UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

DES FUTURS ENSEIGNANTS DU SECONDAIRE PARLENT DE LEUR PRÉPARATION MATHÉMATIQUE PAR LES MATHÉMATIQUES AVANCÉES: RÉINVESTISSEMENTS ET RUPTURES

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

DÉBORAH NADEAU

JANVIER 2013

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

« It may be more important in the mathematics class how you teach than what you teach. »
(Pólya, 1981, p.118, cité dans Hodgson, 2001, p. 505)

« La mathématique qui se fait plutôt que la mathématique toute faite. »
(Claude Janvier, tiré de Bednarz, Golding & Lefevre, 1997, p. vi)

« I believe this passionately: that we don't grow into creativity, we grow out of it. Or rather, we get educated out if it. » (Robinson, 2006)

REMERCIEMENTS

« Up to a point you welcome being interrupted because it is only by interacting with other people that you get anything done. »
(Freeman Dyson dans Robinson et Aronica, 2009, p. 117)

Je sais que je ne peux pas remercier tout le monde, mais je tiens à distinguer quelques personnes qui m'ont marquée dans mon cheminement de (très) jeune chercheuse. Même si le mémoire est à mon nom, il s'agit d'une œuvre inspirée de tous ces gens qui m'ont beaucoup apporté.

D'abord, j'aimerais remercier de tout mon cœur mon directeur, le professeur Jérôme Proulx, pour son appui inconditionnel tout au long de mes deux années de maîtrise. Ses grandes connaissances et sa passion pour le domaine m'ont guidée et inspirée à chaque étape de mon parcours. Il a été un mentor pour moi et continue de l'être aujourd'hui au doctorat.

J'aimerais aussi dire merci à mes collègues étudiants qui ont constamment été présents pour m'appuyer lors des rencontres du SÉDIM, mais aussi lors de nombreuses discussions de corridor. Je pense ici à Claudia, David, Doris, Mathieu et Sarah, avec qui j'ai adoré discuter et qui m'ont inspirée par leurs idées. Une pensée particulière pour Mathieu, qui m'a prise par la main en première année alors que ce monde de chercheurs était nouveau pour moi, et pour Doris, ma collègue de bureau de deuxième année, qui s'est intéressée à mes nombreuses questions et a su constamment stimuler ma réflexion lors de nos maintes discussions.

J'exprime aussi ma reconnaissance aux professeurs du département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal, tout particulièrement aux professeurs Nadine Bednarz, Jean-François Maheux et Caroline Lajoie, qui m'ont apporté beaucoup.

I also would also like to thank Dr. Mary Beisiegle from the Harvard School of Education, Cambridge, Massachusetts, with whom I did a research internship of two months in the Summer of 2011, for she has been a mentor for me. Her passion for the domain, her kindness and her openness to discussion will long inspire me.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis, tout particulièrement mon conjoint Marc Antoine, ma sœur Naomi et mon amie Valérie, qui ont eu confiance en moi depuis le début de mes études et qui m'ont constamment appuyée.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

RÉSUMÉ

La formation en mathématique avancée est beaucoup questionnée par la recherche. Les écrits sur ce type de formation soulignent des retombées divergentes, allant d'effets positifs à des effets négatifs, voire même d'aucun effet dans certains cas, sur les futurs enseignants par rapport à leur pratique de classe. On compte parmi ces retombées des réinvestissements au niveau des contenus, des réinvestissements métamathématiques et aussi des ruptures entre les mathématiques avancées et les mathématiques mobilisées en classe quant à la forme, la nature et la façon d'enseigner les mathématiques. Ma recherche offre des éclaircissements sur ces questions de formation mathématique des enseignants du secondaire par une entrée que j'ai appelée « la voix du formé ». En allant questionner directement les futurs enseignants vivant cette formation en mathématiques avancées, je veux ajouter aux écrits actuels des chercheurs et formateurs concernant la préparation mathématique des enseignants.

Ma recherche prend la forme d'une étude multicas où sept futurs enseignants ont participé à des entrevues semi-structurées. Lors des entrevues, les futurs enseignants ont partagé leurs expériences en mathématiques avancées et ils se sont questionnés sur des tâches reliées à l'enseignement des mathématiques au secondaire, qui ont stimulé chez eux une réflexion supplémentaire à l'égard de leur formation.

Mon étude apporte beaucoup à la réflexion récente déclenchée en recherche et en formation sur la question de la formation mathématique des enseignants de mathématiques au secondaire, tout particulièrement sur la formation mathématique par les cours en mathématiques avancées. Avec une entrée par l'expérience, ceux-là mêmes qui vivent cette formation, mes résultats de recherche bonifient les réinvestissements et les ruptures soulevés en recherche en les exemplifiant, en les précisant et en les nuançant. Les futurs enseignants de mon étude dévoilent aussi de nouvelles dimensions, comme l'impact sur leur confiance et leur identité mathématique. Finalement, mon étude montre que la question de la formation mathématique des enseignants du secondaire demeure une question complexe, qui ne peut pas être traitée de façon simpliste par des réponses tranchées.

Mots clés : formation mathématique, mathématiques avancées, futur enseignant, réinvestissements, ruptures.

INTRODUCTION

Ma recherche prend place dans le cadre de la formation mathématique des futurs enseignants. Plus précisément, elle s'intéresse au modèle usuel de formation en mathématiques avancées pour la préparation mathématique à l'enseignement des mathématiques au secondaire. Mon expérience personnelle de future enseignante, jumelée aux recherches qui questionnent ce modèle de formation (voir, entre autres, Ball, 1990; Even, 2011; Moreira et David, 2005, 2008; Proulx et Bednarz, 2010a; Tanguay, 2012; Usiskin, 2001; Zazkis et Leikin, 2010), m'a amenée à vouloir mieux comprendre comment les futurs enseignants conjuguent leurs expériences dans leurs cours de mathématiques avancées et leur préparation à devenir des enseignants de mathématiques au secondaire. Le corpus de recherche sur ce type de formation souligne des retombées divergentes : il fait ressortir des réinvestissements de la formation en mathématiques avancées dans la pratique de classe (voir, entre autres, Even, 2011; Zazkis et Leikin, 2010), mais aussi des ruptures entre les mathématiques avancées et les mathématiques mobilisées en classe (voir, entre autres, Proulx et Bednarz, 2010). Ces réinvestissements et ces ruptures sont vus à travers l'œil du chercheur et du formateur, qui peut différer de celui du futur enseignant. Ma recherche veut ainsi mieux comprendre la présence possible et la nature de ces réinvestissements et de ces ruptures en regardant le point de vue personnel des formés, soit les futurs enseignants vivant la formation.

Dans le premier chapitre, je situe la provenance de mon intérêt sur la formation mathématique des futurs enseignants de mathématiques au secondaire en partant de mon expérience personnelle. Ensuite, en me basant sur les recherches en didactique des mathématiques, je souligne les travaux faits et les questions soulevées relativement au modèle usuel de formation en mathématiques avancées, d'où nait ma problématique. Je présente aussi dans ce chapitre mon objectif et mes questions de recherche.

Dans le deuxième chapitre, je clarifie ce qui est entendu par « formation mathématique des futurs enseignants » en offrant une mise en perspective du corpus de recherche sur la nature des connaissances mathématiques requises par l'enseignant dans sa pratique et par un cadrage des travaux réalisés autour de la nature du travail mathématique privilégié à l'intérieur des initiatives de formation des enseignants.

Dans le troisième chapitre, je présente et justifie l'approche méthodologique choisie pour arriver à répondre à mes objectifs de recherche, soit des entrevues semi-structurées avec sept futurs enseignants. Je présente ainsi les sujets retenus, leur programme de formation, la structure des entrevues (questions et tâches), mes outils de cueillette de données (enregistrement audio et journal de bord) et les conditions d'expérimentation.

Dans le quatrième chapitre, je présente la grille d'analyse utilisée pour traiter mes données, et je fais ensuite l'analyse individuelle des futurs enseignants qui ont participé à mon étude.

Dans le cinquième chapitre, je discute des résultats en faisant une analyse transversale des cas. Notamment, je compare la voix des futurs enseignants avec la littérature actuelle en recherche, pour ainsi faire ressortir comment ma recherche bonifie le corpus de recherche et s'y jumèle.

Dans la conclusion, j'aborde à nouveau mes questions de recherche en faisant ressortir des thématiques importantes qui permettent de voir ce que ma recherche apporte au domaine de recherche. J'ouvre ensuite sur des retombées et des pistes pour la formation des futurs enseignants, pour terminer avec une piste pour mes recherches ultérieures.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 Origine de mon questionnement de recherche : mon vécu comme future enseignante

La formation pour les futurs enseignants de mathématiques au secondaire offerte par la majorité des universités canadiennes (sauf au Québec) comprend trois ou quatre années de formation disciplinaire en mathématiques et une ou deux années de pédagogie. J'ai fait ma formation pour être enseignante de mathématiques au secondaire dans ce contexte. Durant cette formation, j'ai suivi de nombreux cours de mathématiques avancées[1] dans un département de mathématiques où nous, les futurs enseignants, suivions nos cours de mathématiques avec des futurs mathématiciens, physiciens, ingénieurs, etc. Ces heures passées à étudier ces mathématiques avancées ont souvent été accompagnées de nombreux questionnements chez moi, comme future enseignante, concernant l'apport réel de ces notions mathématiques pour mes pratiques futures d'enseignante au secondaire. Mais, en plus de ces nombreux questionnements, les cours que j'ai suivis en mathématiques avancées m'ont été donnés de façon magistrale, pendant lesquels j'avais à copier des définitions, des axiomes et des théorèmes pour ensuite les mettre en pratique dans des devoirs, des travaux pratiques et des examens. Quoiqu'elles me passionnassent, les mathématiques pour moi étaient à ce moment une science morte représentant une vérité absolue déjà toute faite.

Le reste de ma formation était axé sur des cours centrés sur l'aspect pédagogique de l'enseignement : sur la différenciation des approches d'enseignement, la gestion de classe, la motivation des élèves, la planification des cours, l'évaluation des apprentissages, etc. Rien,

[1] On parle ici des cours de mathématiques avancées habituels qu'on donne dans un baccalauréat universitaire en mathématiques, comme analyse matricielle, analyse réelle, équations différentielles ou théories des nombres.

ou presque, n'était fait dans ces cours autour de l'enseignement des *mathématiques* proprement dit, ou des mathématiques de l'école comme telles. De plus, les tâches dans ces cours d'éducation portaient sur des aspects généraux et rares étaient les exemples concrets tirés d'une classe de mathématiques, encore moins d'une classe du secondaire. Plusieurs de mes formateurs généralistes essayaient souvent d'intégrer un contexte de classe en lien avec nos disciplines d'enseignement, mais la plupart finissaient par dire que ces liens seraient faits dans notre cours de didactique disciplinaire (dans mon cas, celui de didactique des mathématiques). Mon seul cours de didactique des mathématiques, quoique pertinent, fut pour moi clairement insuffisant pour m'aider comme future enseignante à faire des liens et établir des ponts entre mes compréhensions développées dans mes cours de mathématiques avancées et mon enseignement des mathématiques à l'école.

Ma formation comportait aussi des stages d'enseignement. C'est au cours de ces stages que les questionnements vécus dans ma formation, à travers mes divers cours, sont devenus de plus en plus présents. Les deux exemples suivants sont révélateurs pour moi de ce vécu et de mes questionnements.

Premier exemple : Au cours de mon troisième stage d'enseignement de mathématiques, en fin de secondaire, mon enseignante associée m'a demandé si je connaissais des stratégies d'enseignement des mathématiques novatrices apprises à l'université que j'aimerais essayer en salle de classe avec les élèves. J'ai à ce moment eu un malaise, voire une certaine honte, car je n'avais malheureusement peu ou pas d'idées reliées à l'enseignement des mathématiques, donc rien vraiment à essayer en particulier. Je me disais que les futurs enseignants ayant profité au maximum de leur formation devaient pouvoir minimalement faire autrement que ce qu'ils avaient vécu comme élèves au secondaire, ou tout au moins avoir été initiés à des aspects novateurs en enseignement des mathématiques. Qu'avais-je à apporter de plus à l'enseignement des mathématiques dans ma communauté? Et qu'est-ce que mes études avaient apporté à mon enseignement? Des théories générales y étaient, par exemple l'idée de partir des connaissances antérieures des élèves pour leur faire construire de nouvelles connaissances ou encore la notion de différencier les activités d'apprentissage, mais ce n'était toutefois pas clair pour moi la façon de mettre tout ceci en route dans une classe de *mathématiques*, en fonction de contenus mathématiques spécifiques et des compréhensions mathématiques des élèves. Je me questionnais sur ce que les élèves connaissaient en arrivant dans mon cours et avec quels concepts ils auraient des difficultés. Mais j'en savais peu. Les enseignants autour de moi me disaient que cela viendrait avec les années d'expérience en enseignement. Mais, me disais-je, devais-je attendre d'avoir cette expérience pour comprendre ou naviguer à travers ces compréhensions mathématiques des élèves? Ne devais-je pas avoir acquis une certaine aisance, déjà, avec ma formation initiale? Je me questionnais aussi sur ce que j'avais mal compris durant mes cours pour avoir de telles difficultés à appliquer ces approches pédagogiques générales dans le cadre de mon enseignement des mathématiques. Pourquoi avais-je maintenant tant de difficultés à présenter un concept mathématique à mes élèves, d'une façon qui leur serait compréhensible, dans leur « langage » et à leur niveau?

Deuxième exemple : Mon expérience comme stagiaire dans les classes du secondaire avec les élèves m'a fait prendre conscience que mes compréhensions mathématiques relevaient davantage des mathématiques avancées, et non des mathématiques de l'école. En effet, après tous mes cours de mathématiques avancées bien réussis, j'avais en tant qu'enseignante d'énormes difficultés à me mettre dans la peau de mes élèves, à leur place à eux, et à partir de leurs propres connaissances et compréhensions mathématiques. Toutes ces idées et notions mathématiques, si évidentes pour moi, étaient loin de l'être pour mes élèves. Par exemple, l'un de mes premiers cours du chapitre *Exposants et logarithmes* consistait à faire résoudre les équations suivantes.

$$\boxed{8^{(x-3)} = 2^{(2(x-2))};\ 8^{(3x-2)} = 16^{(x+1)};\ 27^{(x-3)} = (1/9)^{(2x-5)};\ 8^{(x+6)}/(16^{(2x-1)} = 32^{(3x-4)})}$$

À la fin du cours, un élève est venu me voir pour m'expliquer que tout aurait été tellement plus facile si, dès le début de mes enseignements, j'avais fait un retour sur les lois des exposants et sur des applications et exemples simples comme $x^5/x^3 = x^2$ et $x^5x^2 = x^7$. Difficile pour moi d'avoir su ceci à cet instant, car je croyais que tous mes élèves voyaient comme moi le « sens » des exposants, comme si ceux-ci parlaient de soi, et que les explications que je donnais étaient claires, voire transparentes. Par contre, plus le cours avançait et plus je voyais bien se tracer les difficultés des élèves. Je n'avais toutefois pas de ressources mathématiques pour aider ces élèves, si ce n'était que d'expliquer à nouveau : tous ces concepts étaient faciles pour moi et allaient presque de soi (mais était-ce vraiment le cas?). Il devenait de plus en plus évident qu'il me manquait quelque chose, moi l'étudiante ayant réussi tous mes cours à la formation des enseignants et ayant même reçu des prix de mérite pour mes résultats académiques. Quelque chose n'allait clairement pas dans ma façon de travailler les mathématiques du secondaire dans mon enseignement.

Ces expériences et questionnements que j'ai vécus, illustrés ici par ces deux exemples, m'ont amenée à vouloir en savoir plus sur la façon de former et de préparer les enseignants de mathématiques. Tout particulièrement, je voulais en savoir plus sur la préparation *mathématique* nécessaire pour pouvoir agir efficacement dans une classe du secondaire en mathématiques. À titre d'exemple, comment préparer les futurs enseignants : à réfléchir et à analyser, voire construire, différents exercices et activités mathématiques pertinents; à réfléchir et prévoir les apprentissages et difficultés des élèves en abordant ces exercices en classe; à analyser la variété de compréhensions et le niveau mathématique des différents élèves d'une classe afin d'intervenir en conséquence; à pouvoir expliquer oralement et par écrit les mathématiques et leur donner un sens; à expliquer le même concept, mais de différentes manières; à utiliser des représentations visuelles (dessin, matériel) qui aideront à mieux faire comprendre les concepts; et à bien d'autres choses. C'est d'ici qu'émerge tout mon questionnement duquel découle mon projet de maîtrise.

Cela dit, mon expérience étant la mienne, j'ai été captivée dès le début de ma maîtrise par le fait que des recherches ont été conduites autour de ces mêmes questions. Ceci m'a fait réaliser que mes expériences n'étaient pas isolées et que mes questionnements trouvaient écho dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques, autour des questions de formation mathématique des enseignants et de la présence de ruptures, ou de certains écarts, existant entre les expériences mathématiques vécues à la formation des enseignants et celles vécues au quotidien de leur classe. Ces recherches donnent en effet une toute nouvelle pertinence à ce que j'ai vécu comme enseignante en formation, mais surtout à mes intérêts personnels pour ma recherche de maîtrise. Mes expériences vécues et leur maillage avec les travaux de recherche représentent le point de départ de mon mémoire, qui vise à mieux comprendre le phénomène de la formation en mathématiques avancées comme préparation à l'enseignement des mathématiques au secondaire. Dans les prochaines sections, j'explique comment les travaux de recherche en didactique des mathématiques abordent ces questions de formation mathématique des futurs enseignants, particulièrement sous l'angle de leur préparation vécue en mathématiques avancées.

1.2 Les recherches en didactique des mathématiques sur les questions de formation mathématique des enseignants

Tel que mentionné, les programmes de formations pour les futurs enseignants de mathématiques au secondaire offerts dans la majorité des universités canadiennes comprennent, de façon plus ou moins variable, trois ou quatre années de formation disciplinaire dans un département de mathématiques et une ou deux années de pédagogie dans un département d'éducation. Assurément, il en est ainsi pour différentes raisons. Il semble en effet logique et réfléchi de vouloir exiger de la part des enseignants un niveau de mathématiques plus avancé que celui qu'ils doivent enseigner. Toutefois, le corpus de recherche sur ce type de formation amène des résultats divergents. Certaines recherches soulèvent des côtés positifs aux expériences en mathématiques avancées, d'autres y voient des ruptures, et d'autres encore n'y trouvent aucun effet significatif pour l'enseignement. Je détaille ces trois pôles dans les prochaines sections.

1.2.1 L'effet presque nul

Il a longtemps été affirmé que plus un enseignant connaît de mathématiques, plus il sera efficace dans son enseignement, donc pour faire apprendre ses élèves. Toutefois, les études de Begle et Monk offrent à cet égard des résultats surprenants. Dans un premier temps, Begle (1979) a montré, à travers toutes les études qu'il a recensées, qu'aucune corrélation n'existait réellement entre les connaissances mathématiques des enseignants (en terme de nombre de cours universitaires suivis en mathématiques[2]) et la réussite de leurs élèves en mathématiques. De son côté, Monk (1994) a montré, dans son analyse, que l'amélioration des résultats des élèves augmente de façon très minime, voire insignifiante, jusqu'au cinquième cours universitaire suivi en mathématiques avancées par leurs enseignants; de plus, après le cinquième cours, cette influence est pratiquement nulle sur la performance des élèves. Ce

---

[2] Ce qui peut évidemment être une mesure discutable des connaissances mathématiques.

type de résultat amène même Begle à remettre en question la croyance que plus un enseignant en connait en mathématiques, plus il sera un enseignant efficace.

