

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LE TREILLIS CAMBRIAN

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

JUDITE CHAUVIN

AOÛT 2010

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»



TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES	v
RÉSUMÉ	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
THÉORIE DES TREILLIS	5
1.1 Définitions	5
1.1.1 Treillis comme ensemble ordonné	5
1.1.2 Treillis, version algébrique	6
1.1.3 Diagramme de Hasse	9
1.2 Sous-treillis et morphisme de treillis	11
1.3 Treillis quotient	12
CHAPITRE II	
GROUPE DE COXETER	15
2.1 Introduction aux groupes de Coxeter	15
2.1.1 Groupes de Coxeter finis	19
2.1.2 Longueur et expression réduite	22
2.1.3 L'élément de longueur maximum	23
2.1.4 Condition d'échange et de réduction	24
2.1.5 Sous-groupe parabolique	25
2.1.6 Représentant des classes à gauche $W_I \backslash W$	25
2.2 Le treillis faible	26
2.2.1 L'ordre faible	26
2.2.2 Propriétés sur l'ordre faible	27
2.2.3 Le cas général : un demi-treillis inférieur	31
2.2.4 Le cas fini : un treillis	33
CHAPITRE III	

LE TREILLIS CAMBRIAN	37
3.1 Les éléments c -triés	37
3.1.1 Élément de Coxeter et orientation du graphe de Coxeter	37
3.1.2 Définition d'un élément c -trié	40
3.1.3 Résultats concernant les éléments c -triés	41
3.2 Le cas général : Le demi-treillis inférieur Cambrian	46
3.2.1 La projection π_{\downarrow}^c	47
3.2.2 Le demi-treillis inférieur Cambrian vu comme quotient du demi-treillis inférieur faible	54
3.3 Le cas fini : Le treillis Cambrian	55
3.3.1 Le cas de w_0	56
3.3.2 Le treillis Cambrian vu comme quotient du treillis faible	57
CHAPITRE IV	
REPRÉSENTATION COMBINATOIRE DU TREILLIS CAMBRIAN DE TYPE	
A_N	59
4.1 Représentation combinatoire des éléments c -triés	59
4.2 Représentation combinatoire du quotient S_n/\equiv_c et de la projection π_{\downarrow}^c	62
4.2.1 Les triangulations	62
4.2.2 Permutations et triangulations	65
4.2.3 Le quotient S_n/\equiv_c	70
4.3 Représentation combinatoire du treillis Cambrian vu comme quotient	70
4.4 Énumération	75
CONCLUSION	77

TABLE DES FIGURES

0.1	Treillis de Tamari sur 4 éléments	2
1.1	Treillis de Tamari d'ordre 4	10
1.2	Diagramme de Hasse qui n'est pas un treillis	10
2.1	Graphes	17
2.2	Graphe de Coxeter	17
2.3	Graphe de Coxeter associé à la matrice M	18
2.4	Γ_W	19
2.5	Graphes de Coxeter définis positifs	20
2.6	Graphe de Coxeter de S_n engendré par $\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$	21
2.7	(D_2, \leq)	35
2.8	(S_4, \leq)	36
3.1	Deux orientations du graphe de S_4	38
3.2	Deux orientations de graphe de Coxeter	39
3.3	Treillis faible de S_3 et deux sous-treillis de S_3	43
3.4	Treillis faible de S_4 avec éléments $s_2s_1s_3$ -triés	48
3.5	Le demi-treillis inférieur Cambrian de S_4 , pour $c = s_2s_1s_3$	49
3.6	Treillis faible de S_4	53

4.1	Une orientation du graphe de S_4	61
4.2	63
4.3	Deux diagonales dans P	63
4.4	Deux triangulations	64
4.5	T_5	65
4.6	Cinq chemins polygonaux	66
4.7	La triangulation $\eta(3124) \in T_6(\overrightarrow{\Gamma_{S_4}})$	67
4.8	Treillis faible de S_4	68
4.9	Une orientation du graphe de S_4	68
4.10	L'ensemble des triangulations associées aux permutations de S_4	69
4.11	Le quotient S_n / \equiv_c pour $c = s_3 s_1 s_2$, avec $\eta(1342)$	71
4.12	Le treillis Cambrian de S_4 pour $c = s_3 s_1 s_2$, avec $\pi_{\downarrow}^c(s_2 s_3)$	72
4.13	Deux triangulations de $T_6(\overrightarrow{\Gamma_{S_4}})$	73
4.14	P muni de $t \setminus t'$ et de $t' \setminus t$	74

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur Christophe Hohlweg. Merci pour ta grande disponibilité, ton encouragement ainsi que tes bons conseils. Merci de m'avoir fait découvrir les groupes de Coxeter. Mon intérêt a été constant pour ce sujet tout au long de ce mémoire, preuve qu'il était fait pour moi. J'aimerais aussi remercier toute l'équipe du LACIM, et particulièrement Jérôme. Merci pour ton aide, même si Latex reste mystérieux à mes yeux. Merci aussi à tous les professeurs, les chargés de cours et le personnel du Département de mathématiques.

À mon copain Nicolas, merci d'être là, merci pour ton écoute, ton enthousiasme, ta générosité... merci pour tout! Un immense merci à ma mère. Merci maman de m'avoir initiée au plaisir de faire des maths, merci de m'avoir aidée financièrement, merci d'avoir corrigé l'orthographe de ce mémoire, enfin, merci d'être toujours là. Finalement, merci à tous les membres de ma famille et à mes amis qui m'ont toujours soutenue et encouragée.

Merci à tous

Judite Chauvin



RÉSUMÉ

Dans ce mémoire de maîtrise, nous allons nous intéresser au treillis Cambrian. Nous débuterons par des rappels de notions préliminaires sur les treillis, les groupes de Coxeter et l'ordre faible. Ensuite, nous présenterons le treillis Cambrian comme étant un sous-treillis du treillis faible. Puis, en considérant une congruence de treillis, nous allons démontrer qu'il peut également être vu comme le treillis quotient de l'ordre faible. Finalement, nous donnerons une représentation combinatoire des treillis Cambrian de type A_n .



INTRODUCTION

La théorie des treillis est née de l'étude de R.Dedekind sur la distributivité [15]. R.Dedekind, autour des années 1890, a considéré la question suivante : soit trois sous-groupes, A, B, C d'un groupe abélien G . Combien de sous-groupes différents peut-on obtenir en utilisant seulement la somme et l'intersection de sous-groupe . On aura par exemple, $A + B, (A + B) \cap C \dots$ R.Dedekind conclut que les treillis apparaissent naturellement en logique, [15]. Puis, il constata que des éléments concernant les treillis avaient déjà été étudiés par Ernst Schröder dans son livre *Die Algebra der Logik*, [15]. Il conclut donc qu'il y a un lien entre l'algèbre moderne et la théorie des treillis. C'est par la suite, vers 1930, que les travaux de R.Dedekind sont découverts par G.Birkhoff et O.Ore, [15]. C'est à partir de ce moment que la théorie des treillis s'est développée et il en fut de même pour ses applications en algèbre.

Un aspect intéressant des treillis est le fait qu'ils possèdent deux définitions. La première est algébrique. Un treillis dans ce contexte est une sorte d'algèbre. Il existe les notions de sous-treillis, de morphisme de treillis et de treillis quotient. Il existe plusieurs résultats importants comme par exemple : les sous-algèbres d'une algèbre abstraite quelconque forment un treillis et réciproquement, chaque treillis fini est isomorphe à un système de sous-algèbres d'une algèbre donnée, [4]. La deuxième définition de treillis est basée sur la notion d'ordre. Ainsi, avec cette définition, on obtient d'autres résultats intéressants, dont plusieurs liés à la théorie des idéaux et à la théorie des chaînes [15].

La théorie des treillis intervient autant en théorie des groupes, en algèbre abstraite, en topologie générale qu'en analyse fonctionnelle [15]. Les treillis les plus connus sont les algèbres de Boole, mais il y en a un autre très intéressant : *le treillis de Tamari*. Considérons l'ensemble des parenthésages pairs de quatre lettres a, b, c, d . On obtient,

$(ab)(cd)$, $((ab)c)d$, $(a(bc))d$, $a((bc)d)$, $a(b(cd))$. Maintenant, fixons un ordre partiel sur cet ensemble défini par la relation élémentaire suivante : $(ab)c \leq a(bc)$. On obtient donc que

$$((ab)c)d \leq (ab)(cd) \leq a(b(cd))$$

$$((ab)c)d \leq (a(bc))d \leq a((bc)d) \leq a(b(cd)).$$

On peut représenter ce treillis par le diagramme de Hasse de la figure 0.1. Les sommets du graphe sont les éléments du treillis, et on relie deux éléments par une arête si on a une relation d'ordre élémentaire entre les deux.

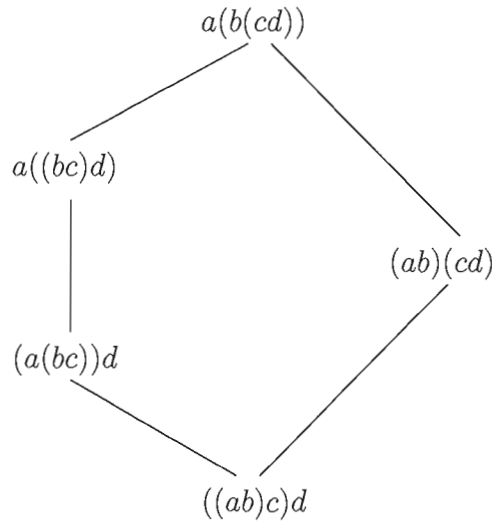


Figure 0.1 Treillis de Tamari sur 4 éléments

C'est en fait le treillis de Tamari sur 4 éléments. Le treillis de Tamari a été introduit par D.Tamari en 1962, [16]. De façon générale, le treillis de Tamari est un ensemble partiellement ordonné dans lequel les éléments sont les différentes manières de regrouper des objets en paire avec des parenthèses non croisées. On introduit ensuite une relation d'ordre : un élément du treillis de Tamari est plus petit qu'un autre si le deuxième élément a été obtenu du premier en effectuant une application vers la droite de la loi

associative $(xy)z = x(yz)$.

L'objet de ce mémoire est l'étude d'un treillis particulier, qui généralise le treillis de Tamari à tous les groupes de Coxeter : le *treillis Cambrian*. Notons qu'on écrit "Cambrian" et non "Cambrien" en français, car c'est le nom de la femme de N.Reading. Comme N.Reading a beaucoup travaillé sur ce treillis, nous avons choisi de conserver le nom "Cambrian". Le treillis de Tamari est isomorphe au treillis Cambrian de type A_n . Ce mémoire est organisé comme suit : dans le chapitre 1, nous traiterons de la théorie des treillis ; nous allons consacrer le deuxième chapitre aux groupes de Coxeter ; puis dans ce même chapitre, nous traiterons de l'ordre faible, une relation d'ordre partielle sur les groupes de Coxeter, qui nous mènera par la suite au chapitre 3, qui est l'objet principal de ce mémoire : le treillis Cambrian ; finalement, nous allons consacrer le dernier chapitre à une représentation combinatoire du treillis Cambrian de type A_n plus général que celle du treillis de Tamari.

CHAPITRE I

THÉORIE DES TREILLIS

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques résultats de la théorie des treillis afin de bien cerner ces objets mathématiques. Il existe deux définitions de treillis. L'une d'elle est algébrique et l'autre fait appel à la notion d'ordre. Commençons donc par un léger rappel de la notion d'ordre.

1.1 Définitions

1.1.1 Treillis comme ensemble ordonné

Une *relation d'ordre* R sur un ensemble E est une relation binaire sur E qui est réflexive, transitive et antisymétrique. On la dit partielle lorsqu'il existe deux éléments de E non comparable : c'est-à-dire si il existe $x, y \in E$ tel que $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$. Sinon, on la dit total. On dit qu'un ensemble E muni de la relation d'ordre partielle \preceq , est un ensemble partiellement ordonné et on le note (E, \preceq) . Rappelons que dans un ensemble partiellement ordonné E , la borne supérieure d'une partie majorée F de E est, si il existe, l'unique plus petit majorant de F . Un majorant de F est un élément $x \in E$ tel que pour tout $y \in F$ $y \leq x$. La borne inférieure d'une partie minorée F de E est le plus grand minorant de F . Voici une première définition de treillis.

Définition 1.1.1.1. Un *demi-treillis inférieur* est un ensemble partiellement ordonné, (T, \preceq) , vérifiant la condition suivante : pour tout $a, b \in T$, il existe une borne inférieure à l'ensemble $\{a, b\}$. On dit que (T, \preceq) est un *demi-treillis supérieur* si pour tout $a, b \in T$

il existe une borne supérieure à l'ensemble $\{a, b\}$. On a alors que (T, \preceq) est un *treillis* si il forme un demi-treillis inférieur et un demi-treillis supérieur.

Exemple 1.1.1.2. Soit $(P(E), \subseteq)$, l'ensemble de toutes les parties d'un l'ensemble E . L'ensemble partiellement ordonné $(P(E), \subseteq)$ forme un treillis. Pour tout $A, B \in P(E)$, $\inf(A, B) = A \cap B$ et $\sup(A, B) = A \cup B$.

Exemple 1.1.1.3. Soit T l'ensemble partiellement ordonné des parenthésages paires sur 4 éléments, a, b, c et d où l'ordre est défini comme suit : un élément de T est plus petit qu'un autre si le deuxième élément a été obtenu à partir du premier en effectuant une application vers la droite de la loi associative $(xy)z = x(yz)$. On obtient donc les éléments suivants :

$$\begin{aligned} ((ab)c)d &\leq (ab)(cd) \leq a(b(cd)) \\ ((ab)c)d &\leq (a(bc))d \leq a((bc)d) \leq a(b(cd)). \end{aligned}$$

On a bien l'existence d'une borne supérieure et d'une borne inférieure pour tout couple d'éléments de T . En effet, pour tous $x, y \in T$ distincts, la borne inférieure de x et y est $((ab)c)d$ et la borne supérieure de x et y est $a(b(cd))$. Ainsi, l'ensemble partiellement ordonné T forme un treillis. On l'appelle le treillis de Tamari d'ordre 4.

Exemple 1.1.1.4. L'ensemble des entiers naturels, \mathbb{N} , muni de son ordre habituel forme un demi-treillis inférieur. Ce n'est pas un treillis, car \mathbb{N} n'admet pas de borne supérieure.

1.1.2 Treillis, version algébrique

Nous venons de voir comment définir un treillis comme un certain type de relation d'ordre. Voyons maintenant comment en donner une définition algébrique. Pour cela, nous devons introduire deux opérations algébrique : l'union \vee et l'intersection \wedge sur un ensemble non vide E , qui généralisent l'union et l'intersection classique. Rappelons qu'une loi de composition interne $*$ sur un ensemble E est idempotente si $a * a = a$ pour tout $a \in E$.

Définition 1.1.2.1. Soit T un ensemble non vide et \wedge, \vee deux lois de composition interne sur T . On appelle (T, \wedge, \vee) un *treillis* si et seulement si \wedge et \vee sont idempotentes, commutatives et associatives et si ces deux lois vérifient la loi d'absorption : $a \wedge (a \vee b) = a = a \vee (a \wedge b)$, $\forall a, b \in T$.

Exemple 1.1.2.2. L'exemple classique est $(P(E), \cap, \cup)$. Les lois d'union et d'intersection classiques sont bien associatives, commutatives et idempotentes et vérifient la loi d'absorption. Ainsi, $(P(E), \cap, \cup)$ est un treillis.

Remarquons que le choix des symboles \wedge et \vee se justifie par l'exemple précédent. Par suite, on appellera \wedge *l'intersection* et \vee *l'union*.

Proposition 1.1.2.3. Les deux définitions de treillis sont équivalentes, c'est-à-dire, (T, \preceq) est un treillis si et seulement si (T, \wedge, \vee) est un treillis, où $\sup(a, b) = a \vee b$ et $\inf(a, b) = a \wedge b$.

Démonstration. 1. Soit (T, \preceq) un treillis. Posons $\inf(a, b) = a \wedge b$ et $\sup(a, b) = a \vee b$.

Montrons que les lois \vee et \wedge sont idempotentes, commutatives et associatives, puis qu'elles vérifient la loi d'absorption. Il est bien connu que :

- (a) $\sup(a, a) = a$ et $\inf(a, a) = a$. (idempotente)
- (b) $\sup(a, b) = \sup(b, a)$ et $\inf(a, b) = \inf(b, a)$. (commutative)
- (c) $\sup(\sup(a, b), c) = \sup(a, \sup(b, c))$ et $\inf(\inf(a, b), c) = \inf(a, \inf(b, c))$.
(associative)
- (d) $\sup(a, \inf(a, b)) = a$ et $\inf(a, \sup(a, b)) = a$.

On a donc que (T, \wedge, \vee) est bien un treillis.

2. Soit (T, \wedge, \vee) un treillis. Supposons que $a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ et montrons que (T, \preceq) est un treillis. Démontrons d'abord que (T, \preceq) est un ensemble partiellement ordonné.

- (a) Puisque \wedge est idempotent, on a bien que \preceq est réflexive.

(b) Soit $a \preceq b$ et $b \preceq a$. On a $a = a \wedge b$ et $b = b \wedge a$. Comme l'opération intersection est commutative, on obtient $a = a \wedge b = b \wedge a = b$. Ainsi, $a = b$, d'où l'antisymétrie.

(c) Soit $a \preceq b$ et $b \preceq c$. On a $a = a \wedge b$ et $b = b \wedge c$. On obtient donc $a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c)$. Comme l'opération intersection est associative, on obtient $a = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$. Donc on a bien que $a \preceq c$, d'où la transitivité. On conclut que (T, \preceq) est un ensemble partiellement ordonné.

Montrons maintenant que les bornes supérieure et inférieure existent en prouvant que $\inf(a, b) = a \wedge b$ et $\sup(a, b) = a \vee b$. Soit $a \wedge b \preceq a$ et soit $(a \wedge b) \wedge a$. Comme ces lois sont idempotentes, associatives et commutatives, on obtient :

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \wedge a &= a \wedge (b \wedge a) \\ &= a \wedge (a \wedge b) \\ &= (a \wedge a) \wedge b \\ &= a \wedge b. \end{aligned}$$

On fait de même pour $a \wedge b \preceq b$ et on obtient $(a \wedge b) \wedge b = a \wedge b$. Soit $c \preceq a$ et $c \preceq b$ tel que $c \wedge a = c$ et $c \wedge b = c$. On veut montrer que $c \preceq a \wedge b$. On a :

$$c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c.$$

Ainsi, $c \preceq a \wedge b$ et donc $\inf(a, b) = a \wedge b$.

Soit $a \preceq a \vee b$ et $b \preceq a \vee b$. En vertu de la loi d'absorption, on a :

$$a = a \wedge (a \vee b)$$

$$\text{et } b = b \wedge (a \vee b).$$

Soit $a \preceq c$ et $b \preceq c$ tel que $a = a \wedge c$ et $b = b \wedge c$. On veut montrer que $a \vee b \preceq c$.

On a par la loi d'absorption :

$$(a \vee c) = (a \wedge c) \vee c = c$$

$$\text{et } (b \vee c) = (b \wedge c) \vee c = c.$$

Finalement, on obtient que

$$\begin{aligned}
 (a \vee b) \wedge c &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
 &= (a \vee b) \wedge (a \vee (b \vee c)) \\
 &= (a \vee b) \wedge ((a \vee b) \vee c) \\
 &= a \vee b.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $a \vee b \preceq c$, ce qui fait que $\sup(a, b) = a \vee b$.

D'où (T, \preceq) est un treillis.

□

De ceci nous avons donc les égalités suivantes :

$$\sup(a, b) = a \vee b$$

$$\inf(a, b) = a \wedge b$$

1.1.3 Diagramme de Hasse

On peut représenter visuellement un treillis sous forme d'un diagramme de Hasse. On l'appelle aussi graphe de Hasse. C'est un graphe orienté dont l'ensemble des sommets sont les éléments du treillis. Il existe une arête de x vers y , deux éléments distincts du treillis, si et seulement si pour x, y et z distincts on a $x \leq y$ et si on a $x \leq z \leq y$ alors $z = x$ ou bien $z = y$. Par convention, si on a $x \leq y$, on place la représentation de y plus haut que celle de x . De ce fait, par la dispositions des sommets, on n'oriente pas les arêtes. On sait donc que le sens de la relation d'ordre est du bas vers le haut.

Exemple 1.1.3.1. La figure 1.1 représente le diagramme de Hasse du treillis de Tamari d'ordre 4.

La figure 1.2 est le diagramme de Hasse d'un ensemble partiellement ordonné qui n'est pas un treillis. En effet l'intersection n'est pas bien définie, car $\{d, e\}$ n'a pas de borne inférieure.

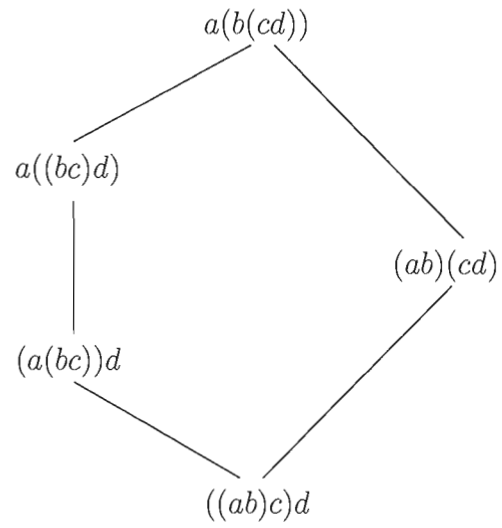


Figure 1.1 Treillis de Tamari d'ordre 4

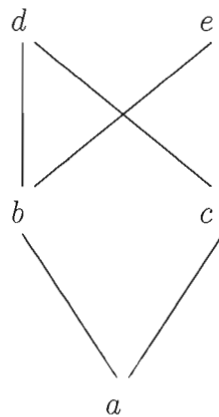


Figure 1.2 Diagramme de Hasse qui n'est pas un treillis

1.2 Sous-treillis et morphisme de treillis

Dans la théorie des treillis, comme pour celle des groupes, nous avons les notions de sous-treillis, de morphisme de treillis, d'isomorphisme de treillis, et aussi de treillis quotient.

Définition 1.2.0.2. Soit T un treillis. On dit que E est un *sous-demi-treillis inférieur* de T si pour tout $a, b \in E$ on a $a \wedge b \in E$. On dit que E est un *sous-demi-treillis supérieur* de T si pour tout $a, b \in E$ on a $a \vee b \in E$. On a alors que E forme un *sous-treillis* de T si E est un sous-demi-treillis inférieur et supérieur de T .

Définition 1.2.0.3. Soit T_1 et T_2 deux treillis et la fonction $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$. On dit que φ est un *morphisme de demi-treillis inférieur* si on a pour tout $a, b \in T_1 : \varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$. On dit que φ est un *morphisme de demi-treillis supérieur* si on a pour tout $a, b \in T_1 : \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$. On a alors que φ est un *morphisme de treillis* si il est à la fois un morphisme de demi-treillis inférieur et supérieur.

Définition 1.2.0.4. Soit T_1 et T_2 deux treillis et la fonction $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$. On dit que φ est un *isomorphisme de treillis* si φ est un morphisme de treillis bijectif et si son inverse est aussi un morphisme de treillis.

Ainsi, deux treillis T_1 et T_2 sont isomorphes s'il existe deux morphisme de treillis : $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ et $\psi : T_2 \rightarrow T_1$ tel que $\varphi \circ \psi = Id_{T_1}$ et $\psi \circ \varphi = Id_{T_2}$.

Théorème 1.2.0.5. Soit (T, \wedge_t, \vee_t) un treillis et E un ensemble partiellement ordonné. S'il existe un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés entre T et E , alors E est un treillis.

