial E}b}{G} \tag{H.29}$$

En remplaçant "m" et "s" par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2\right)}{G}-\lambda\frac{\frac{\partial G}{\partial E}b}{G}=r \tag{H.30}$$

Ceci veut dire que :

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial E}(a-\lambda b)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2=rG \tag{H.31}$$

On est en contexte de neutralité au risque (λ**=0**) et "G" ne dépend pas de "t".

Ceci nous permet d'obtenir en définitive :

$$\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2=rG \tag{H.32}$$

ANNEXE I

ÉQUATIONS DES TITRES CONTINGENTS SELON LE MODÈLE DE GOLDSTEIN, JU ET LELAND

$$\frac{\partial G}{\partial V}\mu V+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial V^2}\sigma^2 V^2+P-rG=0 \qquad \textbf{(I.1)}$$

En considérant le système homogène et en mettant en évidence le terme "G", l'équation devient :

$$\left[\frac{1}{2}\sigma^2 V^2\frac{\partial^2}{\partial V^2}+\mu V\frac{\partial}{\partial V}-r\right]G=0 \qquad \textbf{(I.2)}$$

De la même manière que pour le modèle de Leland, on utilise les dérivations en chaîne et on fait le changement de variable suivant :

$$V=e^k$$

Ceci nous permet de récrire l'expression (I.2) de la façon suivante :

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2(D^2-D)+\mu D-r\right)G=0 \qquad \textbf{(I.3)}$$

L'expression ainsi obtenue, peut également être réécrite de la façon suivante :

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2 D^2+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)D-r\right)G=0 \qquad \textbf{(I.4)}$$

Nous nous retrouvons, alors, en présence d'une équation du second degré qui possède comme solutions les termes :

$$\alpha=\frac{-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sqrt{\left((\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)^2+(2r\sigma^2)\right)}}{\sigma^2} \qquad \textbf{(I.5)}$$

et

$$\beta=\frac{-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)-\sqrt{\left((\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)^2+(2r\sigma^2)\right)}}{\sigma^2} \qquad \textbf{(I.6)}$$

En intégrant les deux racines dans l'équation, cette dernière devient :

$$\left((D-\alpha)(D-\beta)\right)G=0 \qquad \textbf{(I.7)}$$

L'équation (I.7) admet pour solution, l'expression suivante :

$$G=A_1e^{k\alpha}+A_2e^{k\beta} \qquad \textbf{(I.8)}$$

En faisant le changement de variable inverse $e^{k}=V$ et en remplaçant dans l'équation (I.8), celle-ci devient :

$$G=A_1V^{-y}+A_2V^{-x} \quad \textbf{(I.9)}$$

où

$x=-\beta$ et $y=-\alpha$

En considérant une solution particulière, la solution générale du système devient :

$$G=A_0+A_1V^{-y}+A_2V^{-x} \quad \textbf{(I.10)}$$

Ceci nous permet de déterminer les expressions respectives des titres contingents

Équation de Vsolv

Solution particulière pour Vsolv

$$G_{PS}^{\delta}=V \quad \textbf{(I.11)}$$

car

$$(\partial G/\partial V)=1 \quad \textbf{(I.12)}$$

et

$$\partial^2G/\partial V^2=0 \quad \textbf{(I.13)}$$

La valeur de la compagnie lorsqu'elle demeure solvable devient :

$$Vsolv=V+A_1V^{-y}+A_2V^{-x} \quad \textbf{(I.14)}$$

Si $V>>V_B$, alors sa valeur sera égale à "Vsolv".

Or, les termes "x" et "y" à l'exposant possèdent respectivement des signes positif et négatif. Ceci veut dire que $A_1=\mathbf{0}$, autrement on aurait une valeur infinie de "Vsolv". Ainsi, l'équation devient :

$$Vsolv=V+A_2V^{-X} \quad \textbf{(I.15)}$$

Si maintenant la compagnie tombe en faillite, ce qui signifie qu'elle n'est plus solvable, elle disparaît . Ceci nous permet d'écrire :

$$0=V_B+A_2V_B^{-x}. \quad \textbf{(I.16)}$$

Il s'en suit une valeur de "A_2" égale à :

$$A_2 = -V_B \, V_B^{x} \quad \textbf{(I.17)}$$

D'où la solution finale de Vsolv :

$$Vsolv = V - V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x} \quad \textbf{(I.18)}$$

Équation de Vint

Solution particulière pour Vint

$$G = \frac{C}{r} \quad \textbf{(I.19)}$$

car

$$(\partial G/\partial V) = 0 \quad \textbf{(I.20)}$$

et

$$\partial^2 G/\partial V^2 = 0 \quad \textbf{(I.21)}$$

Vint est une solution du système. Cette solution peut être exprimée de la façon suivante :

$$V\text{int} = A_0 + A_1 V^{-y} + A_2 V^{-x} \quad \textbf{(I.22)}$$

Le terme "A_1" est nul sinon on aurait une solution infinie de "Vint" étant donné que le terme "y" est positif comme on l'a signalé précédemment.

En remplaçant chaque terme par sa valeur dans l'équation, celle-ci devient :

$$V\text{int} = \frac{C}{r} + A_2 V^{-x} \quad \textbf{(I.23)}$$

Si par contre, la compagnie tombe en faillite, sa valeur liquidative tombe au niveau de " V_B " et elle disparaît. Ceci peut être exprimé analytiquement par l'expression suivante :

$$0 = \frac{C}{r} + A_2 V_B^{-x} \quad \textbf{(I.24)}$$

ce qui signifie que le terme "A_2" prend la valeur suivante :

$$A_2 = -\frac{C}{r} V_B^{x} \quad \textbf{(I.25)}$$

D'où la solution de Vint :

$$V\text{int}=\frac{C}{r}\left[1-\left(\frac{\text{V}}{\text{V}_{\text{B}}}\right)^{-x}\right] \quad \textbf{(I.26)}$$

Équation de l'avoir des actionnaires

La valeur totale de la compagnie, lorsqu'elle demeure solvable, est formée de trois composantes :

La dette : $D=(1-\tau_i)xV\text{int}$ **(I.27)**

Les impôts : $G=\tau x\left(Vsolv-V\text{int}\right)+\tau_i xV\text{int}$ **(I.28)**

Et l'avoir des actionnaires : $E=(1-\tau)(Vsolv-V\text{int})$ **(I.29)**

En remplaçant "Vsolv"et "Vint" par leurs expressions respectives, on obtient comme équation de l'avoir des actionnaires, l'expression suivante :

$$E=(1-\tau)\left(V-\text{V}_{\text{B}}\left(\frac{\text{V}}{\text{V}_{\text{B}}}\right)^{-x}-\frac{C}{r}\left[1-\left(\frac{\text{V}}{\text{V}_{\text{B}}}\right)^{-x}\right]\right) \quad \textbf{(I.30)}$$

En mettant en évidence le terme $\left(\frac{\text{V}}{\text{V}_{\text{B}}}\right)^{-x}$, l'expression (I.29) devient :

$$E=(1-\tau)\left(V+\left(\frac{\text{V}}{\text{V}_{\text{B}}}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-\text{V}_{\text{B}}\right)-\frac{C}{r}\right) \quad \textbf{(I.31)}$$

ANNEXE J

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE PARTIELLE REMPLIE PAR UNE OPTION D'ACHAT SELON LE MODÈLE DE GOLDSTEIN, JU ET LELAND

Partant de l'équation dynamique de l'avoir des actionnaires qui se présente de la façon suivante :

$$dE = adt + bdz \tag{J.1}$$

On montre, de la même manière qu'on l'a fait pour Leland, qu'une fonction évaluée au voisinage de « E » peut être exprimée de la façon suivante :

$$f(E+\Delta E) = f(E) + \Delta E \frac{\partial f}{\partial E} + \frac{1}{2!} b^2 \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial E^2} \tag{J.2}$$

En appliquant le lemme d'itô, en utilisant un portefeuille réplique, et en considérant la perpétuité, on obtient comme équation d'une option d'achat écrite sur la valeur de l'avoir des actionnaires, l'expression suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial E} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial E^2} b^2 = rG \tag{J.3}$$

où

$$a = \left((1-\tau)\left(1 - \frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r} - V_B\right) \right)(rV - \delta) + \frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2} + \frac{x^2}{V^2} \right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x} \right)\left(\frac{C}{r} - V_B\right)\sigma^2 V^2 \right) \tag{J.4}$$

$$b = (1-\tau)\left(1 - \frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r} - V_B\right) \right)\sigma V \tag{J.5}$$

ANNEXE K

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE PARTIELLE REMPLIE PAR L'AVOIR DES ACTIONNAIRES SELON LE MODÈLE DE SARKAR ET ZAPATERO

Dynamique du modèle :

$$dx = k(\theta - x)dt + \sigma x dz \tag{K.1}$$

En remplaçant les termes $"k(\theta-x)"$ et $"\sigma x"$ par les termes "a" et "b" respectivement, cette expression devient :

$$dx = adt + bdz\,. \tag{K.2}$$

De la même manière que pour le modèle de Leland, on vérifie qu'une fonction évaluée au voisinage de « x » peut être exprimée de la façon suivante :

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2!} b^2 \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{K.3}$$

En appliquant le lemme d'itô, en utilisant un portefeuille réplique, et en considérant la perpétuité, on obtient :

$$\frac{\partial D}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} b^2 = rD \tag{K.4}$$

Ou encore :

$$\frac{1}{2} b^2 D'' + aD' - rD = 0 \tag{K.5}$$

Si on remplace les termes "a" et "b" par leurs expressions respectives, l'équation (K.5) devient :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 D'' + k(\theta - x)D' - rD = 0\,. \tag{K.6}$$

Développement en série de puissances :

Les solutions de notre système ont la forme suivante :

$$D(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^{-n+\gamma} \tag{K.7}$$

Les dérivées première et seconde de ce terme peuvent être exprimées respectivement de la façon suivante :

$$D'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-n+\gamma)b_n\, x^{-n-1+\gamma} \tag{K.8}$$

$$D''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n-\gamma)(n+1-\gamma)b_n\, x^{-n-2+\gamma} \tag{K.9}$$

En intégrant ces résultats dans l'expression (K.6), celle-ci devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n-\gamma)(n+1-\gamma)b_n\, x^{-n-2+\gamma}+k(\theta-x)\sum_{n=0}^{\infty}(-n+\gamma)b_n\, x^{-n+\gamma-1}-r\sum_{n=0}^{\infty}b_n\, x^{-n+\gamma}=0 \tag{K.10}$$

Cette équation peut également être écrite de la façon suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-\gamma)(n+1-\gamma)b_n\, x^{-n-2+\gamma}+\frac{2k}{\sigma^2}\frac{(\theta-x)}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-n+\gamma)b_n\, x^{-n-1+\gamma}-\frac{2r}{\sigma^2 x^2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\, x^{-n+\gamma}=0 \tag{K.11}$$

Ou encore :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-\gamma)(n+1-\gamma)b_n\, x^{-n-2+\gamma}-\frac{2k\theta}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n-\gamma)b_n\, x^{-n-3+\gamma}+\frac{2k}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n-\gamma)b_n\, x^{-n-2+\gamma}-\frac{2r}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\, x^{-n-2+\gamma}=0 \tag{K.12}$$

En développant l'expression (K.12), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-\gamma)(n+1-\gamma)b_n\, x^{-n-2+\gamma}-\frac{2k\theta}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n-\gamma)b_n\, x^{-n-3+\gamma}+\frac{2k}{\sigma^2}\sum_{n=1}^{\infty}(n-\gamma)b_n\, x^{-n-2+\gamma}-\frac{2r}{\sigma^2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\, x^{-n-2+\gamma}+$$

$$\gamma(\gamma-1)b_0\, x^{\gamma-2}-\frac{2k}{\sigma^2}\gamma b_0\, x^{\gamma-2}-\frac{2r}{\sigma^2}b_0\, x^{\gamma-2}=0 \tag{K.13}$$

En effectuant une translation d'indices, l'expression (K.13) devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)(n+2-\gamma)b_{n+1}\, x^{-n-3+\gamma}-\frac{2k\theta}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n-\gamma)b_n\, x^{-n-3+\gamma}+\frac{2k}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)b_{n+1}\, x^{-n-3+\gamma}-\frac{2r}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}\, x^{-n-3+\gamma}+$$

$$(\gamma(\gamma-1)b_0-\frac{2k}{\sigma^2}\gamma b_0-\frac{2r}{\sigma^2}b_0)x^{\gamma-2}=0 \tag{K.14}$$

En mettant ensemble les polynômes de même degré, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)(n+2-\gamma)b_{n+1}\, x^{-n-3+\gamma}-\frac{2k\theta}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n-\gamma)b_n\, x^{-n-3+\gamma}+\frac{2k}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\gamma)b_{n+1}\, x^{-n-3+\gamma}-\frac{2r}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}\, x^{-n-3+\gamma}=0 \tag{K.15}$$

et

$$(\gamma(\gamma-1)b_0-\frac{2k}{\sigma^2}\gamma b_0-\frac{2r}{\sigma^2}b_0)=0 \qquad \textbf{(K.16)}$$

Or b_0 est non nul. Ceci voudrait dire que :

$$(\gamma(\gamma-1)-\frac{2k}{\sigma^2}\gamma-\frac{2r}{\sigma^2})=0 \qquad \textbf{(K.17)}$$

En réarrangeant les termes, cette équation devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)-k\gamma-r=0 \qquad \textbf{(K.18)}$$

Cette expression peut être réécrite de la façon suivante :

$$\gamma^2-(1+\frac{2k}{\sigma^2})\gamma-\frac{2r}{\sigma^2}=0 \qquad \textbf{(K.19)}$$

La solution négative de ce système se présente de la façon suivante :

$$\gamma=\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2} \qquad \textbf{(K.20)}$$

En éliminant les coefficients de l'équation (K.15), celle-ci devient :

$$\left[(n+(1-\gamma))((n+2)-\gamma)+\frac{2k}{\sigma^2}(n+1-\gamma)-\frac{2r}{\sigma^2}\right]b_{n+1}-\frac{2k\theta}{\sigma^2}(n-\gamma)b_n=0 \qquad \textbf{(K.21)}$$

Ou encore :

$$\left[(n(n+2-\gamma)+(1-\gamma)(n+2))+\gamma(\gamma-1)+\frac{2k}{\sigma^2}(n+1)-\frac{2k}{\sigma^2}\gamma-\frac{2r}{\sigma^2}\right]b_{n+1}=\frac{2k\theta}{\sigma^2}(n-\gamma)b_n \qquad \textbf{(K.22)}$$

Or

$$\gamma(\gamma-1)-\frac{2k}{\sigma^2}\gamma-\frac{2r}{\sigma^2}=0$$

Ceci nous permet de récrire l'expression (K.22) de la façon suivante :

$$\left[(n(n+2-\gamma)+(1-\gamma)(n+2)+\frac{2k}{\sigma^2}(n+1)\right]b_{n+1}=\frac{2k\theta}{\sigma^2}(n-\gamma)b_n \qquad \textbf{(K.23)}$$

Relation d'induction

Pour n = 0

L'équation (K.23) devient :

$$\left[2(1-\gamma)+\frac{2k}{\sigma^2}\right]b_1=-\frac{2k\theta}{\sigma^2}\gamma b_0 \qquad \textbf{(K.24)}$$

En isolant le terme b_1, on obtient :

$$b_1=\frac{2k\theta}{\sigma^2}b_0\frac{-\gamma}{\left[2(1-\gamma)+\frac{2k}{\sigma^2}\right]} \quad \textbf{(K.25)}$$

Appelons $-\gamma \rightarrow \alpha$ et $\left[2(1-\gamma)+\frac{2k}{\sigma^2}\right] \rightarrow \beta$

L'expression du terme b_1 devient :

$$b_1=\frac{2k\theta}{\sigma^2}b_0\frac{\alpha}{\beta} \quad \textbf{(K.26)}$$

Poursuivons notre raisonnement pour les termes d'indices supérieurs.

Ainsi, pour n = 1, on obtient :

$$b_2=\frac{2k\theta}{\sigma^2}b_1\frac{(1-\gamma)}{\left[3-\gamma+3-3\gamma+2\frac{2k}{\sigma^2}\right]}=\frac{(1-\gamma)}{2\left[3-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2}\right]}\frac{2k\theta}{\sigma^2}b_1=\frac{(1+\alpha)}{[1+\beta]}\frac{2k\theta}{\sigma^2}\frac{b_1}{2} \quad \textbf{(K.27)}$$

En remplaçant, le terme "b_1" par sa valeur, l'expression (K.27) devient :

$$b_2=\frac{\alpha(1+\alpha)}{\beta[1+\beta]}\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)^2\frac{b_0}{2!} \quad \textbf{(K.28)}$$

En poursuivant le raisonnement par récurrence, on obtient l'expression du terme général en fonction du premier terme de la série. Ce terme se présente de la façon suivante :

$$b_{n+1}=\frac{\alpha(1+\alpha)......(n+\alpha)}{\beta[1+\beta].........[n+\beta]}\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)^n\frac{b_0}{n!} \quad \textbf{(K.29)}$$

Or

$$D(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n+\gamma}$$

En développant ce terme, on obtient :

$$D(x)=x^\gamma b_0\left[1+\frac{b_1}{b_0}x^{-1}+\frac{b_2}{b_0}x^{-2}+....+\frac{b_{n+1}}{b_0}x^{-n}\right] \quad \textbf{(K.30)}$$

Remplaçons maintenant les termes de cette somme par leurs valeurs respectives obtenues à partir du développement en série. Ceci nous permet d'écrire :

$$D(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^{-n+\gamma}=x^\gamma b_0\left[1+\frac{2k\theta}{\sigma^2}\frac{\alpha}{\beta}x^{-1}+\frac{\alpha(1+\alpha)}{\beta[1+\beta]}\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)^2\frac{x^{-2}}{2!}+....+\frac{\alpha(1+\alpha)......(n+\alpha)}{\beta[1+\beta]........[n+\beta]}\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)^n\frac{x^{-n}}{n!}\right] \quad \textbf{(K.31)}$$

Posons :

$$M(x)=\left[1+\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(1+\alpha)}{\beta[1+\beta]}\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}\right)^2\frac{1}{2!}+....+\frac{\alpha(1+\alpha)......(n+\alpha)}{\beta[1+\beta]........[n+\beta]}\left(\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}\right)^n\frac{1}{n!}\right]. \quad \textbf{(K.32)}$$

L'équation de D(x) devient alors :

$$D(x)=x^{\gamma}b_0M(x) \quad \textbf{(K.33)}$$

Or, nous avons prouvé que le terme "γ" pouvait prendre deux valeurs distinctes.

D'où la solution du système homogène :

$$D(x)=D_0+D_1x^{\gamma_1}M_1(x)+D_2x^{\gamma_2}M_2(x) \quad \textbf{(K.34)}$$

où

$\gamma_1>0$ et $\gamma_2<0$ sont les racines de l'équation : $\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)-k\gamma-r=0$

et

$$M_1(x)=M\left(-\gamma_1,2-2\gamma_1+\frac{2k}{\sigma^2};\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}\right)$$

$$M_2(x)=M\left(-\gamma_2,2-2\gamma_2+\frac{2k}{\sigma^2};\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}\right)$$

Ou, si on omet les indices :

$$M(\alpha,\beta;z)=1+\frac{\alpha}{\beta}z+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\frac{z^2}{2!}+.....$$

Convergence de M(X)

On peut voir que quand $k=0$ et/ou $\theta=0$, le terme $z=\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}$ s'annule également, ce qui veut dire que :

$$M(\alpha,\beta;z)=1+\frac{\alpha}{\beta}z+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\frac{z^2}{2!}+..\to 1 \quad \textbf{(K.35)}$$

Par ailleurs, nous avons trouvé que :

$$\gamma=-\alpha=\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2} \quad \textbf{(K.36)}$$

Nous savons aussi, d'après la définition de M(x), que :

$$\beta = 2 - 2x\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2}) - \sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2 + \frac{8r}{\sigma^2}}}{2} + \frac{2k}{\sigma^2} = 1 + \sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2 + \frac{8r}{\sigma^2}} \tag{K.37}$$

$$\alpha = -\gamma = \frac{\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2 + \frac{8r}{\sigma^2}} - (1+\frac{2k}{\sigma^2})}{2} < \frac{\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2 + \frac{8r}{\sigma^2}}}{2} < \sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2 + \frac{8r}{\sigma^2}} < 1 + \sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2 + \frac{8r}{\sigma^2}} = \beta \tag{K.38}$$

Nous en concluons que le terme "α" est toujours inférieur au terme "β". Par ailleurs, le n$^{\text{ième}}$ coefficient de M(x), peut être exprimé de la façon suivante :

$$\frac{\alpha(\alpha+1).......(\alpha+n)}{\beta(\beta+1)......(\beta+n)} \tag{K.39}$$

À travers cette expression, nous pouvons voir que quand le terme "n" tend vers l'infini, le terme "$\frac{(\alpha+n)}{(\beta+n)}$" tend vers 1. Nous en déduisons que les coefficients de l'expression de M(x) ne s'éloignent jamais de 1. Or, nous venons de démontrer que le terme "α " est inférieur au terme "β". Ceci nous permet de majorer les coefficients de M(x) par 1. D'où, l'approximation de M(x) :

$$M(\gamma, b; z) \rightarrow 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... \tag{K.40}$$

L'expression, ainsi obtenue, représente le développement limité de la fonction exponentielle. Nous obtenons ainsi une borne supérieure pour le terme M(x). Cette borne peut être exprimée de la façon suivante :

$$M(x) \rightarrow M'(x) = e^{z} = e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}} \tag{K.41}$$

Si on donne à "k" la valeur 0 dans cette expression, on voit bien que cette dernière converge vers 1 soit la solution de M(x) quand $k \rightarrow 0$.