> « It is widely believed that the more a teacher knows about his subject matter, the more effective he will be as a teacher. The empirical literature suggests that this belief needs drastic modification and in fact suggests that once a teacher reaches a certain level of understanding of the subject matter, then further understanding contributes nothing to student achievement. » (Begle, 1979, p.51)

D'une certaine façon, les idées de Begle (1979) et de Monk (1994) suggèrent un effet presque nul de la formation en mathématiques avancées d'un enseignant sur l'apprentissage de ses élèves. C'est aussi le cas d'une étude un peu plus récente de Mapolelo (1999) qui a observé (en stage) et fait passé un entretien à trois stagiaires pour mieux comprendre leurs réflexions à travers leurs planifications de leçon, leurs enseignements et leurs retours post-enseignement. Les trois futurs enseignants choisis pour cette étude l'ont été pour leur haute performance en mathématiques avancées. L'intention était d'étudier la nature des compétences pédagogiques de trois étudiants performants en mathématiques. Grossièrement, le but était de voir si les meilleurs étudiants en mathématiques étaient aussi les meilleurs en enseignement. Or, malgré cette distinction quant à leurs connaissances mathématiques, Mapolelo fait ressortir qu'ils ont réussi de façon similaire aux autres stagiaires issus du même programme par rapport à leur enseignement des mathématiques. Par exemple, ils n'étaient pas plus habiles à improviser des activités ou des explications pour aider les élèves à améliorer leurs compréhensions des concepts. Ou encore, bien que les trois stagiaires connaissaient le contenu mathématique et que leur plan de leçon était détaillé, on retrouvait plusieurs lacunes mathématiques dans leur enseignement, au moment de l'action d'enseigner. Notamment, les explications de ces trois stagiaires étaient plus procédurales, axées sur les méthodes à suivre, que conceptuelles (ce qui était aussi le cas pour les autres stagiaires moins habiles en mathématiques). Ainsi, le niveau de mathématiques avancées ne semble pas avoir joué un rôle important ici par rapport à l'enseignement, en comparaison des autres stagiaires de ce même programme moins « outillés » mathématiquement ou ayant moins bien réussi les cours de mathématiques avancées. Les études de Begle (1979), Monk (1994) et Mapolelo (1999) se résument bien par la conclusion suivante du *National Center for research on teacher education* :

> « Researchers at the National Center for research on teacher education found that teachers who majored in the subject they were teaching often were not more able than other teacher to explain fundamental concepts in their discipline. » (NCRTE, 1991, cité dans CBMS, 2001, p.121)

Ces recherches aux résultats similaires font émerger de nombreux questionnements dans la communauté de recherche en didactique des mathématiques. Cet effet (presque) nul questionne les apports des expériences mathématiques avancées pour l'enseignement. Plusieurs chercheurs se sont depuis intéressés à comprendre de façon plus précise les expériences vécues dans les cours de mathématiques avancées comme préparation mathématique des enseignants (voir, par exemple, Even, 2011; Proulx, 2010; Zazkis et Leikin, 2010). Les deux sections suivantes scrutent, d'une part, les réinvestissements possibles d'une formation en mathématiques avancées et, d'autre part, les fossés possibles existant entre les expériences en mathématiques avancées et la pratique de classe au secondaire.

1.2.2 Les apports des mathématiques avancées et les aspects réinvestis

Pourquoi avoir des cours de mathématiques avancées à l'intérieur d'un programme à l'enseignement des mathématiques au secondaire? D'une part, pour Tanguay (2012), dans son récit réflexif, les mathématiques avancées permettent une clarification des concepts du secondaire, ou pour reprendre son expression « des concepts situés plus "bas" dans l'édifice » mathématique (p. 133). Non seulement existe-t-il d'innombrables liens, mais en plus cette clarté des idées en mathématiques avancées donne, selon lui, accès à de meilleures explications pour les mathématiques du secondaire. À travers leur formation en mathématiques avancées, le futur enseignant est amené à vivre une activité mathématique[3]. L'idée derrière cette activité mathématique, selon Tanguay (2012), est de développer chez l'étudiant diverses aptitudes mathématiques, comme poser et résoudre un problème, expérimenter, chercher des exemples et des contre-exemples, généraliser, définir, prouver ou formaliser. Et, à travers tout ça, être rigoureux. Pour Tanguay (2012), c'est cette qualité architectonique, soit les relations d'enchainement entre les concepts, les définitions, les justifications et les preuves, qui fait la beauté des mathématiques avancées. Bref, pour lui, les

---

[3] Ce concept d'activité mathématique sera repris plus en détail dans le cadre conceptuel (voir section 2.1.5).

mathématiques avancées permettent aux futurs enseignants de développer diverses aptitudes mathématiques et peuvent clarifier le contenu du secondaire.

D'autre part, les mathématiques avancéès initieraient les futurs enseignants à une validation rigoureuse lorsqu'ils sont amenés à définir, prouver, formaliser, abstraire, etc. Cette deuxième « beauté mathématique », comme la qualifie Tanguay (2012), serait une force des mathématiques. Comme nous le rappelle Glaeser (1973), plusieurs problèmes importants n'ont pu être résolus qu'au XX^{e} siècle parce que le langage imparfait d'autrefois n'était pas assez précis. Pour lui, les symboles concis sont des outils efficaces qui permettent de manier de grandes quantités d'information avec précision. En somme, les mathématiques avancées peuvent clarifier le contenu du secondaire et peuvent aussi initier à une certaine façon de faire des mathématiques qui est à la fois exploratoire et rigoureuse.

Ces réflexions informent des intentions que pourraient avoir certains formateurs qui donnent ou militent pour donner des cours de mathématiques avancées aux futurs enseignants. Toutefois, qu'est-ce que les futurs enseignants retiennent vraiment de ces cours? Comment les enseignants réinvestissent-ils leurs connaissances acquises en mathématiques avancées dans leur pratique de classe? ~~Ce sont des questions auxquelles mon mémoire veut~~ répondre. À cet effet, voici quelques exemples provenant de deux recherches qui se sont intéressées à ces questions, soient celles d'Even (2011) en Israël et de Zazkis et Leikin (2010) en Colombie-Britannique, au Canada. Mais, avant, je présente quelques précisions importantes sur ces deux études.

Dans son étude, Even (2011) cherche à voir les différentes raisons pour lesquelles les enseignants du secondaire trouvent leurs études en mathématiques avancées utiles pour leur pratique de classe. Les cours de mathématiques avancées dont elle parle se situent à l'intérieur d'un programme de maîtrise en science de l'éducation et ont comme objectif principal d'élargir la vision mathématique et la compréhension de ce que sont les mathématiques des enseignants : les formateurs-mathématiciens donnant ces cours disent vouloir montrer aux enseignants que les mathématiques sont un domaine vivant et excitant.

Même si on se retrouve ici assez loin de la plupart des cours traditionnels[4] de mathématiques avancées universitaires, il est intéressant de scruter ce que les enseignants retiennent de ces mathématiques avancées pour leur pratique. De leur côté, Zazkis et Leikin (2010) se sont intéressées aux cours de mathématiques avancées dans la formation initiale de l'enseignant qui varie, pour les participants de leur étude, d'un baccalauréat en mathématiques à une maîtrise en didactique des mathématiques (« mathematics education ») et même à une formation en sciences ou en ingénierie. Leur étude part de la prémisse que de travailler avec des contenus mathématiques avancés est une condition nécessaire (bien que non suffisante) pour développer des connaissances spécialisées pour l'enseignement au secondaire. Notons que dans les deux cas les participants sont, au moment de l'étude, des enseignants et non des étudiants à la formation initiale. Les études d'Even (2011) et de Zazkis et Leikin (2010) visaient donc à souligner les retombées « positives » des mathématiques avancées sur l'enseignement de ces enseignants, soit le réinvestissement qu'ils en font dans et pour leur pratique. Regardons ceci de plus près, sous deux composantes : les réinvestissements en lien avec le contenu mathématique et les réinvestissements dits « métamathématiques », pour reprendre l'expression de Zazkis et Leikin (2010).

1.2.2.1 Les réinvestissements au niveau des contenus

Les études d'Even (2011) et de Zazkis et Leikin (2010) font ressortir des contenus mathématiques vus en mathématiques avancées que les enseignants trouvent pertinents pour leur préparation mathématique. Dans l'étude de Zazkis et Leikin (2010), la plupart des enseignants ont mentionné que le cours de Calcul, dans lequel ils utilisent les dérivés, les limites et les asymptotes, est aidant à l'enseignement. Les chercheurs soulignent que ceci n'est pas surprenant, puisque ces contenus sont précisément ceux du dernier cours de mathématiques au niveau secondaire (12e année). Un exemple populaire qui ressort est l'utilisation du cours de Calcul pour analyser les graphiques de fonctions rationnelles, c'est-à-dire pour déterminer les points minimum et maximum et les points d'inflexion en faisant des liens avec les asymptotes, les limites et les points de discontinuité. D'autres contenus jugés

---

[4] J'entends par « cours traditionnels » les cours offerts de façon magistrale au cours desquels le professeur, détenteur de connaissances, transmet les concepts et théorèmes au tableau alors que les étudiants prennent des notes et font par la suite une série d'exercices sur les contenus vus au cours (Bauersfeld, 1994; Burton, 2004).

aidants par quelques enseignants étaient les probabilités et statistiques, sûrement, comme le soulignent les chercheurs, parce que ces contenus ont été introduits tout récemment dans la plupart des programmes d'études du secondaire dans le milieu de ces enseignants. De plus, autant pour Zazkis et Leikin (2010) que pour Even (2011), le cours d'histoire des mathématiques semble avoir eu un impact sur les enseignants, qui disent que ce cours leur donnent les outils et la motivation pour dédier du temps à l'histoire des mathématiques en classe en racontant des histoires sur des mathématiciens célèbres en lien avec les concepts du secondaire. Les autres contenus jugés pertinents dans les deux études permettaient surtout le pilotage d'activités d'enrichissement en classe : les enseignants avaient incorporé quelques problèmes, idées ou concepts mathématiques travaillés durant leurs cours de mathématiques avancées à travers des activités d'enrichissement. Zazkis et Leikin (2010) notent toutefois que, bien que tous les enseignants aient mentionné plusieurs cours/concepts mathématiques où les connaissances mathématiques avancées étaient utiles, les enseignants ont eu des difficultés significatives à fournir des exemples de problèmes ou de situations où ces connaissances mathématiques avancées ont été utilisées concrètement dans leur enseignement.

Bien que ces résultats puissent sembler évidents, dans ces études les contenus mathématiques réinvestis par les enseignants sont ceux en lien étroit avec les contenus du secondaire ou encore ceux qui clarifient et aident à comprendre d'une autre façon un contenu travaillé au secondaire. À ceci s'ajoute une autre dimension, que je souligne à la prochaine section, qui concerne les apprentissages « métamathématiques » des enseignants dans ces cours.

1.2.2.2 Le réinvestissement d'aspects « métamathématiques »

Au-delà des contenus, les futurs enseignants soutirent beaucoup de leur expérience globale dans leurs cours en mathématiques avancées (voir Even, 2011; Zazkis et Leikin, 2010). Il s'agit ici d'aspects à un degré plus « méta » des mathématiques, comme la vision des mathématiques et la compréhension de ce que signifie faire des mathématiques. Les apports des mathématiques avancées relevés par les enseignants dans les études d'Even (2011) et de Zazkis et Leikin (2010) varient énormément. Je présente les différents types de réinvestissements ressortis dans ce qui suit.

La façon de faire les mathématiques en salle de classe. Dans l'étude d'Even (2011), certains enseignants disent que d'étudier les mathématiques avec un mathématicien leur a vraiment permis, à travers leurs cours de mathématiques avancées (qui ne sont pas ici donnés de façon « traditionnelle »), de comprendre ce qu'étaient les mathématiques et ce que signifiait faire des mathématiques. Tout particulièrement, ils ont appris sur la résolution de problèmes, sur la puissance des représentations visuelles, sur les preuves et sur le fait que les mathématiques sont un domaine « vivant » et qu'elles évoluent. Ainsi, la façon dont les mathématiques étaient enseignées/faites dans leurs cours de mathématiques avancées les a inspirés à vouloir changer leur façon d'enseigner les mathématiques. Par exemple, au lieu de donner des problèmes à faire juste après avoir donné l'outil nécessaire pour résoudre le problème, ces enseignants veulent maintenant amener les élèves à chercher des outils convenables, comme en résolution de problème. Une autre enseignante de l'étude d'Even (2011) dit avoir réalisé la contribution des représentations visuelles pour résoudre des problèmes lorsque le professeur présentait la matière de façon algébrique et géométrique simultanément, les liens faits entre les deux types de représentations lui montrant la « puissance » de la géométrie. Ainsi, la façon de faire les mathématiques du professeur, qui n'était pas traditionnelle, a été aidante pour ces enseignants au plan mathématique, tout particulièrement sur ce que signifie faire et enseigner des mathématiques.

Une démarche et un langage précis. Les enseignants de l'étude de Zazkis et Leikin (2010) disent que suivre des cours de mathématiques avancées où l'on exige une démarche et un langage précis les a amenés à vouloir encourager cette précision dans leur classe pour éviter que les élèves utilisent des expressions peu soignées. Par exemple, une enseignante partage un moment où elle demande à son élève de reformuler « ces angles font 180 » en espérant une expression du type « la somme de la mesure des angles est de 180 degrés ». Ceci rappelle les propos du mathématicien George Glaeser (1973) pour qui une communication efficace en mathématique se fait avec un langage symbolique précis.

Les difficultés en mathématiques. Dans l'étude d'Even (2011), les cours de mathématiques avancées ont sensibilisé certains enseignants aux difficultés et aux frustrations des élèves qui ne réussissent pas. Par exemple, un enseignant explique qu'il est parfois difficile de comprendre les frustrations des élèves, car lorsqu'il enseigne la matière, tout est clair pour lui. Toutefois, son propre sentiment d'incapacité lorsqu'il fait face à un problème complexe dans ses cours de mathématiques avancées lui a rappelé, en tant qu'enseignant, le vécu des élèves qui vivent des difficultés dans sa classe.

Le panorama mathématique. Les enseignants de l'étude de Zazkis et Leikin (2010) expliquent que les mathématiques avancées leur permettent d'obtenir un meilleur portrait du champ mathématique. Ils parlent en termes de « better picture », de « whole picture », de « sense of terrain » et de « bridge between topics ». Pour eux, les mathématiques avancées leur permettent d'aller au-delà des contenus du programme d'études du secondaire et de construire un portrait plus global de ce que sont les mathématiques. De plus, elles leur permettent de faire des ponts entre les concepts, des liens qu'ils ne voyaient pas vraiment au secondaire. Les enseignants de cette étude partagent qu'ils veulent à leur tour transmettre à leurs élèves ce grand portrait des mathématiques, en leur montrant des liens entre les mathématiques du secondaire et les mathématiques avancées (ils ne donnent toutefois pas d'exemples précis de ces liens).

Les liens entre les mathématiques et la vie réelle. Les enseignants des études d'Even (2011) et de Zazkis et Leikin (2010) partagent que leur formation en mathématiques avancées leur a permis de faire des liens entre les mathématiques et la vie réelle, des liens qu'ils veulent à leur tour montrer à leurs élèves. En particulier, dans l'étude d'Even (2011), certains cours de mathématiques avancées que les enseignants ont suivis traitent explicitement de l'utilisation des mathématiques dans la vie réelle, comme l'utilisation des mathématiques en sciences naturelles ou en sciences sociales. Les enseignants donnent quelques exemples : les mathématiques avancées leur permettent de mieux comprendre comment les mathématiques sont utilisées pour modéliser des problèmes de la vie réelle, comme en architecture, ou comment les probabilités sont utilisées pour assurer qu'un édifice résiste aux inondations; elles leur permettent de montrer à leurs élèves comment les mathématiques sont importantes à un plus haut niveau, par exemple le fait que les codes de sécurité internet soient difficiles à déchiffrer car il est difficile d'en trouver les facteurs, ce qui est en lien avec la factorisation au secondaire. Aussi, les enseignants expriment qu'ils veulent à leur tour utiliser dans leur salle de classe des exemples vus dans leurs cours de mathématiques avancées, comme la dynamique des populations en biologie.

La confiance. Quoique la confiance ne soit pas vraiment un aspect métamathématique, elle est tirée de l'expérience globale en mathématiques avancées des enseignants de ces études. Dans l'étude de Zazkis et Leikin (2010), certains participants disent être plus confiants et plus confortables dans leur enseignement des mathématiques du secondaire après leur formation en mathématique avancée, parce qu'ils en savent maintenant plus en mathématiques que leurs élèves du secondaire ou encore parce qu'ils sont capables d'effectuer certaines tâches plus rapidement et qu'ils peuvent répondre aux questions des élèves en ce qui concerne leur future carrière. Ces aptitudes développées leur donnent confiance en tant qu'enseignants.

Ces aspects métamathématiques, et les réinvestissements mathématiques soulignés plus tôt, donnent une bonne idée des retombées possibles pour la pratique de classe des connaissances en mathématiques avancées acquises durant la formation. Toutefois, plusieurs chercheurs se sont aussi penchés sur les retombées plus « négatives » de ces diverses expériences en mathématiques avancées, particulièrement aux fossés qu'elles créent avec les mathématiques mobilisées par l'enseignant dans sa pratique de classe. La prochaine section traite de ces aspects.

1.2.3 Les ruptures possibles

Au contraire des réinvestissements, diverses recherches ont parlé récemment en termes d'une déconnexion, voir de ruptures, entre la formation en mathématiques avancées et les mathématiques mobilisées en classe du secondaire. Plusieurs auteurs insistent sur le fait que les expériences mathématiques vécues par les futurs enseignants du secondaire dans les cours de mathématiques avancées diffèrent considérablement des expériences mathématiques qu'ils vivront dans leurs pratiques (voir Ball, 1990; Bauersfeld, 1994; Moreira et David, 2005, 2008; Proulx, 2010). En particulier, trois dimensions de ruptures ont été précisées entre les mathématiques avancées et les mathématiques de la classe, et ce, du point de vue de la recherche, soit : (1) l'aspect formel et symbolique des mathématiques avancées, (2) la nature compressée des mathématiques avancées et (3) la manière dont ces dernières sont approchées à l'intérieur des cours. Proulx et Bednarz (2010a) offrent à ce sujet une revue de la littérature qui guidera mes propos dans la prochaine section. Des illustrations concrètes de ces difficultés se retrouvent dans la littérature et me servent d'exemples pour appuyer et illustrer cette idée de ruptures, qui questionne les liens entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire.

1.2.3.1 Formes des contenus : des mathématiques écrites et parlées au niveau formel et dans un symbolisme accru

Certaines recherches montrent que les cours de mathématiques avancées font usage d'un symbolisme accru (Corriveau et Tanguay, 2007; Moreira et David, 2005, 2008; Fulvi, 2010). Comme nous le rappellent Corriveau et Tanguay (2007), dans ces cours les étudiants sont submergés de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux, en plus des nouvelles exigences en matière de formalisation. Voici deux exemples clarifiant ces propos.