Démonstration. Soit $\varphi : T \rightarrow E$, un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés. Soit $w \in E$ tel que $w \leq u$ et $w \leq v$. Montrons que $\varphi(\varphi^{-1}(u) \wedge_t \varphi^{-1}(v)) \in E$ est bien la borne inférieure. Puisque φ est un isomorphisme, on a $\varphi^{-1}(w) \leq \varphi^{-1}(u)$ et $\varphi^{-1}(w) \leq \varphi^{-1}(v)$. On a alors que $\varphi^{-1}(w) \leq \varphi^{-1}(u) \wedge_t \varphi^{-1}(v)$, car T est un treillis. Ainsi on obtient, $w = \varphi(\varphi^{-1}(w)) \leq \varphi(\varphi^{-1}(u) \wedge_t \varphi^{-1}(v))$. Donc, $w \leq \varphi(\varphi^{-1}(u) \wedge_t \varphi^{-1}(v))$, ce

qui fait que $\varphi(\varphi^{-1}(u) \wedge_t \varphi^{-1}(v)) = u \wedge_E v$ et est bien la borne inférieure. On montre que $\varphi(\varphi^{-1}(u) \vee_t \varphi^{-1}(v)) \in E$ est la borne supérieure de la même manière. D'où, E muni de son ordre forme bien un treillis. \square

1.3 Treillis quotient

Définition 1.3.0.6. Une congruence de treillis est une relation d'équivalence \equiv sur T vérifiant la condition suivante : Pour tout $a_1, b_1, a_2, b_2 \in T$ si $a_1 \equiv b_1$ et $a_2 \equiv b_2$ alors

$$a_1 \wedge a_2 \equiv b_1 \wedge b_2$$

$$a_1 \vee a_2 \equiv b_1 \vee b_2$$

Soit \equiv , une congruence de treillis sur un treillis T , alors on appelle l'ensemble $T/\equiv = \{[a] \text{ tel que } a \in T\}$ le treillis quotient de T modulo \equiv , où $[a]$ est la classe d'équivalence de a .

Théorème 1.3.0.7. Soit \equiv une congruence de treillis sur T , alors T/\equiv est un treillis et la surjection canonique $T \rightarrow T/\equiv$ est un morphisme de treillis.

Démonstration. Posons \vee et \wedge sur T/\equiv de la façon suivante :

Pour $a, b \in T$, on a $[a] \vee [b] := [a \vee b]$ et $[a] \wedge [b] := [a \wedge b]$.

Vérifions que nos deux opérations sont bien définies. Si $[a_1] = [b_1]$ et $[a_2] = [b_2]$ alors $a_1 \in [b_1]$ et $a_2 \in [b_2]$. Ainsi $a_1 \equiv b_1$ et $a_2 \equiv b_2$. Comme \equiv est une congruence de treillis, on a

$$a_1 \wedge a_2 \equiv b_1 \wedge b_2$$

$$a_1 \vee a_2 \equiv b_1 \vee b_2$$

Ainsi $a_1 \wedge a_2 \in [b_1 \wedge b_2]$ et donc $[a_1 \wedge a_2] = [b_1 \wedge b_2]$. De même pour l'opération union (\vee). D'où \wedge et \vee sont bien définies dans T/\equiv . Vérifions maintenant que $(T/\equiv, \vee, \wedge)$ forme

un treillis en démontrant que l'union et l'intersection, comme défini ci-haut, vérifient bien les axiomes de treillis (l'idempotence, l'associativité, la commutativité et l'absorption).

1. $[a] \vee [a] = [a \vee a] = [a]$ et $[a] \wedge [a] = [a \wedge a] = [a]$. D'où l'idempotence.
2. $[a] \vee [b] = [a \vee b] = [b \vee a] = [b] \vee [a]$ et $[a] \wedge [b] = [a \wedge b] = [b \wedge a] = [b] \wedge [a]$. D'où la commutativité
- 3.

$$\begin{aligned}
 [a] \vee ([b] \vee [c]) &= [a] \vee ([b \vee c]) \\
 &= [a \vee [b \vee c]] \\
 &= [[a \vee b] \vee c] \\
 &= ([a \vee b]) \vee [c]
 \end{aligned}$$

De même pour l'intersection, d'où l'associativité

4. $[a] \vee ([a] \wedge [b]) = [a] \vee ([a \wedge b]) = [a \vee (a \wedge b)] = [a]$
 $[a] \wedge ([a] \vee [b]) = [a] \wedge ([a \vee b]) = [a \wedge (a \vee b)] = [a]$, D'où l'absorption.

Ainsi on a bien que $(T/ \equiv, \vee, \wedge)$ est un treillis et $T \rightarrow T/ \equiv$ est un morphisme de treillis. □

Théorème 1.3.0.8. *Soit T et E deux treillis, \equiv une congruence de treillis sur T et $\varphi : T \rightarrow E$ un morphisme surjectif de treillis tel que $a \equiv b$ dans T si et seulement si $\varphi(a) = \varphi(b)$ dans E , alors il existe un isomorphisme de treillis $\psi : T/ \equiv \rightarrow E$ tel que $\varphi = \psi \circ \pi$, où $\pi : T \rightarrow T/ \equiv$.*

Démonstration. 1. Montrons d'abord que ψ est bien définie. Soit $[a]$ et $[b] \in T/ \equiv$ tel que $[a] = [b]$. On a alors $a \equiv b$ et donc $\varphi(a) = \varphi(b)$. Comme $\varphi = \psi \circ \pi$, on obtient bien $\psi(\pi(a)) = \psi(\pi(b))$.

2. Montrons que ψ est injective. Soit $\psi([a]) = \psi([b]) \in E$. Vérifions qu'on a bien $[a] = [b] \in T/ \equiv$. Or, on a $\varphi(a) = \psi([a]) = \psi([b]) = \varphi(b)$. Mais comme $a \equiv b$ dans T si et seulement si $\varphi(a) = \varphi(b)$ dans E , on a $a \equiv b$. Ainsi on a bien $[a] = [b]$.

3. Montrons maintenant que ψ est surjective. Soit $x \in E$. Montrons qu'il existe un élément $a \in T/\equiv$ tel que $\psi([a]) = x$. Comme φ est un morphisme surjectif, il existe $b \in T$ tel que $\varphi(b) = x$. D'où $\psi(\pi(b)) = x$ car $\varphi = \psi \circ \pi$. Ainsi, l'élément cherché dans T/\equiv est $\pi(b)$.
4. Montrons finalement que ψ est un morphisme de treillis.

$$\begin{aligned}
 \psi(\pi(a) \wedge \pi(b)) &= \psi(\pi(a \wedge b)), \text{ car } \pi \text{ est un morphisme de treillis.} \\
 &= \varphi(a \wedge b) \\
 &= \varphi(a) \wedge \varphi(b), \text{ car } \varphi \text{ est un morphisme de treillis.} \\
 &= \psi(\pi(a)) \wedge \psi(\pi(b))
 \end{aligned}$$

De même pour l'opération \vee .

Ainsi, ψ est bien un isomorphisme de treillis. □

Ceci complète notre introduction à la théorie des treillis. Pour des informations supplémentaires, je vous suggère l'ouvrage de Birkhoff, [1] et celui de Grätzer [7].

CHAPITRE II

GROUPE DE COXETER

Les treillis Cambrian sont étroitement liés à un certain treillis sur un groupe de Coxeter : *le treillis faible*. Nous allons d'abord rappeler, dans ce deuxième chapitre, quelques notions concernant les groupes de Coxeter. Puis nous allons consacrer une section au treillis faible. Pour en savoir plus, nous vous invitons à consulter *Combinatorics of Coxeter Groups*, [2], et *Reflection groups and Coxeter Groups*, [8], deux excellents ouvrages sur le sujet.

2.1 Introduction aux groupes de Coxeter

Les groupes de Coxeter apparaissent dans plusieurs domaines des mathématiques : en algèbre, en géométrie, en combinatoire, etc. Leur étude est liée, en outre, aux algèbres de Lie semi-simples, aux algèbres de Kac-Moody et aux groupes de réflexion. Un groupe de Coxeter est défini en terme de générateurs et de relations. La notion de système de Coxeter est liée à la matrice de Coxeter et au graphe de Coxeter. Nous allons commencer par rappeler la définition de ces objets.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice de Coxeter M de rang n est une matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ à coefficient dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que

1. M est symétrique
2. $m_{ij} \geq 1$ et $m_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$

Exemple 2.1.0.9. Voici deux matrices de Coxeter

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & \infty \\ \infty & 1 \end{bmatrix}$$

Par contre, la matrice Q n'est pas une matrice de Coxeter, car elle n'est pas symétrique.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Un graphe de Coxeter est un graphe étiqueté, où les sommets sont $\{1, 2, \dots, n\}$ et les arêtes sont étiquetées par des entiers plus grands ou égaux à 3 ou par l'infini. Par convention, on ne mettra pas le 3.

Exemple 2.1.0.10. La figure 2.1 illustre trois graphes différents. Le premier graphe n'est pas un graphe de Coxeter, car l'arête est étiquetée par l'entier 2. Les deux autres sont bien des graphes de Coxeter.

Il y a une bijection entre matrices et graphes de Coxeter de même rang. Le rang d'un graphe est égal au nombre de sommets. Ainsi, pour un graphe de Coxeter, noté Γ , on veut construire une matrice $M = (m_{ij})$ de Coxeter.

Posons,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 2, & \text{si } i \neq j \text{ et } \{i, j\} \text{ n'est pas une arête} \\ \text{l'étiquette de } \{i, j\}, & \text{si } \{i, j\} \text{ est une arête} \end{cases}$$

Ainsi à partir du graphe non connexe de Coxeter de la figure 2.2, on obtient la matrice M .

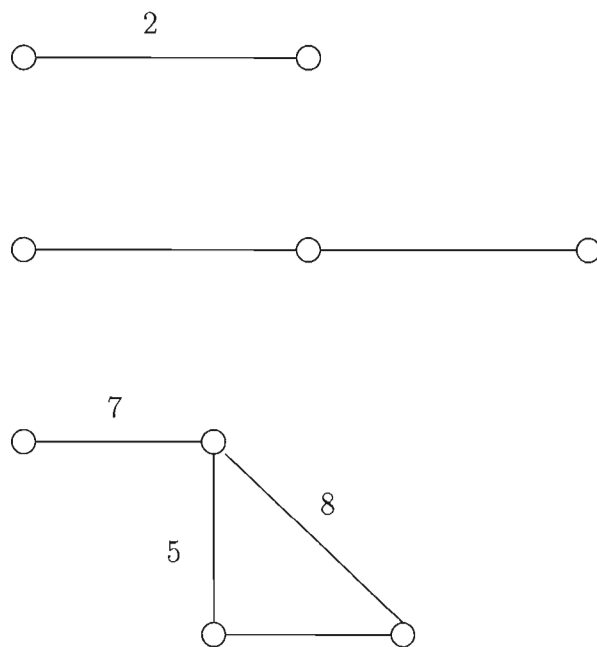


Figure 2.1 Graphes

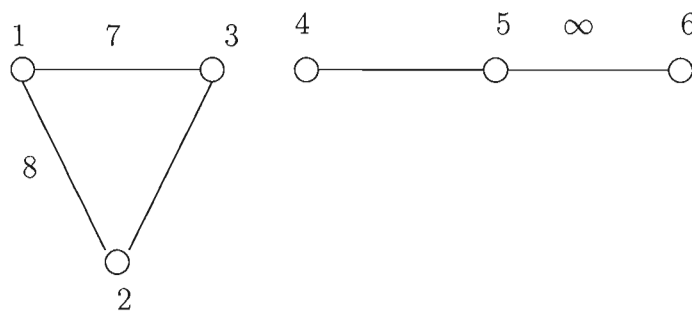


Figure 2.2 Graphe de Coxeter

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & \infty \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \infty & 1 \end{bmatrix}$$

Réciproquement, soit M une matrice de Coxeter, on construit Γ , le graphe de Coxeter associé comme suit : les sommets de $\Gamma = \{1, 2, \dots, \text{ordre}(M)\}$ et il existe une arête $\{i, j\}$ si $m_{ij} \geq 3$. On étiquette cette arête par m_{ij} . Donc à partir de la matrice M , on obtient le graphe Γ de la figure 2.3.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & \infty \\ 2 & 2 & \infty & 1 \end{bmatrix}$$

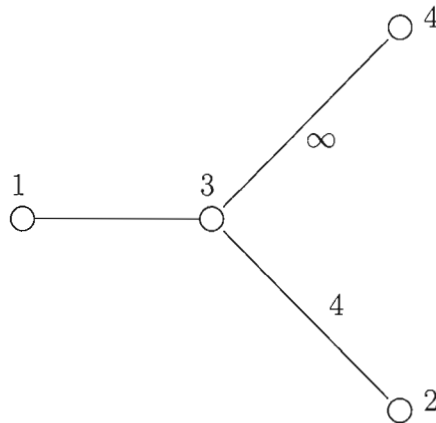


Figure 2.3 Graphe de Coxeter associé à la matrice M

Nous pouvons maintenant définir un groupe de Coxeter.

Définition 2.1.0.11. Soit S un ensemble fini et W un groupe engendré par S . On dit

que (W, S) est un système de Coxeter si :

$W = \langle S \mid (ss')^{m_{ss'}} ; s, s' \in S \rangle$, tel que $(m_{ss'})_{s, s' \in S}$ soit une matrice de Coxeter. On dit alors que W est un groupe de Coxeter.

On note e l'élément neutre de W et pour un élément $w \in W$ notons son inverse par w^{-1} . Un résultat non trivial est que l'ordre de ss' est égal à $m_{ss'}$. On le note $o(ss') = m_{ss'}$ pour $s, s' \in S$.

L'ensemble S est sujet à des relations qu'on appelle *relations de tresses* : Si $m_{ss'} = n$ alors $\underbrace{ss'ss' \dots}_{n \text{ fois}} = \underbrace{s'ss's \dots}_{n \text{ fois}}$. Par exemple, $m_{ss'} = 3$ nous donne la relation de tresse $ss's = s'ss'$. Notons que l'on indique l'absence de relation par $m_{ss'} = \infty$.

Exemple 2.1.0.12. Soit Γ_W le graphe de Coxeter de la figure 2.4.

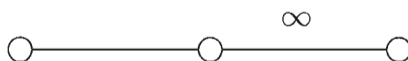


Figure 2.4 Γ_W

On a la matrice de Coxeter associée suivante :

$$M_W = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & \infty \\ 2 & \infty & 1 \end{bmatrix}$$

Puis, le système de Coxeter suivant :

$$W = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = e, s_1s_3 = s_3s_1 \text{ et } s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2 \rangle$$

2.1.1 Groupes de Coxeter finis

Il existe une classification des groupes de Coxeter finis, basée sur les graphes de Coxeter définis positifs. On sait que W est un groupe de Coxeter fini si et seulement si les

composantes connexes de son graphe de Coxeter appartiennent à l'ensemble suivant : $\{A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4, I_2(m)\}$. On retrouve à la figure 2.5 , la liste des graphes de Coxeter définis positifs. On dit que W est un groupe de Coxeter de type A_n , si $\Gamma_W = A_n$.

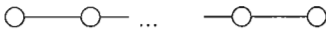
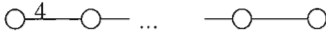
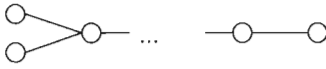
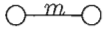
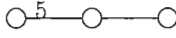
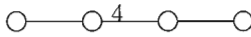

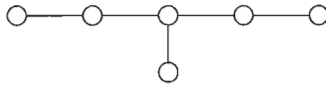
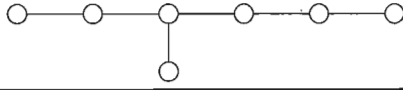
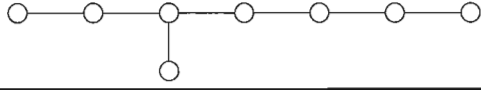
Type de Groupe	Graphe de Coxeter
A_n	
B_n	
D_n	
$I_2(m)$	
H_3	
F_4	
H_4	
E_6	
E_7	
E_8	

Figure 2.5 Graphes de Coxeter définis positifs

Exemple 2.1.1.1. Un groupe de Coxeter fini bien connu est le groupe symétrique S_n . On sait que S_n est engendré par les transpositions $\tau_i = (i \ i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$. Ainsi on a un ensemble de générateurs $S = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}\}$. On a également les relations de tresses suivantes : $\tau_i^2 = e$, pour tout i , $(\tau_i \tau_{i+1})^3 = e$ et $(\tau_i \tau_j)^2 = e$, si $|i - j| \geq 2$, en d'autre

mots si $\{i, i+1\} \cap \{j, j+1\} = \emptyset$. En effet, $\tau_i \tau_{i+1} = (i \ i+1)(i+1 \ i+2) = (i \ i+1 \ i+2)$, qui est un cycle de longueur 3, ce qui fait que $\tau_i \tau_{i+1}$ est d'ordre 3. De plus, si $|i-j| \geq 2$, alors τ_i et τ_j sont deux cycles disjoints et on a $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$. D'où $(S_n, \{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\})$ est un système de Coxeter. Ainsi la matrice suivante est la matrice de Coxeter associée à S_n :

$$M_{S_n} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & . & . & . & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & . & . & . \\ 2 & 3 & 1 & . & . & . & . \\ . & 2 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 2 \\ . & . & . & . & . & 1 & 3 \\ 2 & . & . & . & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Puis, le graphe de Coxeter associé est celui de la figure 2.6. Ainsi, le groupe symétrique est un groupe de Coxeter de type A_{n-1}

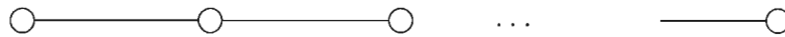


Figure 2.6 Graphe de Coxeter de S_n engendré par $\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$

Exemple 2.1.1.2. Un autre exemple de groupes de Coxeter est celui des groupes diédraux. Informellement, le groupe diédral D_m est le groupe des isométries d'un m -gone régulier. Plus, spécifiquement, D_m est engendré par m rotations de centre le milieu du polygone et d'angle $2\pi i/m$ et m réflexions. Les axes de réflexion sont différents selon si m est pair ou impair. Si m est pair, on a deux familles de réflexions : celles dont l'axe joint un sommet au sommet opposé et celles dont l'axe joint le milieu d'un côté au côté opposé. Si m est impair, les axes joignent un sommet au milieu d'un côté opposé. Notons les réflexions par s_i et les rotations d'angle $2\pi i/m$ par $(r_{2\pi i/m})$. Posons $t_1 = s_1 r_{2\pi/m}$. On a alors que D_m est engendré par s_1 et t_1 . On a également les relations de tresses suivantes : $s_1^2 = e$, $t_1^2 = e$ et $(s_1 t_1)^m = e$. Il n'est pas très difficile de montrer que D_m est présenté sous la forme $\langle s_1, t_1 \mid s_1^2 = e, t_1^2 = e \text{ et } (s_1 t_1)^m = e \rangle$, ce qui en fait

bien un système de Coxeter. On remarque alors que D_m est un groupe de Coxeter de type $I_2(m)$.

2.1.2 Longueur et expression réduite

Passons maintenant à quelques notions importantes concernant les groupes de Coxeter. Soit (W, S) un système de Coxeter. Un élément $w \in W$ peut être écrit comme produit des générateurs de W : $w = s_1 s_2 \dots s_k$, où $s_i \in S$. Si k est minimal pour cette expression de w , k est appelé *la longueur de w* et est noté $l(w)$. Si $k = l(w)$ on appelle $w = s_1 s_2 \dots s_k$ *un mot réduit* ou *une expression réduite* pour w . Comme l'inverse de $w = s_i s_2 \dots s_k$ est $w^{-1} = s_k \dots s_1$, on a $l(w^{-1}) = l(w)$. On a également que $ww^{-1} = e$. Notons que par définition de e , e représente le mot vide, $l(e) = 0$.

Exemple 2.1.2.1. Soit $W = S_4$ avec $S = \{s_1, s_2, s_3\}$

1. Soit $w_1 = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$. On a alors, $l(w_1) = 3$, donc $s_1 s_2 s_1$ et $s_2 s_1 s_2$ sont des expressions réduites de w_1 .
2. Soit $w_2 = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3$. On obtient alors en utilisant les relations de tresses

$$\begin{aligned}
 w_2 &= s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 \\
 &= s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_1 s_3 \\
 &= s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3 s_1 \\
 &= s_2 s_1 s_2 s_2 s_3 s_2 s_1 \\
 &= s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 \quad \text{car } s_2^2 = e
 \end{aligned}$$

Ainsi $l(w_2) = 5$, donc comme $s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3$ contient 7 lettres, ce mot n'est pas réduit. Par contre, $s_2 s_1 s_3 s_2 s_1$ est bien une expression réduite de w_2 , car on ne peut pas la réduire davantage. En effet, on peut réduire une expression en enlevant une lettre par pair. On a bien que e est une expression réduite. Aussi, s_2 est une expression réduite. Montrons que $s_2 s_1$ est une expression réduite. Si $s_2 s_1$ n'est pas réduit, alors $s_2 s_1 = e$ et donc $s_2 = s_1$, ce qui est une contradiction. Donc $s_2 s_1$ est une expression réduite. On montre ensuite que $s_2 s_1 s_3$ est réduit exactement de la

même manière. Si $s_2s_1s_3$ n'est pas réduit, comme s_2s_1 l'est, on a soit $s_3s_1 = e$ ou soit $s_3s_2 = e$. Ainsi, on a une contradiction dans les deux cas. On poursuit le raisonnement, puis on montre que $s_2s_1s_3s_2s_1$ est bien une expression réduite.

Rappelons aussi que si $w = s_1s_2\dots s_k$ est une expression réduite, alors tout préfixe ou tout suffixe de $s_1\dots s_k$ est une expression réduite dans W . Par contre, un sous-mot de $s_1\dots s_k$ n'est pas forcément une expression réduite. Par exemple, pour $W = S_4$ avec $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ et $w = s_1s_2s_1$. On sait que $s_1s_2s_1$ est une expression réduite, mais le sous-mots $s_1s_1 = e$ n'en est pas une.

Nous donnons ici sans preuve quelques propriétés classiques de la fonction longueur qui nous seront très utiles par la suite.

Proposition 2.1.2.2. *Pour tout w et $w' \in W$ et $s \in S$ on a :*

1. $l(w) = l(w^{-1})$
2. $l(w) = 1 \Leftrightarrow w \in S$
3. $l(ww') \leq l(w) + l(w')$
4. $l(ww') \geq l(w) - l(w')$
5. $l(w) - 1 \leq l(ws) \leq l(w) + 1$
6. $l(ws) = l(w) \pm 1$

2.1.3 L'élément de longueur maximum

Rappelons que si W est un groupe de Coxeter fini, alors il existe un unique élément de longueur maximale dans W . Cet élément est noté w_0 .

Proposition 2.1.3.1. *Si W est un groupe de Coxeter fini, alors il existe un unique élément $w_0 \in W$ tel que $l(w) \leq l(w_0)$, pour tout $w \in W$.*

L'élément de longueur maximale a les propriétés suivante :

1. $w_0^2 = e$.
2. $l(w_0 w) = l(w_0) - l(w)$ pour tout $w \in W$.
3. Toute expression réduite de $w \in W$ peut se compléter en une expression réduite de w_0 : pour tout $w \in W$, il existe $u \in W$ tel que $w_0 = wu$ et $l(w_0) = l(w) + l(u)$

Les démonstrations de ces derniers résultats peuvent se trouver dans l'ouvrage de Humphreys [8]. L'idée est de définir la notion de système de racines d'un groupe de Coxeter. Il existe d'autres démonstrations, comme celle de Bjorner et Brenti reposant sur des arguments utilisant l'ordre de Bruhat [2]. Nous avons choisi de ne pas traiter ces deux notions des groupes de Coxeter.