Également, quand x tend vers l'infini les deux expressions tendent vers 1. Ceci nous permet de conclure que les termes $M(x)$ *et* $M'(x)$ ont des bornes inférieure et supérieure identiques et que l'un tend vers l'autre à l'infini. Nous pouvons donc dire qu'ils sont identiques. D'autre part, nous avons émis l'hypothèse que la compagnie demeurait solvable indéfiniment. Ceci nous permet d'affirmer que les deux termes tendent vers leurs bornes supérieures respectives. Nous en concluons donc que :

$$M(x) \rightarrow e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}} \quad \textbf{(K.42)}$$

Et puisque les termes " k " et " θ " sont finis et que " σ " et " x " sont au dénominateur de l'expression (K.42), l'expression de M(x) converge, nécessairement, à l'infini. Ceci nous permet de dériver des expressions plus explicites, des titres remplissant les conditions de l'équation différentielle partielle du modèle. Il s'agit de la dette, des déductions fiscales des intérêts et des coûts de faillite. Ces expressions deviennent respectivement pour les titres cités :

$$D(x)=\frac{C}{r}+\left[(1-\alpha)(V_1 x_L+V_2)-\frac{C}{r}\right]e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_L})}\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}} \quad \textbf{(K.43)}$$

$$TB=\frac{\tau C}{r}-\frac{\tau C}{r}e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_L})}\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}} \quad \textbf{(K.44)}$$

$$BC=\alpha\left[x_L V_1+V_2\right]e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_L})}\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}} \quad \textbf{(K.45)}$$

Or

$$V(t)=(1-\tau)\left[\frac{\theta k}{r(k+r)}+\frac{x}{(k+r)}\right]=v_1 x+v_2 \quad \textbf{(K.46)}$$

On obtient ainsi comme expression de l'avoir des actionnaires :

$$E=v_1 x+v_2-(1-\tau)\frac{C}{r}-\left[v_1 x_L+v_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_L})}\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\frac{(1+\frac{2k}{\sigma^2})-\sqrt{(1+\frac{2k}{\sigma^2})^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}} \quad \textbf{(K.47)}$$

ANNEXE L

EXPRESSION DES BÉNÉFICES AVANT IMPÔT ET INTÉRÊTS EN CAS DE FAILLITE, SELON LE MODÈLE DE SARKAR ET ZAPATERO

$$E = v_1 x + v_2 - (1-\tau)\frac{C}{r} - \left[v_1 x_L + v_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left[\frac{M(x)}{M(x_L)}\right]\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\gamma} \quad \textbf{(L.1)}$$

En maximisant "E" conditionnellement à "V_B" et en l'évaluant au point "x_L", on obtient :

$$\left.\frac{\partial E}{\partial x}\right|_{xL} = v_1 - \left[v_1 x_L + v_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left[\frac{M'(x_L)}{M(x_L)} + \frac{\gamma}{x_L}\right]\left(\frac{x_L}{x_L}\right)' = 0 \quad \textbf{(L.2)}$$

Expression dont l'opposée peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{M'(x_L)}{M(x_L)} + \frac{\gamma}{x_L} - \frac{v_1}{\left[v_1 x_L + v_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}\right]} = 0 \quad \textbf{(L.3)}$$

Or

$$M\left(-\gamma, 2-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2}, \frac{2k\theta}{\sigma^2 x}\right) = 1 + \frac{-\gamma}{2-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2}} * \frac{2k\theta}{\sigma^2 x} + \frac{1}{2!}\frac{-\gamma(1-\gamma)}{(2-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})(3-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})} * \left(\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{-\gamma(1-\gamma)*\ldots*(n-\gamma)}{(2-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})(3-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})*\ldots*(n-1-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})} * \left(\frac{2k\theta}{\sigma^2 x}\right)^n \quad \textbf{(L.4)}$$

En dérivant cette expression et en l'évaluant au point "x_L", on obtient :

$$M'\left(-\gamma, 2-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2}; \frac{2k\theta}{\sigma^2 x_L}\right) = \frac{\gamma}{2-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2}} * \frac{2k\theta}{\sigma^2 x_L^2} + \frac{\gamma(1-\gamma)}{(2-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})(3-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})} * \left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)^2 x_L^{-3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\frac{\gamma(1-\gamma)*\ldots*(n-\gamma)}{(2-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})(3-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})*\ldots*(n-1-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})} * \left(\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right)^n x_L^{-(n+1)} \quad \textbf{(L.5)}$$

En factorisant par le terme $\frac{\gamma k\theta}{\left[(1-\gamma)\sigma^2+k\right]x_L^2}$, l'expression de M'(x) devient :

$$M'\left(-\gamma, 2-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2}; \frac{2k\theta}{\sigma^2 x_L}\right) = \frac{\gamma k\theta}{\left[(1-\gamma)\sigma^2+k\right]x_L^2}\left[1 + \frac{1}{2!}\frac{(1-\gamma)}{(3-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})} * \left(\frac{2k\theta}{\sigma^2 x_L}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\frac{(1-\gamma)*\ldots*(n-1-\gamma)}{(3-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})*\ldots*(n-2-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2})} * \left(\frac{2k\theta}{\sigma^2 x_L}\right)^{n-1}\right] \quad \textbf{(L.6)}$$

Cette expression peut être écrite de la façon suivante :

$$\frac{\gamma k\theta}{\left[(1-\gamma)\sigma^2+k\right]x_L^2} M\left(1-\gamma, 3-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2}; \frac{2k\theta}{\sigma^2 x_L}\right) \quad \textbf{(L.7)}$$

Ceci veut dire que :

$$\frac{M(1-\gamma, 3-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2}, \frac{2k\theta}{\sigma^2 x_l})}{M(x_L)} + \frac{1}{\frac{\gamma k\theta}{[(1-\gamma)\sigma^2+k]x_L^2}}\left(\frac{\gamma}{x_L} - \frac{v_1}{\left[v_1 x_L + v_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}\right]}\right) = 0 \qquad \textbf{(L.8)}$$

$$\frac{M(1-\gamma, 3-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2}, \frac{2k\theta}{\sigma^2 x_l})}{M(-\gamma, 2-2\gamma+\frac{2k}{\sigma^2}, \frac{2k\theta}{\sigma^2 x_L})} + \frac{\gamma x_l - \left[\frac{V_1(x_l)^2}{V_1 X_L + V_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}}\right]}{\frac{\gamma k\theta}{[(1-\gamma)\sigma^2+k]}} = 0 \qquad \textbf{(L.9)}$$

Or, nous avons établi que les termes M(xi) tendaient vers 1 à l'infini et ce, quelle que soit la valeur que pouvait prendre "x". Le terme gauche de la première partie de l'équation tend donc nécessairement vers 1. Ceci nous permet d'écrire :

$$\gamma x_L - \left[\frac{V_1(x_L)^2}{V_1 X_L + V_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}}\right] = -\frac{\gamma k\theta}{[(1-\gamma)\sigma^2+k]} \qquad \textbf{(L.10)}$$

L'égalité, ainsi obtenue, peut être transformée en une équation de degré 2 de terme "x_L". Cette équation peut être exprimée de la façon suivante :

$$(1-\gamma)V_1(x_L)^2 - \gamma\left[\frac{k\theta}{[(1-\gamma)\sigma^2+k]}V_1 + V_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}\right]x_l - \left[\frac{\gamma k\theta\left(V_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right)}{[(1-\gamma)\sigma^2+k]}\right] = 0 \qquad \textbf{(L.11)}$$

L'équation (L.11) admet comme solution, l'expression suivante :

$$x_L = \frac{a\left[\frac{k\theta}{[(1-a)\sigma^2+k]}V_1 + V_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}\right] \pm \sqrt{\Delta}}{2(1-a)V_1} \qquad \textbf{(L.12)}$$

où

$$\Delta = \left[a\left(\frac{k\theta}{[(1-a)\sigma^2+k]}V_1 + V_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}\right)\right]^2 + 4(1-a)V_1\left[\frac{ak\theta\left(V_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right)}{[(1-a)\sigma^2+k]}\right] \qquad \textbf{(L.13)}$$

ANNEXE M

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE PARTIELLE REMPLIE PAR UNE OPTION D'ACHAT SELON LE MODÈLE DE SARKAR ET ZAPATERO

$$dE=\left(\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial V}\left(k(V_1\theta-V)+V_2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2(V-V_2)^2\right)dt+\frac{\partial E}{\partial V}\sigma(V-V_2)dz \tag{M.1}$$

Pour simplifier le raisonnement, posons :

$$dE=adt+bdz \tag{M.2}$$

De la même manière que pour le modèle de Leland, on vérifie qu'une fonction évaluée au voisinage de « E » peut être exprimée de la façon suivante :

$$f(E+\Delta E)=f(E)+\Delta E\frac{\partial f}{\partial E}+\frac{1}{2!}b^2\Delta t\frac{\partial^2 f}{\partial E^2} \tag{M.3}$$

En appliquant le lemme d'itô, en utilisant un portefeuille réplique et en considérant la perpétuité, on obtient l'équation ordinaire remplie par une option d'achat écrite sur l'avoir des actionnaires selon Sarkar et Zapatero. Cette équation s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial E}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}b^2=rG \tag{M.4}$$

où :

$$a=\left(\frac{\partial E}{\partial V}\left(k(V_1\theta-V)+V_2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2(V-V_2)^2\right) \tag{M.5}$$

et

$$b=\frac{\partial E}{\partial V}\sigma(V-V_2) \tag{M.6}$$

où

$$\frac{\partial E}{\partial V}=1+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*\left[\Omega+\Psi+\Delta\right]$$

$$\Omega=\left[\frac{4k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^3}-\frac{\gamma}{(V-V_2)^2}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}$$

$$\Psi=\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]x\frac{\gamma}{(V_B-V_2)^{\gamma}}\left[V-V_2\right]^{\gamma-1}xe^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}$$

$$\Delta=\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]*\frac{-1}{(V-V_2)^2}*\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)}$$

ANNEXE N

ÉQUATIONS RESPECTIVES DES TITRES CONTINGENTS SELON SARKAR ET ZAPATERO

Solution du système homogène

$$D(x)=D_0+D_1 x^{\gamma_1} M_1(x)+D_2 x^{\gamma_2} M_2(x) \qquad \textbf{(N.1)}$$

$\gamma_1>0$ et $\gamma_2<0$ sont les racines de l'équation : $\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)-k\gamma-r=0$

Pour éviter d'avoir des solutions infinies, le terme D_1 doit s'annuler.

La solution du système devient alors :

$$D(x)=D_0+D_2 x^{\gamma_2} M_2(x) \qquad \textbf{(N.2)}$$

Les solutions des titres contingents dépendent de leurs conditions terminales respectives.

Équation de la dette

Reprenons l'équation du modèle pour un titre qui verse un coupon continu

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D''+k(\theta-x)D'-rD+C=0 \qquad \textbf{(N.3)}$$

On voit que $D=\frac{C}{r}$ est une solution du système étant donné que les dérivées première et seconde par rapport à C sont nulles.

L'équation de la dette se présente alors de la façon suivante :

$$D(x)=\frac{C}{r}+D_2 x^{\gamma_2} M_2(x) \qquad \textbf{(N.4)}$$

En effet, quand x tend vers l'infini, la dette tend vers sa valeur perpétuelle.

D'autre part, quand x tend vers x_L, la valeur liquidative nette de la compagnie devient :

$$(1-\alpha)VB=(1-\alpha)(V_1 x_L+V_2)\,. \qquad \textbf{(N.5)}$$

C'est ce que reçoivent les détenteurs de la dette en cas de faillite. Mais la valeur de cette dette peut, également, s'exprimer de la façon suivante :

$$D(x_L)=\frac{C}{r}+D_2 x_L^{\gamma_2} M_2(x) \quad \textbf{(N.6)}$$

En mettant égales les deux équations, on obtient :

$$\frac{C}{r}+D x_L^{\gamma} M(x_L)=(1-\alpha)(V_1 x_L+V_2) \quad \textbf{(N.7)}$$

Ceci veut dire que le terme D prend la valeur suivante :

$$D=\frac{(1-\alpha)(V_1 x_L+V_2)-\frac{C}{r}}{x_L^{\gamma} M(x_L)} \quad \textbf{(N.8)}$$

En intégrant ce résultat dans l'équation de la dette, on obtient :

$$D(x)=\frac{C}{r}+\frac{(1-\alpha)(V_1 x_L+V_2)-\frac{C}{r}}{x_L^{\gamma} M(x_L)} x^{\gamma} M_2(x)$$

Soit en définitive :

$$D(x)=\frac{C}{r}+\left[(1-\alpha)(V_1 x_L+V_2)-\frac{C}{r}\right]\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\gamma}\left(\frac{M(x)}{M(x_L)}\right) \quad \textbf{(N.9)}$$

Équation des déductions fiscales des intérêts

Quand x tend vers l'infini, les déductions fiscales des intérêts sont à leur valeur maximale. D'où la valeur de D_0 :

$$D_0=\tau\frac{C}{r} \quad \textbf{(N.10)}$$

L'équation des déductions fiscales des intérêts devient alors :

$$D(x)=\tau\frac{C}{r}+D_2 x^{\gamma_2} M_2(x) \quad \textbf{(N.11)}$$

Si maintenant la compagnie tombe en faillite, les déductions fiscales des intérêts sont perdues en totalité, ce qui se traduit analytiquement de la façon suivante :

$$0=\tau\frac{C}{r}+D x_L^{\gamma} M(x_L) \quad \textbf{(N.12)}$$

Le terme D prend alors la valeur suivante :

$$D=-\tau\frac{C}{r}*\frac{1}{x_L^{\gamma} M(x_L)} \quad \textbf{(N.13)}$$

D'où l'équation des déductions fiscales des intérêts:

$$D(x)=\tau\frac{C}{r}-\tau\frac{C}{r}*\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\gamma}*\frac{M(x)}{M(x_L)} \qquad \textbf{(N.14)}$$

Équation des coûts de faillite

Si la valeur de la compagnie tend vers l'infini, les coûts de faillite disparaissent. L'équation des coûts de faillite devient alors :

$$D(x)=D\,x^{\gamma}M(x) \qquad \textbf{(N.15)}$$

Maintenant si la compagnie tombe en faillite, l'équation des coûts proportionnels de faillite devient :

$$D(x)=\alpha V_B=\alpha(V_1x_L+V_2) \qquad \textbf{(N.16)}$$

En mettant égales les deux expressions, on obtient la valeur du terme D, qui s'exprime de la façon suivante :

$$D=\frac{\alpha(V_1x_L+V_2)}{x_L^{\gamma}M(x_L)} \qquad \textbf{(N.17)}$$

L'équation finale des coûts de faillite se présente alors de la façon suivante :

$$D(x)=\alpha(V_1x_L+V_2)*\left(\frac{x}{x_L}\right)^{\gamma}*\frac{M(x)}{M(x_L)} \qquad \textbf{(N.18)}$$

En utilisant l'équation comptable, on obtient la valeur de l'avoir des actionnaires dont l'expression est la suivante :

$$E=V-D+TB-BC \qquad \textbf{(N.19)}$$

Soit après remplacement des expressions des titres contingents par leurs valeurs respectives :

$$E=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*\left[\frac{M(x)}{M(x_L)}\right]\left[\frac{x}{x_L}\right]^{\gamma} \qquad \textbf{(N.20)}$$

ANNEXE O

EFFET DE L'IMPÔT SUR L'AVOIR DES ACTIONNAIRES

Cas du modèle de Goldstein, Ju et Leland

$$dE=\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)(rV-\delta)+\frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)dt+(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V dz \qquad \textbf{(O.1)}$$

À travers l'expression de "dE", on remarque que le taux d'imposition vient en déduction de la valeur de "E". En effet, plus élevée est la valeur de ce paramètre, moindre est la valeur de l'avoir des actionnaires étant donné que le terme "$(1-\tau)$" revient dans tous les termes de l'expression qui donne "dE". L'avoir des actionnaires est donc une fonction décroissante du taux d'imposition.

Cas du modèle de Sarkar et Zapatero

$$E=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*\left[\exp\left[\left(\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)\right]\right]\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma} \qquad \textbf{(O.2)}$$

Où

$$V=(1-\tau)\left[\frac{\theta k}{r(k+r)}+\frac{x}{(k+r)}\right]$$

Et

$$V_B=(1-\tau)\left[\frac{\theta k}{r(k+r)}+\frac{x_L}{(k+r)}\right]$$

On voit donc clairement que l'expression de "E" est également affectée négativement par le terme "τ".

ANNEXE P

EFFET DE L'IMPOT SUR LA CONVEXITE DE LA COURBE DE L'AVOIR DES ACTIONNAIRES

Cas du modèle de Goldstein, Ju et Leland

$$dE=\left(\frac{\partial E}{\partial V}(rV-\delta)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2 V^2\right)dt+\frac{\partial E}{\partial V}\sigma V dz \qquad \textbf{(P.1)}$$

Les dérivées première et seconde de « E » par rapport à « V » s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial V}=(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right) \qquad \textbf{(P.2)}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right) \qquad \textbf{(P.3)}$$

En examinant l'expression de la dérivée seconde, on voit que l'impôt n'intervient pas au niveau de la convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires. En effet, à part pour le terme $\left(\frac{C}{r}-V_B\right)$, les autres termes de l'expression ne deviennent jamais négatifs. Le seul terme qui peut changer de signe et donc influencer la convexité de la courbe est le facteur $\left(\frac{C}{r}-V_B\right)$. Nous pouvons donc affirmer, avec certitude, que l'impôt n'a aucun effet sur la convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires du modèle de Goldstein, Ju et Leland, mais affecte plutôt sa courbure.

Cas du modèle de Sarkar et Zapatero

Les dérivées première et seconde de 'E' par rapport à 'V' s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial V}=1+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)} \qquad \textbf{(P.4)}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}=\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]*\left[\Omega+\Psi+\Delta\right] \qquad \textbf{(P.5)}$$

où

$$\Omega=\left[\frac{4k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^3}-\frac{\gamma}{(V-V_2)^2}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)} \quad \textbf{(P.6)}$$

$$\Psi=\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]x\frac{\gamma}{(V_B-V_2)^{\gamma}}\left[V-V_2\right]^{\gamma-1}x e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)} \quad \textbf{(P.7)}$$

$$\Delta=\left[-\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2(V-V_2)^2}+\frac{\gamma}{(V-V_2)}\right]*\left[\frac{V-V_2}{V_B-V_2}\right]^{\gamma}*\frac{-1}{(V-V_2)^2}*\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*e^{\frac{2k\theta V_1}{\sigma^2}*\left(\frac{1}{V-V_2}-\frac{1}{V_B-V_2}\right)} \quad \textbf{(P.8)}$$

Comme on peut le constater, les facteurs Ω , Ψ et Δ sont positifs étant donné que le terme "γ" est toujours négatif, que "V_2" constitue une valeur plancher pour la valeur de la compagnie et que l'exponentielle est une fonction qui est toujours positive. La convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires dépend donc uniquement du terme $\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]$.

Or $V_B = (1-\tau)\left[\frac{\theta k}{r(k+r)}+\frac{x_L}{(k+r)}\right]$

Ceci veut dire que l'impôt n'influence pas le niveau de convexité de la courbe de l'avoir des actionnaires, mais plutôt sa courbure.

ANNEXE Q

CONDITIONS DE CONVERGENCE ENTRE LES TROIS MODÈLES

Sarkar et Zapatero Vs Leland

Expression de l'avoir des actionnaires selon le modèle de Leland

$$E = V - (1-\tau)\frac{C}{r} - \left[V_B - (1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left[\frac{V}{V_B}\right]^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \qquad \text{(Q.1)}$$

si k = 0 alors "M(x) " prend la valeur 1 quelle que soit la valeur de "x".

La valeur de l'avoir des actionnaires selon le modèle de Sarkar et Zapatero devient :

$$E = V - (1-\tau)\frac{C}{r} - \left[V_B - (1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left[\frac{V - V_2}{V_B - V_2}\right]^{\gamma} \qquad \text{(Q.2)}$$

Or $V_2 = \frac{(1-\tau)k\theta}{r(r+k)}$. Là encore, ce terme s'annule car k = 0.

L'expression de "E" devient alors :

$$E = V - (1-\tau)\frac{C}{r} - \left[V_B - (1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left[\frac{V}{V_B}\right]^{\gamma} \qquad \text{(Q.3)}$$

Nous avons démontré également, que :

$$\gamma = \frac{\left[1 + \frac{2k}{\sigma^2}\right] - \sqrt{\left[1 + \frac{2k}{\sigma^2}\right]^2 + \frac{8r}{\sigma^2}}}{2} \qquad \text{(Q.4)}$$

Si k = 0, ce terme devient :

$$\gamma = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{8r}{\sigma^2}}}{2} \qquad \text{(Q.5)}$$

Mais nous savons aussi que :

$$\sqrt{1 + \frac{8r}{\sigma^2}} = \left[1 + \frac{8r}{\sigma^2}\right]^{1/2} = \left[1 + \frac{1}{2} * \frac{8r}{\sigma^2}\right] = \left[1 + \frac{4r}{\sigma^2}\right] \qquad \text{(Q.6)}$$

Le terme " γ " peut donc être réécrit de la façon suivante:

$$\gamma = \frac{1-\left(1+\frac{4r}{\sigma^2}\right)}{2} \quad \textbf{(Q.7)}$$

L'expression définitive du terme "γ" devient :

$$\gamma = -\frac{2r}{\sigma^2} \quad \textbf{(Q.8)}$$

Nous en concluons que les expressions respectives de l'avoir des actionnaires selon les modèles de Leland et de Sarkar et Zapatero deviennent parfaitement identiques en cas de vitesse de retour à la moyenne nulle.