Exemple 1 : Les systèmes d'équations. Le manuel *Algèbre linéaire* (Lipschutz et Lipson, 2003), utilisé dans certains cours universitaires en algèbre matricielle et en algèbre linéaire, introduit les systèmes d'équations linéaires en disant que les techniques abordées (méthode de Gauss, par exemple) serviront de support aux notions abstraites des chapitres suivants (espaces vectoriels, applications linéaires et matrices, produit scalaire, etc.). Une grande partie du chapitre est consacrée à de nouvelles définitions (forme triangulaire, variables pivots, variables libres, matrice échelon, forme canonique, etc.) et à de nouveaux théorèmes. Regardons la définition d'un système d'équations linéaires.

> Un *système d'équations linéaires* est une famille d'équations linéaires avec les mêmes inconnues. Par exemple, un système de m équations L_1, L_2, ..., L_m, à n inconnues x_1, $x_2, \ldots, x_n$ peut se mettre sous la forme canonique :
>
> $$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1$$
> $$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2$$
> $$\ldots$$
> $$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m$$
>
> où les a_{ij} et les b_i sont des constantes. La quantité a_{ij} est le coefficient de l'inconnue x_j dans l'équation L_i, et b_i est le terme constant ou second membre de l'équation L_i. (p.73)

La définition d'un système d'équations linéaires illustre bien le symbolisme attendu en mathématiques avancées. On parle de systèmes d'équations de façon plus générale, c'est-à-dire en le définissant avec un nombre quelconque d'équations linéaires (1 à m) et un nombre quelconque d'inconnues (1 à n), en prenant bien soin d'associer des symboles aux constantes (a_{ij}), aux inconnues (x_n) et même aux équations (L_m). Ceci contraste avec ce qui est fait dans un manuel du secondaire.

Le manuel *Omnimath11* (Knill *et al.*, 2005) utilisé au secondaire, en 11e année, définit un système d'équations de la façon suivante :

> Un système d'équations consiste en deux ou plusieurs équations qu'on examine en relation les unes avec les autres. La solution d'un système d'équations doit satisfaire à toutes les équations. (p. 6)

Dès le premier coup d'œil, on voit que le niveau de symbolisme et de formalisme est différent. Alors qu'au niveau universitaire on parle d'inconnues $x_1, x_2,\ldots,x_n$, de constantes a_{ij} et les b_i, de forme canonique, etc., au secondaire on se penche davantage sur l'idée de base du système d'équations, qui est que la solution satisfait simultanément à chacune des équations. Ainsi, dans sa salle de classe, l'enseignant du secondaire ne met pas l'accent sur la symbolisation ou le formalisme. En fait, comme le suggère Proulx *et al.* (2009), l'idée centrale au secondaire est de présenter l'intérêt d'utiliser un système d'équations, d'utiliser de multiples représentations et de multiples méthodes pour résoudre et interpréter une solution et ainsi mieux comprendre les systèmes d'équations; non pour aller plus loin après, mais pour les comprendre, eux.

En mathématiques avancées on travaille les systèmes d'équations de façon formelle et symbolique, ce qui en retour donne un sens au concept, alors qu'au secondaire on travaille le concept en soi, à travers les diverses représentations. Le symbolisme y est moins présent. Voici un deuxième exemple.

Exemple 2 : les nombres naturels. Moreira et David (2005) soulignent un fossé existant entre les mathématiques avancées et les mathématiques de la pratique de classe, en prenant l'exemple des ensembles de nombres. Une différence est qu'en mathématiques avancées on « unifie » toutes les interprétations des nombres rationnels de façon formelle et symbolique, par exemple que le nombre rationnel est une classe équivalente de nombres entiers qui suivent la relation $(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$. Alors qu'à l'école, où le concept du nombre rationnel est plutôt connu sous forme de fraction, on veut le décortiquer et comprendre les diverses manières de l'interpréter. Par exemple, on travaille différents sens de la fraction, comme « partie d'un tout », « rapport », « quotient ou résultat d'une division », « nombre », etc. (voir, par exemple, Poirier, 2001; Proulx et Corriveau, 2011). Dans cet exemple, on peut voir qu'il y a une distanciation entre les mathématiques avancées et la réalité scolaire, quant à l'intensité de l'intervention du symbolisme pour définir et cadrer les concepts.

Les cours de mathématiques avancées présentent les mathématiques sous une forme hautement symbolisée et formalisée, ce qui n'est pas le cas ou l'intention au secondaire. Malgré cette distance, l'idée n'est pas de voir négativement le haut niveau de symbolisme des mathématiques avancées. Comme l'explique le mathématicien George Glaeser (1973), les symboles concis représentent un outil efficace qui permet de manier de grandes quantités d'informations avec précision[5]. Les symboles deviennent pour le mathématicien un moyen de communication formel, un langage symbolique qui finit par parler par lui-même. Toutefois, le problème se situe davantage dans le fossé qui se crée entre les mathématiques avancées et les mathématiques de la classe. En effet, Proulx (2010) montre à travers l'analyse de sa pratique de formateur que ce niveau avancé de symbolisation entraîne chez les futurs enseignants une difficulté à sortir de l'abstrait et du formalisme pour rendre les mathématiques accessibles aux élèves. Lors de leur formation, les futurs enseignants développent certains habitus (au sens de Bauersfeld, 1994), telle une certaine facilité à jouer avec les symboles et les mathématiques formelles, qui peuvent devenir un obstacle à leur pratique. Proulx (2010) explique que les futurs enseignants avec un baccalauréat en mathématique considèrent souvent, au premier coup d'œil, les concepts mathématiques développés au secondaire comme étant faciles et non problématiques à enseigner conceptuellement, ce qui amène ces futurs enseignants à vouloir peu s'engager sur leur sens sous-jacent et à décortiquer les concepts mathématiques. Ceci, entre autres, les amène à utiliser diverses procédures mathématiques, algorithmes et symboles, sans réaliser le besoin ou l'intérêt de comprendre la signification de celles-ci, comme si ces aspects allaient de soi et étaient simples à expliquer. Dionne (2000) et Gattuso (2000) expliquent qu'en enseignement des mathématiques, souvent, le symbolisme mathématique prime : on utilise le symbolisme pour expliquer les idées comme s'il parlait de lui-même, sans s'attarder à travailler le sens

---

[5] Glaeser (1973) souligne aussi que plusieurs problèmes importants n'ont pu être résolus qu'au 20e siècle parce que le langage imparfait d'autrefois n'était pas assez précis.

sous-jacent aux concepts. Pour Bednarz (2001), l'enseignement des mathématiques au secondaire et la façon de parler les mathématiques ne devraient pas être axés sur le symbolisme et son unique utilisation, mais plutôt sur la signification sous-jacente au symbolisme. En un mot, comme le soulignent bien Sierpinksa *et al.* (1999), repris par Corriveau et Tanguay (2007) :

> « L'obstacle du formalisme se manifeste chez les étudiants qui opèrent sur la forme des expressions, sans considérer ces expressions comme faisant référence à autre chose qu'à elles-mêmes. » (p. 8)

Un exemple d'obstacle se trouve dans l'étude de Nathan et Koedinger (2000), où les enseignants sous-estiment les difficultés que les élèves éprouvent avec les problèmes sous forme symbolique. Pour les enseignants participants, des problèmes écrits de type « Lorsque Ted est revenue du restaurant où il était serveur, il a multiplié son taux horaire par les 6 heures qu'il avait travaillées aujourd'hui. Il a ensuite ajouté les 66 $ qu'il a gagnés en pourboire et a trouvé qu'il a gagné 81,90$. Quel est le taux horaire de Ted? » (ma traduction, Nathan et Koedinger, 2000, p. 170) sont considérés plus difficiles pour les élèves que les problèmes présentés sous forme symbolique de type $x \times 6 + 66 = 81,90$. La majorité des enseignants croit que les élèves apprennent à raisonner avec les symboles avant de raisonner avec les problèmes écrits. Or, lorsque leurs élèves ont réalisé ces tâches, ceux-ci ont mieux réussi avec les problèmes écrits, et ce, souvent avec des méthodes informelles (par exemple par essai-erreur ou en appliquant les opérateurs inverses pour retrouver le nombre du début). Nathan et Koedinger (2000) émettent l'hypothèse que c'est la facilité de l'enseignant à manipuler les symboles algébriques qui les a amenés à sous-estimer la difficulté du symbolisme pour les élèves. Cet exemple met de l'avant l'idée que le symbolisme renforcé lors des cours de mathématiques avancées n'est pas sans conséquence sur la pratique future de l'enseignant.

Cette difficulté de donner un sens aux symboles est aussi illustrée dans l'étude de Thompson et Thompson (1994, 1996) où l'enseignant, nommé Bill, fait preuve d'une compréhension avancée et formalisée du concept de taux de variation et de vitesse ($v = d/t$). Sa préparation universitaire en mathématique consiste en deux semestres de cours de calculs, en plus d'une qualification en sciences physiques et biologiques. Pour lui, les calculs et les opérations sont en eux-mêmes dotés de sens, et donc suffisants pour l'explication de l'enseignant et la compréhension du concept par l'élève. Dans ce cas, Bill relie les différentes significations de la division (peut-être inconsciemment), c'est-à-dire que, pour lui, une fois qu'on comprend comment trouver une des trois variables à partir des deux autres, alors on peut le faire pour n'importe laquelle des variables ($d = v \times t \Rightarrow v = d \div t$; $t = d \div v$). Toutefois, Ann, son élève, peut uniquement trouver le temps si elle connait la distance et la vitesse, mais elle ne peut trouver la vitesse si elle connaît le temps et la distance. En fait, Ann ne raisonne pas avec la division (comme Bill le fait et pense qu'elle le fait), mais plutôt en termes de mesure, où la vitesse est un bâton de mesure. Sa tâche est alors de déterminer combien de bâtons (s) entrent dans la distance pour trouver le temps (figure 1.1). Le raisonnement d'Ann est du type « il y a cinq bâtons de 20 mètres par seconde (m/s) dans 100 m, donc ça prend cinq secondes » et non « 100mètres divisés par 20 m/s donnent 5 secondes »; elle ne voit pas la relation multiplicative entre la vitesse, le temps et la distance.

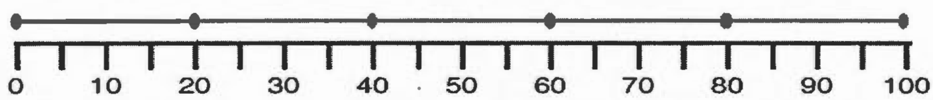


Figure 1.1 Cinq bâtons de 20 m/s sur une droite de 100 m.

Bill se retrouve alors incapable de verbaliser clairement son raisonnement proportionnel et d'expliquer le sens des équations/formules pour le rendre accessible à Ann, en plus de ne pas voir la différence entre son raisonnement et celui d'Ann. Ceci crée une rupture entre eux et ils n'arrivent plus du tout à se comprendre l'un et l'autre. L'élève Ann est complètement perdue, alors que pour Bill tout semble aller de soi dans les équations et symboles utilisés. Ceci exemplifie la difficulté pour Bill de donner une signification aux symboles, puisqu'il est d'une certaine façon déconnecté de leurs apprentissages.

Ces études et ces exemples mettent de l'avant l'idée que le symbolisme et le formalisme renforcé lors des cours de mathématiques avancées ne sont pas sans conséquence sur la pratique future de l'enseignant. Ils provoquent une distance sur la manière d'écrire et de parler les mathématiques, créant ainsi une rupture entre les mathématiques avancées, où le symbolisme prime, et les mathématiques de la pratique de classe. En plus de cet aspect sur la façon de parler et d'écrire les mathématiques avancées, qui sont formelles et symboliques, un autre aspect souligné par la recherche est le caractère compressé des mathématiques avancées. J'explore cette dimension dans la section suivante.

1.2.3.2 La nature des contenus : des mathématiques compressées

En plus de leur forme hautement symbolisée, les mathématiques avancées ont été décrites comme étant très compactes et peu transparentes. Pour Adler et Davis (2006) et pour Moreira et David (2005), il est dans la nature des mathématiques avancées d'être *compressées*. Pour les mathématiciens de l'étude de Burton (2004), cette compression fait partie de la beauté des mathématiques.

> « The mathematicians associated positive feelings with aspects of the aesthetics of the culture of mathematics. They mentioned succinctness, compactness or conciseness, all of which help in generating and evaluating mathematical aesthetics but are also regarded as culturally functional. » (p. 183)

En effet, cette compression est centrale aux mathématiques avancées, et s'avère une force puisqu'elle les rend plus faciles à utiliser. Cette concision en mathématiques avancées permet d'avancer sur des nouvelles idées, alors qu'on part d'un concept pour se rendre au prochain et qu'on avance plus loin.

> « A powerful characteristic of mathematics is its capacity to compress information into abstract and highly usable forms. When ideas are represented in compressed symbolic form, their structure becomes evident, and new ideas and actions are possible because of the simplification afforded by the compression and abstraction. Mathematicians rely on this compression in their work. » (Ball et Bass, 2003, p. 11)

L'exemple précédent avec les systèmes d'équations en est une illustration. En effet, dans la présentation des systèmes d'équations on ne s'intéresse pas nécessairement à travailler leurs sens sous-jacents, mais, comme les auteurs Lipschutz et Lipson (2003) l'expliquent, les techniques abordés pour résoudre les systèmes d'équations linéaires servent de support aux notions abstraites des chapitres suivants (espaces vectoriels, applications linéaires et matrices, produit scalaire, etc.). On veut en effet aller plus loin et se servir des concepts vus pour continuer d'avancer sur d'autres concepts et d'autres résolutions.

Le problème n'est pas la compression des concepts dans ces cours de mathématiques avancées, mais plutôt que certains de ces concepts sont les contenus exacts qui sont enseignés au secondaire et avec lesquels les enseignants doivent travailler en classe. Ce sont donc ici les mathématiques du secondaire qui sont compressées en mathématiques avancées. Pourtant, comme l'expriment Ball et Bass (2003), même si une telle conception compressée se révèle fort utile pour le travail du mathématicien, elle est inadéquate pour l'enseignement des mathématiques. Dans sa pratique, l'enseignant se doit de décortiquer et décompresser les concepts mathématiques qu'il enseigne aux élèves (Ball et Bass, 2000, 2003; Bednarz, 2001; Adler et Davis, 2006; Huillet, 2009), ceci afin de faire ressortir le sens, les relations, les nuances et les subtilités cachés sous les concepts et procédures, dans le but de rendre les mathématiques accessibles aux élèves et favoriser leur compréhension (Proulx, 2010).

On entrevoit ici une rupture entre la vision compacte des mathématiques venant des mathématiques avancées et l'enseignement de mathématiques en classe. Mais il y a plus, car cet écart a des conséquences sur la pratique des futurs enseignants. Comme l'explique Proulx (2010) dans son récit de pratique de formateur, ces futurs enseignants avec un baccalauréat en mathématique trouvent souvent les concepts mathématiques développés au secondaire faciles, donc simples à enseigner conceptuellement, de telle sorte qu'ils sont souvent peu portés à s'attarder à leur sens sous-jacent. Ils ont tendance à utiliser diverses procédures mathématiques et algorithmes sans réaliser le besoin ou l'intérêt de les décompresser, de comprendre leur signification, comme si ces concepts allaient de soi et étaient simples à expliquer. Sfard et Linchevski (1994) soulignent, en prenant l'exemple de l'algèbre, que certaines difficultés deviennent imperceptibles lorsque quelqu'un devient habile avec un concept.

> « True, once we manage to overcome this difficulty, it is quickly forgotten. To those who are well versed in algebraic manipulation (teachers among them), it may soon become totally imperceptible. » (Sfard et Linchevski, 1994, p. 199)

La difficulté de travailler le sens sous-jacent aux algorithmes, de les décortiquer, est représentée dans l'étude d'Eisenhart *et al.* (1993). Ces chercheurs donnent l'exemple d'une enseignante, Mme Daniels, qui ne voit initialement pas le besoin de comprendre la signification derrière une certaine procédure arithmétique, car pour elle l'arithmétique repose sur la mémorisation. Lorsqu'un élève demande à Mme Daniels pourquoi l'algorithme de multiplier par l'inverse fonctionne toujours lors de la division de fractions, elle tente de schématiser l'opération ¾ ÷ ½ en disant que les trois quarts d'un mur ne sont pas peinturés et qu'il y a seulement assez de peinture pour couvrir la moitié de la surface non peinte. Lorsqu'elle commence à illustrer le problème en dessinant le rectangle pour représenter le mur, elle réalise que quelque chose ne va pas (la figure 1.2 est un dessin de ce à quoi pourrait ressembler son illustration si elle l'avait terminée). Pour représenter le « ÷ ½ », elle prend le demi de chacun des trois quarts hachurés, ce qui représente en fait (¾ ÷2).

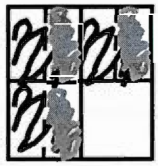


Figure 1.2 Une illustration de ¾ ÷ ½ ?

Mme Daniels laisse alors de côté le problème et ses explications en disant à l'élève « pour l'instant de simplement utiliser l'algorithme» (ma traduction, p. 198) et elle ne revient pas sur le sens sous-jacent à cet algorithme. Eisenhart *et al.* (1993) insistent ici sur le fait que, malgré son parcours académique rempli de cours en mathématiques avancées (deux ans de calcul et analyse, incluant les preuves, et un cours en algèbre moderne), Mme Daniels avait beaucoup de difficultés à fournir des représentations visuelles pour la division de fraction et à donner un sens adéquat ou une explication valable au sens derrière l'algorithme de division de fractions. Sans vouloir insister sur l'erreur ou les difficultés vécues par Mme Daniels, cet exemple souligne la rupture vécue entre le caractère compact et compressé des algorithmes (ici, la division par une fraction) et le travail conceptuel au niveau du sens sous-jacent à ces mêmes opérations.

L'exemple de Bill (Thompson et Thompson, 1994, 1996) expliqué ci-haut illustre aussi cette rupture. Bill se retrouve incapable de décortiquer le sens sous-jacent aux symboles/formules pour les rendre accessibles à Ann (l'élève). Il n'arrive pas à voir la différence entre son raisonnement et celui d'Ann concernant le concept de taux de variation et de vitesse. Ceci crée une rupture entre eux et ils n'arrivent plus du tout à se comprendre l'un et l'autre. Ann est complètement perdue, alors que pour Bill tout semble aller de soi dans les équations et symboles utilisés. Ceci exemplifie la compréhension compressée de Bill à l'égard du concept de taux de variation et de vitesse, et sa difficulté à décompresser ce concept pour le rendre accessible, ou encore à décompresser le concept pour comprendre un autre type de raisonnement, comme celui d'Ann.

Ainsi, à la lumière de ces travaux de recherche, cette compression des mathématiques avancées semble pouvoir devenir un obstacle pour plusieurs futurs enseignants qui ont dès lors une vision plus opaque et condensée des mathématiques, alors que dans leur enseignement une connaissance profonde et décompressée des mathématiques est nécessaire (Ball et Bass 2000, 2003; Proulx et Bednarz, 2010a). À ces deux premières ruptures s'ajoute une troisième rupture qui se distingue des deux autres car elle ne concerne pas les concepts mathématiques, mais plutôt les manières de les faire et les travailler.