2.1.4 Condition d'échange et de réduction

Un système de Coxeter est aussi complètement caractérisé par deux propriétés très pratiques dans l'étude de ces groupes : la condition d'échange et de réduction.

Définition 2.1.4.1. Soit W un groupe et S un ensemble de générateurs tel que $W = \langle S \rangle$. On dit que W vérifie :

1. *la condition d'échange* si pour toute expression réduite $g = s_1 s_2 \dots s_k \in W$ et pour tout $s \in S$ tel que $l(gs) \leq l(g)$, il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $g = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_k s = s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_k$.
2. *la condition de réduction* si pour toute expression $g = s_1 \dots s_k \in W$ tel que $l(g) < k$, il existe $1 \leq i < j \leq k$ tel que $g = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_k$.

Le symbole \hat{s} signifie que l'élément s n'est plus un élément du mot. C'est-à-dire que la lettre s a été retirée du mot.

Un groupe de Coxeter est fondamentalement lié à ces deux notions, comme en témoigne le théorème suivant :

Théorème 2.1.4.2. Soient W un groupe et S un ensemble de générateurs de W . Alors les trois énoncés suivants sont équivalents :

1. (W, S) est un système de Coxeter.

2. W vérifie la condition d'échange.
3. W vérifie la condition de réduction

2.1.5 Sous-groupe parabolique

Qu'arrive-t-il si on considère un sous-ensemble I de S ? Est-ce que (W_I, I) est un système de Coxeter? La réponse est oui! On appelle $W_I = \langle I \rangle$ un *sous-groupe parabolique standard*. On dit que $H \leq W$ est un sous groupe parabolique s'il existe $I \subseteq S$ et $g \in W$ tel que $gHg^{-1} = W_I$. En particulier on a que H est isomorphe à W_I . Rappelons que si G est un groupe engendré par 2 involutions distinctes $s, s' \neq e$, alors, $G \simeq D_m$ avec $m = o(ss')$. Comme on a que $D_m = \langle s, s' \mid s^2 = e, s'^2 = e \text{ et } (ss')^m = e \rangle$, on obtient que $(G, \{s, s'\})$ est un système de Coxeter. De ce fait, si $I = \{s, s'\} \subseteq S$ alors W_I est toujours isomorphe au groupe diédral $D_{m_{ss'}}$ et c'est un sous-groupe parabolique de rang 2.

On note la longueur d'un élément $w \in W_I$ par $l_I(w)$. On peut par la suite démontrer que $l_I(w) = l(w)$, pour tout $w \in W_I$. Notons aussi que dans le cas où W_I est fini, alors W_I contient un unique élément de longueur maximale qu'on notera $w_{0,I}$.

2.1.6 Représentant des classes à gauche $W_I \backslash W$

Soit $I \subseteq S$. Rappelons que dans chaque classe $W_I w := \{uw \mid u \in W_I\}$, il existe un unique élément de longueur minimale $x \in W_I w$. Cet élément x est caractérisé par le fait que $l(sx) \geq l(x)$ pour tout $s \in I$. L'ensemble $X_I = \{x \in W \mid l(sx) \geq l(x), \forall s \in I\}$ est donc un système de représentants de $W_I \backslash W$. En particulier, tout élément $w \in W$ se factorise de manière unique comme suit : $w = w_I w^I$, où $w^I \in X_I$ et $w_I \in W_I$. De plus, $l(w) = l(w_I) + l(w^I)$. L'existence se démontre par une récurrence sur $l(w_I)$ et l'unicité peut être démontrée à l'aide des systèmes de racine, voir [8] ou avec l'ordre de Bruhat, voir [2].

Voilà qui complète notre introduction sur les groupes de Coxeter. La prochaine section

est consacrée à l'ordre faible sur un groupe de Coxeter.

2.2 Le treillis faible

Dans cette section, nous allons nous intéresser au treillis faible. Pour ce faire, nous allons d'abord considérer une relation d'ordre sur un groupe de Coxeter : *L'ordre faible*. Nous allons par la suite démontrer qu'un groupe de Coxeter, muni de l'ordre faible forme un treillis qu'on appelle treillis faible.

2.2.1 L'ordre faible

Soit (W, S) un système de Coxeter.

Définition 2.2.1.1. Soit $u, w \in W$, on pose,

1. $u \leq_R w$ si $l(w) = l(u) + l(u^{-1}w)$. On appelle \leq_R *l'ordre faible à droite*.
2. $u \leq_L w$ si $l(w) = l(u) + l(wu^{-1})$. On appelle \leq_L *l'ordre faible à gauche*.

En considérant (W, \leq_R) , (W, \leq_L) et la fonction qui envoie $w \in W$ sur $w^{-1} \in W$, on obtient que (W, \leq_R) et (W, \leq_L) sont deux ensembles partiellement ordonnés isomorphes. On traitera ici de l'ordre faible à droite, sachant que tous les résultats s'appliquent aussi à l'ordre faible à gauche. On utilisera la notation \leq pour \leq_R et on l'appellera simplement ordre faible.

Vérifions que la relation d'ordre faible est bien un ordre sur W .

1. Réflexivité : soit $w \in W$, on a :

$$l(w) = l(w) + 0 = l(w) + l(e) = l(w) + l(w^{-1}w)$$

On obtient $w \leq w$ et on a bien que la relation est réflexive.

2. Antisymétrie : soit $u, v \in W$ tel que $u \leq v$ et $v \leq u$. On a donc

$$l(v) = l(u) + l(u^{-1}v)$$

$$\text{et } l(u) = l(v) + l(v^{-1}u).$$

On a alors $l(v) = l(v) + l(v^{-1}u) + l(u^{-1}v)$ et on obtient que $l(v^{-1}u) + l(u^{-1}v) = 0$. Ainsi on a que $v^{-1}u = e$ et $u^{-1}v = e$. Donc on a bien que $u = v$ et que la relation est antisymétrique.

3. Transitivité : soit $u, v, w \in W$ tel que $u \leq v$ et $v \leq w$. On a donc

$$l(v) = l(u) + l(u^{-1}v)$$

$$\text{et } l(w) = l(v) + l(v^{-1}w)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} l(w) &= l(u) + l(u^{-1}v) + l(v^{-1}w) \\ &\geq l(u) + l(u^{-1}vv^{-1}w) \\ &\geq l(u) + l(u^{-1}w) \end{aligned}$$

De plus, on a,

$$\begin{aligned} l(u) &= l(v) - l(u^{-1}v) \\ &= l(w) - l(v^{-1}w) - l(u^{-1}v) \\ &= l(w) - [l(v^{-1}w) + l(u^{-1}v)] \\ &\geq l(w) - l(u^{-1}w) \end{aligned}$$

On a donc $l(w) \leq l(u) + l(u^{-1}w)$ ce qui implique que $l(w) = l(u) + l(u^{-1}w)$ d'où $u \leq w$. On a donc bien une relation transitive.

Finalement, on conclut que \leq est une relation d'ordre sur W .

2.2.2 Propriétés sur l'ordre faible

L'objectif de cette section est de montrer qu'un groupe de Coxeter fini W , muni de l'ordre faible \leq est un treillis. Pour y arriver, nous aurons besoin de quelques résultats préalables.

Proposition 2.2.2.1. *L'ordre faible satisfait la propriété de chaîne, c'est-à-dire, $u < v$ dans W si et seulement si'il existe $s_1, \dots, s_k \in S$ tel que $u < us_1 < us_1s_2 < \dots < us_1\dots s_k = v$.*

Démonstration. En vertu de la définition, on sait que $u < v$ si on a $l(v) = l(u) + l(u^{-1}v)$ avec $l(u^{-1}v) \neq 0$. Si il existe s_1, \dots, s_k tel que $u \leq us_1 \leq us_1s_2 \leq \dots \leq us_1\dots s_k = v$, par transitivité on a $u < v$. Réciproquement, si on a $u < v$, alors $l(u) < l(v)$. Montrons qu'il existe $s_1 \in S$ tel que $u < us_1$. Posons $w = u^{-1}v$. Comme on a $u < v$, on a $l(w) \neq 0$. Soit $s_1\dots s_k$ une expression réduite pour w . On a que $l(us_1) > l(u)$. Supposons le contraire, on obtient, en utilisant les propriétés sur la longueur, que

$$\begin{aligned} l(v) = l(us_1\dots s_k) &\leq l(us_1) + l(s_2\dots s_k) \\ &< l(u) + l(s_2\dots s_k) \\ &< l(u) + l(w) = l(v) \text{ car } s_2\dots s_k \text{ est un préfixe d'un mot réduit, donc il est réduit.} \end{aligned}$$

Ainsi on obtient $l(v) < l(v)$, ce qui est une contradiction. Finalement, $l(us_1) = l(u) + 1 = l(u) + l(s_1) = l(u) + l(u^{-1}us_1)$. d'où $u < us_1$. Montrons ensuite qu'on a $l(us_1\dots s_i) > l(us_1\dots s_{i-1})$, pour tout $2 \leq i \leq k$. Supposons l'inverse. En utilisant les propriétés sur la longueur, on a :

$$\begin{aligned} l(v) = l(us_1\dots s_k) &\leq l(us_1\dots s_i) + l(s_{i+1}\dots s_k) \\ &< l(us_1\dots s_{i-1}) + l(s_{i+1}\dots s_k) \\ &\leq l(u) + l(s_1\dots s_{i-1}) + l(s_{i+1}\dots s_k) \\ &\leq l(u) + i - 1 + k - i \\ &< l(u) + l(w) = l(v). \end{aligned}$$

Reste à voir que $us_1\dots s_{i-1} < us_1\dots s_i$, pour tout $2 \leq i \leq k$. Or, on a

$$\begin{aligned} l(us_1\dots s_i) &= l(us_1\dots s_{i-1}) + l(s_i) \\ &= l(us_1\dots s_{i-1}) + l((us_1\dots s_{i-1})^{-1}us_1\dots s_{i-1}s_i) \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $us_1\dots s_{i-1} < us_1\dots s_i$, pour tout $2 \leq i \leq k$, par définition, et donc il existe $s_1, \dots, s_k \in S$ tel que $u < us_1 < us_1s_2 < \dots < us_1\dots s_k = v$. \square

Définition 2.2.2.2. On appelle chaîne maximale de l'intervalle $[u, v]$, toute suite $u = u_0 < u_1 < \dots < u_k = v$ d'éléments de $[u, v]$ tel que $l(u_i) = l(u_{i-1}) + 1$, pour tout $1 \leq i \leq k$.

Proposition 2.2.2.3. Il y a une correspondance bijective entre expression réduite de w et chaîne maximale dans l'intervalle $[e, w]$.

Démonstration. Notons E_w l'ensemble des expressions réduites de $w \in W$ et F_w l'ensemble des listes $(e, s_1, s_1s_2, \dots, s_1\dots s_k = w)$ tel que l'on a $e < es_1 < \dots < es_1\dots s_k = w$. Soit $w = s_1\dots s_k$ une expression réduite de w dans W . Considérons la fonction $f : E_w \rightarrow F_w$ tel que $f(s_1\dots s_k) = e < es_1 < \dots < es_1\dots s_k = w$. Montrons que la chaîne est maximale. On a que $l(es_1\dots s_k) = l(es_1\dots s_{k-1}) + 1$ car $s_1\dots s_k$ est une expression réduite donc son préfixe $s_1\dots s_{k-1}$ l'est aussi. On obtient $l(es_1\dots s_i) = l(es_1\dots s_{i-1}) + 1$, pour tout $1 \leq i \leq k - 2$, pour la même raison. D'où $e < es_1 < \dots < es_1\dots s_k = w$, est une chaîne maximale. Donc f est bien définie. Maintenant, soit $g : [e, w] \rightarrow E_w$ tel qu'à une chaîne maximale, $e < es_1 < \dots < es_1\dots s_k = w$ on associe le mot $s_1\dots s_k = w$. Montrons que $s_1\dots s_k$ est une expression réduite de w .

$$\begin{aligned}
l(w) = l(s_1\dots s_k) &= l(s_1\dots s_{k-1}) + 1, \text{ car on a une chaîne max.} \\
&= l(s_1\dots s_{k-2}) + 1 + 1 \\
&\vdots \\
&= l(s_1) + k - 1 \\
&= k
\end{aligned}$$

Puisque g est bien définie, on obtient par suite que $f \circ g = Id$ et $g \circ f = Id$. Donc, f est bien une bijection. \square

Corollaire 2.2.2.4. Soit $s \in S$ et $w \in W$. Si $l(sw) \leq l(w)$, alors l'application $s : [e, sw] \rightarrow [s, w]$, qui est en fait la multiplication à gauche par s , est un morphisme d'ensemble partiellement ordonné.

Démonstration. On veut montrer que si on a $e < x < sw$ alors on aura $s < sx < w$, c'est-à-dire que la multiplication à gauche par s préserve l'ordre. Comme s est initiale dans w et que $x < sw$, on peut écrire $sw = xy$ avec $l(x) + l(y) = l(sw) = l(w) - 1$, car $l(sw) \leq l(w)$. On a donc $w = sxy$ avec $l(w) = l(x) + l(y) + 1$. Nous allons premièrement montrer que $l(x) < l(sx)$, puis ensuite que $l(w) = l(sx) + l(y)$.

1. Supposons l'inverse, posons $l(x) > l(sx)$. Il existe alors $v \in W$ tel que $x = sv$ avec $l(x) = l(v) + 1$. On obtient donc $sw = ssvy = xy = svy$, d'où $w = vy$. Or,

$$\begin{aligned} l(w) &= l(x) + l(y) + 1 \\ &= l(v) + 1 + l(y) + 1 \\ &= l(v) + l(y) + 2 \\ &= l(w) + 2. \end{aligned}$$

On obtient une contradiction, ainsi on a bien $l(x) < l(sx)$.

2. Montrons maintenant que $l(w) = l(sx) + l(y)$. On a $w = sxy$ avec $l(w) = l(x) + l(y) + 1$. Or, par 1) on a $l(x) = l(sx) - 1$, ainsi $l(w) = l(sx) + l(y)$ et on obtient bien $s < sx < w$.

La multiplication à gauche par s préserve donc l'ordre. □

Proposition 2.2.2.5. $u \leq w$ si et seulement si on peut exprimer $w = us_1 \dots s_k$, $s_i \in S$ tel que $l(us_1 \dots s_i) = l(u) + i$, pour tout $0 \leq i \leq k$.

Démonstration. Soit $w = us_1 \dots s_k$ et $u = t_1 \dots t_p$, $t_i, s_i \in S$ deux expressions réduites, telles que $l(us_1 \dots s_i) = l(u) + i$, pour tout $0 \leq i \leq k$. On obtient :

$$\begin{aligned} l(w) &= l(u) + k \\ &= l(u) + l(s_1 \dots s_k) \\ &= l(u) + l(t_p \dots t_1 t_1 \dots t_p s_1 \dots s_k), \text{ car } t_p \dots t_1 t_1 \dots t_p = e \\ &= l(u) + l(u^{-1}w), \text{ car } t_p \dots t_1 = u \text{ et } t_1 \dots t_p s_1 \dots s_k = w. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $u \leq w$. Si $u = w$ c'est gagné. Sinon, soit $u < w$ et soit $r_1 \dots r_m$ une expression réduite pour u . Par la propriété de chaîne il existe $s_1 \dots s_k \in S$ tel que

$$u < us_1 < \dots < us_1 \dots s_k = w$$

Comme on a une chaîne maximale, en effet, $l(us_i \dots s_i) = l(us_1 \dots s_{i-1}) + 1$, pour tout $i \leq i \leq k$, on a par la proposition précédente que $us_1 \dots s_k$ est une expression réduite pour w et $l(us_1 \dots s_i) = l(u) + i$, pour tout $0 \leq i \leq k$. \square

2.2.3 Le cas général : un demi-treillis inférieur

On peut maintenant présenter le théorème principal de cette section.

Théorème 2.2.3.1. *Soit W un groupe de Coxeter et \leq l'ordre faible alors (W, \leq) est un demi-treillis inférieur.*

Démonstration. Considérons $A_{u,v} = \{w \in W \mid w \leq u, w \leq v\}$. On cherche $z \in A_{u,v}$ tel que $z \geq w$, pour tout $w \in A_{u,v}$, ainsi $z = u \wedge v$. On procède par récurrence sur $l(u)$ où $u \in A_{u,v}$. Si $l(u) = 0$ alors $u = e$. Donc $w = e$, car $w \leq u$. Ainsi $z = e = u \wedge v$. Supposons que la propriété est vraie pour $u \in W$, $l(u) = n - 1$. Soit $z \in A_{u,v}$ de longueur maximale. Montrons que $z \geq w$, pour tout $w \in A_{u,v}$.

1. Soit $s \in S \cap A_{u,v}$ et soit $z = s_1 \dots s_r$, $s_i \in S$, expression réduite, Montrons d'abord que $s \leq z$. Comme $z \leq u$ et $z \leq v$ on a par la proposition précédente,

$$u = s_1 \dots s_r p_1 \dots p_k, \quad p_i \in S$$

$$\text{et } v = s_1 \dots s_r q_1 \dots q_l, \quad q_i \in S$$

qui sont deux expressions réduites. Supposons que $s \not\leq z$. On a alors que $l(sv) \leq l(v)$ et $l(su) \leq l(u)$. Ainsi, par la condition d'échange, il existe i, j , $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq l$ tel que

$$u = ss_1 \dots s_r p_1 \dots \widehat{p}_i \dots p_k$$

$$\text{et } v = ss_1 \dots s_r q_1 \dots \widehat{q}_j \dots q_l.$$

L'élément enlevé de l'expression de u , \widehat{p}_i , appartient à $\{p_1, \dots, p_k\}$ et l'élément enlevé de l'expression de v , \widehat{q}_j , appartient à $\{q_1, \dots, q_l\}$. En effet, si au contraire les éléments enlevés dans chacune des expressions appartiennent à S , alors on obtiendrait

$$ss_1 \dots \widehat{s}_i \dots s_r p_1 \dots p_k = u \Rightarrow ss_1 \dots \widehat{s}_i \dots s_r p_1 \dots p_k (p_1 \dots p_k)^{-1} = s_1 \dots s_r p_1 \dots p_k (p_1 \dots p_k)^{-1}$$

Ce qui impliquerait que $ss_1 \dots \widehat{s}_i \dots s_r = s_i \dots s_r = z$. On aurait donc une expression réduite de s , s , comme préfixe d'une expression réduite de z . Par la proposition précédente, on obtiendrait $s \leq z$. Ce qui est une contradiction. Ainsi on a bien

$$u = ss_1 \dots s_r p_1 \dots \widehat{p}_i \dots p_k$$

$$\text{et } v = ss_1 \dots s_r q_1 \dots \widehat{q}_j \dots q_l.$$

Finalement, le fait d'avoir $ss_1 \dots s_r \in A_{u,v}$ implique bien que $l(ss_1 \dots s_r) \geq l(z)$. Ce qui contredit la maximalité de z . D'où $s \leq z$.

2. Maintenant, soit $w \neq e \in A_{u,v}$ et soit $s \in A_{u,v}$ tel que $s \leq z$. On a donc $l(sv) \leq l(v)$ et $l(su) \leq l(u)$. Ainsi, par hypothèse de récurrence on a qu'il existe $z' = sv \wedge su$.
3. Montrons ensuite que $sw \leq z'$ et $sz \leq z'$. Soit $sw = sr_1 \dots r_m$ où $r_1 \dots r_m$ est une expression réduite pour w . Comme $w, s \in A_{u,v}$ on obtient que sw est un préfixe de su et sv . Donc $sw \in A_{su,sv}$. D'où on a $sw \leq z'$, car $z' = su \wedge sv$. Aussi, on sait que $sz \leq sv$ et $sz \leq su$. En effet, $s \leq z$ implique que $sz = ss_1 \dots s_r$ et $sv = ss_1 \dots s_r q_1 \dots q_l$. D'où $sz \leq sv$. De même pour montrer que $sz \leq su$. Donc on a bien $sz \leq z'$.
4. Soit $z' = r_1 \dots r_q$, $r_i \in S$ une expression réduite. On a alors $sz' = sr_1 \dots r_q$ une expression réduite, car $l(sz') > l(z')$. En effet, s n'est pas un préfixe de su et sv donc s n'est pas non plus un préfixe de z' , d'où $l(sz') > l(z')$. Ainsi $sz' \leq v$ et $sz' \leq u$. Comme $sz' \in A_{u,v}$, on a que $l(sz') \leq l(z)$ car z est l'élément maximal de $A_{u,v}$.
5. En vertu des propriétés de la longueur,

$$l(sz) = l(z) - 1 \geq l(sz') - 1 = l(z').$$

Donc $l(sz) \geq l(z')$. Puis, comme on a montré que $sz \leq z'$, on en déduit que $sz = z'$.

6. Finalement, comme on sait que $sw \leq sz$, on obtient que $w \leq z$ par corollaire 2.2.2.4 pour tout $w \in A_{u,v}$. Ce qui montre bien qu'il existe $z = u \wedge v$. On peut donc conclure que (W, \leq) est un demi-treillis inférieur.

□

2.2.4 Le cas fini : un treillis

On va démontrer que dans ce cas où W est un groupe de Coxeter fini, (W, \leq) est un treillis. Puisque (W, \leq) est un demi-treillis inférieur, il reste à démontrer que c'est aussi un demi-treillis supérieur. Pour cela nous aurons besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.2.4.1. *Si W est fini, alors $w \mapsto ww_0$ est un antiautomorphisme d'ordre.*

Avant d'en faire la démonstration, rappelons d'abord une proposition énoncée au chapitre deux concernant w_0 , l'unique élément de longueur maximale : Si W est un groupe de Coxeter fini, alors il existe $w_0 \in W$ tel que $l(w) < (w_0)$, pour tout $w \in W$. (prop 2.1.3.1.). On sait aussi que toute expression réduite de $w \in W$ peut se compléter en une expression réduite de w_0 . Ainsi par la proposition 2.2.2.1, on a que $w \leq w_0$, pour tout $w \in W$.

Démonstration. Rappelons qu'un antiautomorphisme d'ordre est une fonction définie sur un ensemble, munie d'une opération, sur lui-même telle que la fonction renverse l'ordre de l'opération. Soit $w, w', w_0 \in W$, tel que $w \leq w'$, montrons qu'alors $ww_0 \geq w'w_0$. Comme $w \leq w'$, $w \leq w_0$ et $w' \leq w_0$, en vertu de la définition de l'ordre faible, on a $l(w') = l(w) + l(w^{-1}w')$ et $l(w_0) = l(w) + l(w^{-1}w_0)$ (de même pour $w' \leq w_0$).

Montrons que $l(ww_0) = l(w'w_0) + l(w_0w'^{-1}ww_0)$:

$$\begin{aligned}
l(w'w_0) + l(w_0w'^{-1}ww_0) &= l(w_0) - l(w') + l(w_0) - l(w_0w'^{-1}w) , \text{ car } l(ww_0) = l(w_0) - l(w) \\
&= l(w_0) - l(w') + l(w_0) - l(w^{-1}w'w_0) , \text{ car } l(w) = l(w^{-1}) \\
&= l(w_0) - l(w') + l(w_0) - l(w_0) + l(w^{-1}w') \\
&= l(w_0) - l(w') + l(w') - l(w) , \text{ car } w \leq w' \\
&= l(w_0) - l(w) \\
&= l(ww_0) , \text{ car } l(ww_0) = l(w_0) - l(w)
\end{aligned}$$

On a bien que $ww_0 \geq w'w_0$. Ainsi, $w \mapsto ww_0$ est bien un antiautomorphisme d'ordre. \square

Théorème 2.2.4.2. *Si W est fini, alors (W, \leq) est un treillis.*

Démonstration. On a déjà montré que (W, \leq) est un demi-treillis inférieur. Il reste donc à montrer que (W, \leq) est un demi-treillis supérieur, c'est-à-dire qu'on doit montrer l'existence de la borne supérieure. Soit ww_0 et $w'w_0 \in W$. On sait qu'il existe une borne inférieure $z = ww_0 \wedge w'w_0$ telle que $z \leq ww_0, w'w_0$ et soit $B = \{u \in W \mid u \leq ww_0, w'w_0\}$ alors $z \geq u$, pour tout $u \in B$.