Sarkar et Zapatero Vs Goldstein, Ju et Leland

L'expression de la valeur de l'avoir des actionnaires selon le modèle de Goldstein, Ju et Leland est la suivante :

$$E=(1-\tau)V-(1-\tau)\frac{C}{r}-\left[(1-\tau)V_B-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]\left[\frac{V}{V_B}\right]^{-x} \quad \textbf{(Q.9)}$$

$$x=\frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\sqrt{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2+2r\sigma^2}\right] \quad \textbf{(Q.10)}$$

Si $\mu = r$, alors le terme "x" devient :

$$x=\frac{1}{\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\sqrt{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2+2r\sigma^2}\right) \quad \textbf{(Q.11)}$$

$$x=\frac{1}{\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\sqrt{r^2-r\sigma^2+\frac{\sigma^4}{4}+2r\sigma^2}\right) \quad \textbf{(Q.12)}$$

Cette expression peut être réécrite de la façon suivante :

$$x=\frac{1}{\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\sqrt{r^2+r\sigma^2+\frac{\sigma^4}{4}}\right) \quad \textbf{(Q.13)}$$

La même expression peut également être écrite de la façon suivante :

$$x=\frac{1}{\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\sqrt{(r+\frac{\sigma^2}{2})^2}\right) \quad \textbf{(Q.14)}$$

Ou encore :

$$x = \frac{1}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2} + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \right) = \frac{2r}{\sigma^2} \tag{Q.15}$$

Les deux expressions de l'avoir des actionnaires selon les modèles de Sarkar et Zapatero et de Goldsein, Ju et Leland deviennent ainsi parfaitement identiques.

ANNEXE R

SOLUTION DE L'AVOIR DES ACTIONNAIRES SELON LE MODÈLE DE MERTON-BLACK-SCHOLES

$$E = e^{-r\tau} E\left[\max(0; V_T - D\right] \qquad \textbf{(R.1)}$$

$$E = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} (V_T - D) f(V) dV \qquad \textbf{(R.2)}$$

Or, si la valeur totale de la compagnie "V" est inférieure à la valeur de la dette "D", celle de l'avoir des actionnaires tombe nécessairement à 0. Ceci nous permet d'écrire :

$$E = e^{-r\tau} \int_{D}^{+\infty} (V_T - D) f(V) dV \qquad \textbf{(R.3)}$$

Mais nous savons aussi que :

$$\frac{dV}{V} = (r - \frac{\eta}{V}) dt + \sigma dz \qquad \textbf{(R.4)}$$

Pour résoudre cette équation, faisons le changement de variable suivant :

$$V_T = e^{Z_T} \qquad \textbf{(R.5)}$$

Puisque "V_T" suit un processus log-normal alors, nécessairement, "Z_T" suit un processus normal que nous exprimerons de la façon suivante :

$$Z_T \sim N\left(Z_t + (r - \frac{\eta}{V} - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau ; \sigma\sqrt{\tau} \right) \qquad \textbf{(R.6)}$$

Où

$$\tau = T - t$$

En remplaçant "V_T" par "Z_T" dans l'équation (R.2), celle-ci devient :

$$E = e^{-r\tau} \int_{\ln D}^{+\infty} (e^{Z_T} - D) f(Z) dZ \qquad \textbf{(R.7)}$$

En vertu de la définition de la fonction de densité de la loi normale, nous pouvons écrire :

$$E = \frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}} \int_{\ln D}^{+\infty} (e^{Z_T} - D) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Z_T - Z_t - (r - \frac{\eta}{V} - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)^2} dZ \qquad \textbf{(R.8)}$$

Pour simplifier le raisonnement, nous répartirons cette expression en deux termes « A » et « B » dont nous dériverons séparément les expressions respectives. Ainsi, nous aurons :

$$A=\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\int_{\ln D}^{-\infty}e^{Z_T}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Z_T-Z_t-(r-\frac{\eta}{V})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2}dZ \qquad \textbf{(R.9)}$$

$$B=\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\int_{\ln D}^{+\infty}-De^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Z_T-Z_t-(r-\frac{\eta}{V}-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2}dZ \qquad \textbf{(R.10)}$$

Dérivation du premier terme

$$A=\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\int_{\ln D}^{+\infty}e^{Z_T}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V}-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2}dZ$$

$$A=\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\int_{\ln D}^{+\infty}e^{Z_T}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau)+\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2}dZ$$

$$A=\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\int_{\ln D}^{+\infty}e^{Z_T}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\left[Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau)\right]^2+2(Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau))}{\sigma\sqrt{\tau}}+\sigma^2\tau\right)^2}dZ$$

$$A=\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\int_{\ln D}^{+\infty}e^{Z_T}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\left[Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau)\right]^2}{\sigma\sqrt{\tau}}+2(Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau))+\sigma^2\tau\right)}dZ$$

$$A=\frac{e^{r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\int_{\ln D}^{+\infty}e^{Z_T}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\left[Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau)\right]^2}{\sigma\sqrt{\tau}}+2(Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V})\tau))\right)}dZ$$

$$A=\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\int_{\ln D}^{+\infty}e^{Z_T}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\left[Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau)\right]^2}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)}*e^{-\frac{1}{2}x2(Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V})\tau))}dZ$$

$$A=\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\int_{\ln D}^{+\infty}e^{Z_T}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\left[Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau)\right]^2}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)}e^{-Z_T}e^{Z_t}e^{r\tau}e^{-\frac{\eta}{V}\tau}dZ$$

$$A=\frac{e^{Z_t}e^{-\frac{\eta}{V}\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\int_{\ln D}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\left[Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau)\right]^2}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)}dZ$$

En faisant le changement de variable inverse $e^{Z_T}=V_T$, on obtient :

$$A=\frac{V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\int_{\ln D}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\left[Z_T-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau)\right]^2}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)}dZ \qquad \textbf{(R.11)}$$

En centrant et en réduisant, on obtient :

$$A=\frac{V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln D-(Z_t+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{+\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}[Z_T]^2}dZ\right] \qquad \textbf{(R.12)}$$

$$A=\frac{V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-(\frac{\ln\frac{V_t}{D}+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})}^{+\infty}\left(e^{-\frac{1}{2}[Z_T]^2}dZ\right)$$

$$A=\frac{V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(\frac{\ln\frac{V_t}{D}+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})}\left(e^{-\frac{1}{2}[Z_T]^2}dZ\right)$$

On obtient en définitive :

$$A=V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau}N(d1) \qquad \textbf{(R.13)}$$

avec

$$d_1=\frac{\ln\frac{V_t}{D}+(r-\frac{\eta}{V}+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \qquad \textbf{(R.14)}$$

Revenons maintenant à l'expression de B :

$$B=\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}}\int_{\ln D}^{+\infty}-De^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Z_T-Z_t-(r-\frac{\eta}{V}-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2}dZ \qquad \textbf{(R.15)}$$

$$B=\frac{-De^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln D-Z_t-(r-\frac{\eta}{V}-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(Z_T)^2}dZ \qquad \textbf{(R.16)}$$

$$B=\frac{-De^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\ln(\frac{V_t}{D})+(r-\frac{\eta}{V}-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}e^{-\frac{1}{2}(Z_T)^2}dZ$$

$$B=-De^{-r\tau}N(d2) \qquad \textbf{(R.17)}$$

où :

$$d_2=\ln(\frac{V_t}{D})+(r-\frac{\eta}{V}-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau=d_1-\sigma\sqrt{\tau} \qquad \textbf{(R.18)}$$

Soit en définitive :

$$E=V_t e^{-\frac{\delta}{V}\tau}N(d1)-De^{-r\tau}N(d2) \qquad \textbf{(R.19)}$$

ANNEXE S

ÉQUATION DIFFERENTIELLE PARTIELLE REMPLIE PAR UNE OPTION D'ACHAT SELON LE MODÈLE DE MERTON-BLACK-SCHOLES

Partant de la dynamique de V qui se présente comme suit :

$$dV = (rV - \eta)dt + \sigma V dz \qquad \textbf{(S.1)}$$

on vérifie qu'une fonction évaluée au voisinage de « V », vaut :

$$f(V + \Delta V) = f(V) + \Delta V \frac{\partial f}{\partial V} + \frac{1}{2!}\sigma^2 V^2 \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \qquad \textbf{(S.2)}$$

En considérant que « E » est une fonction de « V », et en supposant la perpétuité, on obtient :

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial V}(rV - \eta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2 V^2 \right) dt + \frac{\partial E}{\partial V}\sigma V dz \qquad \textbf{(S.3)}$$

Or on sait que :

$$N(d_1) = \frac{\partial E}{\partial V} \qquad \textbf{(S.4)}$$

$$N(d_2) = 1 - N(d_1) \qquad \textbf{(S.5)}$$

En remplaçant dans l'expression de « E », on obtient :

$$E_t = V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} \frac{\partial E}{\partial V} - De^{-r\tau}\left(1 - \frac{\partial E}{\partial V}\right) \qquad \textbf{(S.6)}$$

En réarrangeant les termes, cette expression devient :

$$E_t = \left(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau} \right) \frac{\partial E}{\partial V} - De^{-r\tau} \qquad \textbf{(S.7)}$$

On obtient alors, respectivement, comme dérivées première et seconde de « E » par rapport à « V » les expressions suivantes :

$$\frac{E_t + De^{-r\tau}}{\left(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau} \right)} = \frac{\partial E}{\partial V} \qquad \textbf{(S.8)}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} = V_t \cdot \frac{\eta\tau}{V^2} \cdot e^{-\frac{\eta}{V}\tau} \cdot \frac{E_t + De^{-r\tau}}{\left(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau} \right)^2} \qquad \textbf{(S.9)}$$

En remplaçant dans l'expression (S.3), on obtient :

$$dE = adt + bdz \tag{S.10}$$

où

$$a = \left(\frac{E + De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau})}(rV - \eta) - V_t \eta \tau e^{-\frac{\eta}{V}\tau} \frac{E + De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau})^2} \sigma^2 \right) \tag{S.11}$$

et

$$b = \frac{E + De^{-r\tau}}{(V_t e^{-\frac{\eta}{V}\tau} + De^{-r\tau})} \sigma V \tag{S.12}$$

L'expression de "dE" ainsi obtenue permet, comme nous l'avons vu précédemment, d'arriver à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial E}(a - \lambda b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2} b^2 = rG \tag{S.13}$$

Nous avons établi également que si on considérait la perpétuité et la neutralité au risque, cette équation devenait :

$$\frac{\partial G}{\partial E} a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2} b^2 = rG \tag{S.14}$$

ANNEXE T

EXPRESSION DE LA VALEUR LIQUIDATIVE DE LA COMPAGNIE

Selon le modèle de Leland

$$\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_{VB} = \left(1 - \frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r} - V_B\right)\right) = 0$$

Ceci signifie que :

$$\left(\frac{x}{V_B}\left(\frac{V_B}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r} - V_B\right)\right) = 1$$

ce qui implique que :

$$\left(\frac{x}{V_B}\left((1-\tau)\frac{C}{r} - V_B\right)\right) = 1$$

En développant, on obtient :

$$\left(\left((1-\tau)\frac{C}{r} - V_B\right)\right) = \frac{V_B}{x}$$

En isolant V_B, on obtient:

$$\left(\left((1-\tau)\frac{C}{r}\right)\right) = V_B\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

Ce qui veut dire que :

$$V_B = (1-\tau)\frac{C}{r} * \frac{x}{x+1}$$

Or

$$x = \frac{2r}{\sigma^2}$$

En remplaçant dans l'expression de V_B, celle-ci devient :

$$V_B = (1-\tau)\frac{C}{r} * \frac{\frac{2r}{\sigma^2}}{\frac{2r}{\sigma^2} + 1}$$

Soit après simplification:

$$V_B=(1-\tau)\frac{C}{r}*\frac{2r}{2r+\sigma^2}$$

En simplifiant encore par 2r, on obtient l'expression finale de la valeur liquidative selon le modèle de Leland qui se présente alors de la façon suivante :

$$V_B=(1-\tau)\frac{C}{(r+0,5*\sigma^2)}$$

Selon le Modèle de Goldstein, Ju et Leland

$$\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_{VB}=(1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)=0$$

Ceci signifie que :

$$\left(\frac{x}{V_B}\left(\frac{V_B}{V_B}\right)^{x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)=1$$

ce qui implique que :

$$\left(\frac{x}{V_B}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)=1$$

En développant, on obtient:

$$\left(\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)=\frac{V_B}{x}$$

En isolant V_B, on obtient:

$$\frac{C}{r}=V_B\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

Ce qui veut dire que:

$$V_B=(1-\tau)\frac{C}{r}*\frac{x}{x+1}$$

Où

$$x=\frac{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\sqrt{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2+2r\sigma^2}}{\sigma^2}$$

Remarquons que si $\mu=0$, le terme x devient :

$$x=\frac{2r}{\sigma^2}$$

Selon le modèle de Sarkar et Zapatero

L'expression de la valeur liquidative selon le modèle de Sarkar et Zapatero peut s'exprimer de la façon suivante :

$$v_1 x_L + v_2$$

où

$$V_1 = \frac{(1-\tau)}{(k+r)}$$

$$V_2 = \frac{(1-\tau)k\theta}{r(k+r)}$$

$$x_L = \frac{a\left[\frac{k\theta}{\left[(1-a)\sigma^2+k\right]}V_1 + V_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}\right] \pm \sqrt{\Delta}}{2(1-a)V_1}$$

$$\Delta = \left[a\left(\frac{k\theta}{\left[(1-a)\sigma^2+k\right]}V_1 + V_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}\right)\right]^2 + 4(1-a)V_1\left[\frac{ak\theta\left(V_2-(1-\tau)\frac{C}{r}\right)}{\left[(1-a)\sigma^2+k\right]}\right]$$

Remarquons qu'en cas de vitesse de retour à la moyenne nulle, le terme Δ prend la valeur suivante :

$$\Delta = a\left[-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]$$

Le terme x_L, lui prend la valeur suivante :

$$x_L = \frac{2a\left[-(1-\tau)\frac{C}{r}\right]}{2(1-a)V_1}$$

Le terme v_2 s'annule également. Dans ce cas, V_B devient :

$$V_B = V_1\left[\frac{2a\left(-(1-\tau)\frac{C}{r}\right)}{2(1-a)V_1}\right]$$

Soit après simplification:

$$V_B = \left[\frac{a\left(-(1-\tau)\frac{C}{r}\right)}{(1-a)}\right]$$

Mais on a vu précédemment que l'expression du terme a devenait dans ce cas:

$$a=-\frac{2r}{\sigma^2}$$

Ceci veut dire que V_B devient :

$$V_B=\left[(1-\tau)\frac{C}{r}\right]\frac{\frac{2r}{\sigma^2}}{(1+\frac{2r}{\sigma^2})}$$

ou encore

$$V_B=(1-\tau)\frac{C}{(r+0{,}5*\sigma^2)}$$

Soit la même expression obtenue à l'aide du modèle de Leland.

ANNEXE U

ÉVALUATION DE L'AVOIR DES ACTIONNAIRES EN 2006

Tableau U.1
Comparaison entre la valeur marchande moyenne de l'avoir des actionnaires et l'estimation de cette valeur à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero, à la date de l'état financier de 2006

$$E = v_1 x + v_2 - (1-\tau)\frac{C}{r} - \left[v_1 x_L + v_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}\right] e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_L}\right)} \left(\frac{x}{x_L}\right)^{\frac{\left(1+\frac{2k}{\sigma^2}\right) - \sqrt{\left(1+\frac{2k}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{8r}{\sigma^2}}}{2}}$$ [128]

Symbole	Valeur marchande moyenne [a]	Valeur calculée	Écart relatif [b]	Seuil 15% [c]	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%	date état financier
AGU	37.225	38.60	3.69%	1	1	1	0	déc-06
AL	56.47	61.36	8.66%	1	1	0	0	déc-06
BBD	4.455	4.37	-0.68%	1	1	1	1	janv-07
BCB	16.835	16.53	-1.81%	1	1	1	0	déc-06
BCE	31.445	32.76	4.18%	1	1	1	0	déc-06
BVF	24.825	25.54	2.88%	1	1	1	0	déc-06
CCO	48.2	45.51	-5.58%	1	1	0	0	déc-06
CNQ	62.035	62.58	0.88%	1	1	1	1	déc-06
CNR	50.32	49.70	-1.23%	1	1	1	0	déc-06
COS	32.6	33.27	2.06%	1	1	1	0	déc-06
CSN	44.895	32.03	-28.87%	0	0	0	0	févr-07
CTC	71.35	75.08	5.23%	1	1	0	0	déc-06
ENB	40.125	40.51	0.96%	1	1	1	1	déc-06
HSE	78.325	89.33	14.05%	1	0	0	0	déc-06
K	14.085	13.60	-3.44%	1	1	1	0	déc-06
L	49.365	43.99	-10.89%	1	0	0	0	déc-06
MDS	19.59	19.64000	0.56%	1	1	1	1	oct-06
NCX	32.78	32.48	-0.90%	1	1	1	1	déc-06
NXY	64.58	61.45	-4.85%	1	1	1	0	déc-06
PCA	47.75	47.19	-1.17%	1	1	1	0	déc-06
SU	91.935	95.79	4.19%	1	1	1	0	déc-06
T	54.045	50.13	-7.24%	1	1	0	0	déc-06
TA	26.84	26.80	-0.15%	1	1	1	1	déc-06
TOC	48.515	49.71	2.46%	1	1	1	0	déc-06
TRP	40.545	41.80	3.10%	1	1	1	0	déc-06
WN	76.07	65.08	-14.45%	1	0	0	0	déc-06
Nombre de compagnies correctement évaluées selon le standard de comparaison				25	22	18	6	

a) Cette valeur représente la moyenne arithmétique des prix haut et bas de la journée.

b) Cet écart est obtenu en utilisant l'expression : $\dfrac{\text{Valeur Calculée} - \text{Valeur marchande moyenne}}{\text{Valeur marchande moyenne}}$

c) Le chiffre 1 signifie que la compagnie est correctement évaluée par rapport à sa valeur marchande moyenne, alors que le chiffre 0 signifie le contraire et ce, pour tous les niveaux de précision considérés.

128) Équation de l'avoir des actionnaires selon Sarkar et Zapatero. Cette expression est dérivée à l'annexe (N).

Tableau U.2

Comparaison entre la valeur marchande moyenne de l'avoir des actionnaires et l'estimation de cette valeur à l'aide du modèle de Goldstein , Ju et Leland, à la date de l'état financier de 2006

$$E=(1-\tau)\left(V+\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)-\frac{C}{r}\right)^{129}$$

Symbole	Valeur marchande moyenne [a]	Valeur calculée	Écart relatif [b]	Seuil 15% [c]	Seuil 10% [c]	Seuil 5% [c]	Seuil 1% [c]	date état financier
AGU	37.225	38.69	3.94%	1	1	1	0	31-déc-06
AL	56.47	62.39	10.48%	1	0	0	0	31-déc-06
BBD	4.455	4.61	4.77%	1	1	1	0	31-janv-07
BCB	16.835	16.45	-2.29%	1	1	1	0	30-déc-06
BCE	31.445	34.70	10.35%	1	0	0	0	31-déc-06
BVF	24.825	26.01	4.77%	1	1	1	0	31-déc-06
CCO	48.2	45.84	-4.90%	1	1	1	0	31-déc-06
CNQ	62.035	59.05	-4.81%	1	1	1	0	31-déc-06
CNR	50.32	52.83	4.99%	1	1	1	0	31-déc-06
COS	32.6	34.14	4.72%	1	1	1	0	31-déc-06
CSN	44.895	31.35	-30.37%	0	0	0	0	28-févr-07
CTC	71.35	76.56	7.30%	1	1	0	0	30-déc-06
ENB	40.125	41.55	3.55%	1	1	1	0	31-déc-06
HSE	78.325	89.72	14.55%	1	0	0	0	31-déc-06
K	14.085	13.51	-4.08%	1	1	1	0	31-déc-06
L	49.365	43.74	-11.39%	1	0	0	0	30-déc-06
MDS	19.59	20.08	2.82%	1	1	1	0	31-oct-06
NCX	32.78	36.47	11.26%	1	0	0	0	31-déc-06
NXY	64.58	66.68	3.25%	1	1	1	0	31-déc-06
PCA	47.75	51.16	7.14%	1	1	0	0	31-déc-06
SU	91.935	98.77	7.43%	1	1	0	0	31-déc-06
T	54.045	58.94	9.06%	1	1	0	0	31-déc-06
TA	26.84	28.06	4.55%	1	1	1	0	31-déc-06
TOC	48.515	50.80	4.71%	1	1	1	0	31-déc-06
TRP	40.545	44.18	8.97%	1	1	0	0	31-déc-06
WN	76.07	65.93	-13.33%	1	0	0	0	31-déc-06
Nombre de compagnies correctement évaluées selon le standard de comparaison				25	19	14	0	

a) Cette valeur représente la moyenne des prix haut et bas de la journée.

b) Cet écart est obtenu en utilisant l'expression : $\frac{\textit{Valeur Calculée} - \textit{Valeur marchande moyenne}}{\textit{Valeur marchande moyenne}}$

c) Le chiffre 1 signifie que la compagnie est correctement évaluée par rapport à sa valeur marchande moyenne, alors que le chiffre 0 signifie le contraire et ce, pour tous les niveaux de précision considérés.

129) Équation de l'avoir des actionnaire selon Goldstein, Ju et Leland. Cette expression est dérivée à l'annexe (I).