1.2.3.3 La façon de faire les mathématiques : des mathématiques qui sont vues comme des absolues déjà toutes faites

Une troisième rupture soulignée à l'intérieur des travaux de recherche concerne le format des cours de mathématiques avancées. Tanguay (2012) avertit qu'il ne faudrait pas croire que les mathématiques avancées faites de n'importe quelle façon soient pertinentes pour l'enseignement. Le format des cours en mathématiques avancées est davantage magistral (Burton, 2004) et semble alors faire vivre une culture mathématique très différente de celle souhaitée pour la classe de mathématiques du secondaire (Bauersfeld, 1994), d'où la rupture. Comme nous le rappelle Proulx *et al.* (2009), le *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) souhaite une classe de mathématiques où, au-delà des procédures, les élèves raisonnent, réfléchissent et donnent sens aux mathématiques :

> « As NCTM's *Principles and Standards for School Mathematics* articulates, mathematics is much more than solving problems by using mechanized procedures and following prescriptions for algorithms. It involves not only well-rehearsed procedures but also continuous reasoning, sense making, reflection, and critical evaluation. » (p. 527)

Ceci rejoint les propos de Bednarz (2001), qui décrit la formation à l'UQAM comme voulant « sensibiliser les enseignants aux raisonnements des élèves » (p. 69) pour « favoriser la construction de sens par les élèves » (p. 74). Ces façons de faire les mathématiques en salle de classe ressemblent en quelque sorte à la façon dont les mathématiciens font des mathématiques dans leurs recherches. Et, les travaux de Burton (2004) menés auprès de mathématiciens montrent bien une distinction entre les mathématiques produites lorsque les mathématiciens *font* des mathématiques (en tant que chercheur en mathématiques) et les mathématiques qu'ils présentent dans leurs cours universitaires (comme enseignant en mathématiques). Lorsqu'ils résolvent des problèmes, les mathématiciens réfléchissent, raisonnent et cherchent des liens avec d'autres concepts. Ils collaborent, discutent ensemble et bénéficient des expériences des autres pour avancer dans leurs recherches, dans leurs problèmes. Ce partage les amène souvent à voir un problème sous un autre angle auquel ils n'avaient pas pensé. Pourtant, comme plusieurs mathématiciens l'ont fait ressortir dans leurs entretiens, ils ne font pas les mathématiques de la même façon dans leur enseignement. Souvent, les mathématiciens donnent leurs cours de mathématiques avancées de façon magistrale, ce qui transmet une vision statique et préexistante des mathématiques, alors que ces mathématiciens voient eux-mêmes les mathématiques comme étant en constante évolution et nécessitant une construction personnelle et continuelle chez l'apprenant. Pour Ball (1990), bien réussir dans une classe de mathématiques traditionnelle revient à mémoriser des formules et à reproduire certaines procédures, alors que, comme l'exprime clairement Hewitt (1999), « Si j'ai besoin de mémoriser... alors je ne fais pas de mathématiques » (ma traduction, p. 9).

La troisième rupture ici décrite se situe à l'intérieur des cours de mathématiques avancées donnés de façon magistrale, comme l'explique Burton (2004), où l'on expose des concepts et des procédures déjà toutes faites[6]. C'est cette idée de mathématiques toutes faites

---

[6] L'idée n'est pas ici que les cours de mathématiques avancées ne veulent pas faire raisonner les étudiants pour qu'ils comprennent et donnent un sens aux mathématiques avancées, loin de là. Prenons l'exemple du mathématicien Hyman Bass (2005), qui argumente que les connaissances, pratiques et manières de penser des mathématiciens leur donnent une certaine sensibilité et perspective qui est essentielle dans la formation des futurs enseignants. Ou encore, celui du mathématicien Frédéric Gourdeau (Gourdeau et Proulx, 2012) qui « fait des mathématiques » avec ses étudiants et avec qui les futurs enseignants apprennent en le vivant ce qu'est une partie de l'activité mathématique authentique. C'est-à-dire, que sa façon de faire des mathématiques (les arguments, les exemples, les explications, les insistances, les preuves, etc.) communique aux futurs enseignants, parfois bien implicitement, comment faire les mathématiques ou du moins comment les mathématiques doivent se faire dans sa classe. L'apport de tels mathématiciens fait exception à la rupture décrite ici, et reste à explorer.

à mémoriser qui est en rupture avec la pratique de classe où, comme l'expriment le NCTM (2000) et Bednarz (2001), on souhaite que les élèves raisonnent et construisent par un travail engagé un sens aux concepts.

> « De plus, cet habitus, qui émerge des cours et des séminaires qui suivent les maîtres en formation, est la principale cause de la reproduction de l'habitude qui consiste à ne dispenser que des cours magistraux, habitude que l'on retrouve si souvent dans les classes régulières » (Hoetkt et Ahlbrand, 1969, cité dans Bauersfeld, 1994, p. 181)

Un des dangers est que les enseignants reproduisent dans leur classe l'enseignement magistral qu'ils vivent dans leurs cours de mathématiques avancées : une façon d'enseigner qui est déconnectée de l'enseignement souhaité en salle de classe.

1.3 État du questionnement en recherche

Il y a donc une diversité de visions et de résultats de recherche concernant la formation en mathématiques avancées, allant de retombées presque nulles à divers réinvestissements, en passant par des ruptures. Dans cette diversité, un flou s'installe et il y a place à mieux comprendre. D'un côté, des réinvestissements proviennent de réflexions de formateurs (Gourdeau et Proulx, 2012 ; Tanguay, 2012) et d'entretiens avec des enseignants en pratique (Even, 2011; Zazkis et Leikin, 2010). D'un autre côté, des ruptures proviennent davantage de récits et d'analyses de pratiques de formation (Gattuso, 2000; Proulx 2010), de réflexions théoriques (Ball et Bass, 2003; Moreira et David, 2005, 2008) ou encore de synthèses de diverses études qui informent à leur façon sur ces questions de rupture (voir, par exemple, la revue de littérature conduite par Proulx et Bednarz, 2010a,2010b). Malgré leur variété et contradictions, ces récits, études, réflexions et revues de littérature offrent sans contredit des informations pertinentes pour documenter la présence de réinvestissements ou ruptures vécues lors des cours de mathématiques avancées à la formation des enseignants. Toutefois, pour les futurs enseignants, il existe à ce jour peu d'études empiriques sur ces questions. Un besoin se fait donc sentir pour des études empiriques, réalisées directement avec des étudiants à la formation des maîtres pour mieux comprendre et documenter ce qui est vécu chez eux et par eux, durant leur formation. Mis à part les travaux de Zazkis et Leikin (2010) et d'Even (2011), les analyses sur la problématique des cours de mathématiques avancées sont en quelque sorte travaillées de l'extérieur, soit par des formateurs analysant des actions d'enseignants, soit par une synthèse d'autres études. À l'instar d'Even et de Zazkis et Leikin, il semble important, pour mieux comprendre ce qui est vécu dans ces cours de mathématiques avancées, d'écouter et de s'entretenir avec ceux qui suivent et vivent ces cours, soit les formés. Mon étude de maîtrise entend contribuer au champ de recherche dans cette direction, c'est-à-dire en conduisant une étude empirique sur le vécu de futurs enseignants dans leurs cours de mathématiques avancées, pour mieux comprendre leurs expériences de formation, ainsi que voir les liens et réinvestissements qu'ils entrevoient d'avec leur pratique de classe et, en même temps, voir si et comment ils vivent certaines ruptures.

1.4 La voix du formé

Il est important ici de noter que ces réinvestissements et ruptures mentionnés dans la littérature sont vus à travers l'œil du chercheur et du formateur, qui peut être différent de celui du futur enseignant vivant la formation. Il s'avère intéressant, voire important, pour bien comprendre l'expérience vécue à la formation, de se pencher sur ce que vivent les formés. C'est le formé, après tout, qui vit les cours de mathématiques avancées, qui s'aventure dans des stages d'enseignement au secondaire avec son bagage mathématique, qui réinvestit ses expériences mathématiques dans son enseignement, etc. Cet angle d'entrée s'inspire d'autres recherches, telles celles de Deblois et Squalli (2002) et de Proulx (2003), où la voix du futur enseignant a apporté un regard différent sur les phénomènes de formation des enseignants.

Dans leur étude, Deblois et Squalli (2002) ont cherché à mieux comprendre les significations que les futurs enseignants accordent à l'analyse d'erreurs des élèves en contexte de formation à l'enseignement des mathématiques. En portant une attention particulière à la voix du formé, ils ont pu comprendre que lorsque le futur enseignant analyse les erreurs d'élèves dans ses cours à la formation, il se positionne souvent dans ce qu'ils appellent le rôle de l'« étudiant universitaire ». Ainsi, ce dernier « joue le jeu » du bon étudiant et la recherche nous montre qu'il n'en retire pas autant que ce qu'on peut penser au niveau de l'analyse d'erreurs pour bonifier/réfléchir à son enseignement : il accomplit les tâches et répond aux questions, s'attendant à ce que des réponses existent pour les questions posées. Ce dernier fait donc ce à quoi le formateur s'attend : il fait les analyses demandées, discute des compréhensions mathématiques possibles, etc., sans nécessairement entrer dans la tâche avec une position d'enseignant. C'est grâce à l'attention précise portée au formé, par des entrevues et une étude fine de leurs productions, donc une entrée par le formé et non une entrée qui analyserait le processus de l'extérieur, que les chercheurs ont pu faire ressortir ces conclusions. En portant une attention particulière au formé, la recherche de Deblois et Squalli (2002) éclaire et permet de nuancer l'impact de l'analyse des erreurs à la formation des enseignants, montrant l'importante nécessité de trouver des activités qui amènent les futurs enseignants à se décentrer de leurs rôles d'étudiants universitaires pour entrer comme « enseignants » voulant approfondir leurs conceptions de l'enseignement et de l'apprentissage.

De son côté, Proulx (2003) cherche dans son étude à mieux comprendre les caractéristiques des explications orales des futurs enseignants (en stage d'enseignement), et les facteurs qui orientent ces explications. Il fait, entre autres, des entrevues individuelles avec des stagiaires. Ces entretiens ont bien sûr informé sur son objectif original, mais ils ont aussi fait ressortir, contre toute attente, différentes perceptions que ces futurs enseignants ont de leur programme de formation, des perceptions qui varient énormément d'un étudiant à l'autre. Dans Proulx (2006), cette variété d'interprétations du même programme (Baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire, UQAM) a de quoi surprendre, car elle fait ressortir des compréhensions bien différentes des objectifs premiers du programme auquel les étudiants sont inscrits (Bednarz, Mary, Gattuso, 1995; Bednarz et Proulx, 2005; Dufour-Janvier et Hosson, 1999). D'un coup d'œil rapide, il y a Albert, « le technicien » qui voit le programme comme une source potentielle de ressources d'enseignements (des outils); Bertrand, « l'imitateur » qui voit les principes/contenus du programme comme des idéaux et qui ne les questionne pas; Carl, « l'enseignant confiant » dont le programme lui a permis de valider ses propres pratiques; Donna, « la praticienne réflexive » qui s'est centrée sur une façon générale d'approcher l'enseignement des mathématiques pour tout sujet (encourager les élèves à expliquer leurs démarches, travailler sur diverses solutions, etc.); et Enrico, « l'enseignant en action » qui voit les formateurs comme des modèles d'enseignants experts. Ces perspectives en disent beaucoup sur le programme de formation et sur ce que les étudiants vivent et retirent de celui-ci. Ceci mène, comme l'explique Proulx (2006), à des préoccupations particulières pour la formation des enseignants et fait réfléchir aux objectifs d'une formation à l'enseignement des mathématiques. Ces perspectives sont difficiles à saisir par un regard externe et c'est parce qu'il a fait parler les formés, plutôt que de conduire une analyse de l'extérieur, que Proulx a pu faire ressortir ces perspectives de formation. L'approche qu'il utilise, par l'écoute de la voix du formé, amène aussi un tout autre regard sur la formation des enseignants.

Ces deux exemples d'études illustrent comment le regard interne du futur enseignant peut bonifier, nuancer et compléter les regards externes des chercheurs sur les questions de formation des enseignants. Ceci rappelle les propos de Confrey (1994), qui reconnait que le point de vue des étudiants n'est pas un simple point de vue d'adulte erroné ou incomplet, mais qu'il permet de reconceptualiser le point de vue de l'expert (enseignant, formateur ou chercheur) en l'envisageant à la lumière des interventions des étudiants. La connaissance du formé est viable, pour lui, et a été construite à travers ses expériences. C'est pourquoi, dans ma recherche, je m'attarde à la voix du formé pour mieux comprendre comment ceux-ci vivent leur formation initiale et ainsi mieux comprendre la préparation mathématique qu'ils vivent à travers celle-ci. Cette entrée permettra de comprendre de l'intérieur l'expérience vécue par le formé pour y déceler, entre autres, la présence de ruptures vécues dans son parcours ou la nature de réinvestissements.

1.5 Questions et objectifs de recherche

L'objectif de ma recherche est de tenter de mieux comprendre le phénomène de la formation en mathématiques avancées comme préparation à l'enseignement au secondaire. Tout particulièrement, ma recherche vise à mieux comprendre l'expérience de préparation *mathématique* vécue par les futurs enseignants durant leur formation mathématique à travers des cours de mathématiques avancées. Mon intention est de mieux cibler et cerner comment ces expériences se vivent chez les futurs enseignants et comment ceux-ci perçoivent leur formation en mathématiques avancées dans leur cheminement universitaire pour devenir des enseignants de mathématiques. La question qui oriente ma recherche est la suivante :

Comment les futurs enseignants conjuguent-ils leurs expériences en mathématiques dans leurs cours de mathématiques avancées et leur préparation à devenir des enseignants de mathématiques au secondaire?

À laquelle s'ajoutent deux sous-questions de recherche :

Qu'en est-il au niveau des réinvestissements des contenus et des réinvestissements métamathématiques?

Les enseignants vivent-ils des ruptures, telles qu'en parle la recherche, au niveau de leur préparation à l'enseignement des mathématiques au secondaire? Si oui, de quelle nature sont-elles?

CHAPITRE II

CADRE CONCEPTUEL

Ma recherche s'intéresse à mieux comprendre le phénomène de la formation en mathématiques avancées comme préparation à l'enseignement au secondaire. S'intéresser à la formation mathématique des futurs enseignants de mathématiques du secondaire, et à leurs expériences vécues à travers celle-ci pour devenir enseignants, nécessite une clarification de ce qui est entendu par « formation mathématique d'un enseignant ». Cette clarification se fait ici par une mise en perspective du corpus de recherche sur la nature des connaissances mathématiques requises par l'enseignant dans sa pratique et par un cadrage des travaux réalisés autour de la nature du travail mathématique privilégié à l'intérieur des initiatives de formation des enseignants. Ces deux corpus de travaux de recherche ne sont évidemment pas isolés et s'influencent l'un et l'autre. De plus, ils interviennent directement et sont mis en interaction avec l'expérience vécue par le futur enseignant à l'intérieur de ses cours de formation mathématique, alors qu'il développe des connaissances mathématiques qu'il aura à réinvestir/mobiliser dans sa pratique future (comme stagiaire ou comme enseignant à la fin de sa formation). Ces deux corpus font l'objet des deux premières sections de ce chapitre. Dans un premier temps, j'offre une mise en perspective des travaux de recherche sur les connaissances déployées par les enseignants en contexte de pratique, fréquemment appelées les connaissances mathématiques pour l'enseignement. Ensuite, je traite des travaux et perspectives autour de la nature de l'expérience mathématique à offrir dans les cours de formation.

2.1 Travaux sur les connaissances mathématiques *pour* l'enseignement

Depuis Shulman (1986) — un des premiers à suggérer qu'il y a un domaine de connaissances particulières au travail de l'enseignant — il y a eu beaucoup d'avancées en recherche sur les connaissances mathématiques d'un enseignant de mathématiques. Deux cadres ressortent de façon plus prononcée, soit celui de Ball et de son équipe aux États-Unis (voir, par exemple, Ball, Thames et Phelps, 2008) et celui de Rowland et de son équipe en Angleterre (voir, par exemple, Rowland, Huckstep et Thwaites, 2005). Ces derniers donnent des clés intéressantes pour comprendre les connaissances mathématiques de l'enseignant, et ultimement, comme le soulignent Ball, Thames et Phelps (2008), une perspective sur les connaissances mathématiques qui pourraient être travaillées en formation.

Avant de regarder ces deux cadres plus en détail, un aspect-clé qui ressort de la littérature sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement concerne la nature décompressée des contenus mathématiques. Cette décompression transparait dans le cadre développé par l'équipe de Deborah Ball et l'équipe de Tim Rowland.

2.1.1 La nature des contenus travaillés : mathématiques décompressées

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à comment les mathématiques doivent être comprises par l'enseignant pour être utilisables dans sa pratique (voir, entre autres, Ball et Bass, 2000; Ma, 1999; Rowland, Huckstep et Thwaites, 2005). Un élément central qui ressort de la littérature est que les mathématiques mobilisées en pratique sont sous une forme *décompressée*. Cette idée de décompression, décrite plus explicitement par Ball et Bass (2000), trouve son origine dans la pratique de classe. L'enseignant doit être capable de déconstruire ses propres connaissances mathématiques dans une forme moins finale, sous laquelle les composantes de base sont plus accessibles et plus visibles pour les élèves. Ceci lui permet d'être flexible et capable d'adapter ses connaissances aux idées émergentes des élèves. En même temps, comme le souligne Ma (1999), les enseignants doivent connaître les mathématiques en *profondeur* et en *étendue*, c'est-à-dire qu'ils doivent être capables de créer des liens entre les différents concepts. En plus des connexions, la flexibilité de l'enseignant à répondre aux idées émergentes des élèves vient aussi en connaissant une multitude de représentations imagées et d'approches pour une même idée. En un mot, connaître les mathématiques de façon décompressée c'est d'être capable de faire des liens entre les concepts mathématiques, de s'intéresser aux subtilités mathématiques et de connaître diverses façons de les parler, de les représenter visuellement et de les expliquer.

Ball et Bass (2000) donnent l'exemple d'un élève de six ans qui écrit « 1005 » au lieu de « 105 », sans se tromper dans sa valeur numérique de « cent cinq ». Ceci requiert la capacité d'apprécier l'élégance de notre système numérique compressé, que les adultes utilisent facilement, mais qui n'est pas inné pour l'apprenant. Après tout, les chiffres romains suivent la même structure que la tendance de l'enfant, chaque nombre ayant sa propre notation (« CV » pour « cent cinq »), selon laquelle la valeur du chiffre ne dépend pas de sa position, comme c'est le cas dans notre système. Ainsi, pour comprendre le raisonnement de l'enfant, l'enseignant doit être capable de comprendre en profondeur notre système numérique positionnel à base 10. En un mot, décompresser les mathématiques c'est les comprendre en profondeur et en étendue de façon à en faire ressortir le sens sous-jacent. Cette idée de décompression se retrouve de façon continuelle dans les prochaines sections, ce qui permet de continuer de la clarifier.

2.1.2 L'équipe de Deborah Ball : les connaissances mathématiques pour l'enseignement

Shulman (1986) a proposé trois types de connaissances disciplinaires pour l'enseignant, soit *la connaissance disciplinaire du contenu*[7], la *connaissance pédagogique du contenu*[8] et *la connaissance curriculaire du contenu*[9]. Ball, Thames et Phelps (2008) se sont intéressés à définir plus en détail, dans le contexte de l'enseignement des *mathématiques,* les trois types de connaissances pour l'enseignant proposés initialement par Shulman. Pour y arriver, Ball et son équipe sont partis de la pratique d'enseignants en salle de classe pour mieux comprendre comment ceux-ci avaient besoin de connaître le contenu mathématique pour enseigner et comment ils utilisaient ces connaissances mathématiques en classe. La

[7] Ma traduction de « Content knowledge » (Shumlan, 1986, p. 9) et de « Subject Matter Knowledge » (Hill et Ball, 2009, p. 70).
[8] Ma traduction de « Pedagogical Content Knowledge », tiré de Shulman (1986, p. 9)
[9] Ma traduction de « Curricular Knowledge », tiré de Shulman (1986, p. 10)

figure ci-dessous illustre les subdivisions que cette équipe met de l'avant, qui sont détaillées par après[10].