On a alors $zw_0 \geq ww_0w_0, zw_0 \geq w'w_0w_0$ et $zw_0 \leq ww_0$, car $w \mapsto ww_0$ est un antiautomorphisme d'ordre. Ainsi, $zw_0 = w \vee w'$, d'où l'existence de la borne supérieure. On conclut que (W, \leq) est un treillis. \square

On appelle ce treillis, le *treillis faible* de W . Voici en exemple, le treillis faible pour le groupe diédral D_2 et celui pour le groupe symétrique S_4 .

Exemple 2.2.4.3. Soit $W = D_2$ le groupe diédral.

$$D_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e, (ab)^2 = e \rangle$$

On sait que $abababab = e$, d'où $abab = baba$. Si on compare les éléments de D_2 en utilisant l'ordre faible, on obtient :

$$e < a < ab < aba < abab$$

et $e < b < ba < bab < baba$.

La figure 2.7 représente le treillis faible de D_2 .

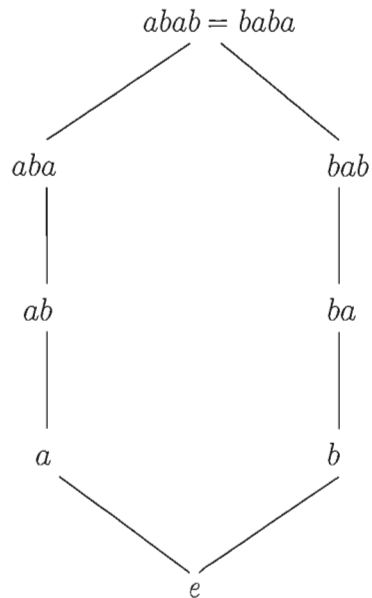


Figure 2.7 (D_2, \leq)

Exemple 2.2.4.4. Soit $W = S_4$, on a :

$$S_4 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = e, (s_1s_3)^2 = e, (s_1s_2)^3 = e, (s_2s_3)^3 = e \rangle$$

On a ainsi $s_1s_3 = s_3s_1$, $s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$, $s_2s_3s_2 = s_3s_2s_3$. La figure 2.8 représente le treillis faible de S_4 .

Ceci complète le chapitre concernant le treillis faible. Pour plus de détails voir [2, 8].

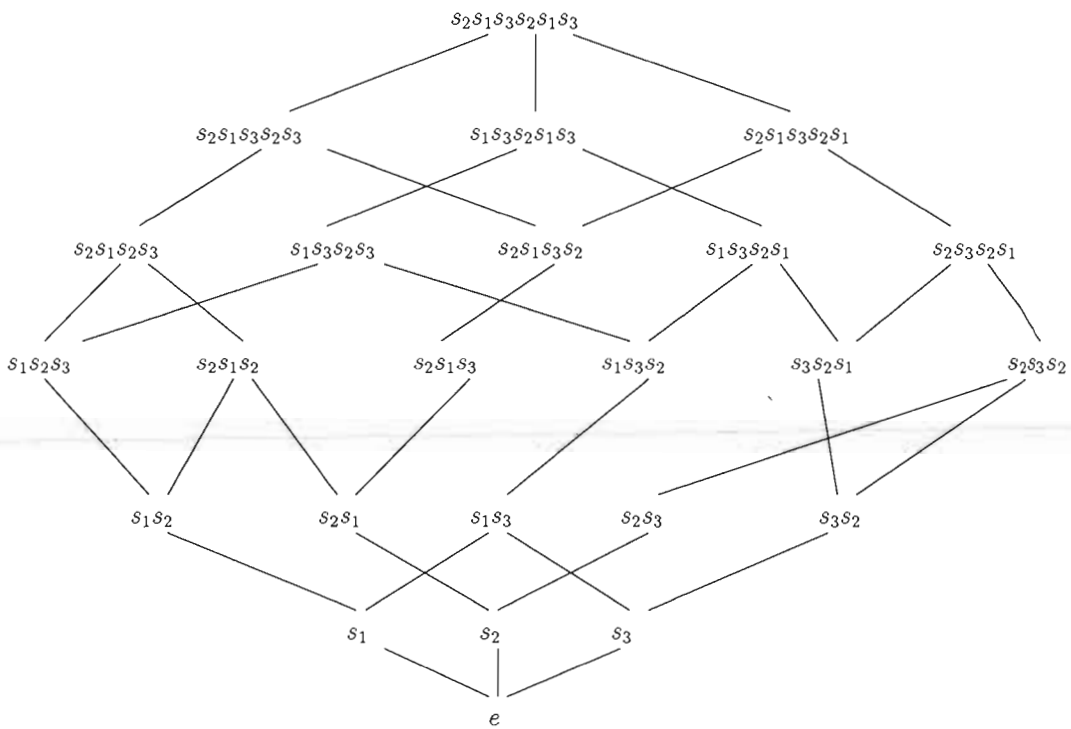


Figure 2.8 (S_4, \leq)

CHAPITRE III

LE TREILLIS CAMBRIAN

Nous allons maintenant aborder l'objet d'étude principal de ce mémoire : Le treillis Cambrian. Ce treillis est étroitement lié au treillis faible. Nous allons examiner une classe d'éléments particuliers dans les groupes de Coxeter, les éléments c -triés. Ces éléments ont été introduits par N. Reading dans les années 2000. Nous montrerons que la restriction de l'ordre faible à l'ensemble des éléments c -triés forme à nouveau un treillis. On l'appelle le *treillis Cambrian*. Nous allons donc débiter par l'étude des éléments c -triés. Ensuite nous démontrerons que l'ensemble des éléments c -triés, muni de l'ordre faible, forme le treillis Cambrian. Puis finalement, nous verrons que l'on peut aussi voir le treillis Cambrian comme le quotient du treillis faible.

3.1 Les éléments c -triés

3.1.1 Élément de Coxeter et orientation du graphe de Coxeter

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'on peut associer à un groupe de Coxeter W , son graphe de Coxeter Γ . Rappelons que c'est un graphe dont les sommets sont les générateurs simples de W . Il existe une arête entre s_1 et s_2 , deux sommets de Γ si et seulement si s_1 et s_2 ne commutent pas. On va maintenant fixer une orientation arbitraire sur Γ , que l'on notera $\vec{\Gamma}$, en orientant chaque arête.

Exemple 3.1.1.1. Soit $W = S_4 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = (s_1 s_3)^2 = (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_3)^3 = e \rangle$. La figure 3.1 donne deux exemples d'orientation de Γ .

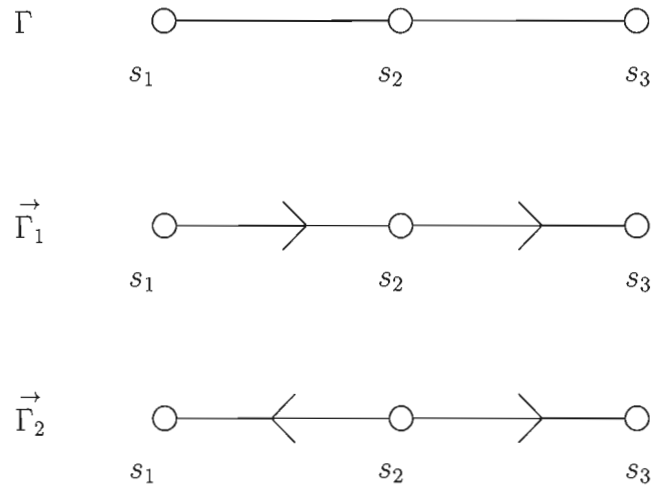


Figure 3.1 Deux orientations du graphe de S_4

Définition 3.1.1.2. Un *élément de Coxeter*, est un élément de W qui est le produit sans répétition de tous les éléments de S .

Par exemple, soit $W = S_5$ et $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, alors $c = s_3s_2s_1s_4$ et $c' = s_1s_2s_3s_4$ sont des éléments de Coxeter. Par contre, $c_1 = s_1s_2$ et $c_2 = s_3s_4s_3s_2s_1$ ne sont pas des éléments de Coxeter car, ils ne sont pas des produits sans répétition des éléments de S .

Il existe une bijection entre l'ensemble des éléments de Coxeter de W et l'ensemble des orientations du graphe de Coxeter associé à W .

Construction de la bijection :

Considérons (W, S) un système de Coxeter et la fonction f définie sur l'ensemble des orientations du graphe de Coxeter associé à W vers l'ensemble des éléments de Coxeter de W . Soit $\vec{\Gamma}$ une orientation du graphe de Coxeter, on dit que si une arête $\{s, t\} \in \vec{\Gamma}$ est orienté de s vers t , alors on aura s qui précède t dans l'expression réduite de l'élément de Coxeter $c = f(\vec{\Gamma})$. Observons que le nombre de sommets dans $\vec{\Gamma}$ correspond au nombre de générateurs simples de S . Tout comme le nombre de lettres dans c , aussi égale au nombre de générateurs simples de S . On a donc le même nombre d'éléments

dans $\vec{\Gamma}$ et dans c . A l'inverse, pour un élément de Coxeter $c \in W$ on aura que si s précède t dans l'expression réduite de c , alors l'arête $\{s, t\}$ est orienté de s vers t .

Par exemple, pour $W = S_4$, si $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, alors à l'élément de Coxeter $c = s_3s_1s_2$ on associe l'orientation $\vec{\Gamma}_1$ de la figure 3.2. Aussi, si $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et en considérant l'orientation du graphe $\vec{\Gamma}_2$ de la figure 3.2, on trouve l'élément de Coxeter associé $c = s_3s_2s_1s_4$.

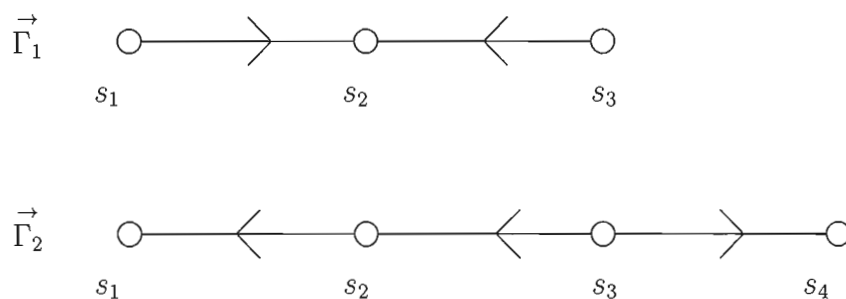


Figure 3.2 Deux orientations de graphe de Coxeter

Démontrons maintenant que la fonction f tel que construite ci-dessus est une bijection.

Proposition 3.1.1.3. *Soit W et Γ le graphe de Coxeter associé. La fonction f définie sur l'ensemble des orientations de Γ vers l'ensemble des éléments de Coxeter de W est une bijection.*

Démonstration. D'une part, soit $\vec{\Gamma}_1$ et $\vec{\Gamma}_2$ deux orientations différentes. On a alors au moins une paire de générateurs simples, s et t , qui n'ont pas la même orientation. Soit $s \rightarrow t$ pour $\vec{\Gamma}_1$ et $t \rightarrow s$ pour $\vec{\Gamma}_2$. Ainsi, en appliquant f , on obtient deux éléments de Coxeter différents. Pour c_1 , l'élément de Coxeter correspondant à $f(\vec{\Gamma}_1)$, s précède t alors que pour l'élément de Coxeter c_2 , correspondant à $f(\vec{\Gamma}_2)$, t précède s . On sait qu'un arête $\{s, t\} \in \Gamma$ représente une paire de générateurs simples qui ne commutent pas donc, s et t ne commutent pas. Comme s et t ne commutent pas, non seulement c_1 et c_2 n'ont pas la même expression réduite, mais c_1 est différent de c_2 . En effet, comme un élément de Coxeter est une permutation des éléments de S , on peut à partir d'une

expression réduite, effectuer des permutations aux lettres qui commutent et obtenir une autre expression réduite du même éléments. Ce qui n'est pas le cas ici, on ne pourra jamais obtenir c_2 à partir de c_1 car s et t ne commutent pas. Ainsi c_1 et c_2 ne sont pas le même éléments. La fonction f est donc injective. D'autre part, pour tout élément de Coxeter c , on a toujours une orientation du graphe Γ correspondant. Cela vient du fait qu'un générateur simple ne peut à la fois précéder et suivre un autre générateur. Ainsi, on peut toujours orienter une paire de générateurs simples, et ainsi obtenir une orientation du graphe. On obtient alors que f est surjective. D'où la bijection entre un élément de Coxeter c et une orientation de Γ . \square

Définition 3.1.1.4. Soit c un élément de Coxeter, on dit que $s \in S$ est initial dans c si s est la première lettre d'une expression réduite de c . De même, $s \in S$ est final dans c , si s est la dernière lettre d'une expression réduite de c .

Remarquons d'abord que si $s \in S$ est initial dans c , alors s est final dans scs et scs est un élément de Coxeter. Par exemple, soit $S = \{s, s_1, s_2, s_3\}$ et soit $c = ss_1s_2s_3$. Alors $scs = sss_1s_2s_3s = s_1s_2s_3s$ est bien une expression réduite qui est un produit sans répétition des éléments de S . Ainsi scs est un élément de Coxeter et on a bien que s est final dans scs .

Observons aussi que si s est initial dans c , alors sc est un élément de Coxeter du sous-groupe parabolique $W_{S \setminus \{s\}}$. Considérons $W = \langle s_1, s_2, \dots, s_k \rangle$ et soit $c = s'_1s'_2 \dots s'_k$, $s'_i \in S$ un élément de Coxeter de W . On a s'_1 initial dans c , alors

$$s'_1c = s'_1s'_1s'_2 \dots s'_k = s'_2 \dots s'_k$$

Comme $s'_2 \dots s'_k$ est une expression réduite qui est une permutation des éléments de $S \setminus \{s\}$, on a que s'_1c est un élément de Coxeter de $W_{S \setminus \{s'_1\}}$.

3.1.2 Définition d'un élément c -trié

Soit un mot réduit $a = s_1s_2 \dots s_n$, $s_i \in S$, on note alors $a^\infty = s_1 \dots s_n s_1 \dots s_n \dots$. Soit c un élément de Coxeter. Pour $I \subset S$, on note $c_{(I)}$ le sous-mot de c obtenu en considérant uni-

quement les générateurs simples de I . Par exemple, pour $W = S_5$ avec $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et $I = \{s_2, s_3\}$, si $c = s_1 s_3 s_1 s_2$, alors $c_{(I)} = s_3 s_2$. Remarquons que $c_{(I)}$ et c_I ne sont pas nécessairement égaux. Par exemple, soit $W = S_4$ avec $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $I = \{s_3\}$ et $c = s_1 s_2 s_3$. On a alors que $c_{(I)} = s_3$ et $c_I = e$.

Définition 3.1.2.1. Soit c un élément de Coxeter. On dit que $w \in W$ est un *élément c -trié* si w est un sous-mot de c^∞ , tel que $w = c_{(I_1)} c_{(I_2)} \dots c_{(I_k)}$ et si $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_k \neq \emptyset$ et $l(w) = \sum |I_j|$.

Exemple 3.1.2.2. Soient $W = D_2 = \langle s_0, s_1 \mid s_0^2 = s_1^2 = e, (s_0 s_1)^2 = e \rangle$ et $c = s_0 s_1$. On a alors $c^\infty = s_0 s_1 s_0 s_1 \dots$. Les éléments c -triés sont :

$e = c_{(\emptyset)}$, $s_0 = c_{(\{s_0\})}$, $s_1 = c_{(\{s_1\})}$, $s_0 s_1 = c$, $s_0 s_1 s_0 = c_{(\{s_0 s_1\})} c_{(\{s_0\})}$, car $\{s_0 s_1\} \supseteq \{s_0\}$ et $l(s_0 s_1 s_0) = 2 + 1 = |\{s_0 s_1\}| + |\{s_0\}|$, puis finalement $s_0 s_1 s_0 s_1 = c_{(\{s_0 s_1\})} c_{(\{s_0 s_1\})}$, car $\{s_0 s_1\} \supseteq \{s_0 s_1\}$ et $l(s_0 s_1 s_0 s_1) = 2 + 2 = |\{s_0 s_1\}| + |\{s_0 s_1\}|$.

Par contre, $s_1 s_0 = c_{(\{s_1\})} c_{(\{s_0\})}$ n'est pas un élément c -trié. En effet, $\{s_1\} \not\supseteq \{s_0\}$.

Voici un autre exemple : Soient $W = S_3 = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = e, (s_1 s_2)^3 = e \rangle$ et $c = s_1 s_2$. On a alors $c^\infty = s_1 s_2 s_1 s_2 \dots$. Les éléments c -triés sont :

$e = c_{(\emptyset)}$, $s_1 = c_{(\{s_1\})}$, $s_2 = c_{(\{s_2\})}$, $s_1 s_2 = c$, $s_1 s_2 s_1 = w_0 = c_{(\{s_1 s_2\})} c_{(\{s_1\})}$, car $\{s_1 s_2\} \supseteq \{s_1\}$ et $l(s_1 s_2 s_1) = 2 + 1 = |\{s_1 s_2\}| + |\{s_1\}|$.

Or, $s_2 s_1 = c_{(\{s_2\})} c_{(\{s_1\})}$ n'est pas un élément c -trié. En effet, $\{s_2\} \not\supseteq \{s_1\}$.

3.1.3 Résultats concernant les éléments c -triés

Remarques :

1. Pour tout élément de Coxeter c , on a que e est c -trié. En effet, on a toujours $e = c_{(\emptyset)}$.
2. L'ensemble des éléments c -triés ne dépend pas du choix de l'expression réduite choisie pour c . Comme un élément de Coxeter est une permutation des éléments de S , si on considère deux expressions réduites de c , on peut à partir d'une expression réduite, effectuer des permutations aux lettres qui commutent et obtenir l'autre expression réduite.

3. Pour deux éléments de Coxeter $c, c' \in W$, distincts, on trouve des ensembles c -triés et c' -triés différents. En particulier, on trouve l'élément c pour l'ensemble des c -triés et on trouve l'élément c' pour l'ensemble des c' -triés. Or c' n'est pas c -trié. Par exemple, soit $W = S_n$ et deux éléments de Coxeter différents c et c' . On peut supposer sans perte de généralité que $c = s_1 s_2 \dots s_n$ et $c' = s_2 s_1 s_3 \dots s_n$, car $s_1 s_2 \neq s_2 s_1$. On a alors que $s_1 s_2 \dots s_n$ est c -trié. Par contre $s_2 s_1 s_3 \dots s_n = c_{(s_2)} c_{(s_1 s_3 \dots s_n)}$ et $\{s_2\} \subset \{s_1 s_3 \dots s_n\}$, ce qui fait que c' n'est pas c -trié. Comme $c \neq c'$ et que c' n'est pas c -trié, l'ensemble des éléments c -triés n'est pas le même que l'ensemble des éléments c' -triés.

Illustrons la deuxième remarque avec un exemple.

Exemple 3.1.3.1. Soit $W = S_4$ avec $c = s_2 s_1 s_3 = s_2 s_3 s_1$. Ce sont bien deux expressions réduites de c car $s_1 s_3 = s_3 s_1$. On ne peut pas permuter s_2 et s_1 pour avoir $c = s_2 s_1 s_3 = s_1 s_2 s_3$, car $s_1 s_2 \neq s_2 s_1$. Pour l'expression réduite $s_2 s_1 s_3$, on trouve entre autre les c -triés suivants :

$$e, s_1, s_2, s_3, s_2 s_1, s_2 s_3, s_3 s_1, s_2 s_1 s_3 = c, s_2 s_3 s_2 = c_{(\{s_2 s_3\})} c_{(\{s_2\})}, s_2 s_1 s_2 = c_{(\{s_2 s_1\})} c_{(\{s_2\})}$$

Par contre, nous n'admettons pas

$$s_3 s_2, s_1 s_2 \text{ et } s_1 s_3 s_2 = c_{(\{s_1 s_3\})} c_{(\{s_2\})} \text{ car } \{s_2\} \not\subseteq \{s_1 s_3\}$$

Pour l'expression réduite $s_2 s_3 s_1$, on trouve en particulier les c -triés suivants :

$$e, s_1, s_2, s_3, s_2 s_3, s_2 s_1, s_1 s_2, s_2 s_3 s_1 = c, s_2 s_3 s_2 = c_{(\{s_2 s_3\})} c_{(\{s_2\})}, s_2 s_1 s_2 = c_{(\{s_2 s_1\})} c_{(\{s_2\})}$$

et nous n'admettons pas

$$s_3 s_2, s_1 s_2, s_3 s_1 s_2 = c_{(\{s_3 s_1\})} c_{(\{s_2\})}, \text{ car } \{s_2\} \not\subseteq \{s_3 s_1\}$$

Comme $s_1 s_3 = s_3 s_1$, $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$, et que dans les deux cas on a $\{s_2\} \not\subseteq \{s_1 s_3\}$, $\{s_2\} \not\subseteq \{s_3 s_1\}$, $\{s_1\} \subseteq \{s_1 s_3\}$ et $\{s_1\} \subseteq \{s_3 s_1\}$, on trouve bien le même ensemble d'éléments c -triés. En fait, l'ensemble des éléments c -triés ne dépend pas du choix de l'expression réduite choisie pour c , il dépend de l'inclusion des I_i et des relations sur les s_i .

Ainsi, pour tout (W, S) et $s_1 s_2 \dots s_n$ et $s'_1 s'_2, \dots, s'_n$ deux expressions réduites de c , les éléments $s_i \in S$ qui commutent dans c , commuteront aussi dans les éléments $s_1 \dots s_n$ -triés et $s'_1 \dots s'_n$ -triés. De plus, comme les c -triés dépendent de l'inclusion des I_i , on trouvera bien les même c -triés pour deux expressions réduites de c .

Exemple 3.1.3.2. Pour illustrer la troisième remarque, considérons le diagramme de (S_3, \leq) illustré à la figure 3.3(a). C'est le treillis faible de S_3 . Par restriction de l'ordre faible au sous ensemble des éléments c -triés, on obtient les graphes suivants : Le graphe (b) pour $c = s_1 s_2$ et le graphe (c) pour $c = s_2 s_1$, deux diagrammes différents illustrés à la figure 3.3.