Tableau U.3

Comparaison entre la valeur marchande moyenne de l'avoir des actionnaires et l'estimation de cette valeur à l'aide du modèle de Leland, à la date de l'état financier de 2006

$$E(V)=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}$$ [130]

Symbole	Valeur marchande moyenne [a]	Valeur calculée	Écart relatif [b]	Seuil 15% [c]	Seuil 10% [c]	Seuil 5% [c]	Seuil 1% [c]	date état financier
AGU	37.225	36.97	-0.69%	1	1	1	1	31-déc-06
AL	56.47	59.67	5.67%	1	1	0	0	31-déc-06
BBD	4.455	3.82	-13.18%	1	0	0	0	31-janv-07
BCB	16.835	16.14	-4.13%	1	1	1	0	30-déc-06
BCE	31.445	32.08	2.02%	1	1	1	0	31-déc-06
BVF	24.825	25.39	2.28%	1	1	1	0	31-déc-06
CCO	48.2	45.05	-6.54%	1	1	0	0	31-déc-06
CNQ	62.035	61.54	-0.80%	1	1	1	1	31-déc-06
CNR	50.32	47.71	-5.19%	1	1	0	0	31-déc-06
COS	32.6	32.86	0.80%	1	1	1	1	31-déc-06
CSN	44.895	31.85	-29.26%	0	0	0	0	28-févr-07
CTC	71.35	72.35	1.40%	1	1	1	0	30-déc-06
ENB	40.125	38.47	-4.12%	1	1	1	0	31-déc-06
HSE	78.325	87.80	12.10%	1	0	0	0	31-déc-06
K	14.085	13.53	-3.94%	1	1	1	0	31-déc-06
L	49.365	43.53	-11.82%	1	0	0	0	30-déc-06
MDS	19.59	19.57	0.20%	1	1	1	1	31-oct-06
NCX	32.78	6.21	-81.06%	0	0	0	0	31-déc-06
NXY	64.58	59.73	-7.51%	1	1	0	0	31-déc-06
PCA	47.75	46.21	-3.23%	1	1	1	0	31-déc-06
SU	91.935	94.85	3.17%	1	1	1	0	31-déc-06
T	54.045	48.50	-10.26%	1	0	0	0	31-déc-06
TA	26.84	26.49	-1.30%	1	1	1	0	31-déc-06
TOC	48.515	49.18	1.37%	1	1	1	0	31-déc-06
TRP	40.545	41.81	3.12%	1	1	1	0	31-déc-06
WN	76.07	63.42	-16.63%	0	0	0	0	31-déc-06
Nombre de compagnies correctement évaluées selon le standard de comparaison				23	19	15	4	

a) Cette valeur représente la moyenne arithmétique des prix haut et bas de la journée.

b) Cet écart est obtenu en utilisant l'expression : $\dfrac{\textit{Valeur Calculée} - \textit{Valeur marchande moyenne}}{\textit{Valeur marchande moyenne}}$

c) Le chiffre 1 signifie que la compagnie est correctement évaluée par rapport à sa valeur marchande moyenne, alors que le chiffre 0 signifie le contraire et ce, pour tous les niveaux de précision considérés.

130) Équation de l'avoir des actionnaires selon Hayne Leland. Cette expression est dérivée à l'annexe (G).

Tableau U.4

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Sarkar et Zapatero par rapport aux moyennes des prix haut et bas quotidiens 3 jours autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} E_i}{26} \quad 131$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N} \quad 132$$

Symbole	Jour -3	Jour -2	Jour -1	Jour 0	Jour 1	Jour 2	Jour 3
AGU	4.88%	2.24%	1.27%	3.69%	5.49%	5.71%	6.57%
AL	15.82%	13.62%	11.60%	8.66%	8.47%	8.58%	10.32%
BBD	-7.42%	-6.62%	-1.91%	-0.68%	-1.91%	3.80%	6.20%
BCB	2.13%	1.88%	-0.54%	-1.81%	-1.14%	-1.55%	-1.34%
BCE	6.90%	5.39%	5.07%	4.18%	4.83%	5.47%	6.26%
BVF	1.67%	1.67%	2.84%	2.88%	3.09%	2.82%	4.10%
CCO	4.21%	1.25%	-3.17%	-5.58%	-3.21%	-2.82%	-1.76%
CNO	14.19%	12.93%	6.18%	0.88%	1.71%	2.67%	3.89%
CNR	0.84%	-0.52%	-1.82%	-1.23%	-1.20%	-1.20%	-0.88%
COS	14.66%	14.23%	7.06%	2.06%	1.91%	3.60%	4.29%
CSN/CSO	-31.25%	-30.64%	-28.67%	-28.87%	-29.01%	-31.03%	-31.68%
CTC	9.77%	8.55%	6.39%	5.23%	5.79%	5.97%	5.90%
ENB	0.93%	-0.76%	-0.56%	0.96%	1.15%	1.50%	2.36%
HSE	20.47%	19.52%	16.32%	14.05%	14.69%	15.53%	16.31%
K	6.58%	4.25%	-0.95%	-3.44%	-1.52%	-1.77%	1.15%
L	-12.60%	-12.83%	-12.58%	-10.89%	-11.11%	-12.55%	-12.02%
MDS	0.43%	0.67%	0.26%	0.56%	1.97%	1.42%	0.80%
NCX	-2.26%	-3.92%	-2.82%	-0.90%	0.04%	-0.19%	0.34%
NXY	1.81%	0.47%	-2.27%	-4.85%	-3.04%	-2.77%	-1.70%
PCA	6.55%	5.68%	1.74%	-1.17%	-1.04%	-1.37%	-1.63%
SU	13.50%	13.47%	8.40%	4.19%	4.55%	4.99%	5.68%
T	-6.61%	-6.01%	-6.12%	-7.24%	-6.93%	-7.18%	-6.73%
TA	-0.48%	-1.09%	-0.74%	-0.15%	0.71%	1.28%	1.67%
TOC/TRI	4.38%	2.37%	1.58%	2.46%	2.72%	3.36%	3.89%
TRP	6.23%	3.32%	2.45%	3.10%	2.93%	3.16%	4.20%
WN	-14.93%	-15.29%	-15.19%	-14.45%	-14.69%	-15.88%	-15.30%
E_M	2,32%	1,30%	-0,24%	-1,09%	-0,57%	-0,33%	0,42%
E_{MC}	2,32%	1,81%	1,13%	0,57%	0,35%	0,23%	0,26%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	0,2603%						
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	1,19%						

131) E_M représente l'écart moyen quotidien. Il est obtenu par la moyenne des écarts relatifs quotidiens des 26 titres composant l'échantillon d'évaluation. L'écart quotidien est calculé par rapport à la moyenne des prix haut et bas de la journée.

132) E_{MC} représente l'écart moyen cumulé. Il est obtenu par le cumul des écarts moyens quotidiens, divisé par le nombre d'observations quotidiennes considérées.

Tableau U.5
Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Goldstein, Ju et Leland par rapport aux valeurs marchandes [a] correspondantes, 3 jours autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} E_i}{26}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

	Jour						
Symbole	-3	-2	-1	0	1	2	3
AGU	5.12%	2.48%	1.51%	3.94%	5.74%	5.96%	6.82%
AL	17.76%	15.53%	13.48%	10.48%	10.29%	10.41%	12.17%
BBD	-2.33%	-1.50%	3.48%	4.77%	3.48%	9.50%	12.03%
BCB	1.64%	1.39%	-1.02%	-2.29%	-1.61%	-2.03%	-1.82%
BCE	13.23%	11.63%	11.29%	10.35%	11.04%	11.72%	12.55%
BVF	3.54%	3.54%	4.73%	4.77%	4.98%	4.71%	6.01%
CCO	4.97%	1.98%	-2.47%	-4.90%	-2.51%	-2.11%	-1.05%
CNO	7.75%	6.56%	0.19%	-4.81%	-4.02%	-3.12%	-1.97%
CNR	7.19%	5.74%	4.36%	4.99%	5.02%	5.02%	5.36%
COS	17.66%	17.22%	9.86%	4.72%	4.58%	6.31%	7.02%
CSN/CSO	-32.70%	-32.11%	-30.17%	-30.37%	-30.51%	-32.48%	-33.12%
CTC	11.93%	10.69%	8.49%	7.30%	7.88%	8.06%	7.98%
ENB	3.53%	1.79%	1.99%	3.55%	3.75%	4.11%	4.99%
HSE	21.00%	20.04%	16.83%	14.55%	15.19%	16.03%	16.82%
K	5.88%	3.56%	-1.60%	-4.08%	-2.17%	-2.42%	0.48%
L	-13.09%	-13.33%	-13.08%	-11.39%	-11.62%	-13.05%	-12.52%
MDS	2.68%	2.92%	2.50%	2.82%	4.26%	3.69%	3.05%
NCX	9.73%	7.87%	9.11%	11.26%	12.32%	12.06%	12.65%
NXY	10.48%	9.03%	6.04%	3.25%	5.21%	5.51%	6.67%
PCA	15.51%	14.57%	10.29%	7.14%	7.28%	6.92%	6.64%
SU	17.03%	17.00%	11.77%	7.43%	7.80%	8.25%	8.97%
T	9.80%	10.51%	10.37%	9.06%	9.42%	9.13%	9.66%
TA	4.20%	3.56%	3.93%	4.55%	5.45%	6.05%	6.45%
TOC/TRI	6.67%	4.61%	3.81%	4.71%	4.97%	5.62%	6.17%
TRP	12.27%	9.21%	8.28%	8.97%	8.79%	9.03%	10.13%
WN	-13.82%	-14.18%	-14.09%	-13.33%	-13.58%	-14.78%	-14.19%
E_M	5,68%	4,63%	3,07%	2,21%	2,75%	3,00%	3,77%
E_{MC}	5,68%	5,15%	4,46%	3,90%	3,67%	3,56%	3,59%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	3,5864%						
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	1,20%						

a) La valeur marchande des titres est la moyenne de leurs prix haut et bas du jour.

Tableau U.6

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide du modèle de Leland par rapport aux valeurs marchandes [a] correspondantes, 3 jours autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} Ei}{26}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{t=1}^{N} E_{MC,t}}{N}$$

Symbole	Jour -3	-2	-1	0	1	2	3
AGU	0.45%	-2.08%	-3.00%	-0.69%	1.04%	1.25%	2.07%
AL	12.63%	10.49%	8.53%	5.67%	5.48%	5.59%	7.28%
BBD	-19.07%	-18.38%	-14.25%	-13.18%	-14.25%	-9.26%	-7.17%
BCB	-0.28%	-0.52%	-2.89%	-4.13%	-3.47%	-3.87%	-3.67%
BCE	4.68%	3.20%	2.89%	2.02%	2.66%	3.28%	4.05%
BVF	1.07%	1.07%	2.23%	2.28%	2.48%	2.21%	3.48%
CCO	3.16%	0.22%	-4.15%	-6.54%	-4.19%	-3.80%	-2.75%
CNO	12.29%	11.05%	4.41%	-0.80%	0.02%	0.97%	2.17%
CNR	-3.20%	-4.50%	-5.75%	-5.19%	-5.16%	-5.16%	-4.85%
COS	13.25%	12.82%	5.74%	0.80%	0.66%	2.32%	3.01%
CSN/CSO	-31.63%	-31.02%	-29.06%	-29.26%	-29.40%	-31.40%	-32.05%
CTC	5.77%	4.60%	2.52%	1.40%	1.94%	2.12%	2.05%
ENB	-4.15%	-5.76%	-5.57%	-4.12%	-3.95%	-3.61%	-2.79%
HSE	18.41%	17.47%	14.33%	12.10%	12.72%	13.55%	14.32%
K	6.03%	3.72%	-1.46%	-3.94%	-2.03%	-2.28%	0.63%
L	-13.51%	-13.74%	-13.49%	-11.82%	-12.04%	-13.47%	-12.94%
MDS	0.08%	0.31%	-0.10%	0.20%	1.61%	1.06%	0.44%
NCX	-81.31%	-81.63%	-81.42%	-81.06%	-80.87%	-80.92%	-80.82%
NXY	-1.04%	-2.34%	-5.01%	-7.51%	-5.75%	-5.49%	-4.45%
PCA	4.34%	3.48%	-0.38%	-3.23%	-3.10%	-3.43%	-3.68%
SU	12.39%	12.35%	7.33%	3.17%	3.52%	3.96%	4.64%
T	-9.65%	-9.07%	-9.18%	-10.26%	-9.96%	-10.20%	-9.77%
TA	-1.63%	-2.23%	-1.89%	-1.30%	-0.45%	0.11%	0.49%
TOC/TRI	3.27%	1.28%	0.50%	1.37%	1.62%	2.26%	2.78%
TRP	6.25%	3.35%	2.48%	3.12%	2.95%	3.18%	4.23%
WN	-17.10%	-17.45%	-17.36%	-16.63%	-16.87%	-18.02%	-17.46%
E_M	-3,02%	-3,97%	-5,54%	-6,44%	-5,95%	-5,73%	-5,03%
E_{MC}	-3,02%	-3,50%	-4,18%	-4,74%	-4,99%	-5,11%	-5,10%

MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	-5,0983%
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	1,21%

a) **La valeur marchande des titres est la moyenne de leurs prix haut et bas du jour.**

Tableau U.7
Évolution du rendement quotidien des portefeuilles surévalués par le marché. selon les trois modèles sous étude, pour une période de 20 jours. à compter de la date de l'état financier de 2006

		Jour																				
Rendement		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
SZ	NP [a]	0,00%	-0,58%	-0,01%	-0,18%	-0,43%	-0,36%	-0,27%	-0,30%	-0,19%	-0,06%	-0,03%	-0,03%	-0,05%	-0,04%	0,01%	0,02%	0,04%	0,01%	0,02%	-0,01%	-0,01%
	PCA [b]	0,00%	-0,05%	0,42%	0,10%	-0,28%	-0,34%	-0,38%	-0,40%	-0,30%	-0,17%	-0,15%	-0,12%	-0,11%	-0,14%	-0,09%	-0,06%	-0,03%	-0,06%	-0,06%	-0,08%	-0,08%
	ÉQUIPOND [c]	0,00%	-0,56%	-0,53%	-0,76%	-1,19%	-1,44%	-1,57%	-1,71%	-1,75%	-1,69%	-1,60%	-1,52%	-1,48%	-1,44%	-1,36%	-1,28%	-1,20%	-1,15%	-1,10%	-1,09%	-1,08%
HL	NP	0,00%	-0,51%	-0,16%	-0,29%	-0,42%	-0,29%	-0,12%	-0,16%	-0,04%	0 04%	0,05%	0,01%	0,00%	0,02%	0,07%	0,07%	0,08%	0,02%	-0,01%	-0,05%	-0,04%
	PCA	0,00%	-0,20%	0,03%	-0,19%	-0,40%	-0,34%	-0,26%	-0,29%	-0,16%	-0,06%	-0,08%	-0,11%	-0,10%	-0,11%	-0,06%	-0,03%	0,00%	-0,05%	-0,07%	-0,11%	-0,09%
	ÉQUIPOND	0,00%	-0,54%	-0,59%	-0,84%	-1,25%	-1,44%	-1,46%	-1,50%	-1,48%	-1,38%	-1,27%	-1,18%	-1,13%	-1,07%	-0,96%	-0,86%	-0,77%	-0,76%	-0,78%	-0,84%	-0,90%
GJL	NP	0,00%	-0,53%	0,14%	-0,12%	-0,46%	-0,41%	-0,25%	-0,29%	-0,24%	-0,16%	-0,14%	-0,14%	-0,16%	-0,16%	-0,08%	-0,08%	-0,05%	-0,09%	-0,08%	-0,11%	-0,11%
	PCA	0,00%	0,04%	0,57%	0,14%	-0,32%	-0,42%	-0,46%	-0,48%	-0,43%	-0,36%	-0,35%	-0,31%	-0,28%	-0,32%	-0,25%	-0,20%	-0,17%	-0,20%	-0,20%	-0,22%	-0,22%
	ÉQUIPOND	0,00%	-0,74%	-0,36%	-0,50%	-0,98%	-1,25%	-1,32%	-1,43%	-1,51%	-1,51%	-1,48%	-1,47%	-1,49%	-1,51%	-1,46%	-1,42%	-1,37%	-1,39%	-1,39%	-1,42%	-1,45%
RENDEMENT_MARCHÉ		0,00%	0,19%	-0,68%	-0,77%	-0,76%	-0,48%	-0,55%	-0,52%	-0 39%	-0,21%	-0,13%	-0,15%	-0,13%	-0,19%	-0,12%	-0,12%	-0,02%	0,03%	-0,01%	0,02%	0,00%

Note : La valeur marchande des portefeuilles est la somme des prix hauts et bas moyens de la journée, des titres qui les composent.
a) NP représente le portefeuille non pondéré. Sa valeur est obtenue en additionnant entre elles. les valeurs respectives des titres le composant.
b) PCA représente le portefeuille pondéré par le chiffre d'affaires. Sa valeur est obtenue en additionnant entre elles. les valeurs respectives des titres qui le composent, pondérées par la proportion du chiffre d'affaires de la compagnie en question dans le chiffre d'affaires global.
c) ÉQUIPOND représente le portefeuille équipondéré. Sa valeur est obtenue en additionnant entre elles. les valeurs respectives des titres qui le composent, pondérées chacune par le nombre de titres concernés, que l'investisseur est en mesure de se procurer sur le marché avec les 100$ en sa possession. à la date de l'état financier. Ce portefeuille est rebalancé à chaque jour

Tableau U.8
Évolution du rendement quotidien des portefeuilles sous-évalués par le marché selon les trois modèles sous étude, pour une période de 20 jours, à compter de la date de l'état de 2006

		Jour																				
Rendement		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
SZ	PTF_NP	0,00%	-0,44%	-0,44%	-0,54%	-0,62%	-0,43%	-0,24%	-0,25%	-0,11%	0,03%	0,02%	-0,05%	-0,04%	-0,02%	-0,01%	0,00%	-0,01%	-0,05%	-0,09%	-0,15%	-0,13%
	PTF_POND_CA	0,00%	-0,34%	-0,39%	-0,55%	-0,66%	-0,47%	-0,22%	-0,23%	-0,08%	0,09%	0,06%	-0,04%	-0,02%	0,01%	0,02%	0,00%	0,00%	-0,03%	-0,06%	-0,12%	-0,10%
	PTF_ÉQUIPOND	0,00%	-0,47%	-0,67%	-0,97%	-1,38%	-1,55%	-1,57%	-1,64%	-1,59%	-1,46%	-1,34%	-1,29%	-1,26%	-1,23%	-1,19%	-1,14%	-1,12%	-1,17%	-1,27%	-1,42%	-1,56%
HL	PTF_NP	0,00%	-0,50%	-0,36%	-0,49%	-0,67%	-0,54%	-0,41%	-0,43%	-0,27%	-0,08%	-0,06%	-0,11%	-0,09%	-0,09%	-0,08%	-0,08%	-0,07%	-0,08%	-0,09%	-0,13%	-0,14%
	PTF_POND_CA	0,00%	-0,21%	-0,05%	-0,29%	-0,57%	-0,48%	-0,34%	-0,34%	-0,21%	-0,01%	0,00%	-0,05%	-0,02%	-0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	-0,03%	-0,05%	-0,10%	-0,09%
	PTF_ÉQUIPOND	0,00%	-0,48%	-0,61%	-0,89%	-1,33%	-1,57%	-1,72%	-1,90%	-1,94%	-1,84%	-1,74%	-1,71%	-1,69%	-1,70%	-1,70%	-1,70%	-1,70%	-1,71%	-1,74%	-1,82%	-1,90%
GJL	PTF_NP	0,00%	-0,49%	-0,39%	-0,47%	-0,56%	-0,39%	-0,25%	-0,27%	-0,11%	0,04%	0,05%	0,00%	0,00%	0,02%	0,03%	0,04%	0,04%	0,00%	-0,03%	-0,08%	-0,07%
	PTF_POND_CA	0,00%	-0,34%	-0,31%	-0,44%	-0,57%	-0,41%	-0,21%	-0,22%	-0,06%	0,13%	0,12%	0,04%	0,05%	0,07%	0,08%	0,06%	0,07%	0,04%	0,01%	-0,05%	-0,03%
	PTF_ÉQUIPOND	0,00%	-0,43%	-0,69%	-1,00%	-1,40%	-1,59%	-1,66%	-1,76%	-1,73%	-1,60%	-1,46%	-1,39%	-1,33%	-1,27%	-1,21%	-1,14%	-1,08%	-1,08%	-1,11%	-1,19%	-1,27%
RENDEMENT_MARCHÉ		0,00%	0,19%	-0,68%	-0,77%	-0,76%	-0,48%	-0,55%	-0,52%	-0,39%	-0,21%	-0,13%	-0,15%	-0,13%	-0,19%	-0,12%	-0,12%	-0,02%	0,03%	-0,01%	0,02%	0,00%

Note : La valeur marchande des portefeuilles est la somme des prix hauts et bas moyens de la journée, des titres qui les composent.

ANNEXE V

ÉVALUATION DE L'AVOIR DES ACTIONNAIRES EN 2002

Tableau V.1

Comparaison entre la valeur marchande moyenne de l'avoir des actionnaires et l'estimation de cette valeur à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero, à la date de l'état financier de 2002

$$E = v_1 x + v_2 - (1-\tau)\frac{C}{r} - \left[v_1 x_L + v_2 - (1-\tau)\frac{C}{r}\right] e^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_L}\right)} \left(\frac{x}{x_L}\right)^{\frac{\left(1+\frac{2k}{\sigma^2}\right)-\sqrt{\left(1+\frac{2k}{\sigma^2}\right)^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}}$$

Symbole	Valeur marchande moyenne [a]	Valeur calculée	Écart relatif [b]	Seuil 15% [c]	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%	date état financier
AGU	17.66	19.82	12.23%	1	0	0	0	déc-02
AL	46.54	46.98	0.84%	1	1	1	1	déc-02
BBD	5.205	4.94	-5.09%	1	1	1	0	janv-03
BCB	28.085	25.05	-10.81%	1	0	0	0	déc-02
BCE	28.66	30.08	4.95%	1	1	1	0	déc-02
BVF	41.72	39.87	-4.43%	1	1	1	0	déc-02
CCO	37.74	16.90	-55.22%	0	0	0	0	déc-02
CNO	46.655	43.60	-6.55%	1	1	0	0	déc-02
CNR	65.72	64.87	-1.29%	1	1	1	0	déc-02
COS	37.825	40.94	8.24%	1	1	0	0	déc-02
CSN/CSO	36.125	23.90	-33.84%	0	0	0	0	févr-03
CTC	39.95	39.51	-1.09%	1	1	1	0	déc-02
ENB	43.2	40.48	-6.30%	1	1	0	0	déc-02
HSE	16.615	26.58	59.99%	0	0	0	0	déc-02
K	11.565	8.02	-30.65%	0	0	0	0	déc-02
L	53.87	55.76	3.51%	1	1	1	0	déc-02
MDS	22.45	13.27000	-40.89%	0	0	0	0	oct-02
NCX	29.015	25.36	-12.61%	1	0	0	0	déc-02
NXY	33.975	48.49	42.72%	0	0	0	0	déc-02
PCA	48.965	70.58	44.14%	0	0	0	0	déc-02
SU	24.7	24.85	0.63%	1	1	1	1	déc-02
T	17.325	14.00	-19.19%	0	0	0	0	déc-02
TA	17.115	17.46	2.02%	1	1	1	0	déc-02
TOC/TRI	41.865	43.28	3.38%	1	1	1	0	déc-02
TRP	22.9	31.47	37.42%	0	0	0	0	déc-02
WN	90.6	92.21	1.77%	1	1	1	0	déc-02
Nombre de compagnies correctement évaluées selon le standard de comparaison				17	14	11	2	

a) La valeur marchande moyenne est la moyenne arithmétique des prix haut et bas de la journée.

b) Cet écart est obtenu en utilisant l'expression : $\dfrac{\textit{Valeur Calculée} - \textit{Valeur marchande moyenne}}{\textit{Valeur marchande moyenne}}$

c) Le chiffre 1 signifie que la compagnie est correctement évaluée par rapport à sa valeur marchande moyenne, alors que le chiffre 0 signifie le contraire et ce, pour tous les niveaux de précision considérés.