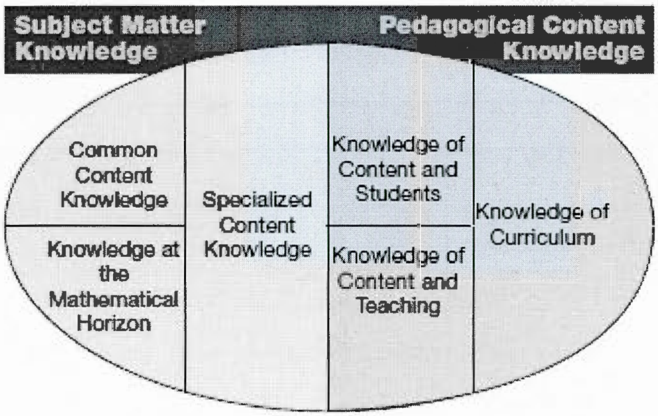


Figure 2.1 Les types de connaissances mathématiques (Ball, Thames et Phelps, 2008, p. 403)

2.1.2.1 La connaissance du contenu

La connaissance du contenu signifie connaître plus que les faits et les concepts d'un sujet mathématique : c'est aussi comprendre pourquoi cette chose est ainsi (Shulman, 1986). Par exemple, pourquoi, lorsqu'on divise deux fractions, on multiplie la première par l'inverse de l'autre. Au-delà de la façon de réaliser la procédure, la connaissance du contenu cherche aussi à y donner un sens, ce qui fait écho aux travaux de Skemp (1978) sur la compréhension relationnelle (qui s'intéresse au comment et aussi au pourquoi). Ball, Thames et Phelps (2008) ont poussé cette idée de Shulman en allant voir dans la pratique les connaissances mathématiques utilisées par l'enseignant. Dans la classe, le modèle de Ball et de son équipe met en évidence que l'enseignant doit connaître les mathématiques à la base du curriculum

[10] Je n'entre pas en détail dans la connaissance du programme et la connaissance à l'horizon, qui consistent essentiellement à comprendre comment les contenus mathématiques sont reliés dans le curriculum à travers les années.

scolaire, soit les *connaissances mathématiques communes*[11], mais plus encore, soit les *connaissances spécialisées du contenu*[12] (voir figure 2.2).

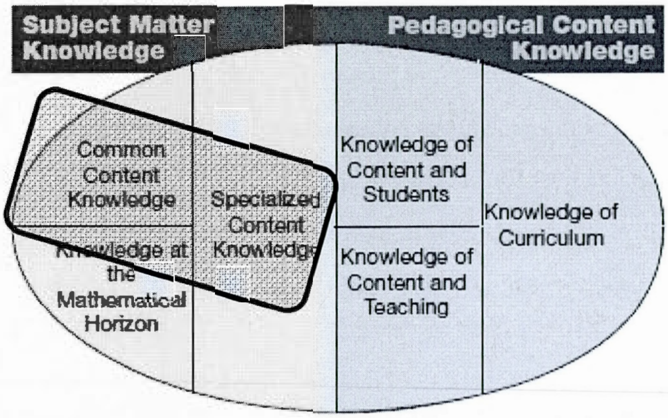


Figure 2.2 *Connaissance mathématique commune* et *connaissance mathématique spécialisée* dans le modèle de l'équipe de Ball[13] (Ball, Thames et Phelps, 2008, p. 403)

Les connaissances mathématiques communes. Ce sont ici des connaissances et des habiletés mathématiques utilisées dans des cadres autres que l'enseignement. Par exemple, connaître un nombre qui se situe entre 1.1 et 1.11 est une connaissance nécessaire à l'enseignement, mais pas uniquement pour cette profession. Les mathématiciens, les ingénieurs et les infirmiers doivent eux aussi la connaître. En gros, les enseignants doivent connaître la matière qu'ils enseignent, c'est-à-dire qu'ils doivent être capables de faire le travail qu'ils donnent à leurs élèves. Dans cette idée, les enseignants doivent reconnaître les mauvaises réponses des élèves ou encore lorsque le manuel donne une définition inappropriée, ils doivent utiliser correctement les termes et les notations, etc. Ces connaissances, apprises à l'école, sont utilisées dans plusieurs cadres autres que l'enseignement : c'est pourquoi il s'agit de connaissances mathématiques *communes*.

---

[11] Ma traduction de « Common Content Knowledge », tiré de Ball, Thames et Phelps (2008, p. 399).
[12] Ma traduction de « Specialised Content Knowledge », tiré de Ball, Thames et Phelps (2008, p. 400).
[13] Dans cette figure et la prochaine de ce modèle (2.4), c'est moi qui rajoute les encadrés.

Les connaissances spécialisées du contenu. Ce sont ici des connaissances et habiletés mathématiques reliées à l'enseignement mais qui ne sont pas typiquement nécessaires à d'autres domaines. À titre d'exemple, on peut penser à vérifier la validité d'une approche non standard, répondre aux questions « pourquoi » des élèves, trouver un exemple ou un contre-exemple pour montrer ou prouver une idée mathématique, reconnaître ce qui est impliqué par l'utilisation d'une certaine représentation ou encore faire des liens entre diverses représentations. Ces tâches font partie de la routine de l'enseignant. En particulier, pour Ball, Thames et Phelps (2008), ce travail nécessite de *décompresser* les mathématiques d'une manière qui n'est pas nécessaire, peut-être même pas souhaitable, dans d'autres cadres de travail.

Un exemple d'une connaissance spécialisée du contenu (figure 2.3) offert par Ball, Thames et Phelps (2008) est de pouvoir représenter ou savoir reconnaître l'opération 1 ¼ ÷ ½ par un problème écrit.

Which of the following story problems can be used to represent 1 ¼ divided by ½?

a) You want to split 1 ¼ pies evenly between two families. How much should each family get?
b) You have $1.25 and may soon double your money. How much money would you end up with?
c) You are making some homemade taffy and the recipe calls for 1 ¼ cups of butter. How many sticks of butter (each stick = ½ cup) will you need?

Figure 2.3 Quel problème écrit représente 1 ¼ divisé par ½ ? (Ball, Thames et Phelps, 2008, p. 400)

Le premier problème de la figure 2.3 demande : si l'on sépare 1 ¼ tarte entre deux familles, combien de tarte aura chaque famille? Il s'agit ici de deux familles qui partagent un tout, un tout de 1 ¼ de tarte. Pour savoir combien chaque famille obtiendra, il faut diviser le tout en deux parties égales. Il s'agit d'une division par deux, et non d'une division par ½. Dans le deuxième problème, on double un montant d'argent initial (de 1,25$) : il s'agit ici d'une multiplication par deux. Cette distinction est subtile, puisque ces deux opérations, multiplier par deux et diviser par ½ mènent à la même réponse. Dans le troisième problème, on a besoin de 1 ¼ de tasse de beurre dans une recette en utilisant des bâtons de beurre de ½ tasse. Combien de bâtons de ½ tasse a-t-on besoin pour avoir 1 ¼ tasse de beurre? Ce qui revient à demander combien de ½ dans 1 ¼? Pour y arriver, il faut diviser 1 ¼ par ½, ce qui est l'opération recherchée. Trouver quel problème écrit correspond à quelle opération, et vice versa, est une tâche mathématique propre à l'enseignement. D'une certaine façon, ceci nécessite que l'enseignant comprenne les fractions en profondeur et en étendue, c'est-à-dire qu'il comprenne le sens des fractions et de leurs opérations, et non seulement la procédure fonctionnelle pour les résoudre.

2.1.2.2 La connaissance pédagogique du contenu

Cette dimension de la connaissance introduite par Shulman (1986) est encore une connaissance mathématique, mais elle est pour lui spécifique à l'enseignement. La *connaissance pédagogique du contenu* représente la manière par laquelle l'enseignant intègre simultanément les idées-clés du contenu et les moyens par lesquels les élèves les apprennent. D'une part, elle inclut les différentes manières de représenter la matière, par des analogies, des illustrations, des exemples, des explications ou des démonstrations, pour la rendre compréhensible aux yeux des élèves. D'autre part, l'enseignant doit aussi comprendre ce qui rend facile ou difficile l'apprentissage d'une matière spécifique, donc entre autres connaître les conceptions erronées des apprenants et connaître des stratégies efficaces pour réorganiser leur compréhension. Ball, Thames et Phelps (2008) décortiquent cette connaissance à travers leurs analyses de pratiques de classe en *connaissances du contenu et de l'élève*[14] et en *connaissances du contenu et de l'enseignement*[15] (voir figure 2.4).

---

[14] Ma traduction de « Knowledge of Content and Students », tiré de Ball, Thames et Phelps (2008, p. 401).
[15] Ma traduction de « Knowledge of Content and Teaching », tiré de Ball, Thames et Phelps (2008, p. 401).

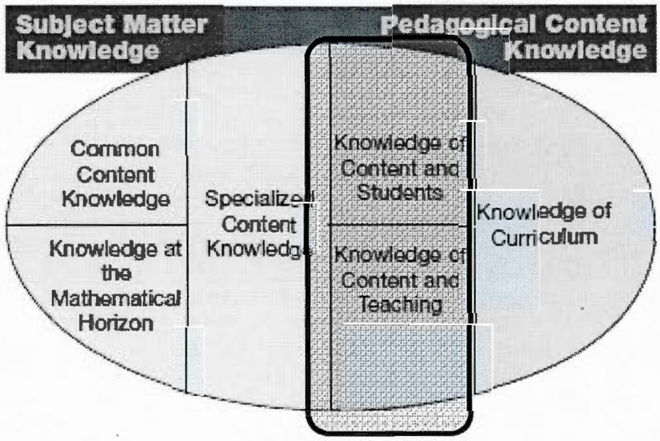


Figure 2.4 *Connaissance du contenu et de l'élève* et *connaissance du contenu et de l'enseignement* dans le modèle de l'équipe de Ball (Ball, Thames et Phelps, 2008, p. 403)

Les connaissances du contenu et de l'élève. Il s'agit ici de connaître le contenu mathématique, mais aussi de connaître les conceptions des élèves en lien avec ce contenu. Par exemple, l'enseignant peut/doit anticiper ce que certains élèves trouvent difficile et choisir des tâches en conséquence; connaître le degré de difficulté des tâches qu'il assigne et prédire ce que l'élève en fera; écouter l'élève lorsqu'il pose une question mathématique ou propose une idée mathématique (c'est-à-dire interpréter les pensées émergentes et incomplètes des élèves et les bonifier pour tous). Chacune de ces tâches demande une interaction entre une compréhension spécifique du contenu en cause et une familiarité avec la réflexion mathématique des élèves. Il s'agit ici de bien comprendre les contenus pour pouvoir être en mesure de comprendre les conceptions (bonnes et erronées) que les élèves construisent.

Les connaissances du contenu et de l'enseignement. Il s'agit ici de connaître le contenu mathématique, mais en lien avec son enseignement. Lorsqu'un enseignant planifie son année scolaire, il tient compte des différents contenus, des liens qu'ils ont entre eux et lesquels sont préalables à un autre, afin de préparer une succession adéquate des contenus. Sur un plan plus à court terme, à l'intérieur d'un chapitre, l'enseignant doit choisir ce avec quoi il commence, il doit aussi choisir ses exemples, ses illustrations ou ses représentations pour creuser le concept avec les élèves, etc. En action dans la classe, l'enseignant prend des décisions sur quelles contributions d'élèves poursuivre et lesquelles ignorer ou garder pour plus tard ou bien, lors d'une discussion de classe, il doit décider quand arrêter pour donner plus d'explications, quand utiliser une remarque d'un élève pour faire une remarque mathématique, etc. Il s'agit ici davantage de l'aspect planification, c'est-à-dire de connaître les contenus pour bien les agencer dans les planifications à court, moyen et long termes, afin qu'ils se suivent de façon fluide (quel contenu est préalable à un autre, quelle activité répond à une difficulté émergente, etc.). Ces décisions demandent un certain jonglage entre les mathématiques en jeu et les différentes options d'instructions qui s'offrent à l'enseignant.

Ball, Thames et Phelps (2008) offrent ici une vue d'ensemble assez claire des connaissances mathématiques que mobilise l'enseignant en pratique, et donc des connaissances mathématiques qui pourraient être travaillées en formation. Ce cadre s'apparente beaucoup à diverses dimensions des cours de didactique offerts au cours des formations à l'enseignement des mathématiques au secondaire, tel qu'au Département de mathématiques de l'UQAM (Bednarz, Gattuso et Mary, 1995 ; Dufour-Janvier et Hosson, 1999) ou encore à la Faculté d'éducation de l'Université de Sherbrooke (Theis, 2012) et à celle de l'Université de Montréal (Poirier, 2012)[16]. Notamment à l'UQAM, au Département de mathématiques, parmi les objectifs d'un cours de didactique (Didactique des mathématiques I et son laboratoire) Dufour-Janvier et Hosson soulignent l'analyse de tâches mathématiques et l'enrichissement d'un répertoire d'exemples et de représentations du futur enseignant, ce qui s'apparente aux *connaissances du contenu et de l'enseignement* dans le modèle de Ball. Un autre objectif de ces cours de didactique est de développer des capacités d'analyse de productions d'élèves afin de cerner leurs conceptions, raisonnements et difficultés, ce qui est en lien avec les *connaissances du contenu et de l'élève*. Un autre est d'acquérir une maîtrise des contenus ainsi que des compétences dans l'analyse de concepts, ce qui est très près des *connaissances spécialisées du contenu*. Même si quelque peu différent, l'accent didactique, ainsi défini, est très présent dans le cadre de Ball et de son équipe. Assurément, tel que discuté lors du Colloque sur la formation mathématique des enseignants tenu à Montréal en 2011 (voir le collectif Proulx, Corriveau et Squalli, 2012), il

[16] À noter que dans leurs articles respectifs, Theis et Poirier se servent du cadre de Ball pour analyser le travail mathématique fait à l'intérieur d'un cours de didactique des mathématiques.

existe beaucoup d'apprentissages mathématiques qui s'entremêlent à l'intérieur d'une formation didactique, et vice versa, soit des apprentissages didactiques qui s'entremêlent à l'intérieur d'une formation mathématique. À ce titre, le cadre de Rowland offre des indicateurs clairs et une entrée intéressante pour traiter plus directement des questions *mathématiques* de la formation.

2.1.3 L'équipe de Tim Rowland : le quatuor de connaissances

Rowland et son équipe sont aussi partis de la pratique pour comprendre les façons avec lesquelles les futurs enseignants mobilisent leurs connaissances mathématiques dans leur enseignement en stage. Les cadres de l'équipe de Ball et de l'équipe de Rowland, traitant tous deux des connaissances mathématiques pour l'enseignement, sont étroitement liés et se recoupent. Toutefois, le cadre de l'équipe de Rowland se distingue par l'ouverture qu'il permet à l'observation plus directe de l'action : l'action de faire des mathématiques et l'action d'enseigner les mathématiques.

> « Our research suggests that the quartet is comprehensive as a tool for thinking about the ways that subject knowledge *comes into play* in the classroom. » (Rowland, Huckstep et Thwaites, 2005, p. 259, c'est moi qui souligne)

Ainsi, sous un angle dynamique, leur analyse les a menés à l'identification du *Quatuor de connaissances*[17], quatre dimensions à travers lesquelles les connaissances mathématiques des futurs enseignants peuvent être observées en pratique, soit les *fondements*, les *transformations*, les *connexions* et la *contingence*.

Les fondements. Il s'agit, dans cette dimension, des connaissances qui ont le potentiel d'informer les décisions pédagogiques du futur enseignant : qui lui permettent de prendre des décisions de façon rationnelle et raisonnée, contrairement à une décision par imitation ou habitude. La clé de cette dimension est la compréhension et la connaissance des mathématiques *en soi*, c'est-à-dire les connaissances mathématiques du futur enseignant, qu'elles aient été apprises dans sa formation « personnelle » ou dans sa formation universitaire. D'une part, cette dimension inclut connaître le contenu mathématique et les

[17] Ma traduction de « Knowledge Quartet », tiré de Rowland, Huckstep et Thwaites (2005)

procédures (le comment), mais aussi comprendre pourquoi ces choses sont ainsi, ce qui rejoint la compréhension relationnelle de Skemp (1978). Cette dimension est importante pour l'enseignement puisque, comme Ma (1999) l'illustre, une compréhension instrumentale (uniquement savoir le « comment ») est insuffisante pour l'enseignement.

D'autre part, à l'intérieur des fondements se retrouvent les croyances relatives aux mathématiques du futur enseignant, incluant leur opinion sur le pourquoi et le comment on apprend les mathématiques. Aussi, il s'agit de leurs croyances sur la nature des mathématiques, la raison d'être et le but de les enseigner et pourquoi des contenus particuliers doivent être appris à l'école. Enfin, il s'agit aussi de leur croyance de comment et sous quelles conditions on apprend les mathématiques.

Les transformations. Il s'agit ici de la capacité d'un enseignant à transformer les connaissances mathématiques qu'il possède en des formes pédagogiquement puissantes. Dans la pratique, il s'agit pour l'enseignant de trouver et d'utiliser des analogies, des illustrations, des explications et des démonstrations qui sont parlantes pour les élèves.

Au-delà de l'enseignement, transformer les mathématiques est un élément-clé pour faire des mathématiques. Burton (2004) explique qu'utiliser des métaphores, dessiner des analogies ou être capable de regarder un problème sous un angle différent sont des éléments-clés de l'activité mathématique. D'une certaine façon, les transformations que l'enseignant réalise en classe sont celles qui *décompressent* le concept ou le problème pour le rendre accessible aux élèves.

Les connexions. Plusieurs chercheurs soulignent l'importance, en enseignement, de faire des liens entre les concepts (voir, par exemple, NCTM, 2000; Gourdeau et Proulx, 2012; Hill *et al.*, 2008; Zazkis et Leikin, 2010). Pour Ma (1999), la profondeur et l'étendue de la connaissance sont « a matter of making connections » (p. 121). Dans cette idée, une connaissance profonde des mathématiques suggère que des liens forts sont établis dans la compréhension des concepts. Ces liens sont une partie importante de la pratique, où l'enseignant fait des connexions entre diverses procédures mathématiques, entre différents concepts, etc. Dans la préparation de son enseignement, l'enseignant décide de la succession des contenus, il ordonne les tâches et les exercices selon le contenu mathématique à travailler et les liens qu'ils ont entre eux, etc. Pour Burton (2004), un élément-clé de l'activité mathématique est de découvrir des liens entre divers aspects mathématiques : « Mathematics is a network of connections and is, itself, connected to other areas. » (p. 191)

La contingence. Comme le disent Rowland, Huckstep et Thwaites (2005) : « The teacher's intended actions can be planned, the students' responses cannot. » (p. 263). La contingence réfère aux événements de la classe qui sont presque impossibles à planifier, par exemple lorsqu'un élève pose une question ou lance une idée à laquelle l'enseignant n'avait pas pensé. Dans ces cas, l'élève fait part de la nature de la construction de ses connaissances, qui peuvent être, ou ne pas être, ce à quoi l'enseignant s'attendait ou avait anticipé. Ces idées, parlées ou écrites, nous informent sur le raisonnement de l'élève et sur le sens qu'il donne aux mathématiques en jeu. Elles peuvent être provoquées par une tâche ou une question de l'enseignant, ou bien elles peuvent venir spontanément de l'élève. Ainsi, l'enseignant doit être prêt, dans l'action, à réagir aux idées des élèves et, par conséquent, sa planification initiale de la leçon doit être assez flexible pour lui permettre de s'en écarter. Ceci fait écho au travail de Bednarz et Proulx (2009), pour qui les connaissances « se développent dans l'action en lien avec les tâches effectives réalisées par l'enseignant » (p. 5), c'est-à-dire qu'à partir d'une tâche et des idées émergentes des élèves, l'enseignant est appelé à raffiner et à approfondir ses connaissances mathématiques, dans l'action.