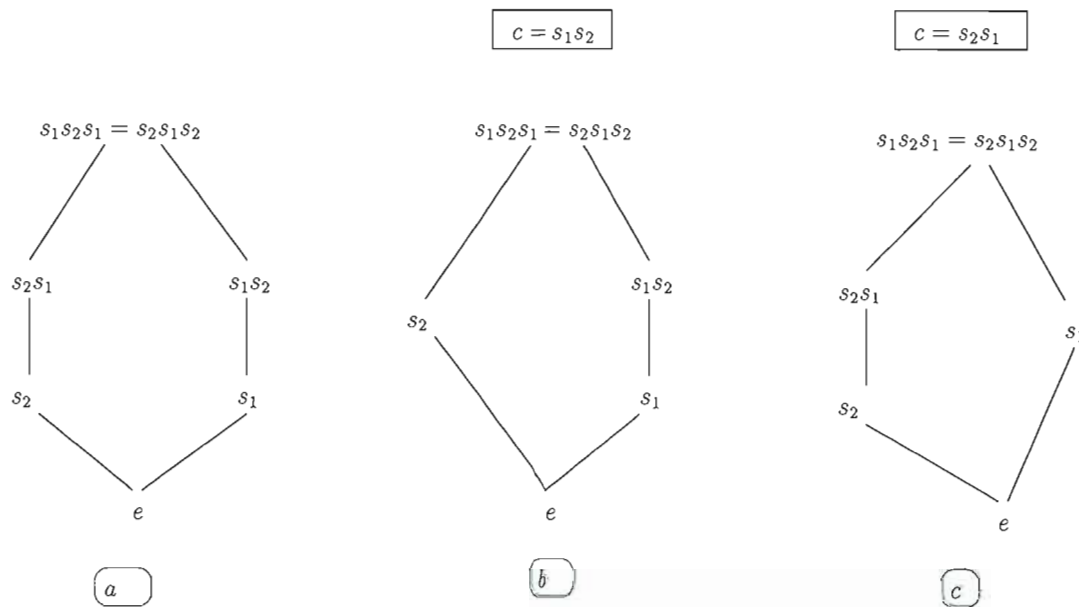


Figure 3.3 Treillis faible de S_3 et deux sous-treillis de S_3

En examinant les diagrammes (b) et (c), on observe aussi que l'ensemble des $s_1 s_2$ -triés et l'ensemble des $s_2 s_1$ -triés pour S_3 , forment des sous-treillis de l'ordre faible. En effet, on a bien que pour tout couple d'éléments des graphes (b) et (c), il existe une unique borne inférieure et une unique borne supérieure. On veut maintenant généraliser

ce résultat à l'ensemble des groupes de Coxeter. Nous allons montrer que pour tout groupe de Coxeter, avec un élément de Coxeter c donné, par restriction à l'ordre faible, l'ensemble des éléments c -triés forme un demi-treillis inférieur. On le nomme le *demi-treillis inférieur Cambrian*. Nous allons débiter par deux caractérisations importantes des éléments c -triés.

Lemme 3.1.3.3. *Soit c un élément de Coxeter avec $s \in S$ initial dans c et $w \in W$ tel que $l(sw) > l(w)$. Alors, w est c -trié si et seulement si w est sc -trié $\in W_{S \setminus \{s\}}$.*

Avant d'en faire la démonstration, remarquons que si s est initial dans c , on peut écrire $c = sc_{S \setminus \{s\}}$ et $scs = c_{S \setminus \{s\}}s$.

Démonstration. Soit $c = ss_1 \dots s_n$ et w un élément c -trié tel que $l(sw) > l(w)$. On peut écrire $w = c_{(K_1)} \dots c_{(K_p)}$. Remarquons qu'on peut aussi écrire $w = (sc_{S \setminus \{s\}})_{(K_1)} \dots (sc_{S \setminus \{s\}})_{(K_p)}$. Or, comme $l(sw) > l(w)$, s n'est pas initial dans w . Ainsi, $s \notin K_1$ et donc $s \notin K_i$, $1 \leq i \leq p$, car $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_p$. On peut donc écrire $w = (sc)_{(K_1)} \dots (sc)_{(K_p)}$ et on a que $w \in W_{S \setminus \{s\}}$. On conclut donc que w est sc -trié.

Réciproquement, soit $w \in W_{S \setminus \{s\}}$, un élément sc -trié. On a donc $w = (sc)_{(L_1)} \dots (sc)_{(L_r)}$. Or, on a que $s \notin L_i$ pour $1 \leq i \leq r$. On peut alors écrire $w = c_{(L_1)} \dots c_{(L_r)}$ qui est bien un sous-mot de c^∞ mais dont $s \notin L_i$. Ce qui fait de w un c -trié même si s n'apparaît pas dans w . \square

Lemme 3.1.3.4. *Soit c un élément de Coxeter avec $s \in S$ initial dans c et $w \in W$ tel que $l(sw) < l(w)$. Alors, w est c -trié si et seulement si sw est scs -trié.*

Démonstration. Soit w un élément c -trié. On a que s est initial dans c et comme $l(sw) < l(w)$, s est initial dans w . On a donc $w = c_{(K_1)} \dots c_{(K_p)}$. On peut donc, par la remarque précédente écrire $w = (sc_{S \setminus \{s\}})_{(K_1)} \dots (sc_{S \setminus \{s\}})_{(K_p)}$. Ainsi $sw = s(sc_{S \setminus \{s\}})_{(K_1)} \dots (sc_{S \setminus \{s\}})_{(K_p)}$. On écrit donc $sw = (c_{S \setminus \{s\}})_{(K_1)} \dots (sc_{S \setminus \{s\}})_{(K_p)}$. Ce qui fait qu'on peut écrire $sw = (c_{S \setminus \{s\}}s)_{(K_1)} (c_{S \setminus \{s\}}s)_{(K_2)} \dots (c_{S \setminus \{s\}})_{(K_p)}$. Comme on a $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_p$, alors sw est scs -trié. Réciproquement, soit sw un scs -trié. On a alors $sw = scs_{(K_1)} \dots scs_{(K_p)} = (c_{S \setminus \{s\}}s)_{(K_1)} \dots (c_{S \setminus \{s\}}s)_{(K_p)}$. Ainsi, on a

$w = ssw = s(c_{S \setminus \{s\}})_{(K_1)} \dots (c_{S \setminus \{s\}})_{(K_p)} = (sc_{S \setminus \{s\}})_{(K_1)} \dots (sc_{S \setminus \{s\}})_{(K_p)}$. On a donc bien que w est c -trié car $c = sc_{S \setminus \{s\}}$ et $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_p$. \square

Ces deux caractérisations des éléments c -trié sont importantes puisqu'elles nous permettront d'utiliser des preuves par récurrence. On peut procéder par récurrence sur la longueur de w , en utilisant le premier lemme, ou par récurrence sur le rang de W en utilisant le deuxième.

Voyons maintenant quelques résultats concernant les éléments c -triés préliminaires à la démonstration qu'ils forment un sous-treillis du treillis faible.

Lemme 3.1.3.5. *Soit $c \in W$, un élément de Coxeter, soit $I \subseteq S$ et $c_{(I)}$, l'élément de Coxeter obtenu par restriction. Si $w \in W_I$ est $c_{(I)}$ -trié, alors w est un élément c -trié de W .*

Démonstration. Soit $c_{(I)}^\infty = s_1 \dots s_m s_1 \dots s_m \dots$ pour $s_i \in I$ et supposons que $w \in W_I$ est $c_{(I)}$ -trié. On peut donc écrire $w = c_{(I)}_{(K_1)} \dots c_{(I)}_{(K_p)}$ tel que $I \supseteq K_1 \supseteq \dots \supseteq K_p \neq \emptyset$. Comme $c_{(I)}$ est obtenu par restriction, soit c l'élément de Coxeter obtenu en ajoutant les lettres appartenant à $S \setminus I$. On peut aussi écrire $w = c_{(K_1)} \dots c_{(K_p)}$, car $I \supseteq K_1$. En effet, w est c -trié car les $c_{(K_i)}$ sont des sous-mots de $c_{(I)}^\infty$. Comme $c_{(I)}$ est un sous-mot de c , les $c_{(K_i)}$ sont donc des sous-mots de c^∞ . Puisque $I \supseteq K_1 \supseteq \dots \supseteq K_p \neq \emptyset$ on a bien $c_{(K_j)} = c_{(I)}_{(K_j)}$, $1 \leq j \leq p$. D'où w est bien un élément c -trié de W . \square

Exemple 3.1.3.6. Soit $W = S_4$ avec $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ et $I = \{s_2, s_3\}$ et soit $c = s_1 s_2 s_3$ et $c' = s_2 s_3$. On a bien que $w = s_2 s_3 s_2 \in W_I$ est un élément c' -trié car $w = c_{(s_2 s_3)} c_{(s_2)}$ et $w = s_2 s_3 s_2$ est aussi un élément c -trié.

Lemme 3.1.3.7. *Soit $c \in W$, un élément de Coxeter, soit $I \subseteq S$ et $c_{(I)}$, l'élément de Coxeter obtenu par restriction. Si w est c -trié, alors w_I est $c_{(I)}$ -trié.*

Démonstration. Soit $I \subseteq S$ et soit $c^\infty = s_1 \dots s_n s_1 \dots s_n \dots$, pour $s_i \in S$ et supposons que $w \in W$ est c -trié. On peut donc écrire $w = c_{(K_1)} \dots c_{(K_p)}$ tel que $K_1 \supseteq \dots \supseteq K_p \neq \emptyset$. On

obtient alors, par restriction à I , $w_I = c_{(I)(K_1)} \dots c_{(I)(K_p)}$, où $c_{(I)}$ est l'élément de Coxeter obtenu par restriction en enlevant les lettres de $S \setminus I$. On a aussi que w_I appartient à W_I . Comme $K_1 \supseteq \dots \supseteq K_p \neq \emptyset$, on a bien que w_I est un élément $c_{(I)}$ -trié. \square

3.2 Le cas général : Le demi-treillis inférieur Cambrian

Posons $\text{Camb}_c(W) :=$ l'ensemble des éléments $w \in W$ qui sont c -triés. Nous allons maintenant étudier la restriction de l'ordre faible à $\text{Camb}_c(W)$. On a immédiatement que $\text{Camb}_c(W)$ est un ensemble partiellement ordonné. En effet, toute restriction d'un ordre à un sous-ensemble d'un ensemble partiellement ordonné en fait un ensemble partiellement ordonné. Comme $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné et puisque $\text{Camb}_c(W)$ est un sous-ensemble de W , il ne reste plus qu'à démontrer que l'intersection de deux éléments c -triés est aussi un élément c -trié pour obtenir que $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ forme un sous-demi-treillis inférieur de (W, \leq) .

Notons d'abord le résultat suivant :

Proposition 3.2.0.8. *Soit $w \in W$ et $w_I \in W_I$. L'application $w \mapsto w_I$ est un morphisme de treillis. On a donc que $(x \wedge y)_I = x_I \wedge y_I$ et $(x \vee y)_I = x_I \vee y_I$*

La démonstration de ce résultat utilise la notion des systèmes de racine sur un groupe de Coxeter. Pour consulter cette démonstration voir proposition 6.3 [13].

Théorème 3.2.0.9. *Soit $x, y \in \text{Camb}_c(W)$, alors $x \wedge y \in \text{Camb}_c(W)$*

Démonstration. Soit $x, y \in \text{Camb}_c(W)$, montrons par récurrence sur la longueur de x , que $x \wedge y \in \text{Camb}_c(W)$. On a $l(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$, donc on a clairement $e \wedge y = e \in \text{Camb}_c(W)$. Soit maintenant s initial dans c . Rappelons qu'un élément c -trié x s'écrit $x = c_{(K_1)} \dots c_{(K_p)}$ avec $K_1 \supseteq \dots \supseteq K_p \neq \emptyset$. Donc $x \in W_{K_1}$. Si s est initial dans c , alors soit s est initial dans x et $s \in K_1$ ou sinon $s \notin K_1$ et donc $x \in W_{S \setminus \{s\}}$.

1. Si $l(sx) > l(x)$ et $l(sy) > l(y)$, alors on a que $x, y \in W_{S \setminus \{s\}}$. En effet, s est initial dans c mais s n'est pas initial dans x et y , deux éléments c -triés. Ainsi par le

rappel fait ci-haut, on obtient bien que $x, y \in W_{S \setminus \{s\}}$. Donc, par récurrence sur le rang de W , $x \wedge y$ est sc -trié de $W_{S \setminus \{s\}}$ et par le lemme 3.1.3.5 $x \wedge y$ est un c -trié.

2. Si $l(sx) < l(x)$ et $l(sy) > l(y)$, alors on a que $y \in W_{S \setminus \{s\}}$. Comme on a que $W_{S \setminus \{s\}} \subseteq W$, on peut considérer le morphisme de treillis suivant : $f : W \rightarrow W$ tel que $f(w) = w_{S \setminus \{s\}}$. On a donc, $f(x \wedge y) = (x \wedge y)_{S \setminus \{s\}} = x_{S \setminus \{s\}} \wedge y_{S \setminus \{s\}} = x_{S \setminus \{s\}} \wedge y$, car $y \in W_{S \setminus \{s\}}$. Ensuite par le lemme 3.1.3.7 on obtient que $x_{S \setminus \{s\}}$ est un sc -trié. Finalement on applique le cas (1), et on obtient que $x \wedge y$ est un c -trié.
3. Si $l(sx) > l(x)$ et $l(sy) < l(y)$, alors on applique le même raisonnement.
4. Si $l(sx) < l(x)$ et $l(sy) < l(y)$, comme $x, y \in \text{Camb}_c(W)$, par la caractérisation 3.1.3.4 sx et sy sont scs -triés. Par récurrence sur la longueur, $sx \wedge sy$ est scs -trié. Or, on a que $s(sx \wedge sy) = ssx \wedge ssy = x \wedge y$. Puisque l'on a $l(sx \wedge sy) < l(s(sx \wedge sy))$ et que $sx \wedge sy$ est scs -trié, par le lemme 3.1.3.4 $s(sx \wedge sy) = x \wedge y$ est c -trié.

□

On obtient donc que la restriction de l'ordre faible à l'ensemble des éléments c -triés, $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ forme un sous demi-treillis inférieur du demi-treillis inférieur faible. C'est le *demi-treillis inférieur Cambrian*. Voyons un exemple :

Exemple 3.2.0.10. La figure 3.4 représente le treillis faible pour S_4 . On a représenté les éléments c -triés, pour $c = s_2s_1s_3$, en les encadrant. On observe bien que pour deux éléments c -triés, l'intersection existe et est unique. Ainsi, à la figure 3.5, on a représenté sous forme d'un diagramme, les éléments c -triés de S_4 , comparés avec l'ordre faible. Le demi-treillis inférieur Cambrian de S_4 est un sous demi-treillis inférieur du demi-treillis inférieur faible.

3.2.1 La projection π_{\downarrow}^c

Nous allons voir dans la prochaine section qu'on peut également voir la restriction de l'ordre faible à l'ensemble des éléments c -triés comme le quotient du demi-treillis inférieur faible par une relation d'équivalence. Pour démontrer ce beau résultat, nous

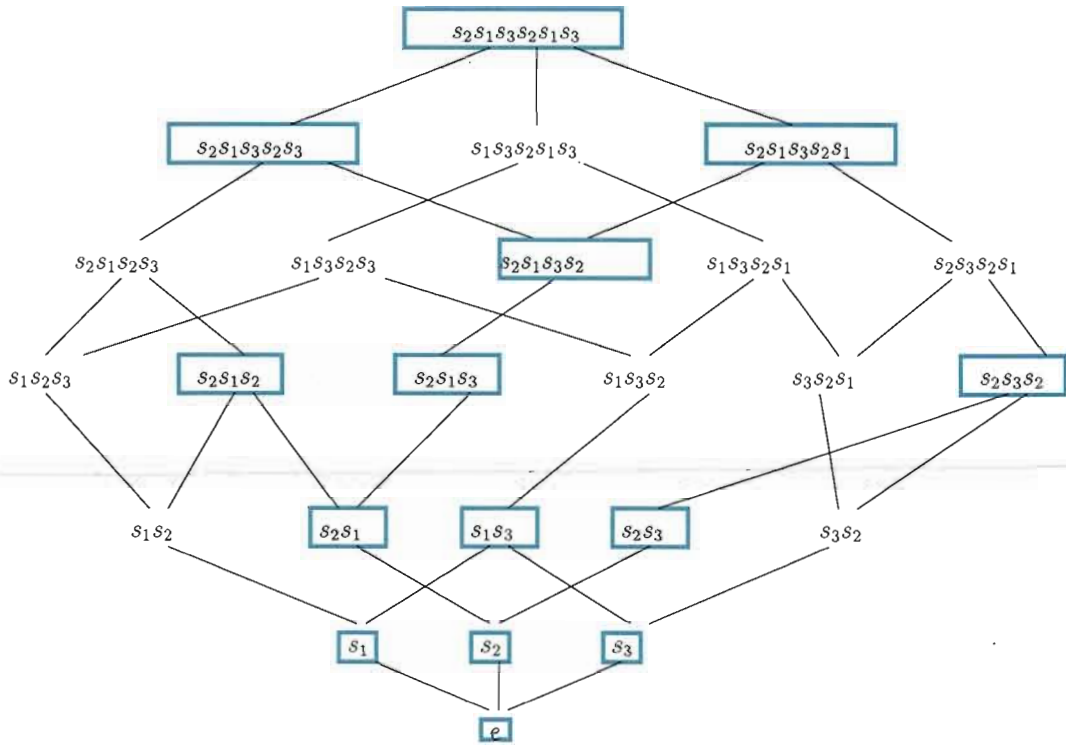


Figure 3.4 Treillis faible de S_4 avec éléments $s_2s_1s_3$ -triés

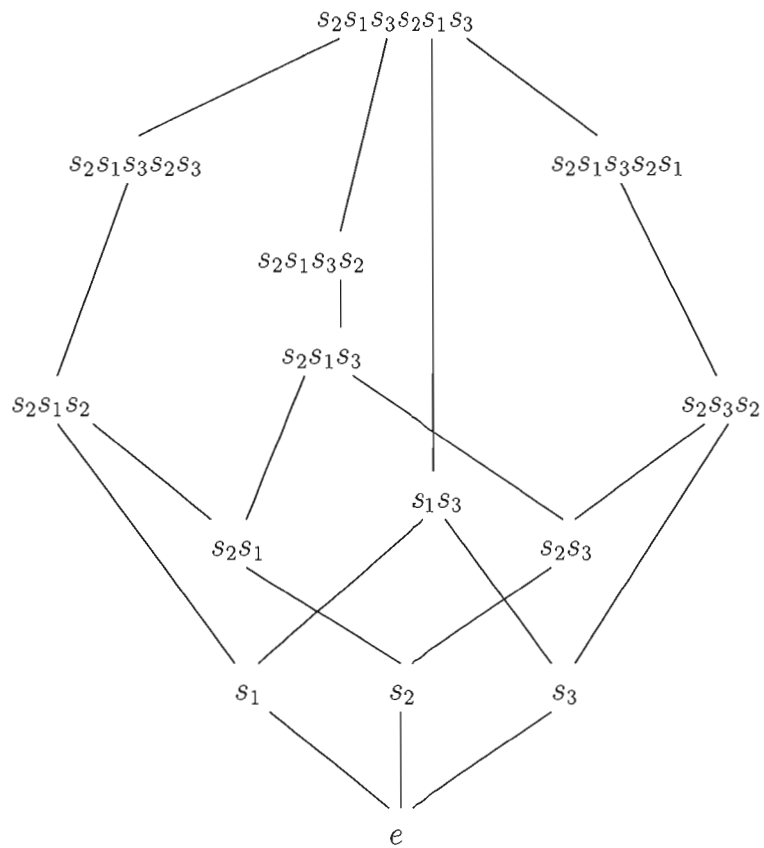


Figure 3.5 Le demi-treillis inférieur Cambrian de S_4 , pour $c = s_2s_1s_3$

allons premièrement construire une fonction qui à un élément w de W , associe le plus grand élément c -trié $g \in \text{Camb}_c(W)$ tel que $g \leq w$.

Soit c un élément de Coxeter. On définit la fonction $\pi_{\downarrow}^c : W \rightarrow W$ de façon récursive comme suit :

1. $\pi_{\downarrow}^c(e) = e$
2. Sinon, pour toute lettre initiale s de c , on définit

$$\pi_{\downarrow}^c(w) = \begin{cases} s \cdot \pi_{\downarrow}^{scs}(sw) & \text{si } l(sw) < l(w) \\ \pi_{\downarrow}^{sc}(w_{S \setminus \{s\}}) & \text{si } l(sw) > l(w) \end{cases}$$

Nous montrerons au théorème 3.2.1.3 que l'image de $\pi_{\downarrow}^c(W) = \text{Camb}_c(W)$. Voyons un exemple pour illustrer cette projection sur $\text{Camb}_c(W)$.

Exemple 3.2.1.1. 1. Considérons l'élément de coxeter $c = s_2s_1s_3$ et $w = s_1s_2$.

Comme s_2 est initial dans c , on a

$$\begin{aligned} \pi_{\downarrow}^{s_2s_1s_3}(s_1s_2) &= \pi_{\downarrow}^{s_1s_3}((s_1s_2)_{\{s_1, s_3\}}) \text{ car, } l(s_2s_1s_2) > l(s_1s_2) \\ &= \pi_{\downarrow}^{s_1s_3}(s_1) \text{ car, } s_1s_2_{\{s_1, s_3\}} = s_1 \\ &= s_1 \cdot \pi_{\downarrow}^{s_1s_1s_3s_1}(s_1s_1) \text{ car, } l(s_1s_1) < l(s_1) \\ &= s_1 \cdot e = s_1 \end{aligned}$$

Ainsi on a que $\pi_{\downarrow}^{s_2s_1s_3}(s_1s_2) = s_1$.

2. Consirérons maintenant $w = s_3s_2$, on a alors,

$$\begin{aligned} \pi_{\downarrow}^{s_2s_1s_3}(s_3s_2) &= \pi_{\downarrow}^{s_1s_3}((s_3s_2)_{\{s_1, s_3\}}) \text{ car, } l(s_2s_3s_2) > l(s_3s_2) \\ &= \pi_{\downarrow}^{s_1s_3}(s_3) \text{ car, } s_3s_2_{\{s_1, s_3\}} = s_3 \\ &= \pi_{\downarrow}^{s_3}((s_3)_{s_3}) \text{ car, } l(s_1s_3) > l(s_3) \\ &= \pi_{\downarrow}^{s_3}(s_3) \text{ car, } s_3s_3 = s_3 \\ &= s_3 \cdot \pi_{\downarrow}^{s_3s_3s_3}(s_3s_3) \text{ car, } l(s_3s_3) < l(s_3) \\ &= s_3 \cdot \pi_{\downarrow}^{s_3}(e) \\ &= s_3 \end{aligned}$$

On obtient donc que $\pi_{\downarrow}^{s_2s_1s_3}(s_3s_2) = s_3$

Maintenant que nous avons vu comment calculer l'image d'un élément de W par la fonction π_{\downarrow}^c , il nous reste à montrer que π_{\downarrow}^c est bien une projection sur $\text{Camb}_c(W)$, c'est-à-dire que $\pi_{\downarrow}^c(W) = \text{Camb}_c(W)$. Par contre, pour démontrer ce résultat, nous avons besoin de proposition suivante :

Proposition 3.2.1.2. *Soit c un élément de Coxeter. Si s est initial dans c , $x \in W_{S \setminus \{s\}}$ est sc -trié et $s \vee x$ existe alors, $s \vee x$ est c -trié.*

La démonstration s'effectue cas par cas. Comme cette preuve est longue et sort du cadre de ce mémoire, nous avons choisi de ne pas la présenter. Nous vous référons donc au lemme 2.9, [11].

Théorème 3.2.1.3. *La fonction π_{\downarrow}^c est une projection de W sur $\text{Camb}_c(W)$, qui envoie w sur l'unique élément c -trié de longueur maximale $\pi_{\downarrow}^c(w)$ tel que $\pi_{\downarrow}^c(w) \leq w$.*

Démonstration. Nous allons premièrement démontrer que π_{\downarrow}^c envoie w sur l'unique élément c -trié de longueur maximale $\pi_{\downarrow}^c(w)$ tel que $\pi_{\downarrow}^c(w) \leq w$ par double récurrence sur la longueur de w et sur le rang de W .

Si $l(w) = 0$ ou $rg(W) = 1$, alors $w = e$. On a bien que e est c -trié et il n'existe pas d'autres éléments c -trié v tel que $v \leq e$. Ainsi $\pi_{\downarrow}^c(e) = e$ est bien l'unique c -trié de longueur maximale. Supposons maintenant que $l(w) > 0$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, si z est tel que $l(z) < l(w)$, on a que $\pi_{\downarrow}^c(z)$ est l'unique élément c -trié de longueur maximale tel que $\pi_{\downarrow}^c(z) \leq z$. Soit s une lettre initial dans c .