Tableau V.2

Comparaison entre la valeur marchande moyenne de l'avoir des actionnaires et l'estimation de cette valeur à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland, à la date de l'état financier de 2002

$$E=(1-\tau)\left(V+\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)-\frac{C}{r}\right)$$

Symbole	Valeur marchande moyenne	Valeur calculée	Écart relatif [a]	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%	date état financier
AGU	17,66	20,11	13,87%	1	0	0	0	déc-02
AL	46,54	48,64	4,51%	1	1	1	0	déc-02
BBD	5,205	4,89	-6,05%	1	1	0	0	janv-03
BCB	28,085	24,62	-12,34%	1	0	0	0	déc-02
BCE	28,66	30,94	7,96%	1	1	0	0	déc-02
BVF	41,72	45,60	9,30%	1	1	0	0	déc-02
CCO	37,74	32,15	-14,81%	1	0	0	0	déc-02
CNQ	46,655	54,45	16,71%	0	0	0	0	déc-02
CNR	65,72	64,27	-2,21%	1	1	1	0	déc-02
COS	37,825	43,72	15,58%	0	0	0	0	déc-02
CSN	36,125	23,40	-35,22%	0	0	0	0	févr-03
CTC	39,95	39,18	-1,93%	1	1	1	0	déc-02
ENB	43,2	38,85	-10,07%	1	1	0	0	déc-02
HSE	16,615	21,44	29,04%	0	0	0	0	déc-02
K	11,565	7,53	-34,89%	0	0	0	0	déc-02
L	53,87	52,35	-2,82%	1	1	1	0	déc-02
MDS	22,45	13,20000	-41,20%	0	0	0	0	oct-02
NCX	29,015	23,89	-17,66%	0	0	0	0	déc-02
NXY	33,975	50,74	49,35%	0	0	0	0	déc-02
PCA	48,965	70,45	43,88%	0	0	0	0	déc-02
SU	24,7	26,97	9,19%	1	1	0	0	déc-02
T	17,325	19,56	12,90%	1	0	0	0	déc-02
TA	17,115	15,99	-6,57%	1	1	0	0	déc-02
TOC	41,865	40,30	-3,74%	1	1	1	0	déc-02
TRP	22,9	31,27	36,55%	0	0	0	0	déc-02
WN	90,6	91,14	0,60%	1	1	1	1	déc-02
Nombre de compagnies correctement évaluées selon le standard de comparaison				16	12	6	1	

Note : La valeur marchande moyenne est la moyenne arithmétique des prix haut et bas de la journée.

a) Cet écart est obtenu en utilisant l'expression : $\frac{\textit{Valeur Calculée} - \textit{Valeur marchande moyenne}}{\textit{Valeur marchande moyenne}}$

Tableau V.3
Comparaison entre la valeur marchande moyenne de l'avoir des actionnaires
et l'estimation de cette valeur à l'aide du modèle de Leland, à la date de l'état financier de 2002

$$E(V)=V-(1-\tau)\frac{C}{r}+\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2r/\sigma^2}$$

Symbole	Valeur marchande moyenne	Valeur calculée	Écart relatif	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%	date état financier
AGU	17,66	18,68	5,78%	1	1	0	0	déc-02
AL	46,54	46,71	0,37%	1	1	1	1	déc-02
BBD	5,205	4,32	-17,00%	0	0	0	0	janv-03
BCB	28,085	24,74	-11,91%	1	0	0	0	déc-02
BCE	28,66	30,00	4,68%	1	1	1	0	déc-02
BVF	41,72	39,58	-5,13%	1	1	0	0	déc-02
CCO	37,74	12,67	-66,43%	0	0	0	0	déc-02
CNQ	46,655	36,43	-21,92%	0	0	0	0	déc-02
CNR	65,72	63,00	-4,14%	1	1	1	0	déc-02
COS	37,825	39,12	3,42%	1	1	1	0	déc-02
CSN	36,125	23,88	-33,90%	0	0	0	0	févr-03
CTC	39,95	37,49	-6,16%	1	1	0	0	déc-02
ENB	43,2	37,94	-12,18%	1	0	0	0	déc-02
HSE	16,615	25,96	56,24%	0	0	0	0	déc-02
K	11,565	7,97	-31,09%	0	0	0	0	déc-02
L	53,87	55,38	2,80%	1	1	1	0	déc-02
MDS	22,45	13,17000	-41,34%	0	0	0	0	oct-02
NCX	29,015	23,75	-18,15%	0	0	0	0	déc-02
NXY	33,975	47,39	39,48%	0	0	0	0	déc-02
PCA	48,965	69,42	41,77%	0	0	0	0	déc-02
SU	24,7	24,30	-1,62%	1	1	1	0	déc-02
T	17,325	13,83	-20,17%	0	0	0	0	déc-02
TA	17,115	17,19	0,44%	1	1	1	1	déc-02
TOC	41,865	42,55	1,64%	1	1	1	0	déc-02
TRP	22,9	31,47	37,42%	0	0	0	0	déc-02
WN	90,6	89,95	-0,72%	1	1	1	1	déc-02
Nombre de compagnies correctement évaluées selon le standard de comparaison				14	12	9	3	

Note : La valeur marchande moyenne est la moyenne arithmétique des prix haut et bas de la journée.

Tableau V.4

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Sarkar et Zapatero par rapport aux valeurs marchandes correspondantes, 3 jours autour de la date de l'état financier de 2002

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} E_i}{26}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_{MC,i}}{N}$$

	Jour						
Symbole	-3	-2	-1	0	1	2	3
AGU	8.75%	9.05%	10.94%	12.23%	13.55%	15.27%	15.87%
AL	-4.02%	-2.03%	-0.89%	0.84%	1.21%	2.08%	1.37%
BBD	-5.64%	-5.00%	-7.40%	-5.09%	-9.02%	-8.18%	-9.19%
BCB	-11.41%	-12.64%	-10.71%	-10.81%	-8.88%	-9.22%	-8.01%
BCE	2.40%	3.80%	4.35%	4.95%	5.12%	5.29%	5.25%
BVF	-12.57%	-11.40%	-7.43%	-4.43%	-2.97%	-2.98%	-2.87%
CCO	-57.78%	-56.10%	-55.50%	-55.22%	-55.40%	-56.25%	-56.84%
CNO	-9.05%	-8.67%	-7.39%	-6.55%	-7.03%	-6.63%	-5.91%
CNR	-3.79%	-2.67%	-1.87%	-1.29%	1.17%	1.21%	1.75%
COS	8.81%	6.68%	6.96%	8.24%	7.88%	8.97%	10.50%
CSN/CSO	-30.70%	-32.17%	-33.71%	-33.84%	-32.89%	-33.55%	-33.12%
CTC	0.74%	0.93%	3.30%	-1.09%	-1.09%	-1.09%	-1.09%
ENB	-7.88%	-7.26%	-5.87%	-6.30%	-4.86%	-4.78%	-4.46%
HSE	57.99%	59.41%	59.99%	59.99%	61.15%	62.08%	61.64%
K	-33.00%	-31.36%	-29.00%	-30.65%	-30.20%	-31.01%	-25.12%
L	3.69%	3.69%	3.59%	3.51%	3.59%	3.31%	3.69%
MDS	-40.82%	-41.75%	-40.63%	-40.89%	-41.80%	-41.93%	-42.05%
NCX	-14.41%	-14.55%	-13.38%	-12.61%	-12.20%	-13.46%	-13.63%
NXY	40.96%	41.21%	40.75%	42.72%	44.19%	41.45%	40.84%
PCA	42.01%	42.79%	43.28%	44.14%	44.04%	43.66%	43.14%
SU	-3.91%	-2.80%	-1.09%	0.63%	-0.50%	-0.76%	-0.94%
T	-21.85%	-20.14%	-20.07%	-19.19%	-18.84%	-18.63%	-19.54%
TA	-0.71%	-0.68%	0.52%	2.02%	1.81%	1.42%	1.16%
TOC/TRI	-2.73%	-0.17%	1.31%	3.38%	5.73%	5.56%	4.54%
TRP	37.21%	37.39%	37.24%	37.42%	37.88%	38.57%	37.39%
WN	0.80%	0.88%	1.55%	1.77%	2.03%	2.17%	1.83%
E_M	-2,19%	-1,68%	-0,81%	-0,24%	0,14%	0,10%	0,24%
E_{MC}	-2,19%	-1,93%	-1,56%	-1,23%	-0,95%	-0,78%	-0,63%

MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	-0,6336%
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	0,97%

Note : La valeur marchande est la moyenne arithmétique des prix haut et bas de la journée.

Tableau V.5

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Goldstein, Ju et Leland par rapport aux valeurs marchandes correspondantes, 3 jours autour de la date de l'état financier de 2002

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} E_i}{26}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

	Jour						
Symbole	-3	-2	-1	0	1	2	3
AGU	10.34%	10.65%	12.57%	13.87%	15.21%	16.95%	17.57%
AL	-0.52%	1.54%	2.72%	4.51%	4.90%	5.80%	5.07%
BBD	-6.59%	-5.96%	-8.34%	-6.05%	-9.94%	-9.11%	-10.11%
BCB	-12.93%	-14.14%	-12.24%	-12.34%	-10.44%	-10.78%	-9.59%
BCE	5.33%	6.76%	7.34%	7.96%	8.13%	8.30%	8.26%
BVF	0.00%	1.33%	5.87%	9.30%	10.98%	10.96%	11.08%
CCO	-19.68%	-16.49%	-15.34%	-14.81%	-15.16%	-16.76%	-17.90%
CNO	13.58%	14.06%	15.65%	16.71%	16.11%	16.61%	17.50%
CNR	-4.68%	-3.57%	-2.78%	-2.21%	0.23%	0.27%	0.81%
COS	16.20%	13.93%	14.23%	15.58%	15.20%	16.37%	18.00%
CSN/CSO	-32.15%	-33.59%	-35.10%	-35.22%	-34.30%	-34.94%	-34.52%
CTC	-0.11%	0.08%	2.43%	-1.93%	-1.93%	-1.93%	-1.93%
ENB	-11.59%	-11.00%	-9.66%	-10.07%	-8.70%	-8.61%	-8.31%
HSE	27.43%	28.58%	29.04%	29.04%	29.98%	30.73%	30.37%
K	-37.09%	-35.56%	-33.33%	-34.89%	-34.46%	-35.23%	-29.69%
L	-2.65%	-2.65%	-2.74%	-2.82%	-2.74%	-3.01%	-2.65%
MDS	-41.14%	-42.05%	-40.94%	-41.20%	-42.11%	-42.23%	-42.36%
NCX	-19.36%	-19.49%	-18.39%	-17.66%	-17.28%	-18.46%	-18.63%
NXY	47.50%	47.76%	47.29%	49.35%	50.88%	48.02%	47.37%
PCA	41.75%	42.52%	43.02%	43.88%	43.78%	43.40%	42.87%
SU	4.27%	5.48%	7.32%	9.19%	7.97%	7.69%	7.49%
T	9.18%	11.58%	11.68%	12.90%	13.39%	13.69%	12.41%
TA	-9.07%	-9.04%	-7.94%	-6.57%	-6.76%	-7.12%	-7.36%
TOC/TRJ	-9.43%	-7.05%	-5.66%	-3.74%	-1.55%	-1.71%	-2.66%
TRP	36.34%	36.52%	36.37%	36.55%	37.00%	37.69%	36.52%
WN	-0.37%	-0.28%	0.37%	0.60%	0.85%	0.99%	0.65%
E_M	0,18%	0,77%	1,67%	2,30%	2,66%	2,60%	2,70%
E_{MC}	0,18%	0,47%	0,87%	1,23%	1,52%	1,70%	1,84%

MOYENNE DES ECARTS RELATIFS QUOTIDIENS	1,8400%
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	1,01%

Note : La valeur marchande est la moyenne arithmétique des prix haut et bas de la journée.

Tableau V.6
Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Hayne Leland, par rapport aux valeurs marchandes correspondantes, 3 jours autour de la date de l'état financier de 2002

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} Ei}{26}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC\ j}}{N}$$

	Jour						
Symbole	-3	-2	-1	0	1	2	3
AGU	2.50%	2.78%	4.56%	5.78%	7.02%	8.64%	9.21%
AL	-4.47%	-2.48%	-1.35%	0.37%	0.73%	1.60%	0.90%
BBD	-17.48%	-16.92%	-19.03%	-17.00%	-20.44%	-19.70%	-20.59%
BCB	-12.50%	-13.72%	-11.82%	-11.91%	-10.00%	-10.35%	-9.14%
BCE	2.13%	3.52%	4.08%	4.68%	4.84%	5.01%	4.97%
BVF	-13.20%	-12.04%	-8.10%	-5.13%	-3.67%	-3.69%	-3.58%
CCO	-68.34%	-67.09%	-66.64%	-66.43%	-66.57%	-67.20%	-67.65%
CNO	-24.01%	-23.69%	-22.62%	-21.92%	-22.32%	-21.98%	-21.39%
CNR	-6.56%	-5.48%	-4.70%	-4.14%	-1.75%	-1.71%	-1.18%
COS	3.97%	1.94%	2.21%	3.42%	3.08%	4.13%	5.59%
CSN/CSO	-30.76%	-32.23%	-33.77%	-33.90%	-32.95%	-33.60%	-33.17%
CTC	-4.42%	-4.24%	-1.99%	-6.16%	-6.16%	-6.16%	-6.16%
ENB	-13.66%	-13.08%	-11.78%	-12.18%	-10.83%	-10.75%	-10.46%
HSE	54.29%	55.68%	56.24%	56.24%	57.38%	58.29%	57.86%
K	-33.42%	-31.79%	-29.44%	-31.09%	-30.64%	-31.44%	-25.58%
L	2.98%	2.98%	2.89%	2.80%	2.89%	2.60%	2.98%
MDS	-41.27%	-42.19%	-41.07%	-41.34%	-42.24%	-42.36%	-42.49%
NCX	-19.83%	-19.97%	-18.87%	-18.15%	-17.76%	-18.94%	-19.11%
NXY	37.76%	38.00%	37.56%	39.48%	40.92%	38.24%	37.64%
PCA	39.68%	40.44%	40.93%	41.77%	41.67%	41.30%	40.78%
SU	-6.05%	-4.97%	-3.30%	-1.62%	-2.72%	-2.97%	-3.15%
T	-22.80%	-21.11%	-21.04%	-20.17%	-19.83%	-19.62%	-20.52%
TA	-2.25%	-2.22%	-1.04%	0.44%	0.23%	-0.15%	-0.41%
TOC/TRI	-4.37%	-1.86%	-0.40%	1.64%	3.95%	3.78%	2.78%
TRP	37.21%	37.39%	37.24%	37.42%	37.88%	38.57%	37.39%
WN	-1.67%	-1.59%	-0.94%	-0.72%	-0.47%	-0.33%	-0.66%
E_M	-5,64%	-5,15%	-4,31%	-3,76%	-3,38%	-3,42%	-3,27%
E_{MC}	-5,64%	-5,39%	-5,03%	-4,72%	-4,45%	-4,28%	-4,13%
MOYENNE DES ECARTS RELATIFS QUOTIDIENS	-4,1324%						
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	0,94%						

Note : La valeur marchande est la moyenne arithmétique des prix haut et bas de la journée.

Tableau V.7

Évolution du rendement quotidien des portefeuilles surévalués par le marché selon les trois modèles sous étude, pour une période de 20 jours à compter de la date de l'état financier de 2002

		Jour																				
Rendement		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
SZ	NP	0,00%	-0,78%	-0,22%	-0,26%	-0,28%	-0,47%	-0,34%	-0,33%	-0,13%	-0,07%	-0,07%	-0,01%	0,03%	0,09%	0,06%	0,04%	0,00%	0,02%	-0,02%	-0,04%	-0,06%
	PCA	0,00%	-0,59%	-0,27%	-0,22%	-0,17%	-0,20%	-0,04%	-0,02%	0,14%	0,17%	0,18%	0,26%	0,24%	0,26%	0,23%	0,16%	0,10%	0,12%	0,06%	-0,01%	-0,06%
	ÉQUIPOND	0,00%	-0,29%	-0,12%	-0,25%	-0,41%	-0,68%	-0,76%	-0,87%	-0,82%	-0,78%	-0,71%	-0,63%	-0,55%	-0,43%	-0,35%	-0,32%	-0,34%	-0,37%	-0,42%	-0,50%	-0,61%
HL	NP	0,00%	-0,60%	-0,17%	-0,19%	-0,20%	-0,37%	-0,27%	-0,23%	-0,08%	0,00%	-0,01%	0,04%	0,05%	0,08%	0,05%	0,03%	-0,01%	0,01%	0,00%	-0,02%	-0,02%
	PCA	0,00%	-0,34%	-0,20%	-0,08%	-0,02%	-0,08%	0,02%	0,11%	0,11%	0,22%	0,22%	0,27%	0,22%	0,17%	0,12%	0,08%	0,05%	0,05%	0,08%	0,08%	0,09%
	ÉQUIPOND	0,00%	-0,19%	-0,04%	-0,14%	-0,28%	-0,54%	-0,63%	-0,72%	-0,67%	-0,61%	-0,54%	-0,45%	-0,39%	-0,30%	-0,24%	-0,23%	-0,26%	-0,30%	-0,36%	-0,44%	-0,53%
GJL	NP	0,00%	-0,87%	-0,21%	-0,22%	-0,18%	-0,36%	-0,22%	-0,26%	-0,26%	-0,21%	-0,18%	-0,09%	-0,09%	-0,03%	-0,06%	-0,10%	-0,13%	-0,10%	-0,11%	-0,08%	-0,09%
	PCA	0,00%	-0,70%	-0,25%	-0,18%	-0,08%	-0,17%	-0,01%	-0,05%	-0,08%	-0,02%	0,09%	0,16%	0,15%	0,16%	0,11%	0,01%	-0,01%	0,02%	0,06%	0,05%	0,01%
	ÉQUIPOND	0,00%	-0,34%	-0,11%	-0,21%	-0,30%	-0,50%	-0,49%	-0,58%	-0,66%	-0,75%	-0,76%	-0,74%	-0,74%	-0,69%	-0,68%	-0,74%	-0,84%	-0,94%	-1,04%	-1,11%	-1,18%
RENDEMENT_MARCHÉ		0,00%	2,32%	1,37%	1,36%	0,88%	0,40%	0,48%	0,48%	0,44%	0,41%	0,34%	0,34%	0,21%	0,19%	0,17%	0,13%	0,14%	0,05%	-0,05%	-0,03%	-0,02%

Note : La valeur marchande des portefeuilles est la somme des prix hauts et bas moyens de la journée, des titres qui les composent.

Tableau V.8
Évolution du rendement quotidien des portefeuilles sous-évalués par le marché selon les trois modèles sous étude, pour une période de 20 jours à compter de la date de l'état financier de 2002

		Jour																				
Rendement		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
SZ	NP	0,00%	-0,35%	-0,21%	-0,08%	-0,08%	-0,21%	-0,18%	-0,13%	-0,10%	-0,04%	-0,05%	-0,03%	-0,05%	-0,06%	-0,07%	-0,11%	-0,11%	-0,09%	-0,02%	-0,01%	-0,02%
	PCA	0,00%	-0,35%	-0,22%	-0,06%	0,02%	-0,07%	-0,05%	-0,02%	-0,04%	0,06%	0,08%	0,11%	0,07%	0,03%	0,01%	-0,03%	-0,03%	-0,01%	0,07%	0,09%	0,08%
	ÉQUIPOND	0,00%	-0,35%	-0,41%	-0,37%	-0,40%	-0,57%	-0,69%	-0,74%	-0,76%	-0,75%	-0,77%	-0,79%	-0,81%	-0,82%	-0,85%	-0,91%	-0,98%	-1,05%	-1,05%	-1,06%	-1,06%
HL	NP	0,00%	-0,48%	-0,27%	-0,13%	-0,13%	-0,27%	-0,24%	-0,21%	-0,16%	-0,13%	-0,14%	-0,11%	-0,11%	-0,10%	-0,10%	-0,14%	-0,13%	-0,11%	-0,04%	-0,04%	-0,05%
	PCA	0,00%	-0,46%	-0,27%	-0,10%	-0,01%	-0,11%	-0,11%	-0,15%	-0,11%	-0,06%	-0,03%	0,01%	-0,01%	-0,02%	-0,02%	-0,07%	-0,07%	-0,03%	0,06%	0,07%	0,02%
	ÉQUIPOND	0,00%	-0,50%	-0,57%	-0,54%	-0,58%	-0,74%	-0,85%	-0,92%	-0,95%	-0,97%	-1,02%	-1,05%	-1,08%	-1,08%	-1,09%	-1,14%	-1,20%	-1,26%	-1,26%	-1,25%	-1,25%
GJL	NP	0,00%	-0,26%	-0,21%	-0,11%	-0,16%	-0,31%	-0,28%	-0,18%	0,01%	0,09%	0,05%	0,05%	0,05%	0,04%	0,03%	0,02%	0,01%	0,02%	0,06%	0,02%	0,01%
	PCA	0,00%	-0,23%	-0,22%	-0,04%	0,02%	-0,05%	-0,07%	0,00%	0,04%	0,14%	0,10%	0,12%	0,08%	0,02%	0,02%	0,01%	0,00%	0,01%	0,08%	0,09%	0,12%
	ÉQUIPOND	0,00%	-0,30%	-0,41%	-0,41%	-0,51%	-0,76%	-0,96%	-1,04%	-0,92%	-0,78%	-0,72%	-0,68%	-0,62%	-0,57%	-0,51%	-0,49%	-0,48%	-0,48%	-0,44%	-0,45%	-0,48%
RENDEMENT_MARCHÉ		0,00%	2,32%	1,37%	1,36%	0,88%	0,40%	0,48%	0,48%	0,44%	0,41%	0,34%	0,34%	0,21%	0,19%	0,17%	0,13%	0,14%	0,05%	-0,05%	-0,03%	-0,02%

Note : La valeur marchande des portefeuilles est la somme des prix hauts et bas moyens de la journée, des titres qui les composent.