Le cadre de l'équipe de Rowland donne une bonne idée des connaissances mathématiques utilisées *dans* l'enseignement. En plus, ce modèle offre quatre indicateurs assez puissants des connaissances mathématiques qui peuvent être travaillées et se retrouver dans un cours de mathématiques à la formation.

2.1.4 Tendances dans le cadre de l'équipe de Ball et le cadre de l'équipe de Rowland : les connaissances « chose » et les connaissances « agir »

Certaines tendances ressortent du cadre de l'équipe de Ball et de celui de l'équipe de Rowland. Toutes deux s'intéressent aux connaissances mathématiques pour l'enseignement, mais pas nécessairement de la même façon. Un élément important les distingue, soit la manière dont ils catégorisent les mathématiques mobilisées dans la salle de classe. Le cadre de Ball, tout comme celui de Shulman, est davantage axé sur les choses à savoir, sur les *connaissances*. Ceci transparait dans sa nomenclature, avec des expressions telles que « *connaissance* pédagogique du contenu » ou encore « *connaissance* spécialisée du contenu ». L'équipe de Ball met l'accent sur ce que l'enseignant sait, ou ce que l'enseignant doit connaître. Ceci nous informe parallèlement, comme Ball et Bass (2000) le suggèrent, sur les types de connaissances que les futurs enseignants devraient développer en formation. D'un autre côté, l'équipe de Rowland se concentre davantage sur le *faire*, sur l'*action* mathématique : « *The Knowledge Quartet is more interested in the situations in which such knowledge comes into play* than in categorising the different 'kinds' of mathematics teacher knowledge » (Rowland, Jared et Thwaites, 2011, p. 1, c'est moi qui souligne). Cet accent sur le savoir « faire » transparait dans le Quatuor, qui parle de *transformations*, de *connexions*, etc. L'enseignant fait des liens, il transforme, il adapte son enseignement aux commentaires des élèves, etc. C'est ainsi que Rowland et son équipe sont davantage du côté des « connaissances-actions », alors que Ball et son équipe sont davantage du côté des « connaissances-choses ».

Mettre l'accent sur le « faire » ne semble pas anodin. Plusieurs didacticiens et mathématiciens s'entendent sur le fait que dans la formation mathématique, les contenus deviennent secondaires et ce sont les activités mathématiques dans lesquelles sont plongés les futurs enseignants qui apparaissent importantes (Burton, 2004; Proulx et Bednarz, 2009; Proulx, Corriveau et Squalli, 2012; Zazkis dans Barton et Gourdeau, 2008). La section ci-après traite de cet aspect.

2.1.5 L'activité mathématique

Lors d'un colloque tenu à l'UQAM en avril 2011, plusieurs mathématiciens et didacticiens se sont réunis pour discuter de la formation mathématique des enseignants. La discussion s'est rapidement tournée vers l'importance, au-delà des contenus, « de faire faire des mathématiques aux enseignants dans la formation, de les plonger dans des résolutions de problèmes, réflexions mathématiques et situations authentiques, de les mettre en action, etc. » (Proulx, Corriveau et Squalli, 2012, p. 336). Dans leur synthèse, Proulx, Corriveau et Squalli (2012) expliquent que certains participants au colloque ont affirmé que peu s'entendent sur les contenus mathématiques à travailler (les mathématiques avancées, les mathématiques du secondaire, les mathématiques « scolaires », les mathématiques nouvelles, etc.), mais qu'un certain consensus se fait sentir concernant l'importance de faire faire des mathématiques aux futurs enseignants (voir aussi, Burton, 2004; Barton et Gourdeau, 2008; et Proulx et Bednarz, 2009).

Toutefois, qu'entend-on par activité mathématique? Bednarz et Proulx (2009) offrent une certaine piste :

> « [Dans l'activité mathématique] les concepts et les idées sont explorés et approfondies, les enseignants sont vus comme des auteurs/producteurs de connaissances, de compréhensions, de raisonnements mathématiques. Ils sont encouragés à générer des idées, des questions, des problèmes, à rendre explicites et à partager leurs compréhensions, à négocier les sens construits, à développer des explications et des arguments à l'appui des solutions avancées, à partager et explorer des avenues différentes pour comprendre des problèmes, des concepts, des notations et symbolisations, à partager des représentations variées, des solutions et des stratégies, à valider les solutions et explications mises de l'avant, etc. » (p. 9)

On est très loin ici du cours de mathématiques traditionnel, tel que l'explique Burton (2004), dans lequel on enseigne une méthode que les étudiants mettent en pratique à répétition à l'aide d'une série d'exercices. Il y a un changement significatif, comme l'explique Burton, des mathématiques statiques aux mathématiques vivantes, ou encore, comme le dit Janvier, de « la mathématique qui se fait plutôt que la mathématique toute faite » (tiré de Bednarz, Golding & Lefevre, 1997, p. vi).

Ce type d'activité mathématique fait écho à la façon dont les mathématiciens font les mathématiques. Les mathématiciens dans l'étude de Burton (2004) disent souvent être « coincés » dans un problème, ce qui pour eux est un état honorable lorsqu'on fait des mathématiques. Lorsqu'ils résolvent des problèmes, ils réfléchissent, raisonnent et cherchent des liens avec d'autres concepts; ils discutent et collaborent avec d'autres mathématiciens pour bénéficier de leurs expériences. Ce partage les amène souvent à voir un problème sous un angle auquel ils n'avaient pas pensé auparavant. Pour eux, cette manière de faire les mathématiques de façon émergente et non statique témoigne de l'activité mathématique. Pour Burton, cette activité mathématique du mathématicien est une façon de faire pertinente pour les apprenants à l'école et à l'université, et donc pertinente pour la formation mathématique des futurs enseignants (voir aussi Barton et Gourdeau, 2008).

L'activité mathématique est importante pour la formation à l'enseignement puisqu'il est nécessaire pour l'enseignant d'être fluide en mathématiques et capable de résoudre les divers problèmes mathématiques qu'il rencontre (Proulx, Corriveau et Squalli, 2012). Au-delà des contenus, « c'est l'expérience qui est recherchée, c'est la curiosité mathématique qui veut être développée, c'est la capacité à donner un sens aux concepts et de les explorer qui est visé » (Proulx, Corriveau et Squalli, 2012, p. 336). Faire faire des mathématiques dans les cours de mathématiques à la formation des enseignants contribue à l'intention de former l'enseignant à se former lui-même en mathématiques, c'est-à-dire de lui permettre de développer les aptitudes à fouiller et à travailler en mathématiques. Tout ceci ramène aux propos de Bednarz (2012), qui explique que la formation mathématique ne se termine jamais pour un enseignant. Ainsi, dans sa formation (et après), le futur enseignant apprend de nouvelles façons de faire les mathématiques, de nouvelles façons de les comprendre et de les raisonner. Ce travail permet aux futurs enseignants de se familiariser avec le processus même de la construction des connaissances et de se sensibiliser à la manière dont les mathématiques se développent (Proulx et Bednarz, 2009).

De plus, par l'activité mathématique, l'idée est de faire vivre une « activité mathématique authentique », comme le suggère Gourdeau (dans Gourdeau et Proulx, 2012) qui explique travailler à la manière de *L'esprit mathématique* de Mason (1997). Pour Gourdeau, cette activité mathématique vécue à travers la résolution de problèmes permet aux enseignants d'approfondir leurs conceptions mathématiques en ayant la possibilité de travailler de façon créative. À travers ce travail, il affirme que les futurs enseignants pourront comprendre et apprécier le rôle de l'exemplification, de la généralisation, des conjectures, etc. Ceci rappelle les propos de Watson (2008), pour qui les expériences d'apprentissage en mathématiques sont une bonne manière d'approfondir et de développer des connaissances mathématiques pour l'enseignement. Elle argumente que comprendre comment on fait des mathématiques apporte les outils nécessaires pour réfléchir à l'apprentissage et à l'activité mathématique des élèves.

Une autre idée derrière l'activité mathématique est de faire vivre des expériences mathématiques aux futurs enseignants (et qu'ils en prennent conscience), d'une part pour qu'ils puissent être sensibilisés à être dans la peau d'un élève et d'autre part pour qu'ils puissent à leur tour faire vivre des expériences mathématiques authentiques à leurs élèves. Cette dimension fait penser aux pratiques d'homologie de Houdement et Kuzniak (1996). Ces derniers expliquent que les stratégies de formation basées sur l'homologie sont communes en France, où le formateur est « un pôle de connaissances par ses actes » (p. 303), un modèle qui possède les situations de référence, et où le futur enseignant joue le rôle d'imitateur devant transférer dans sa future classe les séances vécues dans sa formation. Comme le rappellent Cooney et Wiegel (2003), les enseignants ont tendance à reproduire l'enseignement qu'ils ont eux-mêmes vécu. Ainsi, en faisant vivre une activité mathématique aux futurs enseignants, les formateurs espèrent qu'ils la reproduiront dans leur salle de classe.

Suite à cette entrée sur l'activité mathématique pour les cours de mathématiques à la formation des enseignants, j'explore maintenant les travaux de recherche faits autour de la nature de l'expérience mathématique à offrir dans les cours de formation.

2.2 Formation mathématique *pour* l'enseignement

D'un programme à l'autre, la formation pour les futurs enseignants de mathématiques au secondaire varie. Quelles mathématiques sont privilégiées? Quelles approches sont privilégiées? Quelle préparation mathématique offrent ces formations? Cette section veut nous informer sur ce qui se passe et sur quoi l'on se questionne aujourd'hui en recherche en lien avec la formation *mathématique* pour les futurs enseignants. Pour commencer, je fais un court retour historique sur cette préoccupation.

Les préoccupations concernant la formation mathématique ne datent pas d'aujourd'hui. Déjà, il y a plus de 35 ans, ces idées étaient débattues lors du troisième Congrès international en éducation mathématique (CIEM -3), tenu à Karlsruhe (Allemagne) en 1976. L'extrait ci-après résume bien l'essence des propos de ce groupe de travail :

> « The question of what mathematical training a futur mathematics teacher should receive produced divergent views. There were those who advocated 'mathematics for teacher' with emphasis on those aspects of mathematics which featured in school courses; others pointed to the position of mathematics teachers as members of the mathematical community and felt that two different types of mathematics do not exist. This is likely to remain an unresolved question, but one that required continuous examination. » (Otte, 1976, p. 200-201)

Plus récemment, le Rapport Kahane (2003) en France et le « Conference Board of the Mathematical Sciences » (Conference Board of the Mathematical Sciences, 2001) aux États-Unis se sont penchés sur ces questions de la formation mathématique des enseignants. Ils ont pointé vers des alternatives possibles, telles que des formations ayant des cours universitaires en mathématiques adaptés aux futurs enseignants. On retrouve à ce jour, dans diverses institutions et départements de mathématiques, des cours de mathématiques *adaptés* à l'enseignement (diverses alternatives, par exemple, figurent dans Boileau et Garançon, 1993; Gourdeau et Proulx, 2012; Hodgson, 2001; Usiskin, 2000). Mais que veut dire un cours de mathématique *adapté* aux futurs enseignants? Quelle structure de formation et quels formateurs cela implique-t-il? Quels types de cours ou d'initiatives de formation peuvent être mis en place pour aider les enseignants à développer des connaissances mathématiques pour l'enseignement?[18] Encore aujourd'hui, les questions sur la formation mathématique des futurs enseignants orientent le travail de plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques.

En 2009, un groupe de travail du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF2009) s'est penché précisément sur ce thème. Tous les participants étaient d'accord sur le fait qu'un enseignant doive recevoir une formation universitaire en mathématiques. Dans l'intérêt de savoir quelle formation mathématique est nécessaire pour que l'enseignant soit le mieux armé possible dans ses pratiques d'enseignement, Hache, Proulx et Sagayar (2009) mentionnent que quatre perspectives sur la formation mathématique ont émergé de ce groupe de travail. Étoffées sur la base des travaux de recherche dans le domaine, ces perspectives sont : (1) le travail des mathématiques avancées enseignées à l'université pour le futur mathématicien; (2) le travail des mathématiques avancées, avec des liens systématiques et explicites avec les contenus à enseigner; (3) le travail de mathématiques nouvelles, en lien avec les contenus du primaire ou du secondaire; et (4) le travail des mathématiques « scolaires ». Ce qui suit veut expliquer ces quatre perspectives, c'est-à-dire le modèle courant de formation en mathématiques avancées, le type de cours, la nature de ce qui est fait,

[18] Ces deux dernières questions proviennent du groupe de travail sur *l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement*, au colloque international de l'Espace Mathématique Francophone, en 2012, à Genève en Suisse.

les contenus, etc., et des propositions sur ce qui pourrait/devrait être fait à la formation universitaire en mathématique.

2.2.1 Perspective 1 : le modèle courant de formation en mathématiques avancées

Travailler des mathématiques avancées représente le chemin pris par un grand nombre d'universités canadiennes, comme mentionné au Chapitre 1. Cette perspective fait passer les futurs enseignants par la même voie que les futurs mathématiciens. C'est le parcours bien connu du travail des mathématiques avancées : on parle ici des cours de calcul différentiel et intégral, d'algèbre linéaire, de théorie des nombres, etc. L'intention derrière ce choix est de permettre à l'enseignant d'accéder à des mathématiques de haut niveau, de lui permettre d'en savoir plus que la matière qu'il enseignera au secondaire et de lui offrir un large éventail au niveau des mathématiques pour voir et comprendre comment les concepts enseignés s'insèrent dans le panorama mathématique.

Dans cette orientation, on retrouve souvent, dans un même cours de mathématiques universitaire, à la fois des futurs mathématiciens, des futurs physiciens, des futurs ingénieurs et des futurs enseignants. La finalité perçue des cours est de faire avancer les connaissances mathématiques. Le futur enseignant n'est pas considéré comme futur enseignant dans ces cours, alors que ces cours s'adressent à toutes sortes d'étudiants. La charge est ici laissée aux étudiants de faire le pont entre ces cours de mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire qu'il enseignera.

2.2.2 Perspective 2 : le travail des mathématiques avancées, avec des liens systématiques et explicites avec les contenus à enseigner

L'idée ici est que le futur enseignant travaille des mathématiques avancées, mais de façon reliée aux contenus à enseigner aux élèves du secondaire. Comme la perspective précédente, l'idée est de permettre l'accès à des mathématiques de haut niveau, de permettre à l'enseignant d'en savoir plus que ce qu'il enseigne et d'offrir une vue d'ensemble du vaste terrain mathématique à l'intérieur duquel les concepts travaillés s'insèrent. La différence se trace toutefois à l'ajout des liens explicites entre les contenus universitaires et les contenus du secondaire, comme le suggèrent aussi Zazkis et Leikin (2010). À titre d'exemple, le rapport du CBMS (2001) sur la formation mathématique des enseignants suggère (1) que les cours de mathématiques avancées soient repensés pour aider les futurs enseignants à faire des liens entre les mathématiques avancées qu'ils étudient et les mathématiques du secondaire qu'ils vont enseigner et (2) que les départements de mathématiques aident à la mise en place d'un cours qui examine d'un point de vue avancé les idées et procédures fondamentales et les difficultés des mathématiques du secondaire. Cette perspective n'est pas sans rappeler les idées du mathématicien Felix Klein (1932), qui a écrit deux livres ayant pour titre *Elementary mathematics from an advanced standpoint.*

Contrairement à la première perspective, ces liens ne sont pas perçus comme évidents et laissés à la charge de l'enseignant en formation, mais plutôt comme quelque chose qui doit être travaillé lorsqu'on aborde les concepts universitaires avec de futurs enseignants. L'intention est de montrer explicitement comment s'insèrent et comment s'articulent les concepts travaillés au secondaire à l'intérieur du panorama mathématique.

Ceci fait écho aux cours de mathématiques dédiés aux futurs enseignants à l'Université de Laval où l'on souhaite établir des liens (de près ou de loin) entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire (Gourdeau et Proulx, 2012). Dans ce même chapitre, Gourdeau explique :

> « Lorsque [cet ajout de liens] peut être fait avec les étudiants de sorte que ceux-ci comprennent comment les mathématiques vues au niveau universitaire sont le fruit de réflexion ou de problèmes qui trouvent leur origine dans des thèmes mathématiques vus au secondaire, alors je crois que l'on ajoute vraiment à la formation. » (Gourdeau et Proulx, 2012, p. 113)

Une des intentions est de faire comprendre aux futurs enseignants que les mathématiques « simples » du secondaire sont en fait le début de quelque chose d'important; par exemple, chercher à déterminer une fonction à partir de son taux de variation. Or, pour Gourdeau, cet ajout de liens n'est pas suffisant si l'on ne fait qu'ajouter des liens entre les contenus. Pour lui, au-delà des contenus mathématiques, il faut faire vivre une « expérience mathématique », une certaine manière de faire qui soit mathématique, ce qui amène à la Perspective 3.

2.2.3 Perspective 3 : l'activité mathématique par les nouvelles mathématiques

L'intérêt de la troisième perspective est de faire vivre une activité mathématique authentique aux futurs enseignants, c'est-à-dire de leur faire vivre les mathématiques autrement que ce qu'ils ont habituellement connu dans leur parcours scolaire ou universitaire. Ainsi, en leur donnant accès à une sorte d'activité mathématique, l'intention est que les futurs enseignants la reproduisent dans leur pratique. Ceci rappelle des aspects de la stratégie d'homologie, sur le plan de l'activité et de l'action, de Houdement et Kuzniak (1996), où les pratiques d'enseignement du formateur servent de modèle pour le futur enseignant. L'intention est que ce dernier transpose ou imite ce modèle, qu'il a vécu en formation, dans sa pratique enseignante.

Pour ce faire, les contenus choisis sont en lien avec les contenus du secondaire, mais sans être des mathématiques enseignées à l'école, ni des mathématiques fréquemment enseignées à l'université. Ces mathématiques doivent être nouvelles pour le futur enseignant, mais avec des contenus travaillés étroitement liés aux contenus mathématiques du secondaire (donc l'enseignant en formation en apprend aussi sur les concepts mathématiques qu'il enseignera). L'intérêt avec les nouveaux concepts est de faire revivre l'apprentissage de certains concepts mathématiques, en faisant vivre l'apprentissage d'un concept étroitement lié à celui de l'école. Par exemple, le travail des opérations arithmétiques et des nombres dans différentes bases (base 2, 3, 8, 12, etc. : les systèmes de numérations historiques en base 5, 60, etc.) permet de faire vivre et revivre l'apprentissage des nombres et des opérations aux futurs enseignants. Le frustum est aussi un bon exemple. Trouver une formule pour le volume du frustum d'un cône (figure 1.2a) ou d'un frustum d'une pyramide à base carrée (figure1.2b) est un défi pour le futur enseignant, tout comme comprendre une formule pour le volume d'un cône ou d'une pyramide à base carrée peut être un défi pour un élève du secondaire. Des notions reliées aux volumes sont questionnées et approfondies, telle l'aire de la base multipliée par la hauteur, la décomposition d'un solide en plus petits solides connus, les liens entre les prismes ou frustums, etc.