1. Si $l(sw) < l(w)$, alors par récurrence sur la longueur de w , $\pi_{\downarrow}^{scs}(sw)$ est scs -trié et est l'unique élément de longueur maximale tel que $\pi_{\downarrow}^{scs}(sw) \leq sw$. On obtient donc, par le corollaire 2.2.2.4 que $s \cdot \pi_{\downarrow}^{scs}(sw) \leq ssw = w$. De plus, on a que $s \cdot \pi_{\downarrow}^{scs}(sw)$ est c -trié par le lemme 3.1.3.4. En effet, on a $l(sw) < l(w)$ tel que $\pi_{\downarrow}^{scs}(sw)$ est scs -trié. Ainsi $\pi_{\downarrow}^c(w) = s \cdot \pi_{\downarrow}^{scs}(sw)$ est bien un élément c -trié plus petit que w . Voyons maintenant que s'il existe un élément c -trié x tel que $x \leq w$, alors on aura $x \leq \pi_{\downarrow}^c(w)$.

Soit x un élément c -trié tel que $x \leq w$. On a deux cas : soit $l(sx) < l(x)$ ou soit

$l(sx) > l(x)$.

Supposons que $l(sx) < l(x)$. On a alors que $sx \leq sw$ et que sx est un scs -trié par la caractérisation 3.1.3.4. Ainsi on obtient que $sx \leq \pi_{\downarrow}^{scs}(sw)$, par maximalité de $\pi_{\downarrow}^{scs}(sw)$. Ainsi, $x = sxs \leq s \cdot \pi_{\downarrow}^{scs}(sw) = \pi_{\downarrow}^c(w)$, par corollaire 2.2.2.4. On conclut que $x \leq \pi_{\downarrow}^c(w)$, d'où la maximalité de $\pi_{\downarrow}^c(w)$.

Dans le cas où $l(sx) > l(x)$, on obtient par la caractérisation des éléments c -triés 3.1.3.3, que x est un sc -trié de $W_{S \setminus \{s\}}$. Or, comme on a $s \leq w$ et $x \leq w$, $s \vee x$ existe. Ainsi, par la proposition 3.2.1.2 $s \vee x$ est c -trié. on obtient que $s \vee x \leq w$, car $s \vee x$ est la plus petite des bornes supérieures. On a donc $s(s \vee x) \leq sw$, ce qui implique que $s(s \vee x) \leq \pi_{\downarrow}^{scs}(sw)$, par maximalité de $\pi_{\downarrow}^{scs}(sw)$. D'où on obtient $s \vee x \leq s(\pi_{\downarrow}^{scs}(sw))$. Or, $s(\pi_{\downarrow}^{scs}(sw)) = \pi_{\downarrow}^c(w)$ par définition de π_{\downarrow}^c . Ainsi $s \vee x \leq \pi_{\downarrow}^c(w)$. Comme on a que $x \leq s \vee x$, on a bien $x \leq \pi_{\downarrow}^c(w)$.

2. Si $l(sw) > l(w)$, on obtient alors par le lemme 3.1.3.3 que pour un élément c -trié x tel que $x \leq w$, x est sc -trié de $W_{S \setminus \{s\}}$. On a donc en particulier que $x \leq w_{S \setminus \{s\}}$. Ainsi, par récurrence sur le rang de W , on a $\pi_{\downarrow}^c(w) = \pi_{\downarrow}^{sc}(w_{S \setminus \{s\}})$ est l'unique élément c -trié de longueur maximale tel que $\pi_{\downarrow}^c(w) \leq w$.

De plus, π_{\downarrow}^c n'est clairement pas une fonction injective, mais elle est surjective. En effet, pour tout élément c -trié z appartenant à l'image de π_{\downarrow}^c , il existe toujours $w \in W$ tel que $\pi_{\downarrow}^c(w) = z$. En effet, on prend $w = z \in W$. On a donc bien que $\pi_{\downarrow}^c(W) = \text{Camb}_c(W)$. \square

Ce théorème montre que l'image de $\pi_{\downarrow}^c(W)$ est $\text{Camb}_c(W)$ et que π_{\downarrow}^c forme une projection bien définie qui envoie $w \in W$ sur le c -trié de longueur maximale qui est plus petit que w . De plus on obtient que $\pi_{\downarrow}^c(w) = w$ si et seulement si w est c -trié. Illustrons la fonction π_{\downarrow}^c avec un exemple :

Exemple 3.2.1.4. Posons $c = s_2s_1s_3$. La figure 3.6 représente le treillis faible de S_4 , où on a encadré les éléments c -triés. On a ensuite regroupé ensemble, par couleurs, les éléments de S_4 qui sont envoyés par π_{\downarrow}^c sur le même c -trié. Par exemple, $\pi_{\downarrow}^c(s_1) = \pi_{\downarrow}^c(s_1s_2) = \pi_{\downarrow}^c(s_1s_2s_3) = s_1$, ainsi s_1, s_1s_2 et $s_1s_2s_3$, sont regroupés ensemble. De plus, on observe sur ce diagramme que π_{\downarrow}^c envoie bien $w \in S_4$ sur l'élément c -trié de longueur

maximale plus petit que lui.

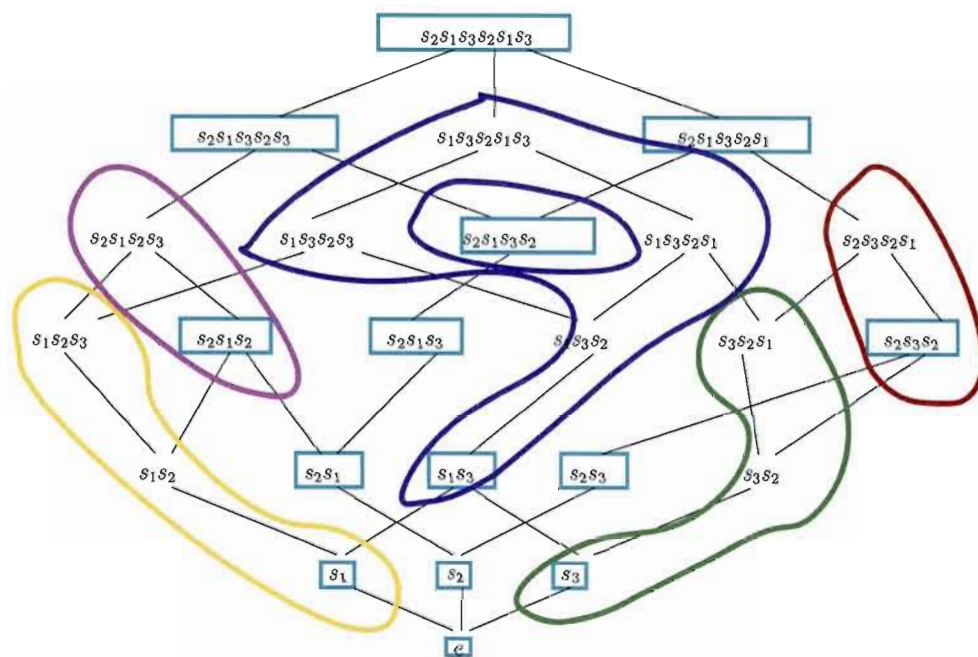


Figure 3.6 Treillis faible de S_4

Continuons l'étude de cette projection en démontrant que π_{\downarrow}^c est un morphisme de demi-treillis inférieur.

Théorème 3.2.1.5. $\pi_{\downarrow}^c : (W, \leq) \rightarrow (Camb_c(W), \leq)$ est un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés.

Démonstration. π_{\downarrow}^c est un morphisme d'ensemble partiellement ordonné si π_{\downarrow}^c préserve l'ordre. Ainsi, soit $x, y \in W$ tel que $x \leq y$. On veut montrer que $\pi_{\downarrow}^c(x) \leq \pi_{\downarrow}^c(y)$. Supposons que $x \leq y$. Par le lemme précédent $\pi_{\downarrow}^c(x)$ est c -trié tel que $\pi_{\downarrow}^c(x) \leq x$ et pour tout v c -trié, tel que $v \leq x$ on a $v \leq \pi_{\downarrow}^c(x)$. De même pour y , $\pi_{\downarrow}^c(y)$ est c -trié tel que $\pi_{\downarrow}^c(y) \leq y$ et pour tout v c -trié, tel que $v \leq y$, on a $v \leq \pi_{\downarrow}^c(y)$. On obtient donc que $\pi_{\downarrow}^c(x) \leq x \leq y$. Ainsi, $\pi_{\downarrow}^c(x)$ est un c -trié tel que $\pi_{\downarrow}^c(x) \leq y$. Donc $\pi_{\downarrow}^c(x) \leq \pi_{\downarrow}^c(y)$, par maximalité de $\pi_{\downarrow}^c(y)$. Ainsi, la projection π_{\downarrow}^c préserve bien l'ordre. \square

Théorème 3.2.1.6. $\pi_{\downarrow}^c : (W, \leq) \rightarrow (\text{Camb}_c(W), \leq)$ est un morphisme de demi-treillis inférieur.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\pi_{\downarrow}^c(x \wedge y) = \pi_{\downarrow}^c(x) \wedge \pi_{\downarrow}^c(y)$. On a $\pi_{\downarrow}^c(x \wedge y) \leq x \wedge y \leq x$ et $\pi_{\downarrow}^c(x \wedge y) \leq x \wedge y \leq y$. De plus, on a $\pi_{\downarrow}^c(x) \leq x$ et $\pi_{\downarrow}^c(y) \leq y$. Ainsi par maximalité de $\pi_{\downarrow}^c(x)$, on a $\pi_{\downarrow}^c(x \wedge y) \leq \pi_{\downarrow}^c(x)$ et par maximalité de $\pi_{\downarrow}^c(y)$, on a $\pi_{\downarrow}^c(x \wedge y) \leq \pi_{\downarrow}^c(y)$. D'où par définition de l'intersection, on a $\pi_{\downarrow}^c(x \wedge y) \leq \pi_{\downarrow}^c(x) \wedge \pi_{\downarrow}^c(y)$. Aussi, $\pi_{\downarrow}^c(x) \wedge \pi_{\downarrow}^c(y) \leq \pi_{\downarrow}^c(x) \leq x$ de même, $\pi_{\downarrow}^c(x) \wedge \pi_{\downarrow}^c(y) \leq \pi_{\downarrow}^c(y) \leq y$. Donc $\pi_{\downarrow}^c(x) \wedge \pi_{\downarrow}^c(y) \leq x \wedge y$. Or, on a que $\pi_{\downarrow}^c(x \wedge y)$ est le plus grand c -trié, plus petit que $x \wedge y$, ce qui implique qu'on a $\pi_{\downarrow}^c(x) \wedge \pi_{\downarrow}^c(y) \leq \pi_{\downarrow}^c(x \wedge y)$. Les deux inégalités impliquent le résultat. \square

3.2.2 Le demi-treillis inférieur Cambrian vu comme quotient du demi-treillis inférieur faible

On a vu dans le premier chapitre concernant les treillis que le quotient d'un treillis par une congruence de treillis forme un treillis, qu'on appelle le treillis quotient. On a vu précédemment que $(\text{Camb}_c(W), \leq)$, l'ensemble des éléments c -triés, muni de l'ordre faible forme le demi-treillis inférieur Cambrian. Dans cette section nous verrons que l'on peut aussi voir $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ comme le demi-treillis inférieur quotient du demi-treillis inférieur faible par la relation d'équivalence suivante :

$$x \equiv_c y \Leftrightarrow \pi_{\downarrow}^c(x) = \pi_{\downarrow}^c(y).$$

Pour cela, il nous faut démontrer que notre relation d'équivalence est bien une congruence de demi-treillis.

Proposition 3.2.2.1. *La relation d'équivalence $x \equiv_c y$ est un congruence de demi-treillis inférieur.*

Démonstration. Supposons que $x_1 \equiv_c y_1$ et $x_2 \equiv_c y_2$. On a une congruence de treillis si $x_1 \wedge x_2 \equiv_c y_1 \wedge y_2$. On a par hypothèse que $\pi_{\downarrow}^c(x_1) = \pi_{\downarrow}^c(y_1)$ et $\pi_{\downarrow}^c(x_2) = \pi_{\downarrow}^c(y_2)$. On a

que

$$\begin{aligned}
 \pi_{\downarrow}^c(x_1 \wedge x_2) &= \pi_{\downarrow}^c(x_1) \wedge \pi_{\downarrow}^c(x_2), \text{ car, } \pi_{\downarrow}^c \text{ est un morphisme de demi-treillis inférieur} \\
 &= \pi_{\downarrow}^c(y_1) \wedge \pi_{\downarrow}^c(y_2), \text{ car } \pi_{\downarrow}^c(x_1) = \pi_{\downarrow}^c(y_1) \text{ et } \pi_{\downarrow}^c(x_2) = \pi_{\downarrow}^c(y_2) \\
 &= \pi_{\downarrow}^c(y_1 \wedge y_2).
 \end{aligned}$$

Comme $\pi_{\downarrow}^c(x_1 \wedge x_2) = \pi_{\downarrow}^c(y_1 \wedge y_2)$ on a bien que $x_1 \wedge x_2 \equiv_c y_1 \wedge y_2$, et notre relation d'équivalence est bien une congruence de demi-treillis inférieur. \square

Par la suite, on obtient le joli résultat escompté :

Théorème 3.2.2.2. *$(\text{Camb}_c(W), \leq)$, est un demi-treillis inférieur quotient de (W, \leq) le demi-treillis inférieur faible, qui est isomorphe à $(W / \equiv_c, \leq)$.*

Démonstration. En vertu de la proposition précédente, on sait par le théorème 1.3.0.7 que W / \equiv_c est le demi-treillis inférieur quotient et que $W \rightarrow W / \equiv_c$ est un morphisme de demi-treillis inférieur. De plus, on a que (W, \leq) est un treillis, que la relation d'équivalence \equiv_c est une congruence de demi-treillis inférieur et que $\pi_{\downarrow}^c : (W, \leq) \rightarrow (\text{Camb}_c(W), \leq)$ est un morphisme surjectif de demi-treillis inférieur tel que $x \equiv_c y \Leftrightarrow \pi_{\downarrow}^c(x) = \pi_{\downarrow}^c(y)$. En vertu du théorème d'isomorphie, 3.1.0.8, il existe un isomorphisme de demi-treillis inférieur. On obtient donc que $(W / \equiv_c, \leq) \cong (\text{Camb}_c(W), \leq)$ et forme le demi-treillis inférieur quotient du demi-treillis inférieur faible. \square

3.3 Le cas fini : Le treillis Cambrian

Nous voulons maintenant démontrer que dans le cas où W est fini, $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ forme un treillis : le treillis Cambrian. Puisque $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ forme un demi-treillis inférieur, montrons qu'il forme aussi un demi-treillis supérieur. De cette façon on aura que $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ forme un treillis.

Théorème 3.3.0.3. *Si W est fini, alors pour tout élément de Coxeter c , $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ est un treillis.*

Démonstration. On sait déjà que $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ forme un demi-treillis inférieur. On va donc montrer que $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ est un demi-treillis supérieur. Soit x et y des éléments c -triés. D'abord on sait que $x \vee y$ existe dans W car (W, \leq) forme un treillis. On doit donc démontrer que $x \vee y$ est c -trié. Pour ce faire, on va utiliser la projection π_{\downarrow}^c : on va montrer que $\pi_{\downarrow}^c(x \vee y) = x \vee y$. On sait que $x \leq x \vee y$. On a donc que $\pi_{\downarrow}^c(x) \leq \pi_{\downarrow}^c(x \vee y)$, car π_{\downarrow}^c est un morphisme d'ensemble partiellement ordonné. On a également que $\pi_{\downarrow}^c(x) = x$, car x est c -trié. Similairement on a $y = \pi_{\downarrow}^c(y) \leq \pi_{\downarrow}^c(x \vee y)$. Donc $\pi_{\downarrow}^c(x \vee y)$ est un majorant pour x et y . Par définition de l'opération union, on a $x \vee y \leq \pi_{\downarrow}^c(x \vee y)$. Or, par le théorème 3.2.1.3, on obtient que $\pi_{\downarrow}^c(x \vee y) \leq x \vee y$. Ainsi, par double inclusion on a $\pi_{\downarrow}^c(x \vee y) = x \vee y$. Ce qui fait que $x \vee y$ est c -trié. On conclut que $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ forme un demi-treillis supérieur et donc un treillis. \square

On appelle $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ le *treillis Cambrian*.

Dans le cas fini, on aimerait aussi démontrer que W / \equiv_c forme le treillis quotient du treillis faible. Pour ce faire, nous devons au préalable s'assurer que dans le cas fini, w_0 est un élément c -trié. Nous faisons face à la grande difficulté de ce travail sur le treillis Cambrian : Est-ce que w_0 , l'élément de longueur maximale est un élément c -trié.

3.3.1 Le cas de w_0

On aimerait montrer que w_0 est un élément c -trié. La démonstration de ce résultat a été source de grandes difficultés. N. Reading démontre ce résultat cas par cas, voir [11] et [10]. En fait, il traite les types A_n , B_n et D_n séparément en introduisant la notion d'éléments c -alignés. Un élément $w \in W$ est c -aligné si pour chaque sous-groupe parabolique de rang deux, W' , avec générateur t_1 et t_2 , si $t_2 t_1 t_2$ est une inversion de w , alors t_1 est une inversion de w . Une inversion de w est un générateur t tel que $l(tw) < l(w)$. Cette notion d'élément c -aligné est basée sur la notion de c -orientation, [10], qui est construite explicitement pour chaque type. Il est ensuite possible de démontrer que l'élément de longueur maximale w_0 est un élément c -aligné. Par la suite N. Reading démontre qu'il existe une bijection entre l'ensemble des éléments c -triés et l'ensemble

des éléments c -alignés. Finalement, il vérifie les autres cas par ordinateur [10]. Comme ces démonstrations sont très longues et sortent du cadre de ce mémoire, nous avons choisi de prendre les résultats pour acquis.

Théorème 3.3.1.1. *Si W est un groupe de Coxeter fini alors, l'élément de longueur maximale de W est un élément c -trié, quelque soit l'élément de Coxeter.*

Remarque :

Au moment de finir ce mémoire, nous avons pris connaissance que N. Reading et D.E. Speyer [12] viennent de proposer une preuve de ce théorème qui ne fait pas appel à la classification des groupes de Coxeter finis. En considérant la notion de système de racines, les auteurs sont parvenus à démontrer de façon générale que w_0 est bien un élément c -trié. Pour cela, ils définissent une forme bilinéaire, qu'ils nomment ω_c , définie sur le système de racines de W et le système de co-racines de W , afin de caractériser la suite des générateurs qui apparaissent dans l'élément c -trié. Pour plus de détails, voir [12] corollaire 7.2.

3.3.2 Le treillis Cambrian vu comme quotient du treillis faible

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.3.2.1. *Si W est fini, alors pour tout élément de Coxeter c , $(\text{Camb}_c(W), \leq)$, est le treillis quotient de (W, \leq) le treillis faible, par rapport à la relation d'équivalence \equiv_c .*

Idée de la preuve :

On introduit d'abord une autre projection, π_c^\uparrow définie comme suit : $\pi_c^\uparrow(w) = (\pi_c^{\downarrow^{-1}}(ww_0))w_0$. Cette projection est bien définie car w_0 est bien un élément c -trié. On montre ensuite que comme $w \mapsto ww_0$ est un antiautomorphisme de l'ordre faible, alors π_c^\uparrow préserve l'ordre. N. Reading montre ensuite en utilisant les deux projections que les intervalles $[\pi_c^\downarrow(w), \pi_c^\uparrow(w)]$ dans l'ordre faible sont exactement les classes de congruence de \equiv_c . On ne fera pas les détails, voir [11], Théorème 1.1. Ainsi $(\text{Camb}_c(W), \leq)$ est

isomorphe à $(W / \equiv_c, \leq)$ et forme le treillis quotient du treillis faible.

Voilà qui complète notre chapitre concernant le treillis Cambrian. Le prochain chapitre traitera d'une caractérisation combinatoire du treillis Cambrian pour le type A_n .

CHAPITRE IV

REPRÉSENTATION COMBINATOIRE DU TREILLIS CAMBRIAN DE TYPE A_N

Rappelons d'abord que tout groupe de Coxeter de type A_n est le groupe symétrique S_{n+1} . Dans ce chapitre, nous allons illustrer une jolie façon de présenter combinatoirement le treillis Cambrian de type A_n . Nous allons donner une représentation combinatoire des éléments c -triés, de la projection π_{\downarrow}^c et du quotient S_n / \equiv_c . Nous terminerons ce chapitre par une section consacrée à l'énumération. Précisons qu'aucune démonstration ne sera effectuée dans ce chapitre. Nous en donnerons par contre les grandes lignes.

4.1 Représentation combinatoire des éléments c -triés

Rappelons d'abord qu'une permutation $x \in S_n$ peut se représenter comme un mot $x = x_1x_2\dots x_n \in S_n$ où $x_i = x(i)$. Rappelons aussi que les générateurs de S_n sont les transpositions $\tau_i = (i \ i + 1)$ et les réflexions sont les transpositions $(i \ j)$, pour $1 \leq i < j \leq n$. L'ensemble des inversions de la permutation x , noté $I(x)$, est l'ensemble des paires $(i \ j)$, pour $i < j$ tels que $x_i > x_j$. La représentation combinatoire des éléments c -triés utilise la notion de motif dans une permutation et la notion d'indexation d'un ensemble.

Définition 4.1.0.2. On dit que la permutation $y = y_1y_2\dots y_n \in S_n$ contient le *motif* x si il existe un sous-mot y_{i_1}, \dots, y_{i_k} dans y tel que $y_{i_a} < y_{i_b} \Leftrightarrow x_a < x_b$.

Exemple 4.1.0.3. La permutation $x = 3451267 \in S_7$ ne contient pas le motif 321, car elle ne contient pas de séquence décroissante de longueur 3. Par contre, elle contient le

motif 2134 car x contient le sous-mot 4267 qui préserve l'ordre des lettres 2134.

On dit que $x \in S_n$ contient le motif 231 s'il existe $1 \leq i < j < k \leq n$ avec $x_k < x_i < x_j$. Par exemple, dans S_6 la permutation $x = 246351$ contient le motif 231 car il existe $2 < 3 < 4$ tel que $x_4 = 3 < x_2 = 4 < x_3 = 6$. Notons, qu'en particulier, si une permutation $x \in S_n$ contient le motif 231 tel que $k = j + 1$ alors en échangeant x_j et x_{j+1} on obtient une permutation avec le motif 213. On l'appelle l'opération $231 \rightarrow 213$.

Exemple 4.1.0.4. Soit $x = 2314 \in S_4$. La permutation x contient le motif 231 et on a bien $k = 3 = j + 1$ car $j = 2$. Ainsi en échangeant x_2 et x_3 , on obtient $x' = 2134$ et x' contient bien le motif 213.

De la même manière, on dit que $x \in S_n$ contient le motif 312 s'il existe $1 \leq i < j < k \leq n$ avec $x_j < x_k < x_i$. En particulier, si $j = i + 1$ on peut échanger x_i et x_{i+1} et on obtient une permutation x' qui contient le motif 132. On l'appelle l'opération $312 \rightarrow 132$.

Définition 4.1.0.5. L'*indexation* d'un ensemble E d'entiers est une partition de E en deux ensembles notés \overline{E} et \underline{E} . Les éléments de \overline{E} sont appelés indice haut et sont notés \overline{i} et les éléments de \underline{E} sont appelés indice bas et sont notés \underline{i} .