ANNEXE W

ÉVALUATION DES OPTIONS D'ACHAT, EN CONSIDÉRANT COMME STANDARD DE COMPARAISON LE 'BID-ASK' MOYEN DE LA JOURNÉE DE L'ÉTAT FINANCIER DE 2006

Tableau W.1

Comparaison entre la valeur moyenne du bid-ask de la journée et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero, à la date de l'état financier de 2006

$$\frac{\partial G}{\partial E}\left(\frac{\partial E}{\partial V}(k(V_1\theta - V)+V_2)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2(V-V_2)^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\sigma(V-V_2)\right)^2 = rG$$ [133]

Symbole	Bid-Ask moyen [a]	Valeur calculée S.Z	Ratio [b]	Seuil 15% [c]	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AGU	1.3	3.69	183.85%	0	0	0	0
AL	1.925	1.69	-12.21%	1	0	0	0
BBD	0.255	0.22	-14.82%	1	0	0	0
BCB	1.025	1.03	0.15%	1	1	1	1
BCE	1.5	1.77	18.00%	0	0	0	0
BVF	1.075	0.97	-9.77%	1	1	0	0
CCO	1.275	1.37	7.45%	1	1	0	0
CNO	1.325	1.33	0.26%	1	1	1	1
CNR	2.8	1.97	-29.64%	0	0	0	0
COS	1.225	1.40	14.29%	1	0	0	0
CSN	1.1	1.05	-4.82%	1	1	1	0
CTC	0.925	0.89	-3.78%	1	1	1	0
ENB	1	0.97	-3.04%	1	1	1	0
HSE	1.825	1.91	4.66%	1	1	1	0
K	0.35	0.55	58.37%	0	0	0	0
L	2.225	1.25	-43.83%	0	0	0	0
MDS	0.3	0.29	-3.72%	1	1	1	0
NCX	1.35	5.89	336.30%	0	0	0	0
NXY	1.825	3.63	98.90%	0	0	0	0
PCA	0.13	0.78	500.00%	0	0	0	0
SU	3.475	4.82	38.71%	0	0	0	0
T	0.875	0.84	-3.54%	1	1	1	0
TA	1.05	1.04	-0.63%	1	1	1	1
TOC	0.825	1.26	52.73%	0	0	0	0
TRP	1	0.87	-13.50%	1	0	0	0
WN	1.475	1.43	-3.05%	1	1	1	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				16	12	10	3

a) Représente la moyenne arithmétique entre le bid le plus bas et le ask le plus haut de la journée.

b) $\frac{Valeur\ Calculée - Bid\_Ask\ moyen}{Bid\_Ask\ moyen}$

c) Le chiffre 1 signifie que l'option est correctement évaluée par rapport à la valeur de son bid-ask moyen alors que le chiffre 0, signifie le contraire et ce, pour les divers niveaux de précision considérés.

133) Équation différentielle ordinaire remplie par une option d'achat, selon le modèle de Sarkar et Zapatero. Cette équation a été dérivée au chapitre 3. Le détail des dérivations est fourni à l'annexe (M).

Tableau W.2
Comparaison entre la valeur moyenne du bid-ask de la journée et la valeur calculée d'une option évaluée à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland, à la date de l'état financier de 2006

$$\frac{\partial G}{\partial E}\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\mu V+\frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\Bigg)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma V\right)^2=rG$$ [134]

Symbole	Bid-Ask moyen	Valeur calculée GJL	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AGU	1.3	4.53	248.60%	0	0	0	0
AL	1.925	2.19	13.82%	1	0	0	0
BBD	0.255	0.34	35.14%	0	0	0	0
BCB	1.025	1.04	1.91%	1	1	1	0
BCE	1.5	2.03	35.17%	0	0	0	0
BVF	1.075	0.89	-17.10%	0	0	0	0
CCO	1.275	1.54	20.50%	0	0	0	0
CNQ	2.8	2.18	-22.07%	0	0	0	0
CNR	1.225	0.86	-29.75%	0	0	0	0
COS	1.325	1.44	8.66%	1	1	0	0
CSN	1.1	1.12	1.80%	1	1	1	0
CTC	0.925	1.43	54.84%	0	0	0	0
ENB	1	1.36	35.95%	0	0	0	0
HSE	1.825	2.37	29.86%	0	0	0	0
K	0.35	0.70	99.17%	0	0	0	0
L	2.225	1.40	-37.23%	0	0	0	0
MDS	0.3	0.24250	-19.17%	0	0	0	0
NCX	1.35	14.27	957.04%	0	0	0	0
NXY	1.825	2.32	27.21%	0	0	0	0
PCA	0.13	0.94	624.85%	0	0	0	0
SU	3.475	5.24	50.72%	0	0	0	0
T	0.875	1.46	66.31%	0	0	0	0
TA	1.05	1.10	4.42%	1	1	1	0
TOC	0.825	1.45	75.37%	0	0	0	0
TRP	1	0.79	-21.43%	0	0	0	0
WN	1.475	1.88	27.57%	0	0	0	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				5	4	3	0

134) Équation différentielle ordinaire remplie par une option d'achat, selon le modèle de Goldstein, Ju et Leland. Cette équation a été dérivée au chapitre 3. Le détail des dérivations est fourni à l'annexe (J).

Tableau W.3
Comparaison entre la valeur moyenne du bid-ask de la journée et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Leland, à la date de l'état financier de 2006

$$\frac{\partial G}{\partial E}\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)rV\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V\right)^2=rG$$ [135]

Symbole	Bid-Ask moyen	Valeur calculée HL	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AGU	1.3	3.50	169.46%	0	0	0	0
AL	1.925	1.69	-12.08%	1	0	0	0
BBD	0.255	0.19	-26.90%	0	0	0	0
BCB	1.025	0.81	-20.75%	0	0	0	0
BCE	1.5	1.46	-2.46%	1	1	1	0
BVF	1.075	0.83	-22.51%	0	0	0	0
CCO	1.275	1.36	6.67%	1	1	0	0
CNQ	1.325	1.11	-16.52%	0	0	0	0
CNR	2.8	1.85	-33.99%	0	0	0	0
COS	1.225	1.40	14.62%	1	0	0	0
CSN	1.1	1.11	0.96%	1	1	1	1
CTC	0.925	0.82	-11.66%	1	0	0	0
ENB	1	0.74	-25.81%	0	0	0	0
HSE	1.825	1.92	5.42%	1	1	0	0
K	0.35	0.52	47.14%	0	0	0	0
L	2.225	1.26	-43.19%	0	0	0	0
MDS	0.3	0.24260	-20.46%	0	0	0	0
NCX	1.35	2.14	58.76%	0	0	0	0
NXY	1.825	1.80	-1.21%	1	1	1	0
PCA	0.13	0.85	467.46%	0	0	0	0
SU	3.475	4.94	42.01%	0	0	0	0
T	0.875	0.85	-2.48%	1	1	1	0
TA	1.05	2.62	149.52%	0	0	0	0
TOC	0.825	1.26	53.19%	0	0	0	0
TRP	1	0.75	-25.18%	0	0	0	0
WN	1.475	1.45	-1.51%	1	1	1	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				10	7	5	1

135) Équation différentielle ordinaire remplie par une option d'achat, selon le modèle de Hayne Leland. Cette équation a été dérivée au chapitre 3. Le détail des dérivations est fourni à l'annexe (H).

Tableau W.4
Comparaison entre la valeur moyenne du bid-ask de la journée et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Black-Scholes, à la date de l'état financier de 2006

$$\frac{\partial C}{\partial E} rE + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial E^2}(\sigma E)^2 = rC$$ [136]

Symbole	Bid-Ask moyen	Valeur calculée B&S	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AGU	1.3	5.16	297.13%	0	0	0	0
AL	1.925	2.15	11.84%	1	0	0	0
BBD	0.255	0.23	-10.90%	1	0	0	0
BCB	1.025	1.11	8.75%	1	1	0	0
BCE	1.5	1.51	0.73%	1	1	1	1
BVF	1.075	1.63	51.44%	0	0	0	0
CCO	1.275	2.80	119.25%	0	0	0	0
CNQ	1.325	2.33	75.58%	0	0	0	0
CNR	2.8	3.09	10.22%	1	0	0	0
COS	1.225	2.35	92.15%	0	0	0	0
CSN	1.1	1.97	79.43%	0	0	0	0
CTC	0.925	1.69	83.07%	0	0	0	0
ENB	1	1.39	38.88%	0	0	0	0
HSE	1.825	3.67	101.12%	0	0	0	0
K	0.35	1.21	244.40%	0	0	0	0
L	2.225	2.04	-8.31%	1	1	0	0
MDS	0.3	0.57	88.87%	0	0	0	0
NCX	1.35	2.91	115.35%	0	0	0	0
NXY	1.825	2.75	50.82%	0	0	0	0
PCA	0.13	2.46	1792.15%	0	0	0	0
SU	3.475	8.28	138.18%	0	0	0	0
T	0.875	0.84	-3.89%	1	1	1	0
TA	1.05	1.22	16.17%	0	0	0	0
TOC	0.825	2.28	176.27%	0	0	0	0
TRP	1	0.95	-4.98%	1	1	1	0
WN	1.475	2.32	57.17%	0	0	0	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				8	5	3	1

136) Équation différentielle ordinaire remplie par une option d'achat, selon le modèle de Black-Scholes.

Tableau W.5

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Sarkar et Zapatero par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} Ei}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

Symbole	Jour -1	Jour 0	Jour 1
AGU	194,62%	183,85%	83,59%
AL	-27,92%	-12,21%	-37,33%
BBD	-27,87%	-14,82%	-23,08%
BCB	-2,33%	0,15%	-3,81%
BCE	58,26%	18,00%	10,00%
BVF	-41,71%	-9,77%	-46,27%
CCO	9,96%	7,45%	-24,06%
CNQ	31,90%	0,26%	0,78%
CNR	-22,24%	-29,64%	-31,94%
COS	28,70%	14,29%	12,50%
CSN/CSQ	-5,00%	-4,82%	-24,45%
CTC	2,22%	-3,78%	3,17%
ENB	28,75%	-3,04%	0,54%
HSE	-7,71%	4,66%	-14,16%
K	36,47%	58,37%	14,80%
L	-56,32%	-43,83%	-40,78%
MDS	39,02%	-4,80%	-4,68%
NCX	342,91%	336,30%	278,67%
NXY	111,83%	98,90%	52,17%
PCA	200,67%	600,00%	529,63%
SU	33,96%	38,71%	35,36%
T	-18,14%	-3,54%	-49,84%
TA	26,47%	-0,63%	-3,53%
TOC/TRI	82,07%	52,73%	12,56%
TRP	-4,86%	-13,50%	-13,85%
WN	-26,19%	-3,05%	0,75%
E_M	37,98%	48,70%	27,57%
E_{MC}	37,98%	43,34%	38,08%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	38,0835%		
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	10,57%		

Note : Le standard de comparaison est la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

Tableau W.6

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Goldstein, Ju et Leland par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} E_i}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

	Jour		
Symbole	-1	0	1
AGU	260,00%	248,60%	124,62%
AL	-6,25%	13,82%	-18,95%
BBD	31,15%	35,14%	38,46%
BCB	1,83%	1,91%	-2,86%
BCE	80,00%	35,17%	24,38%
BVF	-44,00%	-17,10%	-46,27%
CCO	45,10%	20,50%	-0,97%
CNO	-12,90%	-22,07%	-22,62%
CNR	-21,74%	-29,75%	-30,00%
COS	42,38%	8,66%	8,49%
CSN/CSO	-2,77%	1,80%	-17,63%
CTC	80,68%	54,84%	85,81%
ENB	79,29%	35,95%	38,62%
HSE	22,17%	29,86%	3,56%
K	70,42%	99,17%	48,89%
L	-51,24%	-37,23%	-34,15%
MDS	31,71%	-16,67%	-20,54%
NCX	1061,45%	957,04%	900,00%
NXY	34,65%	27,21%	-3,04%
PCA	287,88%	818,77%	722,22%
SU	45,23%	50,72%	46,67%
T	40,47%	66,31%	-11,11%
TA	34,84%	4,42%	0,47%
TOC/TRI	106,90%	75,37%	29,30%
TRP	-13,73%	-21,43%	-21,03%
WN	-6,96%	27,57%	31,64%
E_M	84,48%	94,95%	72,07%
E_{MC}	84,48%	89,71%	83,83%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	83,8347%		
Ecart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	11,45%		

Note : Le standard de comparaison est la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

Tableau W.7

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Hayne Leland par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{t=1}^{M} E_t}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

Symbole	Jour -1	Jour 0	Jour 1
AGU	179.23%	169.46%	74.36%
AL	-29.58%	-12.08%	-37.26%
BBD	-36.07%	-26.90%	-31.50%
BCB	-23.72%	-20.75%	-23.62%
BCE	28.18%	-2.46%	-9.25%
BVF	-50.57%	-22.51%	-52.24%
CCO	11.55%	6.67%	-24.78%
CNO	16.19%	-16.52%	-17.65%
CNR	-28.45%	-33.99%	-36.99%
COS	26.96%	14.62%	10.00%
CSN/CSO	-3.79%	0.96%	-14.62%
CTC	-2.67%	-11.66%	-2.34%
ENB	-1.11%	-25.81%	-25.25%
HSE	-14.35%	5.42%	-17.63%
K	27.06%	47.14%	8.73%
L	-55.93%	-43.19%	-40.24%
MDS	26.83%	-19.13%	-22.03%
NCX	60.73%	58.76%	38.00%
NXY	4.94%	-1.21%	-24.57%
PCA	176.58%	550.00%	474.81%
SU	36.64%	42.01%	38.26%
T	-17.67%	-2.48%	-47.94%
TA	227.27%	149.52%	136.28%
TOC/TRI	82.07%	53.19%	13.02%
TRP	-17.84%	-25.18%	-24.10%
WN	-28.10%	-1.51%	1.27%
E_M	22,86%	32,01%	13,18%
E_{MC}	22,86%	27,44%	22,69%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	22,6859%		
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	9,42%		

Note : Le standard de comparaison est la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

Tableau W.8

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Black-Scholes par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} E_i}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC\ j}}{N}$$

	Jour		
Symbole	-1	0	1
AGU	310.00%	297.13%	155.38%
AL	-7.71%	11.84%	-20.38%
BBD	-22.36%	-10.90%	-16.54%
BCB	5.93%	8.75%	3.81%
BCE	32.56%	0.73%	-6.41%
BVF	-3.51%	51.44%	-6.56%
CCO	128.19%	119.25%	55.22%
CNO	135.24%	75.58%	79.96%
CNR	19.50%	10.22%	5.19%
COS	112.17%	92.15%	88.43%
CSN/CSO	72.50%	79.43%	44.15%
CTC	87.86%	83.07%	93.20%
ENB	68.33%	38.88%	41.51%
HSE	66.52%	101.12%	58.03%
K	195.08%	244.40%	156.62%
L	-28.59%	-8.31%	-3.83%
MDS	187.80%	88.87%	83.73%
NCX	118.18%	115.35%	87.12%
NXY	60.56%	50.82%	15.27%
PCA	700.00%	1792.15%	1640.00%
SU	129.53%	138.18%	131.59%
T	-18.74%	-3.89%	-48.73%
TA	50.53%	16.17%	11.36%
TOC/TRI	226.03%	176.27%	103.87%
TRP	4.95%	-4.98%	-4.71%
WN	14.71%	57.17%	61.75%
E_M	101,74%	139,26%	108,04%
E_{MC}	101,74%	120,50%	116,35%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	116,3486%		
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	20,09%		

Note : Le standard de comparaison est la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

ANNEXE X

ÉVALUATION DES OPTIONS D'ACHAT, EN CONSIDÉRANT COMME STANDARD DE COMPARAISON LA MOYENNE DES PRIX HAUT ET BAS DE LA JOURNÉE DE L'ÉTAT FINANCIER DE 2006

Tableau X.1

Comparaison entre la valeur marchande moyenne et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero, à la date de l'état financier de 2006

$$\frac{\partial G}{\partial E}\left(\frac{\partial E}{\partial V}(k(V_1\theta - V)+V_2)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2(V-V_2)^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\sigma(V-V_2)\right)^2 = rG$$

Symbole	Valeur marchande moyenne	Valeur calculée S.Z	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AGU	2.35	3.69	57.02%	0	0	0	0
AL	1.75	1.69	-3.43%	1	1	1	0
BBD	0.125	0.22	73.76%	0	0	0	0
BCE	1.625	1.77	8.92%	1	1	0	0
BVF	0.95	0.97	2.11%	1	1	1	0
CCO	1.5	1.37	-8.67%	1	1	0	0
COS	1.45	1.33	-8.38%	1	1	0	0
CNO	1.8	1.97	9.44%	1	1	0	0
CNR	1.125	1.40	24.44%	0	0	0	0
CSN/CSO	1.05	1.05	-0.29%	1	1	1	1
HSE	2.1	1.91	-9.05%	1	1	0	0
K	0.475	0.55	16.69%	0	0	0	0
L	1.25	1.25	-0.02%	1	1	1	1
MDS	0.25	0.28	13.84%	1	0	0	0
NXY	2.275	3.63	59.56%	0	0	0	0
PCA	0.125	0.91	628.00%	0	0	0	0
SU	3.1	4.82	55.48%	0	0	0	0
T	0.85	0.84	-0.71%	1	1	1	1
TRP	1.075	0.87	-19.53%	0	0	0	0
WN	1.3	1.43	10.00%	1	1	0	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				12	11	5	3

Note : La valeur marchande moyenne représente la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau X.2

Comparaison entre la valeur marchande moyenne et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland à la date de l'état financier de 2006

$$\frac{\partial G}{\partial t}\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\mu V+\frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V\right)^2=rG$$

Symbole	Valeur marchande moyenne	Valeur calculée GJL	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AGU	2.35	4.53	92.84%	0	0	0	0
AL	1.75	2.19	25.21%	0	0	0	0
BBD	0.125	0.34	175.68%	0	0	0	0
BCE	1.625	2.03	24.78%	0	0	0	0
BVF	0.95	0.89	-6.19%	1	1	0	0
CCO	1.5	1.54	2.43%	1	1	1	0
CNO	1.45	2.18	50.48%	0	0	0	0
CNR	1.8	0.86	-52.19%	0	0	0	0
COS	1.125	1.44	27.97%	0	0	0	0
CSN	1.05	1.12	6.65%	1	1	0	0
HSE	2.1	2.37	12.86%	1	0	0	0
K	0.475	0.70	46.76%	0	0	0	0
L	1.25	1.40	11.74%	1	0	0	0
MDS	0.25	0.25	0.00%	1	1	1	1
NXY	2.275	2.32	2.05%	1	1	1	0
PCA	0.125	1.19	855.52%	0	0	0	0
SU	3.1	5.24	68.95%	0	0	0	0
T	0.85	1.46	71.20%	0	0	0	0
TRP	1.075	0.79	-26.91%	0	0	0	0
WN	1.3	1.88	44.74%	0	0	0	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				7	5	3	1

Note : La valeur marchande moyenne représente la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau X.3

Comparaison entre la valeur marchande moyenne et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Leland, à la date de l'état financier de 2006

$$\frac{\partial G}{\partial t}\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)rV\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V\right)^2=rG$$

Symbole	Valeur marchande moyenne	Valeur calculée HL	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AGU	2.35	3.50	49.06%	0	0	0	0
AL	1.75	1.69	-3.29%	1	1	1	0
BBD	0.125	0.19	49.12%	0	0	0	0
BCE	1.625	1.46	-9.96%	1	1	0	0
BVF	0.95	0.83	-12.32%	1	0	0	0
CCO	1.5	1.36	-9.33%	1	1	0	0
CNO	1.45	1.11	-23.72%	0	0	0	0
CNR	1.8	1.85	2.69%	1	1	1	0
COS	1.125	1.40	24.81%	0	0	0	0
CSN	1.05	1.11	5.77%	1	1	0	0
HSE	2.1	1.92	-8.38%	1	1	0	0
K	0.475	0.52	8.42%	1	1	0	0
L	1.25	1.26	1.13%	1	1	1	0
MDS	0.25	0.24	-2.96%	1	1	1	0
NXY	2.275	1.80	-20.75%	0	0	0	0
PCA	0.125	0.85	576.00%	0	0	0	0
SU	3.1	4.94	59.19%	0	0	0	0
T	0.85	0.85	0.39%	1	1	1	1
TRP	1.075	0.75	-30.40%	0	0	0	0
WN	1.3	1.45	11.75%	1	0	0	0
	Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison			12	10	5	1

Note : La valeur marchande moyenne représente la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau X.4
Comparaison entre la valeur marchande moyenne et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Black-Scholes, à la date de l'état financier de 2006

$$\frac{\partial G}{\partial E} rE + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}(\sigma E)^2 = rG$$

Symbole	Valeur marchande moyenne	Valeur calculée B&S	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AGU	2.35	5.16	119.69%	0	0	0	0
AL	1.75	2.15	23.03%	0	0	0	0
BBD	0.125	0.26	111.12%	0	0	0	0
BCE	1.625	1.51	-7.02%	1	1	0	0
BVF	0.95	1.63	71.36%	0	0	0	0
CCO	1.5	2.80	86.37%	0	0	0	0
CNO	1.45	2.33	60.45%	0	0	0	0
CNR	1.8	3.09	71.45%	0	0	0	0
COS	1.125	2.35	109.23%	0	0	0	0
CSN	1.05	1.97	87.97%	0	0	0	0
HSE	2.1	3.67	74.79%	0	0	0	0
K	0.475	1.21	153.77%	0	0	0	0
L	1.25	2.04	63.20%	0	0	0	0
MDS	0.25	0.57	126.64%	0	0	0	0
NXY	2.275	2.75	20.98%	0	0	0	0
PCA	0.125	2.46	1867.84%	0	0	0	0
SU	3.1	8.28	166.99%	0	0	0	0
T	0.85	0.84	-1.06%	1	1	1	1
TRP	1.075	0.95	-11.61%	1	0	0	0
WN	1.3	2.32	78.32%	0	0	0	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				3	2	1	1

Note : La valeur marchande moyenne représente la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau X.5
Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Sarkar et Zapatero par rapport au standard de comparaison[137], 1 jour autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} E_i}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC\ j}}{N}$$

Symbole	Jour -1	Jour 0	Jour 1
AGU	57.02%	57.02%	57.02%
AL	-3.43%	-3.43%	-3.43%
BBD	210.29%	73.76%	44.80%
BCE	8.92%	8.92%	8.92%
BVF	2.11%	2.11%	2.11%
CCO	21.78%	-8.67%	-8.67%
COS	-8.38%	-8.38%	26.52%
CNQ	9.44%	9.44%	9.44%
CNR	33.33%	24.44%	24.44%
CSN/CSO	-0.29%	-0.29%	-0.29%
HSE	-9.05%	-9.05%	-11.16%
K	16.69%	16.69%	16.69%
L	-0.02%	-0.02%	-0.02%
MDS	13.84%	13.84%	13.84%
NXY	59.56%	59.56%	59.56%
PCA	628.00%	628.00%	628.00%
SU	55.48%	55.48%	55.48%
T	-3.54%	-0.71%	-0.71%
TRP	-19.53%	-19.53%	-19.53%
WN	10.00%	10.00%	10.00%
E_M	54,11%	45,46%	45,65%
E_{MC}	54,11%	49,79%	48,41%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	48,4077%		
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	4,94%		

137) Il s'agit de la moyenne des prix haut et bas de la journée de l'état financier.