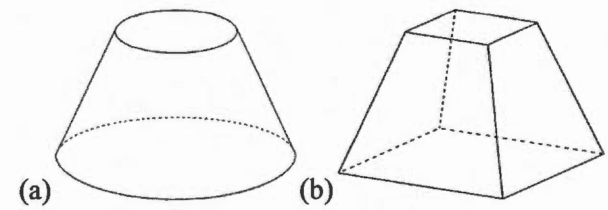


Figure 2.5 (a) Frustum d'un cône; (b) Frustum d'une pyramide à base carrée

2.2.4 Perspective 4 : le travail des mathématiques « scolaires »

Cette perspective se situe directement sur le travail des contenus mathématiques que les enseignants vont enseigner dans leur pratique quotidienne (les fractions, l'algèbre, les fonctions, le volume des solides, etc.). Plusieurs chercheurs s'entendent sur le fait que les enseignants doivent connaître les mathématiques qu'ils enseignent en profondeur et en étendue (voir, entre autres, Ma, 1999; Ball et Bass, 2000; Adler et Davis, 2006). Il s'agit ici d'offrir aux futurs enseignants un contexte d'apprentissage mathématique riche où ils peuvent élargir et approfondir leurs connaissances des mathématiques scolaires, des mathématiques mobilisées en classe. Celles-ci renvoient à beaucoup plus que les mathématiques prescrites par le curriculum, il s'agit aussi des « éléments et événements mathématiques qui entourent et émergent de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques en classe, incluant les mathématiques produites par l'enseignant dans sa pratique même » (Proulx et Bednarz, 2009, p. 8; inspiré de Moreira et David, 2005). Notamment, « des raisonnements clés, des approches et façons spécifiques (souvent non standard) de donner du sens aux concepts, des stratégies et représentations diverses, des conceptions erronées, erreurs et difficultés mathématiques sont au cœur du travail, voire des éléments historiques de l'évolution d'un concept sont en jeu, etc. » (Proulx et Bednarz, 2009, p. 8). Voici un exemple offert par Proulx et Bednarz qui illustre ce type de travail sur l'exploration des mathématiques scolaires (pour une illustration détaillée de l'exploration de ces mathématiques avec des enseignants en exercice, voir Proulx et Bednarz, 2009) .

À son retour de Chine, un de mes collègues m'a fait part d'une procédure particulière utilisée par une élève de 11 ans pour diviser les fractions suivantes :

$$\frac{26}{20} \div \frac{2}{5} = \frac{26 \div 2}{20 \div 5} = \frac{13}{4}$$

Est-ce que cette procédure est adéquate?
Fonctionne-t-elle toujours? Comment?

Tiré de Proulx (2007)

Dans cet exemple le futur enseignant est amené à donner sens à une procédure non standard (pour diviser deux fractions) et à vérifier si elle est valide ou non. Cette tâche offre un contexte riche où le futur enseignant est invité à creuser sa propre compréhension de la division de fraction pour donner sens à cette procédure mathématique reflétant des mathématiques qui émergent de la classe.

2.2.5 Vue d'ensemble sur les perspectives

Ces perspectives ont été présentées pour éclairer différents types de formations mathématiques qu'il est possible d'offrir aux futurs enseignants. Bien sûr, elles ne sont pas exclusives. Certains proposent d'axer la formation sur les quatre perspectives en parallèle, d'autres en continuité dans le temps et d'autres d'axer la formation uniquement sur une partie de ces perspectives (Hache, Proulx et Sagayar, 2009). Il ne s'agit non plus de dire que l'une est meilleure que l'autre, mais plutôt de présenter les visées de chacune. Cette vue d'ensemble sur les perspectives de formations et leurs apports permet de mieux voir quel type de formation peut être favorisé pour promouvoir le développement des connaissances mathématiques des futurs enseignants dans leur préparation à devenir enseignants. Ceci montre que la « formation mathématique » de l'enseignant n'est pas unique, ni cadrée, et qu'elle est d'une diversité possible.

2.3 Retour sur le cadrage théorique

Dans l'ensemble, j'ai offert ci-haut un portrait assez clair des travaux sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement avec le cadre de l'équipe de Ball sur les connaissances « choses » et le cadre de l'équipe de Rowland sur les connaissances « actions ». Cette clarification permet de mieux comprendre la nature des connaissances mathématiques que le futur enseignant devrait développer dans sa formation initiale et elle permet de mieux saisir ce que peuvent être les connaissances mathématiques des enseignants. Aussi, cette clarification sur la nature des connaissances mathématiques requises par l'enseignant dans sa pratique a permis d'entrer sur différentes perspectives de formation à l'enseignement des mathématiques qui ont été pensées pour outiller le futur enseignant à sa pratique enseignante future. Ces perspectives éclairent à leur tour sur diverses éventualités pour former mathématiquement les enseignants. En somme, ces entrées sur la nature des connaissances et sur les perspectives de formation offrent un panorama large de questions sur la formation des enseignants et celles-ci sont directement en alignées avec l'expérience du futur enseignant qui développe ses connaissances mathématiques à travers sa formation en mathématiques. Ceci offre des clés d'interprétation (implicites ou parfois explicites) pour situer ma recherche.

Il s'avère maintenant important d'expliquer la méthode de recherche et les outils que j'ai choisis pour étudier et mieux comprendre les expériences des futurs enseignants dans leurs programmes de formation en mathématiques avancées. Je fais part de ma méthodologie de recherche au prochain chapitre.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Ma recherche veut mieux comprendre comment les futurs enseignants conjuguent leurs expériences en mathématiques avancées avec leur préparation à l'enseignement des mathématiques au secondaire. En particulier, elle vise à mieux comprendre les expériences mathématiques que les futurs enseignants retiennent et ce qu'ils croient pouvoir/veulent réinvestir dans leur enseignement, et aussi mieux comprendre la présence possible de ruptures entre leurs expériences mathématiques vécues à l'intérieur des cours de mathématiques avancées et leur préparation à devenir des enseignants de mathématiques. Pour atteindre ces buts, j'ai procédé à une cueillette de données prenant la forme d'entretiens semi-structurés avec sept étudiants suivant une formation en mathématiques avancées dans le cadre d'un programme en enseignement des mathématiques au secondaire dans une université canadienne (voir la courte description du programme en 3.2.1). Ces entrevues ont été enregistrées sous format audio et un journal de bord a été construit pour recueillir mes commentaires et impressions à chaud suite aux entrevues. Ces outils de cueillette s'inscrivent dans une méthodologie par étude de cas.

3.1 Orientation méthodologique globale retenue : l'étude multicas

Le désir d'approfondir ma compréhension du vécu des futurs enseignants dans leur formation en mathématiques avancées a guidé ma décision d'opter pour une étude multicas. Pour Karsenti et Demers (2000), l'étude de cas se distingue des autres types d'études par la compréhension fine qu'elle peut apporter à un aspect complexe, dans mon cas l'expérience vécue des futurs enseignants.

> « Elle [l'étude de cas] vise avant tout une profonde compréhension du système représenté par le cas, le sens des interactions qu'on y trouve, le pourquoi et le comment de ce phénomène. » (p. 229).

Mes objectifs de mieux comprendre/découvrir un phénomène (les expériences en mathématiques avancées des futurs enseignants) et de confirmer ou infirmer une hypothèse (la présence de réinvestissements ou de ruptures théorisées) sont caractéristiques de l'étude de cas selon Karsenti et Demers (2000). La beauté de ce type d'étude, comme le soulève Merriam (1988, cité dans Karsenti et Demers, 2000), est qu'elle permet l'émergence de nouvelles hypothèses ou perspectives. L'étude de cas m'offre donc la possibilité de mieux comprendre le vécu des futurs enseignants, tout en laissant la porte ouverte à l'émergence de nouvelles hypothèses (tels que de nouveaux réinvestissements ou de nouvelles ruptures). Bref, en voulant mettre l'accent sur la voix des futurs enseignants, mon étude de cas se veut une approche prometteuse pour mieux comprendre le phénomène de la formation en mathématiques avancées comme préparation à l'enseignement au secondaire.

Le choix d'une étude *multicas* se base sur le fait que, sans nécessairement vouloir généraliser, une interprétation du vécu des futurs enseignants fondée sur plusieurs cas peut être plus intéressante, ou plus parlante, que des résultats provenant d'un seul cas. Comme le rappelle Stake (1995, cité dans Karsenti et Demers, 2000), « la divergence élargit la compréhension d'un phénomène humain ». C'est cette idée de divergence que mon étude multicas veut aller chercher à travers l'étude de multiples cas de futurs enseignants. D'une certaine façon, en m'inspirant de Yin (1994, cité dans Karsenti et Demers, 2000), chaque cas individuel informe sur la diversité des expériences mathématiques vécues par les formés et l'ensemble des cas donne une vision élargie de leurs expériences, en ouvrant possiblement la porte à certains patterns émergents.

> « Yin (1994) précise que, par rapport à l'étude du cas simple, une étude multicas a pour but de découvrir des convergences entre plusieurs cas, tout en contribuant à l'analyse des particularités de chacun des cas. » (p. 231)

3.2 Le programme et les sujets retenus

3.2.1 Le programme

L'université canadienne dans laquelle les étudiants ont été interviewés offre un programme combiné de cinq ans contenant, d'un côté, une formation disciplinaire en mathématiques avancées offerte par la faculté des sciences et, de l'autre, une formation pédagogique offerte par la faculté d'éducation. Plus précisément, après cinq ans d'université, l'étudiant obtient 90 crédits en sciences (avec une majeure en mathématiques, 51 crédits minimum, et une mineure dans une autre discipline scientifique, 24 crédits minimum). Il obtient aussi 73 crédits en éducation (51 crédits de cours en éducation, deux cours de didactique disciplinaire (6 crédits), un pour la majeure et l'autre pour la mineure, et trois stages d'enseignement, pour 16 crédits au total). D'une certaine façon, la formation est composée de cours de pédagogie/éducation et de cours de mathématiques avancées entremêlés.

En ce qui a trait à la structure du programme combiné, l'université suggère que la plupart des cours des trois premières années soient ceux de la formation disciplinaire (les cours en mathématiques avancées, les cours de la mineure et les cours optionnels en sciences) avec quelques cours d'éducation par semestre et que la majorité des cours dans les deux dernières années soient des cours de la faculté d'éducation. Les cours de didactique, eux, sont suivis au deuxième semestre de la quatrième année. Les trois stages d'enseignement sont répartis à travers la formation : un premier stage d'observation de trois semaines après la première année (en mai), un stage de prise en charge de quatre semaines à la fin de la troisième année (en mai) et un stage d'intégration professionnelle de quatre mois au premier semestre de la cinquième année.

L'option du programme combiné s'est avérée intéressante pour ma recherche puisque ces étudiants suivent en même temps leur formation disciplinaire en mathématiques avancées et leur formation pédagogique par des cours dans la faculté d'éducation. Tout particulièrement, les étudiants assistent à leurs cours de mathématiques avancées en sachant qu'ils sont futurs enseignants et en sachant que ces cours font partie de leur formation à l'enseignement des mathématiques au secondaire. Ceci les rend susceptibles à avoir amorcé une réflexion sur l'interaction entre les deux types de formation. Ce contexte est différent de celui des étudiants qui complètent un baccalauréat en mathématiques et qui suivent par la suite une formation pédagogique d'une ou deux années. Ces derniers ne savent pas nécessairement, lorsqu'ils sont assis dans leurs cours de mathématiques avancées, qu'ils suivent ces cours pour devenir enseignants de mathématiques au secondaire; cette décision se fait dans certains cas vers la fin du programme. Par conséquent, les étudiants inscrits dans le programme combiné ont la particularité de se définir dès le début comme futurs enseignants, ceci leur permettant par exemple d'être potentiellement attentifs à la création de liens ou de ruptures à travers leur formation mathématique, ce qui peut contribuer favorablement à ma collecte de données.

3.2.2 Les futurs enseignants

La sélection des futurs enseignants a été faite, en quelque sorte, selon leur niveau d'étude. Sept étudiants de la deuxième à la cinquième année du programme ont été choisis. Aucun étudiant de première année n'a été retenu puisque ceux-ci n'ont pas vécu un premier stage exploratoire et n'ont pas complété les cours de mathématiques avancées de première année. Ils ne sont donc pas les mieux placés pour parler de la façon qu'ils conjuguent ces deux types d'expériences. Conséquemment, tous les étudiants choisis ont suivi les deux cours de mathématiques obligatoires en première année, soit deux cours d'analyse mathématique appliquée (3 crédits chacun) et au moins un premier cours de mathématiques obligatoire de deuxième année, soit un cours d'algèbre matricielle (3 crédits). Les cours de première année traitent entre autres des dérivées et des intégrales et le cours de deuxième année des matrices; soit des contenus travaillés à la fin de l'école secondaire[19].

Parmi les sept futurs enseignants retenus, un est en deuxième année, un est en troisième année, quatre sont en quatrième année et un est en cinquième année. On remarque qu'il y a (au moins) un étudiant dans chaque année de formation (sauf la première), ce qui offre une vue transversale de la formation. On compte aussi quatre étudiants dans une même année de formation, soit la quatrième, ce qui offre une entrée plus en profondeur sur ce qui se

---

[19] Ce qui rappelle le contexte de l'étude de Zazkis et Leikin (2010) en Colombie-Britannique (voir section 1.2.2).

passe à l'intérieur d'une même année. Voici en quelques mots les expériences de formation des étudiants en 2e, 3e, 4e et 5e année, en termes de cours suivis, selon leur avancement dans la formation.

Une étudiante de deuxième année, Chloé, et une étudiante de troisième année, Alexa, ont été retenues. La particularité de ces étudiantes est que leur formation est, jusqu'à présent, majoritairement disciplinaire. Par exemple, dans les suggestions faites par l'université pour les deux premières années du programme, on compte 11 cours (27 crédits) de mathématiques avancées pour trois cours (8 crédits) d'éducation et un stage (2 crédits). Quatre étudiants de quatrième année ont été retenus : Gilles, Josie, Monic et Talia. Cette quatrième année est charnière puisque les formés sont en fin de parcours dans leur formation en mathématiques avancées (il ne reste habituellement qu'un seul cours de mathématiques avancées à faire en cinquième année, au semestre d'hiver) et bien avancés dans leur formation en éducation. Tout particulièrement, le cours de didactique des mathématiques est offert au semestre d'hiver de la quatrième année. Aussi, ces étudiants ont vécu deux stages d'enseignement et commencent à se préparer pour le dernier stage d'enseignement de quatre mois, qui se déroule au semestre d'automne de la cinquième année. Il s'avère ainsi pertinent d'explorer cette année charnière plus en profondeur à travers les quatre cas, car des informations particulières peuvent en ressortir. Finalement, l'étudiant de cinquième année, Rémi, est tout particulièrement intéressant puisqu'il est en fin de parcours. Ce dernier a complété tous ses stages de formation et termine, au moment de l'entrevue, sa formation en mathématiques avancées (51 crédits). Étant à quelques semaines de la fin de sa formation, et à quelques mois d'avoir sa propre classe dans une école secondaire, il semble bien placé pour parler de ses expériences mathématiques en lien avec son enseignement. Bref, l'idée derrière cette double divergence de cas est de me permettre de penser le cheminement à travers la formation et à travers une même année de formation. Dans l'ensemble, comme le souligne Stake (1995, cité dans Karsenti et Demers, 2000), l'intention est de tenter d'élargir la compréhension des expériences, ici les expériences mathématiques vécues dans un tel programme.

3.3 Présentation globale de l'instrument de cueillette de données : les entrevues individuelles semi-dirigées

Pour répondre à mes questions de recherche, ma collecte de données s'est faite sous forme d'entrevues individuelles semi-dirigées (voir Savoie-Zajc, 2000). Ces entrevues étaient composées de cinq questions et de trois tâches mathématiques, construites et choisies pour permettre de mieux connaître les expériences vécues chez les futurs enseignants et faire ressortir les réinvestissements et les ruptures possibles entre leurs expériences en mathématiques avancées et leur préparation à l'enseignement. Les entretiens se sont déroulés de façon semi-dirigée, pour inviter les futurs enseignants à partager les expériences mathématiques qui leur viennent en tête, même si celles-ci ne sont pas directement reliées aux questions posées. Ainsi, même si les questions et les tâches étaient prédéterminées, la discussion restait ouverte à d'autres idées non prévues. Par conséquent, le déroulement de l'entrevue n'était pas linéaire : par exemple, les questions pouvaient être posées dans différents ordres et les tâches amenées à différents moments pour permettre de suivre le fil de la discussion.

3.3.1 Élaboration des questions d'entrevues

Les cinq questions d'entrevues permettent de savoir comment les futurs enseignants conjuguent leurs expériences en mathématiques avancées et leur préparation mathématique. Le but est ici de voir ce qu'ils retiennent de leurs expériences en mathématiques avancées, qu'elles soient en lien avec le contenu, la façon de faire les mathématiques, l'approche d'enseignement, etc. Aussi les questions sont ouvertes et orientées pour faire ressortir des réinvestissements possibles avec les mathématiques mobilisées en pratique[20] et pour faire ressortir des éléments de ruptures, s'ils sont présents. Les questions veulent permettre de « caractériser » quelque peu chacun des enseignants sur le plan de ses visions et de ses

[20] Il est important de rappeler que, contrairement aux participants des études d'Even (2011) et de Zazkis et Leikin (2010) qui sont des enseignants, les participants de mon étude sont des futurs enseignants. Ainsi, lorsque je parle en termes de réinvestissements, il s'agit de ce qu'ils croient pouvoir/veulent réinvestir dans leur pratique future. De plus, comme la méthodologie en est une d'entrevues, ce n'est pas leur pratique réelle qui est analysée, mais bien leurs intentions liées à la pratique (intentions qui ne tiennent pas nécessairement compte de toutes les contraintes de classe, de curriculum, etc., qui interviendront plus tard dans leur pratique).

influences personnelles — ce qui joue sur sa façon de voir, de faire et d'enseigner les mathématiques. Voici en détail les cinq questions et leurs intérêts.

Première question. Cette première question cherche à voir ce que chacun des futurs enseignants trouve important en enseignement des mathématiques. Elle cherche, en même temps, à voir ce à quoi il s'attend ou ce qu'il aimerait apprendre lors de sa formation.

> En vous inscrivant dans le programme de formation pour devenir enseignant de mathématiques au secondaire, quelles étaient vos attentes par rapport à cette formation?

Deuxième question. La deuxième question veut faire ressortir spontanément ce dont les futurs enseignants se souviennent de leurs expériences en mathématiques avancées, c'est-à-dire qu'elle veut faire ressortir les événements marquants vécus en mathématiques qui peuvent potentiellement être en lien, ou en rupture, avec leur pratique enseignante.

> En quelle année de formation êtes-vous? Combien de cours de mathématiques avez-vous suivis? Lesquels? En gros, depuis le début de votre formation, qu'avez-vous appris de plus significatif dans vos cours de mathématiques? Est-ce qu'il y a eu des événements marquants?

Troisième question. Cette question veut faire ressortir ce que chacun voit, de façon spontanée, comme étant le ou les éléments qui les aident et les préparent à enseigner. Elle veut faire ressortir les apports perçus de leurs expériences en mathématiques avancées pour leur enseignement, tel un exemple sur comment un contenu traité dans un cours peut être réinvesti dans un cours au secondaire ou comment une façon de faire les inspire pour leur pratique future.