On dit que $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ est un indice haut si l'arête $\{\tau_{i-1}, \tau_i\}$ est orientée de τ_i vers τ_{i-1} dans $\overrightarrow{\Gamma}$, et $i \in \{2, \dots, n\}$ est un indice bas si l'arête $\{\tau_{i-1}, \tau_i\}$ est orientée de τ_{i-1} vers τ_i dans $\overrightarrow{\Gamma}$. Ainsi, l'orientation du graphe de Coxeter induit une indexation des entiers $\{2, \dots, n - 1\}$.

Exemple 4.1.0.6. On considère l'orientation du graphe de Coxeter de $A_3 \cong S_4$ de la figure 4.1. On a alors que 2 est un indice bas, qu'on note $\underline{2}$, et 3 est un indice haut, on le note $\overline{3}$.

On écrira alors que $x \in S_n$ contient le motif $\overline{2}31$ si il existe $1 \leq i < j < k \leq n$ avec $x_k < \overline{x_i} < x_j$. Notons qu'ici nous avons aucune condition spécifique sur l'indexation de x_k et x_j .

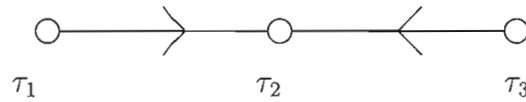


Figure 4.1 Une orientation du graphe de S_4

Rappelons qu'il y a une correspondance entre l'orientation du graphe de Coxeter et l'élément de Coxeter c . Ainsi, un élément de Coxeter c induit lui aussi une indexation. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.1.0.7. *Soit c un élément de Coxeter, $w \in S_n$ est c -trié si et seulement si w est sans motifs $\bar{2}31$ et $31\bar{2}$*

Idée de la preuve :

Comme les c -triés dépendent de l'orientation du graphe, ils dépendent de l'indexation des entiers $\{2, \dots, n-1\}$. Ensuite pour démontrer ce résultat, on utilise les éléments c -alignés. Soit $w \in S_n$, les transpositions $(i j)$ et $(j k)$ tel qu'on a $(j k)(i j)(j k) \in I(w)$, l'ensemble des inversions de w . On a alors que w est c -aligné si $(i j) \in I(w)$. On démontre assez facilement qu'un élément $w \in S_n$ est c -aligné si et seulement si il est sans motifs $\bar{2}31$ et $31\bar{2}$. (Voir lemme 4.8 [10]). Ensuite pour démontrer la bijection entre l'ensemble des éléments c -alignés et l'ensemble des éléments c -triés, on construit deux caractérisations des éléments c -alignés, similaires à celle des éléments c -triés, construites au chapitre 3. (Voir lemme 3.1.3.3 et 3.1.3.4). Pour consulter cette démonstration voir théorème 4.1 [10].

En vertu de ce dernier résultat, on obtient que l'ensemble des permutations w sans motifs $\bar{2}31$ et $31\bar{2}$, où $w \in S_n$, forme un sous treillis de l'ordre faible.

4.2 Représentation combinatoire du quotient S_n / \equiv_c et de la projection π_{\downarrow}^c

Pour représenter combinatoirement ces deux objets, nous allons utiliser les triangulations d'un polygone à $n + 2$ sommets.

4.2.1 Les triangulations

Considérons un polygone P à $n + 2$ côtés dans le plan affine Euclidien. Appellons P_0, P_1, \dots, P_{n+1} les $n + 2$ sommets de P , ordonnés dans le sens trigonométrique. Les sommets P_i et P_{i+1} sont adjacents pour $0 \leq i \leq n$, tout comme P_0 et P_{n+1} , aussi adjacents. À toute orientation $\overrightarrow{\Gamma_{S_n}}$ du graphe de Coxeter de S_n , on associe une numérotation des sommets de P .

On veut associer une numérotation des $n + 2$ sommets de P , à une orientation du graphe. Comme l'indexation fixe une numérotation seulement aux entiers $\{2, \dots, n - 1\}$, nous allons poser l'indexation suivante : les entiers 0 et $n + 1$ ont les deux indexations et les entiers 1 et n sont des indices bas.

Considérons l'indexation $\underline{E} = \{1, e_2, \dots, e_k, n\}$ et $\overline{E} = \{e_{k+1}, \dots, e_{n-2}\}$. On numérote ensuite les sommets de P dans le sens trigonométrique en partant de P_0 . P_0 sera indicé par 0, puis P_1 par 1, le premier entier, en ordre croissant, qui est un indice bas. Ensuite on indice P_2, \dots, P_k par les indices bas e_2, \dots, n , en ordre croissant. Par la suite, P_{k+1} sera indicé par $n + 1$ et P_{k+2} par e_{n-2} , le premier entier, en ordre décroissant, qui est un indice haut. Finalement, on indice P_{k+3}, \dots, P_{n+1} , par les indices hauts, en ordre décroissant. Dans ce qui suit, on confondra souvent les sommets et leurs indices.

Exemple 4.2.1.1. Reprenons l'exemple 4.1.0.6. On a l'indexation suivante : $\underline{E} = \{1, 2, 4\}$, $\overline{E} = \{3\}$, 0 et 5 ont les deux indexations. Ainsi, on associe à $\overrightarrow{\Gamma_{S_4}}$ un polygone à 6 côtés, dont les sommets sont numérotés comme suit : $P_0 = 0$, $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$, $P_4 = 5$ et $P_5 = 3$. On obtient ainsi le polygone de la figure 4.2.

Une diagonale dans P est un segment entre deux sommets non adjacents de P . Par

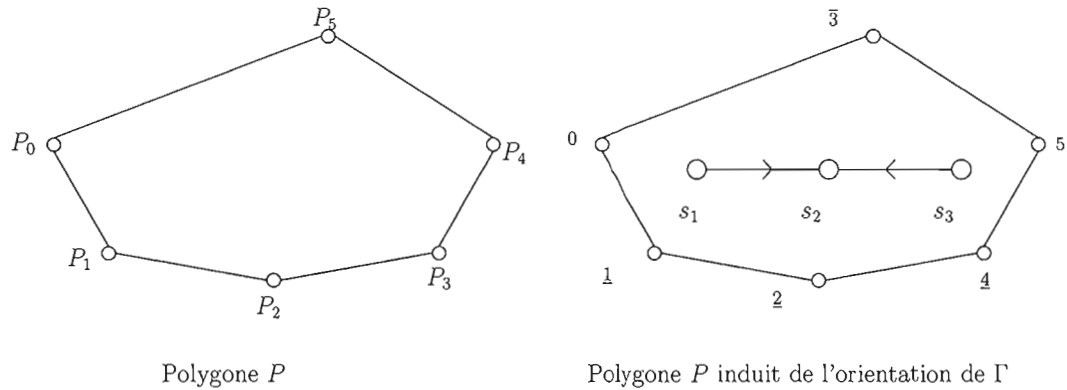
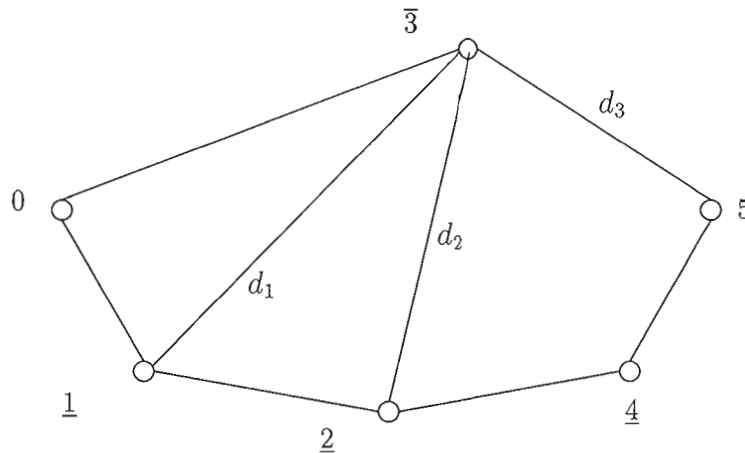


Figure 4.2

exemple, soit le polygone à 6 côtés de l'exemple précédent, illustré à la figure 4.3. Alors d_1 et d_2 sont deux diagonales de P , alors que d_3 n'est pas une diagonale, car 3 et 5 sont des sommets adjacents.

Figure 4.3 Deux diagonales dans P

Définition 4.2.1.2. Une *triangulation* est un sous-ensemble maximal de diagonales de P qui ne se croisent pas.

On a ainsi des segments dans P qui ne se coupent pas, sauf peut-être à leurs extrémités.

Une triangulation est donc un polygone P muni d'un nombre maximal de diagonales non croisées.

Exemple 4.2.1.3. La figure 4.4 donne deux exemples de triangulations sur un polygone à 6 côtés, les figures (a) et (b). Par contre la figure (c) n'est pas une triangulation. On peut ajouter la diagonale d_3 , entre les sommets 3 et 4, sans croiser les diagonales déjà existantes. Ainsi la figure (c) ne contient pas un nombre maximal de diagonales non croisées.

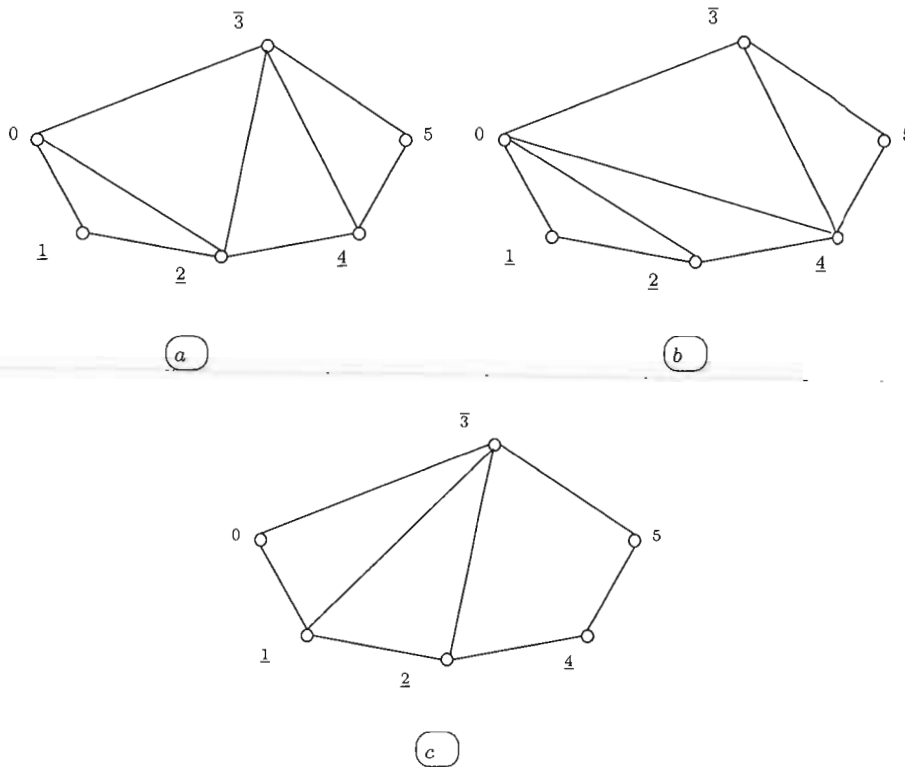
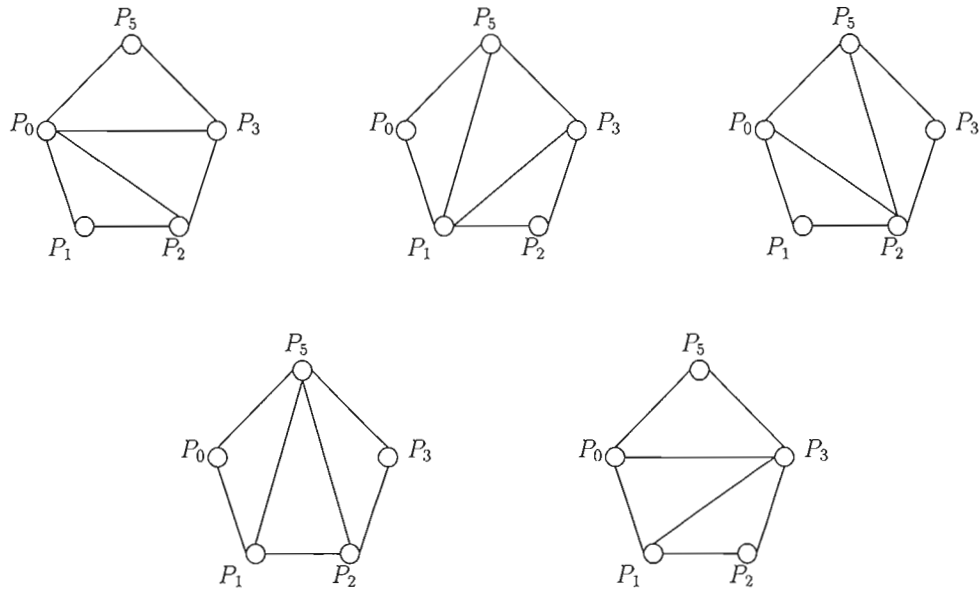


Figure 4.4 Deux triangulations

Posons $T_{n+2} :=$ l'ensemble des triangulations d'un polygone à $n+2$ côtés et $T_{n+2}(\overrightarrow{\Gamma_{S_n}}) :=$ l'ensemble des triangulations d'un polygone à $n+2$ côtés, induit par l'orientation du graphe de Coxeter. Par exemple, T_5 est l'ensemble des triangulations de la figure 4.5.

Figure 4.5 T_5

4.2.2 Permutations et triangulations

On veut ici donner une représentation combinatoire de la projection π_{\downarrow}^c . Rappelons que π_{\downarrow}^c est défini comme suit : $\pi_{\downarrow}^c : (S_n, \leq) \rightarrow (\text{Camb}_c(S_n), \leq)$. La représentation combinatoire de π_{\downarrow}^c va associer à une permutation de S_n , une triangulation.

Construction de la fonction η , la représentation combinatoire de π_{\downarrow}^c

Soit $x = x_1x_2\dots x_n$ une permutation de S_n . Considérons $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, des chemins polygonaux dans P . On définit d'abord λ_0 comme suit : $\lambda_0(x_1\dots x_n)$ est le chemin dans le polygone P , partant du sommet 0, finissant au sommet $n+1$ et passant par les sommets \underline{i} , $\underline{i} \in [n]$, en ordre croissant. On définit ensuite récursivement les λ_i , $1 \leq i \leq n$ de la façon suivante : Si x_i est un indice bas, alors $\lambda_i(x)$ correspond au chemin $\lambda_{i-1}(x)$, auquel on enlève le sommet i , en parcourant les sommets du polygone en ordre croissant. Sinon, on a que x_i est un indice haut et alors $\lambda_i(x)$ correspond au chemin $\lambda_{i-1}(x)$, auquel on ajoute le sommet i toujours en parcourant les sommets de P en ordre croissant.

Exemple 4.2.2.1. Soit S_4 et P le polygone de la figure 4.2 issue de l'orientation donnée. Considérons la permutation $x = 3124$. On obtient donc les chemins polygonaux suivants, illustrés à la figure 4.6 :

Le chemin $\lambda_0(3124)$ correspond au chemin du sommet 0 au sommet 5, passant par les sommets 1, 2 et 4. En effet on a que l'ensemble des indices bas, $\underline{i} \in [n]$, correspond aux sommets 1, 2 et 4. On obtient donc la figure (a).

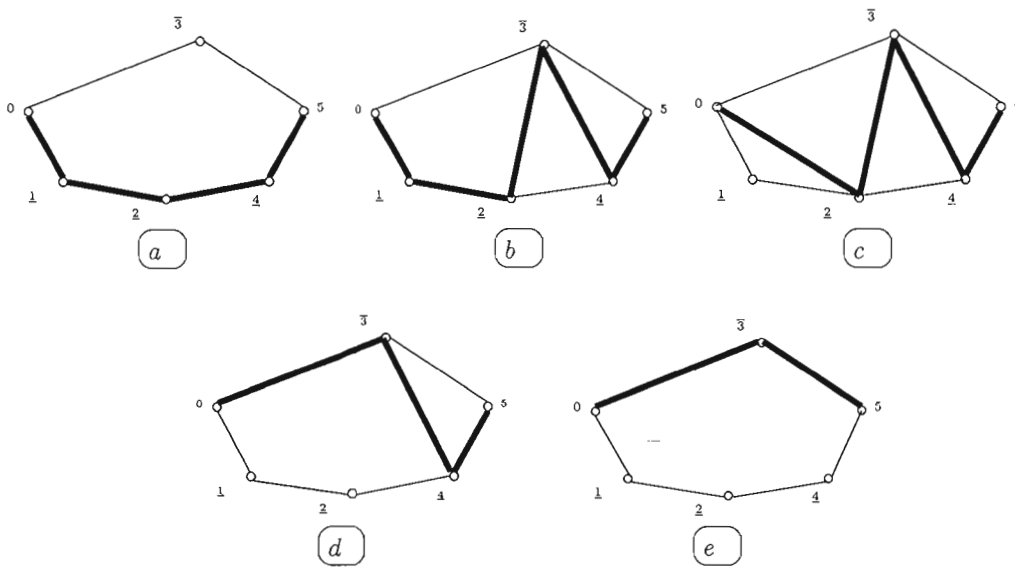


Figure 4.6 Cinq chemins polygonaux

Le chemin $\lambda_1(3124)$ correspond au chemin $\lambda_0(3124)$, auquel on a ajouté le sommet 3, car on a $x_1 = \bar{3}$. On rappelle que le parcours des sommets de $\lambda_1(3124)$ se fait en ordre croissant. On obtient donc la figure (b).

Le chemin $\lambda_2(3124)$ correspond au chemin $\lambda_1(3124)$, auquel on a enlevé le sommet 1, car on a $x_2 = \underline{1}$. On obtient la figure (c).

Le chemin $\lambda_3(3124)$ correspond quand à lui au chemin $\lambda_2(3124)$, auquel on a enlevé le

sommet 2, car on a $x_3 = \underline{2}$. On obtient ainsi la figure (d).

Finalement, le chemin $\lambda_4(3124)$ correspond au chemin $\lambda_3(3124)$, auquel on a enlevé le sommet 4, car on a $x_4 = \underline{4}$. Ce qui nous donne la figure (e).

On considère ensuite P avec l'union des chemins polygonaux $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$. On définit $\eta(x)$ comme étant le polygone P muni de l'union des chemins polygonaux, c'est-à-dire, $\eta(x) = \bigcup_{i=0}^n \lambda_i(x)$. Notons que l'union des $\lambda_i(x)$ forme bien une triangulation. Pour démontrer ce résultat, on utilise le fait que chaque $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n-1\}$ définit des diagonales dans le polygone P . Un chemin polygonaux λ_i peut, par exemple définir deux diagonales et un autre, λ_j en définir aucunes nouvelles. Au total, on aura donc $n-1$ diagonales. Ces diagonales ne se coupent pas car les λ_i sont définies récursivement. Comme une triangulation dans $T_{n+2}(\overrightarrow{\Gamma_{S_n}})$ est un polygone avec $n-1$ diagonales non croisées, on a bien que $\eta(x)$ forme une triangulation de $T_{n+2}(\overrightarrow{\Gamma_{S_n}})$.

Ainsi, en reprenant l'exemple précédent et en considérant l'union des $\lambda_i, 0 \leq i \leq n$, on obtient la triangulation $\eta(3124)$ qui est illustrée à la figure 4.7.

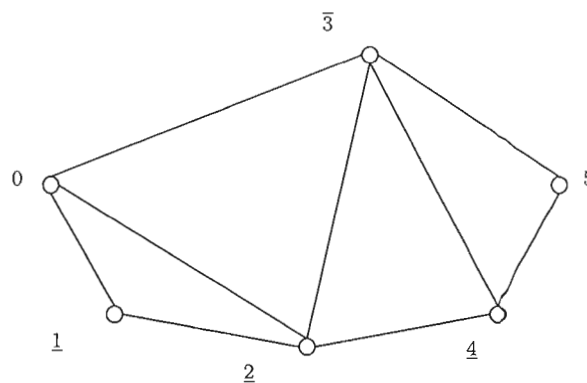


Figure 4.7 La triangulation $\eta(3124) \in T_6(\overrightarrow{\Gamma_{S_4}})$

On considère le treillis faible de S_4 , illustré à la figure 4.8 et l'orientation du graphe de

Coxeter de la figure 4.9. En associant à chaque permutation x , sa triangulation $\eta(x)$, on obtient les triangulations de la figure 4.10.