Tableau X.6

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Goldstein, Ju et Leland par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} Ei}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{t=1}^{N} E_{MC,t}}{N}$$

Symbole	Jour -1	Jour 0	Jour 1
AGU	92.84%	92.84%	92.84%
AL	25.21%	25.21%	25.21%
BBD	392.29%	175.68%	129.73%
BCE	24.78%	24.78%	24.78%
BVF	-6.19%	-6.19%	-6.19%
CCO	36.57%	2.43%	2.43%
COS	50.48%	50.48%	107.81%
CNO	-52.19%	-52.19%	-52.19%
CNR	37.11%	27.97%	27.97%
CSN/CSO	6.65%	6.65%	6.65%
HSE	12.86%	12.86%	10.23%
K	46.76%	46.76%	46.76%
L	11.74%	11.74%	11.74%
MDS	0.00%	0.00%	0.00%
NXY	2.05%	2.05%	2.05%
PCA	855.52%	855.52%	855.52%
SU	68.95%	68.95%	68.95%
T	66.31%	71.20%	71.20%
TRP	-26.91%	-26.91%	-26.91%
WN	44.74%	44.74%	44.74%
E_M	84,48%	71,73%	72,17%
E_{MC}	84,48%	78,10%	76,12%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	76,1237%		
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	7,24%		

Note : Le standard de comparaison représente la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau X.7
Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Hayne Leland
par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{t=1}^{M} E_t}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC\ j}}{N}$$

	Jour		
Symbole	-1	0	1
AGU	49,06%	49,06%	49,06%
AL	-3,29%	-3,29%	-3,29%
BBD	166,29%	49,12%	24,27%
BCE	-9,96%	-9,96%	-9,96%
BVF	-12,32%	-12,32%	-12,32%
CCO	20,89%	-9,33%	-9,33%
COS	-23,72%	-23,72%	5,34%
CNO	2,69%	2,69%	2,69%
CNR	33,72%	24,81%	24,81%
CSN/CSO	5,77%	5,77%	5,77%
HSE	-8,38%	-8,38%	-10,51%
K	8,42%	8,42%	8,42%
L	1,13%	1,13%	1,13%
MDS	-2,96%	-2,96%	-2,96%
NXY	-20,75%	-20,75%	-20,75%
PCA	576,00%	576,00%	576,00%
SU	59,19%	59,19%	59,19%
T	-2,48%	0,39%	0,39%
TRP	-30,40%	-30,40%	-30,40%
WN	11,75%	11,75%	11,75%
E_M	41,03%	33,36%	33,46%
E_{MC}	41,03%	37,20%	35,95%

MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	35,9530%
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	4,40%

Note : Le standard de comparaison représente la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau X.8

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Black-Scholes par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} E_i}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

	Jour		
Symbole	-1	0	1
AGU	119.69%	119.69%	119.69%
AL	23.03%	23.03%	23.03%
BBD	277.00%	111.12%	75.93%
BCE	-7.02%	-7.02%	-7.02%
BVF	71.36%	71.36%	71.36%
CCO	148.49%	86.37%	86.37%
COS	60.45%	60.45%	121.57%
CNO	71.45%	71.45%	71.45%
CNR	124.17%	109.23%	109.23%
CSN/CSO	87.97%	87.97%	87.97%
HSE	74.79%	74.79%	70.72%
K	153.77%	153.77%	153.77%
L	63.20%	63.20%	63.20%
MDS	126.64%	126.64%	126.64%
NXY	20.98%	20.98%	20.98%
PCA	1867.84%	1867.84%	1867.84%
SU	166.99%	166.99%	166.99%
T	-3.89%	-1.06%	-1.06%
TRP	-11.61%	-11.61%	-11.61%
WN	78.32%	78.32%	78.32%
E_M	175,68%	163,68%	164,77%
E_{MC}	175,68%	169,68%	168,04%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	168,0417%		
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	6,64%		

Note : Le standard de comparaison représente la moyenne des prix haut et bas de la journée.

ANNEXE Y

ÉVALUATION DES OPTIONS D'ACHAT, EN CONSIDÉRANT COMME STANDARD DE COMPARAISON LE 'BID-ASK' MOYEN DE LA JOURNÉE DE L'ÉTAT FINANCIER DE 2002

Tableau Y.1

Comparaison entre la valeur moyenne du bid-ask de la journée et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero, à la date de l'état financier de 2002

$$\frac{\partial G}{\partial E}\left(\frac{\partial E}{\partial V}(k(V_1\theta - V)+V_2)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2(V-V_2)^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\sigma(V-V_2)\right)^2 = rG$$

Symbole	Bid-Ask moyen	Valeur calculée S.Z	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AGU	0,55	1,72	212,31%	0	0	0	0
AL	1,275	1,16	-8,96%	1	1	0	0
BBD	0,425	0,45	4,82%	1	1	1	0
BCB	1,15	1,10	-4,76%	1	1	1	0
BCE	1,025	1,06	3,35%	1	1	1	0
BVF	3,9	3,06	-21,64%	0	0	0	0
CNQ	0,925	1,37	48,11%	0	0	0	0
CNR	1,825	2,24	22,49%	0	0	0	0
CSN/CSQ	2,475	1,72	-30,51%	0	0	0	0
ENB	1,275	1,93	51,37%	0	0	0	0
HSE	1,075	0,99	-7,60%	1	1	0	0
L	0,525	0,55	4,91%	1	1	1	0
MDS	0,8	0,22	-72,50%	0	0	0	0
NCX	0,6	0,82	36,67%	0	0	0	0
NXY	0,925	2,29	147,96%	0	0	0	0
PCA	0,625	2,14	242,40%	0	0	0	0
SU	0,775	0,89	14,84%	1	0	0	0
T	0,425	0,07	-83,44%	0	0	0	0
TA	2,025	1,15	-43,21%	0	0	0	0
TOC/TRI	1	1,00	0,20%	1	1	1	1
TRP	0,265	0,25	-6,82%	1	1	0	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				9	8	5	1

Note : Le standard de comparaison est la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

Tableau Y.2

Comparaison entre la valeur moyenne du bid-ask de la journée et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland, à la date de l'état financier de 2002

$$\frac{\partial G}{\partial t}\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\mu V+\frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V\right)^2=rG$$

Symbole	Bid-Ask moyen	Valeur calculée GJL	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AGU	0.55	2.28	314.55%	0	0	0	0
AL	1.275	1.20	-6.03%	1	1	0	0
BBD	0.425	0.58	36.47%	0	0	0	0
BCB	1.15	1.19	3.65%	1	1	1	0
BCE	1.025	1.39	35.21%	0	0	0	0
BVF	3.9	2.90	-25.53%	0	0	0	0
CNO	0.925	3.11	235.70%	0	0	0	0
CNR	1.825	2.83	54.93%	0	0	0	0
CSN/CSO	2.475	1.65	-33.31%	0	0	0	0
ENB	1.275	2.66	108.82%	0	0	0	0
HSE	1.075	1.25	16.17%	0	0	0	0
L	0.525	0.70	32.57%	0	0	0	0
MDS	0.8	0.27	-66.04%	0	0	0	0
NCX	0.6	1.69	181.90%	0	0	0	0
NXY	0.925	1.54	66.44%	0	0	0	0
PCA	0.625	2.66	325.44%	0	0	0	0
SU	0.775	1.13	45.32%	0	0	0	0
T	0.425	0.16	-62.71%	0	0	0	0
TA	2.025	1.19	-41.33%	0	0	0	0
TOC/TRI	1	1.21	21.28%	0	0	0	0
TRP	0.265	0.16	-38.75%	0	0	0	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				2	2	1	0

Note : Le standard de comparaison est la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

Tableau Y.3
Comparaison entre la valeur moyenne du bid-ask de la journée et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Leland, à la date de l'état financier de 2002

$$\frac{\partial G}{\partial t}\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)rV\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V\right)^2=rG$$

Symbole	Bid-Ask moyen	Valeur calculée HL	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AGU	0.55	1.59	188.44%	0	0	0	0
AL	1.275	1.12	-12.28%	1	0	0	0
BBD	0.425	0.39	-8.42%	1	1	0	0
BCB	1.15	1.10	-3.93%	1	1	1	0
BCE	1.025	1.10	6.91%	1	1	0	0
BVF	3.9	2.82	-27.78%	0	0	0	0
CNO	0.925	1.26	36.74%	0	0	0	0
CNR	1.825	2.22	21.77%	0	0	0	0
CSN/CSO	2.475	1.57	-36.51%	0	0	0	0
ENB	1.275	1.86	45.88%	0	0	0	0
HSE	1.075	0.89	-16.92%	0	0	0	0
L	0.525	0.59	13.20%	1	0	0	0
MDS	0.8	0.21	-73.79%	0	0	0	0
NCX	0.6	0.74	23.57%	0	0	0	0
NXY	0.925	1.14	23.52%	0	0	0	0
PCA	0.625	2.08	233.47%	0	0	0	0
SU	0.775	1.17	50.85%	0	0	0	0
T	0.425	0.06	-87.06%	0	0	0	0
TA	2.025	1.17	-42.39%	0	0	0	0
TOC/TRI	1	0.96	-4.40%	1	1	1	0
TRP	0.265	0.18	-32.91%	0	0	0	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				6	4	2	0

Note : Le standard de comparaison est la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

Tableau Y.4
Comparaison entre la valeur moyenne du bid-ask de la journée et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Black-Scholes à la date de l'état financier de 2002

$$\frac{\partial G}{\partial t} + rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(\sigma S)^2 = rG$$

Symbole	Bid-Ask moyen	Valeur calculée B&S	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AGU	0.55	2.06	274.93%	0	0	0	0
AL	1.275	1.94	51.87%	0	0	0	0
BBD	0.425	0.44	2.80%	1	1	1	0
BCB	1.15	1.57	36.68%	0	0	0	0
BCE	1.025	1.18	15.09%	1	0	0	0
BVF	3.9	4.02	3.08%	1	1	1	0
CNQ	0.925	1.39	50.08%	0	0	0	0
CNR	1.825	3.33	82.33%	0	0	0	0
CSN/CSO	2.475	2.63	6.26%	1	1	0	0
ENB	1.275	2.55	100.00%	0	0	0	0
HSE	1.075	1.15	6.56%	1	1	0	0
L	0.525	1.35	157.92%	0	0	0	0
MDS	0.8	0.49	-38.80%	0	0	0	0
NCX	0.6	1.45	141.00%	0	0	0	0
NXY	0.925	1.55	67.07%	0	0	0	0
PCA	0.625	3.71	494.00%	0	0	0	0
SU	0.775	1.70	119.35%	0	0	0	0
T	0.425	0.08	-81.25%	0	0	0	0
TA	2.025	1.22	-39.98%	0	0	0	0
TOC/TRI	1	1.78	78.38%	0	0	0	0
TRP	0.265	0.32	19.58%	0	0	0	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				5	4	2	0

Note : Le standard de comparaison est la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

Tableau Y.5
Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Sarkar et Zapatero par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2002

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} E_i}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

Symbole	Jour -1	Jour 0	Jour 1
AGU	296.42%	212.31%	175.00%
AL	14.96%	-8.96%	-8.10%
BBD	-21.74%	4.82%	-14.56%
BCB	20.54%	-4.76%	-4.89%
BCE	-24.91%	3.35%	0.15%
BVF	-6.08%	-21.64%	-31.53%
CNO	42.82%	48.11%	14.67%
CNR	97.45%	22.49%	3.02%
CSN/CSO	-23.48%	-30.51%	-26.88%
ENB	135.29%	51.37%	77.14%
HSE	4.62%	-7.60%	-8.22%
L	-1.67%	4.91%	17.65%
MDS	-78.18%	-72.50%	-73.33%
NCX	85.26%	36.67%	25.00%
NXY	188.48%	147.96%	101.82%
PCA	234.81%	242.40%	192.86%
SU	4.71%	14.84%	-14.29%
T	-81.88%	-83.44%	-85.27%
TA	-43.21%	-43.21%	52.00%
TOC/TRI	50.00%	0.20%	58.33%
TRP	5.08%	-6.82%	-79.09%
E_M	42.82%	24.29%	17.69%
E_{MC}	42.82%	33.55%	28.27%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	28,2665%		
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	13,03%		

Note : Le standard de comparaison est la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

Tableau Y.6
Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Goldstein, Ju et Leland par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2002

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} Ei}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

	Jour		
Symbole	-1	0	1
AGU	426.67%	314.55%	265.00%
AL	20.48%	-6.03%	-4.86%
BBD	3.44%	36.47%	12.00%
BCB	31.89%	3.65%	3.11%
BCE	-0.92%	35.21%	29.52%
BVF	-8.57%	-25.53%	-32.94%
CNO	217.07%	235.70%	162.22%
CNR	149.36%	54.93%	29.52%
CSN/CSO	-26.96%	-33.31%	-30.32%
ENB	224.71%	108.82%	143.81%
HSE	32.31%	16.17%	14.29%
L	23.33%	32.57%	52.94%
MDS	-73.64%	-66.04%	-65.33%
NCX	276.84%	181.90%	165.00%
NXY	93.94%	66.44%	35.45%
PCA	311.85%	325.44%	262.86%
SU	31.11%	45.32%	1.90%
T	-60.00%	-62.71%	-65.55%
TA	-40.74%	-41.33%	57.07%
TOC/TRI	81.43%	21.28%	91.67%
TRP	-23.40%	-38.75%	-85.95%
E_M	80,49%	57,37%	49,59%
E_{MC}	80,49%	68,93%	62,48%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	62,4818%		
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	16,07%		

Note : Le standard de comparaison est la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

Tableau Y.7

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Hayne Leland par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} E_i}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

Symbole	Jour -1	Jour 0	Jour 1
AGU	266.67%	188.44%	153.67%
AL	12.20%	-12.28%	-11.39%
BBD	-30.43%	-8.42%	-24.00%
BCB	22.16%	-3.93%	-4.27%
BCE	-22.11%	6.91%	5.10%
BVF	-13.68%	-27.78%	-35.06%
CNQ	23.40%	36.74%	4.89%
CNR	95.74%	21.77%	5.24%
CSN/CSO	-30.43%	-36.51%	-33.76%
ENB	127.06%	45.88%	70.48%
HSE	-5.64%	-16.92%	-17.14%
L	5.00%	13.20%	30.02%
MDS	-79.55%	-73.79%	-74.16%
NCX	67.16%	23.57%	20.38%
NXY	43.03%	23.52%	3.47%
PCA	222.96%	233.47%	183.36%
SU	36.67%	50.85%	11.43%
T	-85.65%	-87.06%	-88.47%
TA	-42.02%	-42.39%	54.56%
TOC/TRI	42.86%	-4.40%	50.00%
TRP	-14.89%	-32.91%	-84.55%
E_M	30.50%	14.19%	10.47%
E_{MC}	30.50%	22.34%	18.38%

MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	18,3848%
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	10,66%

Note : Le standard de comparaison est la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

Tableau Y.8

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Black-Scholes par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2002

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} E_i}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{t=1}^{N} E_{M,t}}{N}$$

	Jour		
Symbole	-1	0	1
AGU	417.78%	274.93%	260.00%
AL	71.71%	51.87%	34.27%
BBD	-22.30%	2.80%	-14.66%
BCB	74.80%	36.68%	35.56%
BCE	-16.11%	15.09%	10.84%
BVF	24.04%	3.08%	-8.00%
CNO	43.41%	50.08%	15.87%
CNR	193.62%	82.33%	52.38%
CSN/CSO	16.96%	6.26%	10.54%
ENB	210.59%	100.00%	133.33%
HSE	21.03%	6.56%	5.71%
L	138.33%	157.92%	200.19%
MDS	-52.73%	-38.80%	-38.67%
NCX	222.11%	141.00%	126.67%
NXY	93.94%	67.07%	35.28%
PCA	473.33%	494.00%	406.49%
SU	97.78%	119.35%	54.19%
T	-78.82%	-81.25%	-83.18%
TA	-39.26%	-39.98%	60.64%
TOC/TRI	165.71%	78.38%	183.77%
TRP	40.43%	19.58%	-72.48%
E_M	99,83%	73,67%	67,08%
E_{MC}	99,83%	86,75%	80,19%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	80,1913%		
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	17,32%		

Note : Le standard de comparaison est la moyenne du bid-ask le plus large de la journée.