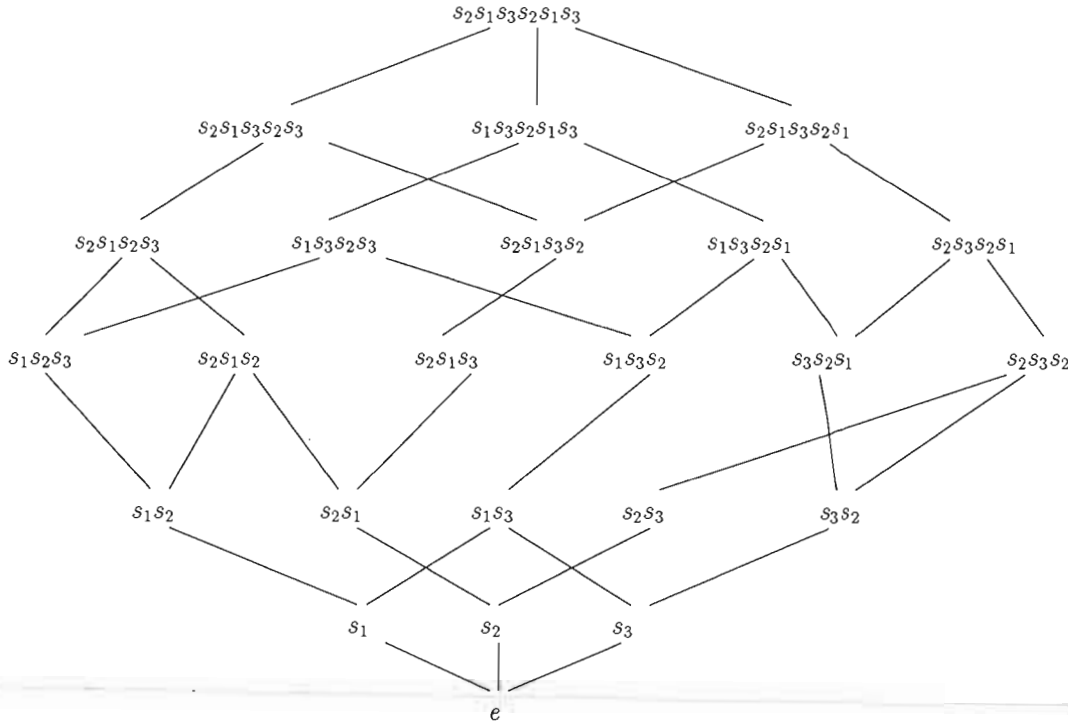


Figure 4.8 Treillis faible de S_4

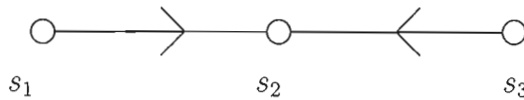


Figure 4.9 Une orientation du graphe de S_4

On obtient la relation suivante :

$$x \equiv_c y \Leftrightarrow \pi_{\downarrow}^c(x) = \pi_{\downarrow}^c(y) \Leftrightarrow \eta(x) = \eta(y).$$

Idée de la preuve :

On démontre d'abord que deux permutations ont la même triangulation si et seulement si x est obtenue de y par l'opération $\bar{2}31 \rightarrow \bar{2}13$ ou par l'opération $31\bar{2} \rightarrow 13\bar{2}$. Pour ce

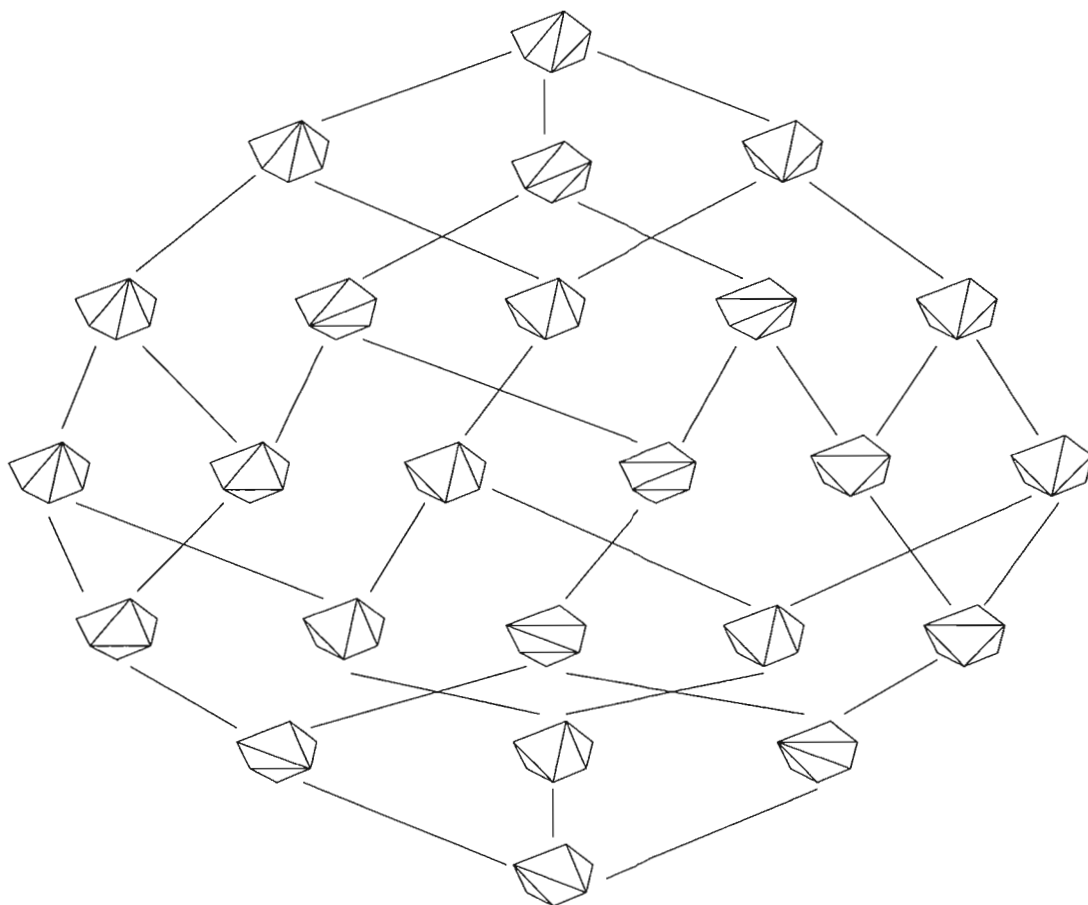


Figure 4.10 L'ensemble des triangulations associées aux permutations de S_4

faire, on construit les chemins polygonaux des permutations x et y . L'argument clé est que l'on peut exprimer $\lambda_j(x)$ en fonction de $\lambda_{j-1}(x)$ et $\lambda_{j+1}(x)$. De même pour $\lambda_j(y)$. Voir proposition 5.3, [9]. Remarquons ensuite que si x est obtenue de y par l'opération $\bar{2}31 \rightarrow \bar{2}13$ ou par l'opération $31\bar{2} \rightarrow 13\bar{2}$, alors x est sans motifs $\bar{2}31$ et $31\bar{2}$. Or, on a vu précédemment que les permutations sans motifs $\bar{2}31$ et $31\bar{2}$ sont les éléments c -triés de S_n . On démontre ensuite que les fibres $\eta^{-1}(\eta(x))$ sont exactement les classes de congruences de \equiv_c . [9], théorème 5.1.

4.2.3 Le quotient S_n / \equiv_c

Finalement le quotient S_n / \equiv_c peut être représenté combinatoirement par le graphe de Hasse où les sommets sont les triangulations de $T_{n+2}(\overrightarrow{\Gamma_{S_n}})$ associées aux permutations sans motifs $\bar{2}31$ et $31\bar{2}$.

Soit la permutation $x = 1342 = s_2s_3$ dans le treillis faible de S_4 . En fixant un élément de Coxeter, par exemple $c = s_3s_1s_2$, et en appliquant la fonction η , on trouve le quotient de S_n / \equiv_c avec une représentation sous forme de triangulation, illustré à la figure 4.11. On a représenté en bleu $\eta(1342)$.

Pour le même élément de Coxeter, $c = s_3s_1s_2$, en appliquant la projection π_{\downarrow}^c , on trouve le treillis Cambrian représenté avec les éléments c -triés : $(\text{Camb}_c(S_4), \leq)$ illustré à la figure 4.12. On a aussi représenté $\pi_{\downarrow}^c(s_2s_3)$ en bleu. On remarque que pour le même élément de Coxeter, les deux quotients obtenus sont bien isomorphes. Puis, on voit aussi que les deux fonctions envoient une permutation sur le même élément, représenté de deux façons différentes.

4.3 Représentation combinatoire du treillis Cambrian vu comme quotient

Considérons maintenant l'ensemble des triangulations de $T_{n+2}(\overrightarrow{\Gamma_{S_n}})$ associées aux permutations sans motifs $\bar{2}31$ et $31\bar{2}$. Nous allons munir cet ensemble d'une relation

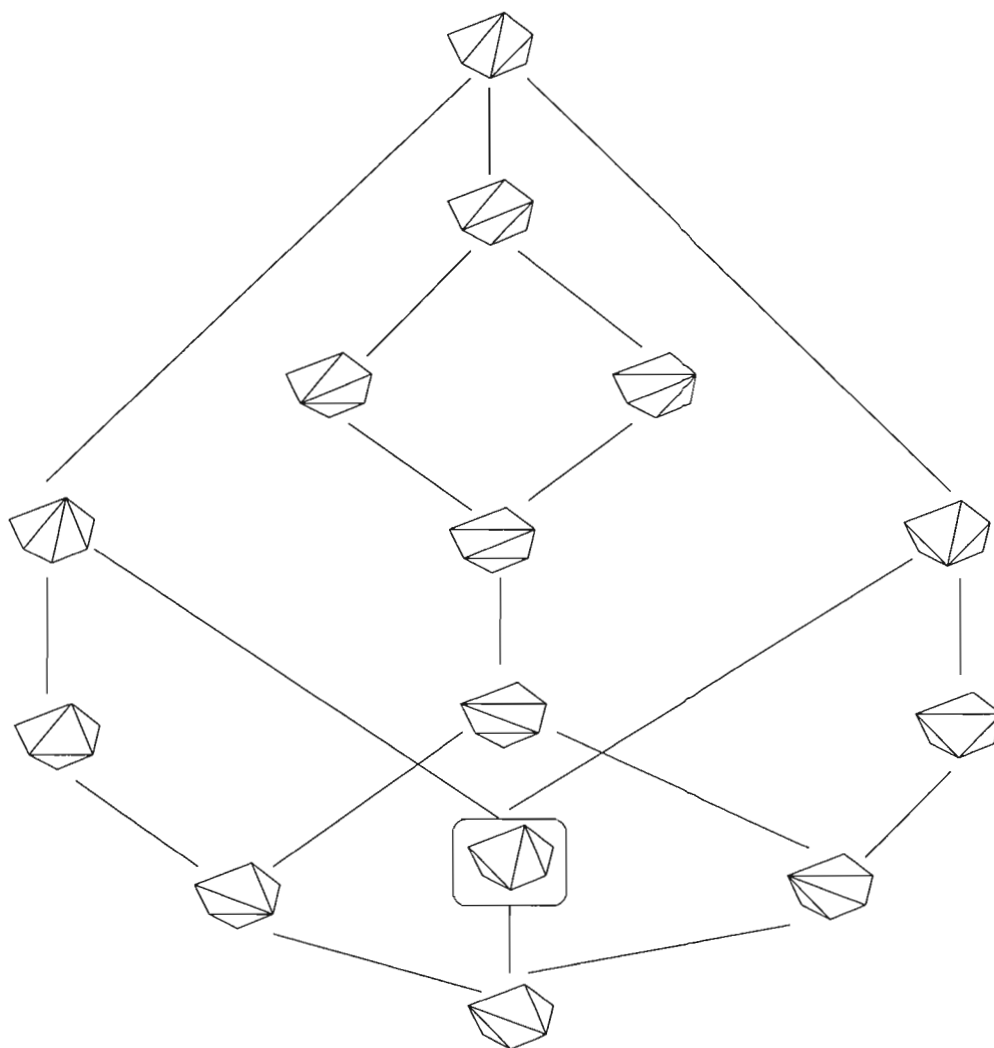


Figure 4.11 Le quotient S_n / \equiv_c pour $c = s_3 s_1 s_2$, avec $\eta(1342)$

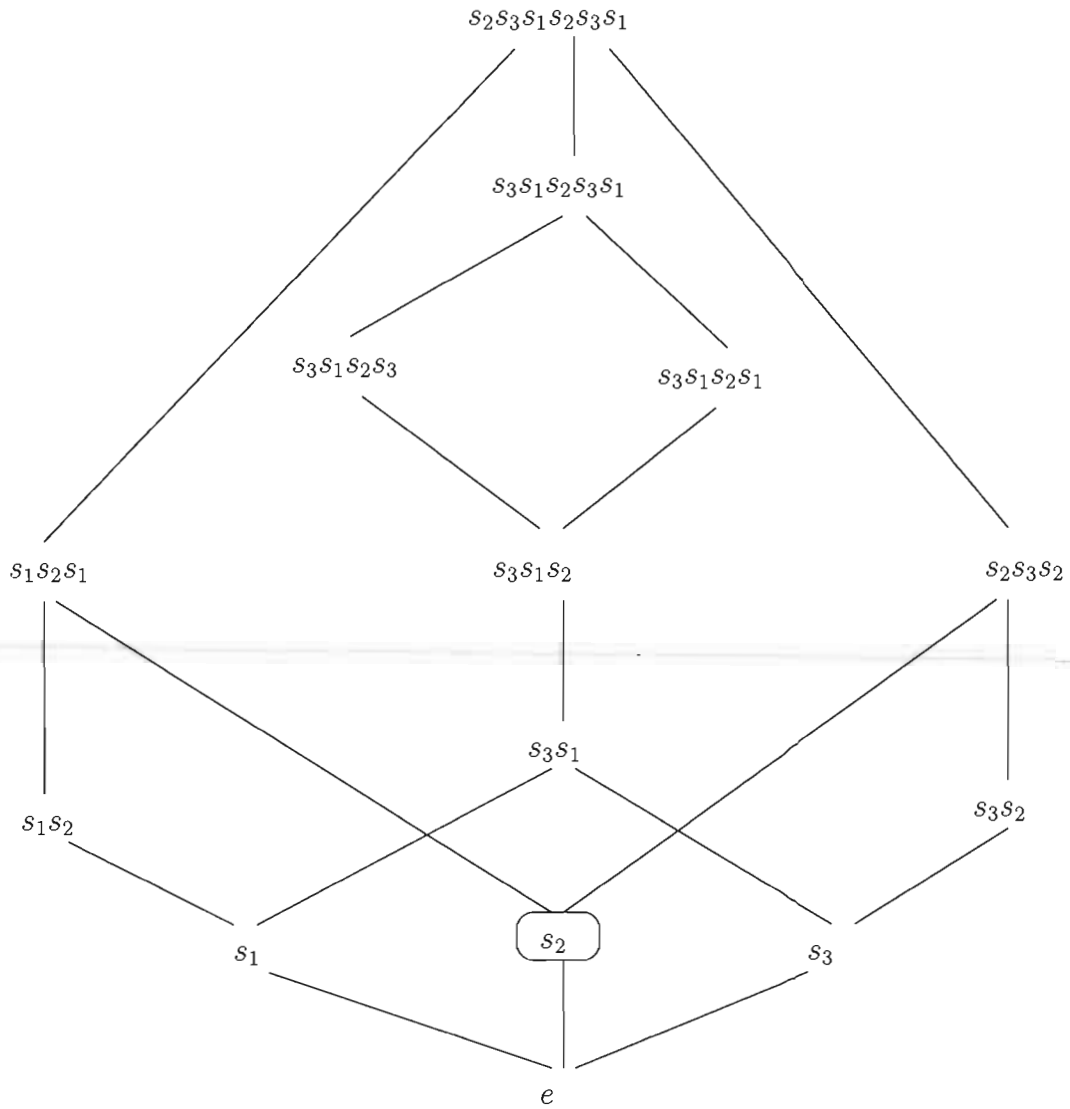


Figure 4.12 Le treillis Cambrian de S_4 pour $c = s_3s_1s_2$, avec $\pi_{\downarrow}^c(s_2s_3)$

d'ordre. Ainsi, nous allons présenter la représentation combinatoire de l'ordre faible.

Soit deux triangulations, $t, t' \in T_{n+2}(\overrightarrow{\Gamma_{S_n}})$, telles que t et t' diffèrent par une seule diagonale. On a alors que $t \setminus t'$ est bien définie en tant qu'ensemble. On a que $t \setminus t'$ est l'unique diagonale de t qui n'est pas dans t' . Par exemple, soit t et $t' \in T_6(\overrightarrow{\Gamma_{S_4}})$ telles qu'illustrées à la figure 4.13. On peut décrire une triangulation par

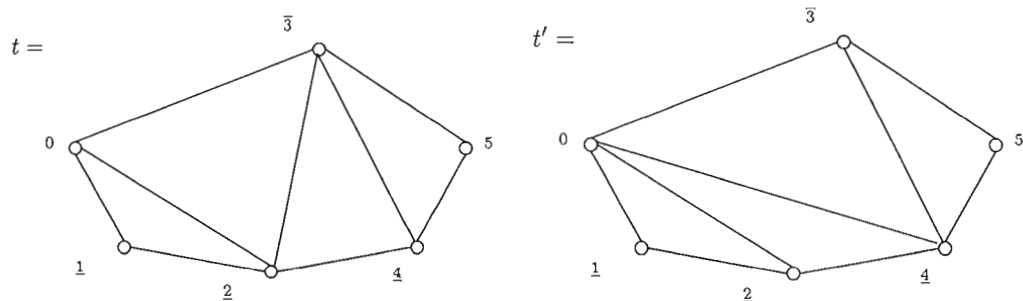


Figure 4.13 Deux triangulations de $T_6(\overrightarrow{\Gamma_{S_4}})$

ses diagonales comme suit : $t = \{\{0, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$ $t' = \{\{0, 2\}, \{0, 4\}, \{3, 4\}\}$ On a alors $t \setminus t' = \{\{2, 3\}\}$ et $t' \setminus t = \{\{0, 4\}\}$.

On aimerait comparer la pente de la diagonale de t qui n'est pas dans t' avec la pente de la diagonale de t' qui n'est pas dans t . Notons $p(t, t')$, la pente de $t \setminus t'$. Ainsi, on veut comparer $p(t, t')$ et $p(t', t)$. Pour comparer les pentes, on oriente le polygone de façon à situer le sommet 0 à l'origine, puis l'axe horizontal est donné par la droite $(0, n + 1)$. On prend ensuite sa perpendiculaire pour l'axe vertical. Puis, on considère P muni de $t \setminus t'$ et de $t' \setminus t$.

Exemple 4.3.0.1. Reprenons l'exemple précédent. On avait $t \setminus t' = \{\{2, 3\}\}$ et $t' \setminus t = \{\{0, 4\}\}$. Considérons P muni de $t \setminus t'$ et de $t' \setminus t$. On obtient ainsi la figure 4.14.

Il est maintenant possible de comparer les pentes de $t \setminus t'$ et de $t' \setminus t$. On a clairement que $p(t', t) \leq p(t, t')$, où \leq correspond à l'ordre habituel des nombres réels. En effet, on a que la pente de la diagonale $\{0, 4\}$ est plus petite que la pente de la diagonale $\{2, 3\}$.

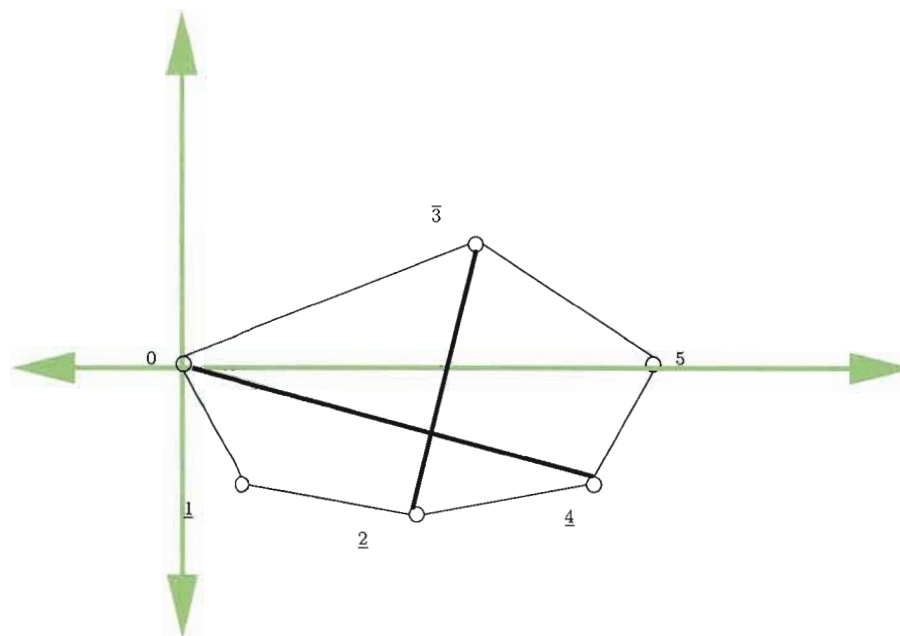


Figure 4.14 P muni de $t \setminus t'$ et de $t' \setminus t$

On définit la relation $\tilde{\leq}$ comme suit : $t \tilde{\leq} t' \Leftrightarrow p(t, t') \leq p(t', t)$. Puis on prend la clôture transitive et on obtient la position suivante :

Proposition 4.3.0.2. $(T_{n+2}(\overrightarrow{\Gamma_{S_n}}), \tilde{\leq})$ est un ensemble partiellement ordonné.

On obtient donc que $(T_{n+2}(\overrightarrow{\Gamma_{S_n}}), \tilde{\leq})$ est la représentation combinatoire du treillis Cambrian de S_n vu comme quotient de l'ordre faible.

Voilà qui complète cette section sur la représentation combinatoire du treillis Cambrian de type A_n . On peut voir le quotient S_n / \equiv_c comme l'ensemble des éléments c -triés muni de l'ordre faible, $(\text{Camb}_c(S_4), \leq)$ et maintenant aussi comme l'ensemble des triangulations associés aux permutations sans motifs $\bar{231}$ et $31\bar{2}$, muni de la relation d'ordre, $\tilde{\leq}$, $(T_{n+2}(\overrightarrow{\Gamma_{S_n}}), \tilde{\leq})$.

4.4 Énumération

Finalement, nous terminerons ce chapitre par une remarque fort intéressante. Miklos Bona a démontré que les permutations qui sont sans motif de longueur trois, sont comptées par les nombres de Catalan, voir [3]. En effet, soit $S_n(q) :=$ le nombre de permutation dans S_n qui sont sans motif q . On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.4.0.3. *Soit q un motif de longueur trois, alors on a que $S_n(q) = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.*

Les éléments du treillis Cambrian pour A_n sont sans motif de longueur trois. En effet, dépendamment de l'indexation induite par l'orientation, les permutations sont soit sans motif $\bar{2}31$ ou soit sans motif $31\bar{2}$, deux motifs de longueur trois. Ainsi, on a alors que le nombre d'éléments constituant le treillis Cambrian pour A_n est compté par les nombres de Catalan.

Exemple 4.4.0.4. Soient $A_5 = S_4$ et q un motif de longueur trois. On a alors, en appliquant le théorème, $S_4(q) = C_4 = 14$. On a bien que le treillis Cambrian de S_4 contient 14 éléments.

Est-ce que ce résultat se généralise à W quelconque? La réponse est oui! Reading a démontré, voir [10], que pour tout groupe de Coxeter fini W , avec $c \in W$, les éléments c -triés de W sont comptés par les nombres de W -Catalan. Les nombres de W -Catalan, qu'on note $Cat(W)$ sont les nombres de Catalan de type W . Ils sont donnés par la formule suivante : $Cat(W) = \prod_{i=1}^h \frac{d_i+h}{d_i}$ où $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n = h$ sont les degrés invariants de W . On trouve en outre :

$$Cat(A_n) = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}, Cat(B_n) = \binom{2n}{n} \text{ et } Cat(D_n) = \frac{3n-2}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Pour démontrer ce résultat, N. Reading construit une bijection entre les éléments c -triés de W et les c -grappes de W en utilisant le système de racines des groupes de Coxeter. Comme on sait que les c -grappes d'un groupe de Coxeter fini W sont comptées par les nombres W -Catalan, on a le résultat voulu.

CONCLUSION

Dans ce mémoire de maîtrise, nous avons examiné de près le treillis Cambrian. On a d'abord présenté le treillis Cambrian en utilisant les éléments c -triés. Nous avons démontré que l'ensemble des éléments c -triés d'un groupe de Coxeter W muni de l'ordre faible, forme un sous-treillis du treillis faible. Nous avons ensuite construit une congruence de treillis pour démontrer que le treillis Cambrian peut également être vu comme le treillis quotient de l'ordre faible. Finalement, nous avons présenté une autre façon de voir le treillis Cambrian de type A_n . Nous avons utilisé les triangulations d'un polygone à $n + 3$ cotés. Ces objets nous ont permis de donner une représentation combinatoire des treillis Cambrians de type A_n .

Les treillis Cambrians ont des liens forts avec la géométrie via les éventails Cambrian [14], mais aussi avec la théorie des algèbres amassées [6]. Liens qui restent à être mieux explorés.

Bibliographie

- (1) G. BIRKHOFF. *Lattice theory*. American Mathematical Society, 1967.
- (2) A. BJORNER, F. BRENTI. *Combinatorics of Coxeter groups*. Board, 2000.
- (3) M. BONA. *Combinatorics of permutations*. Chapman et Hall, 2004.
- (4) G. BOULAYE, A. KAUFMAN. *Théorie des treillis en vue des applications*. Masson, 1978.
- (5) B.A. DAVEY, H.A. PRIESTLEY. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, 1990.
- (6) S. FOMIN, A. ZELEVINSKY . *Cluster algebras II. Finite type classification*. Invent. Math., No.1, 2003.
- (7) G. GRÄTZER. *General Lattice Theory, Second edition*. Birkhauser, 1998.
- (8) J.E. HUMPHREYS. *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press, 1990.
- (9) N. READING. *Cambrian Lattices*, Adv. Math, No.2, 2006.

- (10) N. READING. *Clusters, Coxeter-sortable elements and noncrossing partitions*, Trans. Amer. Math. Soc., 2007

- (11) N. READING. *Sortable elements and Cambrian lattice*, Algebra Universalis No3-4, 2007.

- (12) N. READING, D.E. SPEYER. *Sortable elements in infinite Coxeter groups*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

- (13) N. READING. *Lattice congruences of the weak order*, Order 21, No.4, 2004

- (14) N. READING, D.E. SPEYER. *Cambrian fans*, J. Eur. Math. Soc. No.2, 2009.

- (15) G. SZASZ. *Theorie des treillis*. Dunod, 1971.

- (16) D. TAMARI. *The algebra of bracketings and their enumeration*. Nieuw Archief voor Wiskunde, 1962.