ANNEXE Z

ÉVALUATION DES OPTIONS D'ACHAT, EN CONSIDÉRANT COMME STANDARD DE COMPARAISON LA MOYENNE DES PRIX HAUT ET BAS DE LA JOURNÉE DE L'ÉTAT FINANCIER DE 2002

Tableau Z.1
Comparaison entre la valeur marchande moyenne de la journée et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Sarkar et Zapatero, à la date de l'état financier de 2002

$$\frac{\partial G}{\partial E}\left(\frac{\partial E}{\partial V}(k(V_1\theta - V) + V_2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\sigma^2(V - V_2)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\sigma(V - V_2)\right)^2 = rG$$

Symbole	Valeur marchande moyenne	Valeur calculée S.Z	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AL	0,9	1,16	28,98%	0	0	0	0
BBD	0,5	0,45	-10,90%	1	0	0	0
BCB	1	1,10	9,53%	1	1	0	0
BCE	1,6	1,06	-33,79%	0	0	0	0
BVF	3,175	3,06	-3,75%	1	1	1	0
CNQ	1	1,37	37,00%	0	0	0	0
CNR	1,25	2,24	78,83%	0	0	0	0
CSN/CSQ	2,125	1,72	-19,06%	0	0	0	0
PCA	0,55	2,14	289,09%	0	0	0	0
SU	0,65	0,89	36,92%	0	0	0	0
T	0,4	0,07	-82,40%	0	0	0	0
TOC/TRI	1,3	1,00	-22,92%	0	0	0	0
TRP	0,25	0,25	-1,23%	1	1	1	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				4	3	2	0

Note : La valeur marchande moyenne est la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau Z.2

Comparaison entre la valeur marchande moyenne de la journée et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland, à la date de l'état financier de 2002

$$\frac{\partial G}{\partial E}\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\mu V+\frac{1}{2}(1-\tau)\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{x}\right)\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left((1-\tau)\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left(\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V\right)^2=rG$$

Symbole	Valeur marchande moyenne	Valeur calculée GJL	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AL	0.9	1.20	33.12%	0	0	0	0
BBD	0.5	0.58	16.00%	0	0	0	0
BCB	1	1.19	19.20%	0	0	0	0
BCE	1.6	1.39	-13.38%	1	0	0	0
BVF	3.175	2.90	-8.53%	1	1	0	0
CNO	1	3.11	210.52%	0	0	0	0
CNR	1.25	2.83	126.20%	0	0	0	0
CSN/CSO	2.125	1.65	-22.33%	0	0	0	0
PCA	0.55	2.66	383.45%	0	0	0	0
SU	0.65	1.13	73.26%	0	0	0	0
T	0.4	0.16	-60.38%	0	0	0	0
TOC/TRI	1.3	1.21	-6.71%	1	1	0	0
TRP	0.25	0.16	-35.08%	0	0	0	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				3	2	0	0

Note : La valeur marchande moyenne est la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau Z.3
Comparaison entre la valeur marchande moyenne de la journée et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Leland, à la date de l'état financier de 2002

$$\frac{\partial G}{\partial E}\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)(rV)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{V^2}+\frac{x^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right)\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\sigma^2V^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial E^2}\left(\left(1-\frac{x}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\left((1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right)\right)\sigma V\right)^2=rG$$

Symbole	Valeur marchande moyenne	Valeur calculée HL	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AL	0.9	1.12	24.27%	0	0	0	0
BBD	0.5	0.39	-22.16%	0	0	0	0
BCB	1	1.10	10.48%	1	0	0	0
BCE	1.6	1.10	-31.51%	0	0	0	0
BVF	3.175	2.82	-11.29%	1	0	0	0
CNO	1	1.26	26.48%	0	0	0	0
CNR	1.25	2.22	77.78%	0	0	0	0
CSN/CSO	2.125	1.57	-26.05%	0	0	0	0
PCA	0.55	2.08	278.95%	0	0	0	0
SU	0.65	1.17	79.86%	0	0	0	0
T	0.4	0.06	-86.25%	0	0	0	0
TOC/TRI	1.3	0.96	-26.46%	0	0	0	0
TRP	0.25	0.18	-28.88%	0	0	0	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				2	0	0	0

Note : La valeur marchande moyenne est la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau Z.4
Comparaison entre la valeur marchande moyenne de la journée et la valeur calculée d'une option d'achat évaluée à l'aide du modèle de Black-Scholes, à la date de l'état financier de 2002

Symbole	Valeur marchande moyenne	Valeur calculée B&S	Ratio	Seuil 15%	Seuil 10%	Seuil 5%	Seuil 1%
AL	0.9	1.94	115.16%	0	0	0	0
BBD	0.5	0.44	-12.62%	1	0	0	0
BCB	1	1.57	57.18%	0	0	0	0
BCE	1.6	1.18	-26.27%	0	0	0	0
BVF	3.175	4.02	26.61%	0	0	0	0
CNO	1	1.39	38.82%	0	0	0	0
CNR	1.25	3.33	166.21%	0	0	0	0
CSN/CSO	2.125	2.63	23.76%	0	0	0	0
PCA	0.55	3.71	575.00%	0	0	0	0
SU	0.65	1.70	161.54%	0	0	0	0
T	0.4	0.08	-80.08%	0	0	0	0
TOC/TRI	1.3	1.78	37.22%	0	0	0	0
TRP	0.25	0.32	26.76%	0	0	0	0
Nombre d'options correctement évaluées selon le standard de comparaison				1	0	0	0

Note : La valeur marchande moyenne est la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau Z.5
Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Sarkar et Zapatero par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2002

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} Ei}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

Symbole	Jour -1	Jour 0	Jour 1
AL	28.98%	28.98%	-21.30%
BBD	-10.90%	-10.90%	-10.90%
BCB	9.53%	9.53%	9.53%
BCE	-33.79%	-33.79%	-33.79%
BVF	-3.75%	-3.75%	-32.84%
CNO	37.00%	37.00%	37.00%
CNR	78.83%	78.83%	78.83%
CSN/CSO	-19.06%	-19.06%	-19.06%
PCA	289.09%	289.09%	289.09%
SU	36.92%	36.92%	48.33%
T	-82.40%	-82.40%	-82.40%
TOC/TRI	82.18%	-22.92%	-22.92%
TRP	-10.21%	-1.23%	-17.69%
E_M	30,96%	23,56%	17,07%
E_{MC}	30,96%	27,26%	23,86%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	23,8622%		
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	6,95%		

Note : Le standard de comparaison est la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau Z.6

Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Goldstein, Ju et Leland par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2006

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} Ei}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC\ j}}{N}$$

Symbole	Jour -1	Jour 0	Jour 1
AL	33.12%	33.12%	-18.77%
BBD	16.00%	16.00%	16.00%
BCB	19.20%	19.20%	19.20%
BCE	-13.38%	-13.38%	-13.38%
BVF	-8.53%	-8.53%	-36.17%
CNO	210.52%	210.52%	210.52%
CNR	126.20%	126.20%	126.20%
CSN/CSO	-22.33%	-22.33%	-22.33%
PCA	383.45%	383.45%	383.45%
SU	73.26%	73.26%	87.70%
T	-60.38%	-60.38%	-60.38%
TOC/TRI	120.51%	-6.71%	-6.71%
TRP	-40.98%	-35.08%	-45.90%
E_M	64,36%	55,03%	49,19%
E_{MC}	64,36%	59,69%	56,19%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	56,1916%		
Ecart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	7,65%		

Note : Le standard de comparaison est la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau Z.7
Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Hayne Leland par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2002

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} E_i}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

Symbole	Jour -1	Jour 0	Jour 1
AL	24.27%	24.27%	-24.18%
BBD	-22.16%	-22.16%	-22.16%
BCB	10.48%	10.48%	10.48%
BCE	-31.51%	-31.51%	-31.51%
BVF	-11.29%	-11.29%	-38.10%
CNO	26.48%	26.48%	26.48%
CNR	77.78%	77.78%	77.78%
CSN/CSO	-26.05%	-26.05%	-26.05%
PCA	278.95%	278.95%	278.95%
SU	79.86%	79.86%	94.85%
T	-86.25%	-86.25%	-86.25%
TOC/TRI	73.82%	-26.46%	-26.46%
TRP	-35.35%	-28.88%	-40.73%
E_M	27.62%	20.40%	14.85%
E_{MC}	27.62%	24.01%	20.96%
MOYENNE DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	20,9574%		
Écart type DES ECARTS RELATIFS QUOTIDIENS	6.40%		

Note : Le standard de comparaison est la moyenne des prix haut et bas de la journée.

Tableau Z.8
Évolution de l'écart relatif quotidien des valeurs calculées à l'aide de Black-Scholes par rapport au standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2002

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} Ei}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

Symbole	Jour -1	Jour 0	Jour 1
AL	115.16%	115.16%	31.28%
BBD	-12.62%	-12.62%	-12.62%
BCB	57.18%	57.18%	57.18%
BCE	-26.27%	-26.27%	-26.27%
BVF	26.61%	26.61%	-11.65%
CNO	38.82%	38.82%	38.82%
CNR	166.21%	166.21%	166.21%
CSN/CSO	23.76%	23.76%	23.76%
PCA	575.00%	575.00%	575.00%
SU	161.54%	161.54%	183.33%
T	-80.08%	-80.08%	-80.08%
TOC/TRI	224.33%	37.22%	37.22%
TRP	3.93%	26.76%	-4.73%
E_M	97,97%	85,33%	75,19%
E_{MC}	97,97%	91,65%	86,16%

MOYENNE DES ECARTS RELATIFS QUOTIDIENS	86,1621%
Écart type DES ÉCARTS RELATIFS QUOTIDIENS	11,41%

Note : Le standard de comparaison est la moyenne des prix haut et bas de la journée.

ANNEXE AA

Tableau AA.1

Évolution de l'écart relatif quotidien entre la valeur totale calculée de l'ensemble des 26 actions formant l'échantillon d'évaluation et leur valeur marchande totale, 3 jours autour de la date du 02 janvier 2007

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{26} E_i}{26}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

		-3	-2	-1	0	1	2	3
SZ	écart relatif quotidien	1,24%	-0,48%	-1,14%	-0,57%	-0,46%	0,34%	1,57%
	écart relatif quotidien cumulé	1,24%	0,38%	-0,13%	-0,24%	-0,28%	-0,18%	0,07%
HL	écart relatif quotidien	-4,03%	-5,76%	-6,49%	-5,96%	-5,84%	-5,09%	-3,98%
	écart relatif quotidien cumulé	-4,03%	-4,89%	-5,43%	-5,56%	-5,62%	-5,53%	-5,31%
GJL	écart relatif quotidien	4,56%	2,82%	2,15%	2,74%	2,86%	3,69%	4,95%
	écart relatif quotidien cumulé	4,56%	3,69%	3,18%	3,07%	3,03%	3,14%	3,40%

Note : La valeur marchande totale est la somme des prix hauts et bas moyens quotidiens des titres.

ANNEXE AB

Tableau AB.1
Évolution de l'écart relatif quotidien entre la valeur totale calculée des options d'achat formant l'échantillon d'évaluation en éliminant les valeurs extrêmes, et le standard de comparaison, 1 jour autour de la date de l'état financier de 2006 et de 2002 respectivement

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} E_i}{M}$$

$$E_{MC} = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_{MC,j}}{N}$$

			Bid-Ask			Valeur Marchande		
			-1	0	1	-1	0	1
SZ	écart relatif quotidien	2006	6,23%	1,67%	-9,64%	4,79%	2,36%	4,54%
		2002	13,62%	0,79%	-1,12%	11,69%	2,08%	-6,36%
	écart relatif quotidien cumulé	2006	6,23%	3,95%	-0,58%	4,79%	3,58%	3,90%
		2002	13,62%	7,21%	4,43%	11,69%	6,88%	2,47%
HL	écart relatif quotidien	2006	3,27%	-2,20%	-12,68%	-0,61%	-3,03%	-1,23%
		2002	9,73%	-2,17%	-1,90%	8,85%	-0,53%	-7,74%
	écart relatif quotidien cumulé	2006	3,27%	0,54%	-3,87%	-0,61%	-1,82%	-1,62%
		2002	9,73%	3,78%	1,89%	8,85%	4,16%	0,20%
GJL	écart relatif quotidien	2006	19,52%	12,84%	2,33%	18,53%	15,97%	19,61%
		2002	51,11%	34,55%	31,01%	38,74%	26,61%	19,02%
	écart relatif quotidien cumulé	2006	19,52%	16,18%	11,56%	18,53%	17,25%	18,04%
		2002	51,11%	42,83%	38,89%	38,74%	32,67%	28,12%
BS	écart relatif quotidien	2006	52,19%	47,41%	31,72%	70,74%	65,79%	69,60%
		2002	68,82%	48,73%	46,37%	61,24%	44,82%	31,63%
	écart relatif quotidien cumulé	2006	52,19%	49,80%	43,77%	70,74%	68,27%	68,71%
		2002	68,82%	58,78%	54,64%	61,24%	53,03%	45,90%

Note : Le standard de comparaison est la valeur marchande totale des titres considérés.

Annexe AC

Évaluation de l'avoir des actionnaires des compagnies hors échantillon

Tableau AC 1
Évaluation de l'avoir des actionnaires des compagnies hors échantillon
à l'aide du modèle de Leland, à la date de l'état financier de 2006

Symbole	Compagnie	Valeur Marchande	Valeur calculée	Ratio [a]	Seuil 20% [b]	Seuil 15%	date état financier
AEM	AGNICO-EAGLE MINES	47,82	14,40	-69,89%	0	0	déc-06
ABX	BARRICK-GOLD CORPORATION	35,33	26,25	-25,70%	0	0	déc-06
CLS	CELESTICA INC	9,08	21,25	134,03%	0	0	déc-06
FM	FIRST QUANTUM MINERALS	61,46	26,62	-56,69%	0	0	déc-06
WN	GEORGE WESTON	61,46	24,55	-60,06%	0	0	déc-06
IMO	IMPERIAL OIL	42,39	11,12	-73,77%	0	0	déc-06
IPS	IPSCO	118,65	82,41	-30,54%	0	0	déc-06
LUN	LUNDIN MINING CORPORATION	14,33	11,40	-20,45%	0	0	déc-06
PWT	PENN WEST ENERGY	28,66	34,49	20,34%	1	0	déc-06
RIM	RESEARCH IN MOTION	53,35	18,84	-64,69%	0	0	mars-06
RCI	ROGERS COMMUNICATIONS	38,8	11,89	-69,36%	0	0	déc-06
SJR	SHAW COMMUNICATIONS	21,5	25,32	17,77%	1	0	Oct-06
TLM	TALISMAN ENERGY	19,54	10,37	-46,93%	0	0	déc-06
TCK	TECK COMINCO	87	48,67	-44,06%	0	0	déc-06
YRI	YAMANA GOLD	15,22	7,30	-52,04%	0	0	déc-06
Nombre de compagnies correctement évaluées					1	0	

a) $\dfrac{\text{Valeur Calculée} - \text{Valeur Marchande}}{\text{Valeur Marchande}}$

b) Le chiffre 1 signifie que l'action est correctement évaluée alors que le chiffre 0, signifie le contraire et ce, pour les divers niveaux de précision considérés.

Tableau AC 2
Évaluation de l'avoir des actionnaires des compagnies
hors échantillon à l'aide du modèle de Goldstein, Ju et Leland

Symbole	Compagnie	Valeur Marchande	Valeur calculée	Ratio [a]	Seuil 20% [b]	Seuil 15%	date état financier
AEM	AGNICO-EAGLE MINES	47,82	62,83	31,38%	0	0	déc-06
ABX	BARRICK-GOLD CORPORATION	35,33	45,53	28,86%	0	0	déc-06
CLS	CELESTICA INC	9,08	11,57	27,47%	0	0	déc-06
FM	FIRST QUANTUM MINERALS	61,46	94,87	54,36%	0	0	déc-06
POT	POTASH CORPORATION	143,19	170,68	19,20%	1	0	déc-06
IMO	IMPERIAL OIL	42,39	68,91	62,56%	0	0	déc-06
IPS	IPSCO	118,65	147,70	24,48%	0	0	déc-06
LUN	LUNDIN MINING CORPORATION	14,33	16,88	17,79%	1	0	déc-06
PWT	PENN WEST ENERGY	28,66	36,89	28,72%	0	0	déc-06
RIM	RESEARCH IN MOTION	53,35	60,68	13,74%	1	1	mars-06
RCI	ROGERS COMMUNICATIONS	38,8	43,44	11,95%	1	1	déc-06
SJR	SHAW COMMUNICATIONS	21,5	34,07	58,45%	0	0	Oct-06
TLM	TALISMAN ENERGY	19,54	26,71	36,67%	0	0	déc-06
TCK	TECK COMINCO	87	102,79	18,15%	1	0	déc-06
YRI	YAMANA GOLD	15,22	11,68	-23,26%	0	0	déc-06
Nombre de compagnies correctement évaluées					5	2	

a) $\dfrac{Valeur\ \ Calculée - Valeur\ \ Marchande}{Valeur\ \ Marchande}$

b) Le chiffre 1 signifie que l'action est correctement évaluée alors que le chiffre 0, signifie le contraire et ce, pour les divers niveaux de précision considérés.

RÉFÉRENCES

Arnott, R. D., J. Hsu et P. Moore (2005), « Fundamental Indexation », *Financial Analysts Journal*, vol.62, issue 2, pp.83-99.

Bakshi, G., N. Kapadia et D. Madan, (2003), "Stock Return Characteristics, Skew Laws and The Differential Pricing of Individual Equity Options" *Review Of Financial Studies*, vol.16 , issue 1, pp.101-143.

Black, F., et J. C. Cox (1976), "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions", *Journal of Finance*, vol.31, pp.351-367.

Bollen, N. P. B, et R. E. Whaley (2004), "Does Net Buying Pressure Affect the Shape of Implied Volatility Functions?", *Journal Of Finance*, vol. lix, issue. 2, pp.711-753.

Brennan, K. I., et E. S. Schwartz (1978). "Corporate Income Taxes, Valuation, and the Problem of Optimal Capital Structure", *Journal of Business*, vol.51, pp.103-114.

___________.(1984). " Optimal Financial Policy and Firm Valuation", *Journal of Finance*. vol xxxix, pp.593-607.

Bizid, A., et E. Jouini (2005). "Equilibrium Pricing in Incomplete Markets", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol.40, pp.833-848.

Collin-Dufresne, P. et R. Goldstein (2001), "Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios ?", *Journal Of Finance*, vol. lvi, Issue5, pp.1929-1957.

Constantinides, G. K., Jackwerth, I. C., et S. Perrakis (2005), "Option pricing: real and risk-neutral distributions", in I. R. Birge and V. Linetsky, *Financial Engineering*, Handbooks in Operations Research and Management Science, Elsevier/North Holland, forthcoming.

DeBondt, W., et R. Thaler (1985), "Does the Stock Market Overreact to New Information", *Journal of Finance*, vol. xl, pp.803.

Driessen, J., P. J. Maenhout and G. Vilkov, (2004), "The Price of Correlation Risk : Evidence from Equity Options",), Journal Of Finance, vol. lxiv, issue. 3, pp.1377-1406.

Duan, J. C., et J. Wei, (2009), "Systematic Risk and the Price Structure Of Individual Equity Options", *The Review of Financial Studies*, vol. 22, issue.5, pp.1981-2006.

Eom, Y. H., J. Helwedge et J. Z. Huang (2004), "Structural Models of Corporate Bond Pricing: An Empirical Analysis", *The Review of Financial Studies*, vol.17, pp.499-544.

Ericsson, J., et J. Reneby. (2005), "Estimating Structural Bond Pricing Models", *Journal of Business*, vol.78, pp.707-736.

Fama, E. F., L. Fisher, M. C. Jensen, et R. Roll (1969). "The Adjustment Of Stock Prices To New Information ", *International Economic Revue,* vol.10, pp.1-21.

Gendron, M., N. Khoury, et P. Yourougou, (1994), « Probability of Price Reversal and Relative Noise in Stock and Option Markets », *The Journal Of Financial Research*, vol. xvii, no 2, pp.147-159.

Goldstein, R., N. Ju et H. Leland (2001). "An EBIT-based Model of Dynamic Capital Structure", *Journal of Business*, vol.74, pp.483-512.

Goyal, A., et A. Saretto, (2009), "Cross-section of option returns and volatility", *Journal Of Financial Economics,* vol.94 , pp. 310–326.

Green. W, 2005 " Économétrie". 5ième édition.

Hackbarth, D., C. A. Hennessy et H. Leland (2007), " Can The Trade0Of Theory Explain Debt Structure?", The *Review of Financial Studies*, vol. 20, pp.1390-1428.

Hackbarth, D., J. Miao, et E. Morelle. (2007), "Capital Structure, Credit Risk and Macroeconomic Conditions", *Journal of Financial Economics*, vol.82, pp.519-550.

Jones, E. P., S. P. Mason et E. Rosenfeld (1984), "Contingent Claims Analysis of Corporate Capital Structures: an Empirical Investigation ", *Journal Of Finance,* vol. xxxix, issue. 3, pp.611-625.

Ju, N., R. Parrino, A. M. Poteshman et M. S. Weisbach, "Horses and Rabbits? Trade-Off Theory and Optimal Capital Structure", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 40, issue 2, pp. 259 -281.

Leland, H. E. (1994), "Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure", *Journal of Finance*, vol.49, pp.12L.1252.

____________.(1998). "Agency Costs, Risk Management, and Capital Structure", *Journal of Finance*, vol.53, pp.12O.1243.

Leland, H. E., et I. B. Toft (1996), "Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads", *Journal of Finance*, vol.51, pp.987-1019.

Levy, H. (1985). "Upper and Lower Bounds of Put and Call Option Value: Stochastic Dominance Approach." *Journal of Finance*, vol. 40, pp.1197-1217.

Longstaff, F. A., et E. S. Schwartz (1995), "A Simple Approach to Valuing Fixed and Floating Rate Debt", *Journal of Finance*, vol.50, pp.789-819.

Mella-Barral, P., et W. Perraudin, 1997. "Strategic Debt Service", *Journal of Finance*, vol.52, pp.531-556.

Merton, R. C. (1974), "On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, vol.29, pp.449-470.

Modigliani, F. et M. Miller (1958), "The Cost of Capital, Corporate Finance and The Theory of Investment", *American Economic Review*, vol.48, issue.3, pp.261-297

Myers, S. C. et S. M. Turnbull (1977), " Capital Budgeting and The Capital Asset Pricing Model: Good News and Bad News", *Journal of Finance*, vol. xxxii, pp.321-333.

Myers, S. C. (1984), "The Capital Structure Puzzle", *Journal Of Finance*, vol. xxxix, issue.3, pp.575-592.

Perrakis, S. (1986). "Option Bounds in Discrete Time: Extensions and the Pricing of the American Put." *Journal of Business*, vol.59, pp.1T.141.

____________.(1988) "Preference-free Option Prices when the Stock Return Can Go Up, Go Down, or Stay the Same." *Advances in Futures and Options Research, vol.* 3, pp.209-235.

Perrakis, S. et P. J. Ryan (1984). "Option Pricing Bounds in Discrete Time." *Journal of Finance*, vol. 39, pp.5T.525.

Ranaldo, A. Et R. Häberle (2007), "Wolf in Sheep's Clothing : The Active Investment Strategies behind Index Performance", *European Financial Management*, vol. 14, issue. 1, pp. 55–81.

Ritchken, P. H. (1985). "On Option Pricing Bounds." *Journal of Finance* vol.40, pp.12T.1233.

Ritchken, P.H. et S. Kuo (1988). "Option Bounds with Finite Revision Opportunities." *Journal of Finance,* vol. 43, pp.301-308.

Sarkar, S., (2003). "The Effect of Mean Reversion on Investment Under Uncertainty", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol.28, pp.377-396.

Sarkar, S., et F. Zapatero (2003). "The Trade-Off Model with Mean Reverting Earnings : Theory and Empirical Evidence", *Economic Journal*, vol.113, pp.834-860.

Sarkar, S., et D. Mauer (2005). "Real Options, Agency Conflicts, and Optimal Capital Structure", *Journal of Banking and Finance,* vol.29, pp.1405-1428.

Siegel, S et N. J. Castellan, JR. (1988). " Nonparametric Statistics For The Behavioral Sciences". Second Edition.

Toft, K. B., et B. Prucyk (1997), "Options on Leveraged Equity: Theory and Empirical Tests", *Journal of Finance*, vol.52, pp.1151-1180.

Turnbull, S. M. (1979). "Debt Capacity", *Journal of Finance*, vol.34, pp.931-940.

Zhou, C. (2001), " The Term Structure Of Credit Spreads With Jump Risk", *Journal of Banking And Finance,* vol. 25, pp.2015-2040.