> Est-ce que vous trouvez que votre formation vous prépare bien à enseigner les mathématiques? Si oui, comment vous prépare-t-elle à enseigner les mathématiques au secondaire? Avez-vous des exemples (en stage par exemple)? Sinon, que manque-t-il à votre formation selon vous? Et comment aimeriez-vous qu'elle vous prépare mieux? Avez-vous des exemples (en stage par exemple)?

Cette question ouverte, en plus de faire voir ce que les futurs enseignants mettent de l'avant comme ayant une influence sur leur pratique, permet de voir s'ils considèrent qu'il leur manque quelque chose dans leur préparation et ce qu'ils croient pourrait combler ce manque.

Quatrième question. La quatrième question veut faire ressortir les avantages (tels des liens entre les contenus, une façon de faire mise de l'avant, etc.) et les inconvénients (les ruptures possibles dans la nature et la forme des contenus, la façon de faire les mathématiques, ou d'autres encore) que les futurs enseignants entrevoient d'une formation en mathématiques avancées pour leur pratique enseignante au secondaire.

> Quelles sont les avantages et/ou inconvénients selon vous de suivre une formation en mathématiques avancées pour votre pratique future en salle de classe du secondaire? Pourquoi? Pouvez-vous donner des exemples?

Cinquième question. La cinquième question invite les futurs enseignants à prendre un recul par rapport à leur formation mathématique pour voir s'ils sont satisfaits ou non de leur propre préparation à l'enseignement des mathématiques.

> Est-ce que, à ce jour, vous êtes satisfaits de votre formation mathématique pour vous préparer à être un enseignant du secondaire? Si oui, en quoi êtes-vous satisfait? Pourquoi? Sinon, qu'auriez-vous ajouté pour être satisfait? Pourquoi?

En somme, les questions d'entrevue donnent une importance à la voix du futur enseignant et à son vécu dans sa formation mathématique. Elles veulent faire ressortir ce qu'ils retiennent et ce qu'ils trouvent important pour leur pratique d'enseignants (dans les stages ou dans leur classe future). À ces questions s'ajoutent dans l'entrevue des tâches spécifiques à résoudre par l'étudiant.

3.3.2 Les tâches choisies pour l'entrevue

Les tâches ont pour but de voir comment les futurs enseignants réagissent spontanément à des événements mathématiques reliés au contexte de classe. L'intention est de voir comment les futurs enseignants travaillent ces tâches et ce qu'ils en pensent. De ce fait, elles sont à la fois une façon d'avoir un aperçu de l'engagement mathématique des futurs enseignants, mais aussi de stimuler *a posteriori* une discussion supplémentaire sur leur préparation mathématique. Les tâches ont été choisies parce qu'elles sont issues de questionnements d'élèves et qu'elles reflètent des mathématiques mobilisées en contexte d'enseignement. Elles ont aussi été choisies en fonction des ruptures soulevées par la recherche (voir section 1.2.3) et veulent permettre d'explorer ces hypothèses de ruptures en lien avec la deuxième sous question de recherche. Elles veulent aussi permettre de lier et confronter les mathématiques mobilisées en pratique et les expériences en mathématiques avancées des futurs enseignants. De plus, ces tâches confrontent les futurs enseignants à leurs propres croyances quant aux apports de leurs expériences en mathématiques avancées pour leur pratique future, c'est-à-dire que les futurs enseignants se retrouvent dans un contexte pertinent à la classe, où ils sont invités à utiliser leurs connaissances mathématiques pour répondre à des questions d'élèves, ce qui peut faire ressortir des réinvestissements ou des ruptures qu'ils ne voyaient pas avant entre leurs expériences en mathématiques avancées et les mathématiques mobilisées en pratique. En somme, comme pour les questions d'entrevue, une intention est de voir ce que les étudiants pensent de leur formation mathématique et sa pertinence.

3.3.2.1 Sujet choisi pour les tâches : l'algèbre

Pour investiguer les expériences mathématiques des futurs enseignants et les hypothèses de ruptures l'algèbre est apparue comme un contenu mathématique à privilégier et à explorer en profondeur. Quatre raisons motivent ce choix. Premièrement, l'algèbre est un sujet avec lequel les élèves ont beaucoup de difficultés au secondaire. Ils ont de la difficulté à donner un sens à la lettre, à manipuler algébriquement, à raisonner algébriquement, à voir son intérêt par rapport à la méthode arithmétique, etc. (voir, entre autres, Bednarz et Dufour-Janvier, 1992; Marchand et Bednarz, 1999; Bednarz, 2001). Deuxièmement, l'algèbre est un sujet important dans les classes nord-américaines. Au Québec, par exemple, Mary (2003) explique que 25% des objectifs du programme portent sur l'algèbre en 2^e secondaire, 38% en 3^e secondaire et 55% en 4^e secondaire (voir aussi Bednarz, Maheux et Proulx, 2012 sur le sujet). Troisièmement, les futurs enseignants suivent des cours d'algèbre dans leur formation en mathématiques avancées (algèbre matricielle par exemple) : il y a donc un potentiel de réinvestissement de ces connaissances dans les tâches. Quatrièmement, dans la littérature scientifique, l'algèbre est très présente dans les questions et réflexions sur les ruptures entre les mathématiques avancées et les mathématiques de l'enseignement : l'algèbre fait potentiellement intervenir deux des trois ruptures mentionnées au chapitre 1, soit les mathématiques travaillées au niveau formel dans un symbolisme accru et la nature compressée et efficace de ces contenus (voir sections 1.2.3.1 et 1.2.3.2). En effet, le symbolisme est très présent en algèbre et constitue la façon élégante de compresser en quelques lignes un concept qui peut s'avérer très abstrait et très complexe. L'algèbre s'avère donc un contenu intéressant à investiguer dans cette recherche, pour voir comment les futurs enseignants travaillent ce contenu par rapport à leur enseignement.

3.3.2.2 Les exemples de tâches posées

Tâche 1 : Livres et disques (Bednarz et Dufour-Janvier, 1992). La première tâche (voir Appendice A) amène le futur enseignant à se questionner sur le sens de la lettre et le sens des opérations algébriques. À première vue toute simple, cette tâche peut s'avérer un défi lorsqu'on essaie de donner un sens aux symboles et aux opérations algébriques. Bednarz et Dufour-Janvier (1992) soulèvent deux significations accordées aux lettres qui entrent potentiellement en jeu dans cette tâche. Une première est que plusieurs élèves « traitent les lettres comme des objets concerts plutôt que comme un nombre d'objets » (p. 25; voir aussi Booth, 1984). C'est le cas de Brigitte dans la tâche qui traite L comme étant un « livre » au lieu d'un « nombre de livres ». Une deuxième conception fréquente chez les élèves est que deux lettres différentes ne peuvent pas représenter la même valeur. Plus tard, cette conception rend difficile l'acceptation de la substitution dans la résolution d'équation, comme on le voit dans les exemples d'explications d'élèves. Pour les élèves, écrire $L = D$ et par la suite substituer D pour L dans l'équation $2L + 6D = 40$ (qui devient alors $2L + 6L = 40$) est une erreur puisque différentes lettres doivent nécessairement représenter différentes valeurs et on ne peut alors écrire $L = D$. Cette tâche veut donc voir comment les futurs enseignants donnent un sens à la lettre algébrique. A-t-on le droit de dire $L = D$? Si oui, que signifie $2L + 6L = 40$? Cette tâche peut aussi faire ressortir des éléments de ruptures en lien avec le symbolisme. La première hypothèse de rupture, concernant la nature formelle des mathématiques avancées, soulignait que les futurs enseignants développent lors de leur formation une certaine facilité à jouer avec les symboles, ou une difficulté à sortir de l'abstrait et du formalisme pour rendre les mathématiques accessibles aux élèves, ce qui peut devenir un obstacle à leur pratique (Nathan et Koedinger, 2000 ; Proulx, 2010).

Tâche 2 : Systèmes d'équations. Cette deuxième tâche a été choisie parce qu'elle questionne une méthode connue pour résoudre un système d'équations. Elle invite le futur enseignant à donner sens à la méthode de réduction, où celui-ci n'est pas transparent. Dans sa pratique, l'enseignant doit décortiquer et décompresser les concepts mathématiques qu'il enseigne aux élèves (Adler et Davis, 2006; Ball et Bass, 2000, 2003; Bednarz, 2001; Huillet, 2009). Dans la solution proposée par l'enseignante (voir Appendice B), la première équation ($27x + 14y = 750$) représente le coût des billets et la seconde ($x + y = 35$) représente le nombre de billets (adultes et enfants). Pour résoudre le système d'équations, l'enseignante multiplie la deuxième équation par 14 pour ensuite la soustraire de la première équation. Cette soustraction n'a aucun sens pour l'élève qui argumente qu'on ne peut pas soustraire un nombre de billets à un montant d'argent. Des questions comme celles-ci ont été posées aux futurs enseignants en entrevue : Que répondrais-tu à l'élève? Quel sens donnes-tu à la méthode de réduction? Et, quel sens derrière la multiplication par 14? La tâche cherche à voir la signification que les futurs enseignants donnent à cette méthode et aux questions de l'élève par rapport à cette dernière. De plus, les systèmes d'équations forment un contenu travaillé dans le cours d'algèbre matricielle suivi généralement lors de la deuxième année de formation universitaire des futurs enseignants de l'étude. Cet exercice peut donc faire émerger des liens potentiels entre les expériences vécues dans ce cours et les mathématiques mobilisées dans la tâche (qui représente un événement s'étant produit en classe).

Tâche 3 : Logarithmes. Dans cette troisième tâche (voir Appendice C), les futurs enseignants font face à deux solutions d'une équation logarithmique dans lesquelles toutes les étapes de la résolution suivent les lois logarithmiques. Pourtant, même s'il n'y a pas d'erreurs dans l'une ou dans l'autre des démarches, celles-ci n'arrivent pas au même ensemble solution. Que se passe-t-il? Les deux manipulations sont-elles bonnes? Cette tâche questionne, entre autres, les notions d'« équations équivalentes » et de « conservation de l'égalité ». Selon Mary (2003), on définit le plus souvent « l'équivalence des équations par le fait qu'elles ont le même ensemble solution » (p. 81). Par exemple, dans l'équation $x + 2 = 2x$, si on additionne la même quantité à chaque membre de l'égalité, tel $x + 2 + 5 = 2x + 5$, l'ensemble solution reste le même, soit $x = 2$. Mais est-ce le cas pour tous les types d'opérations? Si on prend l'opération « mettre au carré » dans l'équation $x + 2 = 2x$, on obtient $(x + 2)^2 = (2x)^2$. Dans un premier temps, on remarque que l'égalité est conservée, c'est-à-dire que chaque membre de l'équation à la même valeur : $(x + 2)^2$ est égal à $(2x)^2$ tout comme $x + 2$ est égal à $2x$. Dans un deuxième temps, avec la formule quadratique on trouve que l'ensemble solution pour $(x + 2)^2 = (2x)^2$ est $x = 2$ et $x = -2/3$. Ainsi, les deux équations partagent la solution x = 2, mais une deuxième solution « s'ajoute » dans la seconde équation, soit x = -2/3, ce qui suggère que les deux équations ne sont pas équivalentes puisqu'ils n'ont pas le même ensemble solution.

La tâche des logarithmes invite le futur enseignant à décortiquer les deux solutions d'élèves pour essayer de comprendre d'où vient la deuxième solution et si elle est bonne ou non. Au-delà de la connaissance instrumentale de Skemp (1978), qui est uniquement la connaissance du comment faire (dans ce cas, savoir comment appliquer les lois des logarithmes pour trouver la solution), cette tâche veut aller chercher la connaissance relationnelle du futur enseignant en lui demandant pourquoi deux élèves obtiennent différents ensembles solutions pour une même équation.

3.4 Les conditions réelles d'expérimentation

À priori pour l'entrevue, l'ordre prévu était de poser les questions aux participants et ensuite de leur présenter les trois tâches. Toutefois, les entrevues étant semi-structurés, l'ordre des questions et des tâches a parfois été modifié pour s'ajuster et faire suite aux propos des futurs enseignants. Aussi, certaines questions ont été reprises, par moi comme intervieweur ou réabordées par le futur enseignant lui-même, dans la discussion après avoir réalisé les tâches, alors que le futur enseignant ou moi-même comme intervieweur désirions revenir sur les propos tenus pour les enrichir, les nuancer ou les transformer.

Les entrevues individuelles ont été d'une durée approximative d'une heure et ont été enregistrées avec un enregistreur portable audio. De plus, les feuilles de tâches que les futurs enseignants ont utilisées ont été recueillies. Chacune des entrevues a été réalisée à la fin du mois de février ou au début du mois de mars, soit au milieu du deuxième semestre. Un journal de bord a été tenu pour inscrire mes commentaires à chaud après chaque entrevue. Une transcription sur papier de ces sept entrevues individuelles a été réalisée, pour après en faire l'analyse. Le prochain chapitre traite de cette analyse.

CHAPITRE IV

RÉSULTATS

Pour traiter les données, une analyse des enregistrements et des transcriptions des entrevues réalisées avec les futurs enseignants a été effectuée. Chacun des cas a été analysé de façon individuelle.

Je reviens d'abord brièvement sur la grille d'analyse qui m'a permis d'effectuer mes analyses. Ensuite, pour chaque cas, je présente le portrait du futur enseignant en terminant par une interprétation des résultats et un retour. Plus précisément, pour bien montrer l'éventail de cas recueillis, je décris en détail l'analyse de quatre cas, soit ceux de Chloé (2^{e} année), d'Anita (3^{e} année), de Josie (4^{e} année) et de Rémi (5^{e} année). Ensuite, pour chacun des trois autres cas, soit ceux de Monic, de Talia et de Gilles, tous en 4^{e} année, je présente le portrait global du futur enseignant et la synthèse des résultats.

4.1 Outils d'analyse pour les entrevues

4.1.1 Éléments de la grille d'analyse

La grille d'analyse de départ utilisée pour analyser les expériences de préparation *mathématique* des futurs enseignants à l'intérieur de leur cours de mathématiques avancées est inspirée des travaux de recherche sur les réinvestissements de ce type de cours dans la pratique de classe (voir sections 1.2.2) et les trois hypothèses de ruptures ressorties de la littérature (voir section 1.2.3).

1. Réinvestissements au niveau des contenus
2. Réinvestissements *méta*mathématiques
a. La façon de faire les mathématiques en salle de classe
b. L'utilisation d'une démarche et d'un langage précis
c. Les difficultés en mathématiques
d. Le panorama mathématique
e. Les liens entre les mathématiques et la vie réelle
f. La capacité d'apprendre à apprendre en mathématiques
g. La confiance
3. Ruptures
a. L'aspect formel et symbolique des mathématiques avancées
b. La nature compressée des mathématiques avancées
c. La façon de faire les mathématiques en salle de classe

Figure 4.1 Grille d'analyse initiale

Réinvestissements au niveau des contenus. Il s'agit ici des contenus que le futur enseignant travaille dans un de ses cours de mathématiques avancées et qu'il dit vouloir/pouvoir reprendre dans un stage ou dans sa pratique future.

Réinvestissements « métamathématiques ». Les réinvestissements « métamathématiques » (au sens de Zazkis et Leikin, 2010) sont des thèmes transversaux qui peuvent apparaître dans n'importe quel cours, indépendamment des contenus. Il s'agit des aspects « méta » des mathématiques, comme la vision des mathématiques ou ce que signifie faire des mathématiques.

La façon de faire les mathématiques en salle de classe. Ici, le futur enseignant est inspiré par la façon dont le professeur fait ou enseigne les mathématiques dans un cours de mathématiques avancées. Le futur enseignant souhaite reproduire cette façon de faire dans sa propre salle de classe.

L'utilisation d'une démarche et d'un langage précis. Le langage précis et la rigueur mathématique dans les cours de mathématiques avancées peuvent, par exemple, inspirer les futurs enseignants à encourager cette précision dans leur classe pour éviter que les élèves utilisent des expressions peu soignées.

Les difficultés en mathématiques. L'étude des mathématiques avancées peut sensibiliser les futurs enseignants aux difficultés et aux frustrations des élèves, puisque certains futurs enseignants vivent eux-mêmes des difficultés dans l'apprentissage des mathématiques avancées. En ce sens, le futur enseignant peut mieux comprendre comment se sentiront les élèves qui ne comprendront pas dans sa classe.

Le panorama mathématique. Une des intentions de la formation en mathématiques avancées est souvent d'amener les futurs enseignants à comprendre comment les concepts enseignés s'insèrent dans le panorama mathématique (Hache, Proulx et Sagayar, 2009). C'est le cas de certains enseignants dans l'étude de Zazkis et Leikin (2010), qui ont obtenu un « meilleur portrait » des mathématiques à travers leur formation en mathématiques avancées.

Les liens entre les mathématiques et la vie réelle. Ici, le formé utilise ses connaissances en mathématiques avancées pour mieux voir comment les mathématiques sont connectées à la vie réelle. Par exemple, un enseignant dans l'étude de Zazkis et Leikin (2010) explique que, en lien avec la factorisation, les codes de sécurité internet sont difficiles à déchiffrer car il est difficile d'en trouver les facteurs.

La capacité d'apprendre à apprendre en mathématiques. La formation mathématique du futur enseignant peut l'amener à apprendre à se former lui-même en mathématiques. Après tout, sa formation mathématique ne se termine pas à l'université (Bednarz, 2012).

La confiance. La formation en mathématiques avancées peut amener les futurs enseignants à voir « plus loin » que ce qu'ils avaient vu au secondaire : en savoir plus que leurs élèves, être capables d'effectuer certaines tâches plus rapidement et pouvoir répondre aux questions des élèves en ce qui concerne leur future carrière. De telles habiletés développées lors de la formation en mathématiques avancées peuvent rendre le futur enseignant plus confiant et plus confortable dans son enseignement des mathématiques du secondaire.

Ruptures. Les trois hypothèses de ruptures proviennent de récits de formateurs et de réflexions ou analyses théoriques (voir, par exemple, Proulx et Bednarz, 2010). Chez les futurs enseignants, ces ruptures peuvent émerger de leurs expériences dans leurs cours de mathématiques avancées et leur préparation à l'enseignement.

L'aspect formel et symbolique des mathématiques avancées. Le haut niveau de symbolisme peut créer une rupture entre les mathématiques avancées et les mathématiques de la classe, c'est-à-dire qu'il peut entrainer chez les futurs enseignants une certaine facilité à manipuler les symboles et le langage formel mathématiques et en même temps une difficulté à sortir de l'abstrait et du formalisme pour rendre les mathématiques du secondaire accessibles aux élèves dans leur façon de parler et d'écrire les mathématiques.

La nature compacte et compressée des mathématiques avancées. Les mathématiques avancées sont souvent travaillées de façon compacte et compressée (Adler et Davis, 2006; Moreira et David, 2005). Notamment, dans leurs cours de mathématiques avancées, les futurs enseignants utilisent les mathématiques du secondaire de façon compressée. Or, dans sa pratique, l'enseignant doit décortiquer et décompresser les concepts mathématiques qu'il enseigne aux élèves (Ball et Bass, 2000, 2003; Bednarz, 2001; Adler et Davis, 2006; Huillet, 2009). Ce retour à une compréhension décompressée des mathématiques peut être un défi de taille pour les futurs enseignants qui ont développé une certaine facilité avec les algorithmes et procédures utilisés au secondaire, comme si ces derniers parlaient d'eux-mêmes.

La façon de faire les mathématiques en salle de classe. Le format des cours en mathématiques avancées semble davantage magistral (Burton, 2004). Les futurs enseignants qui suivent de tels cours peuvent développer certains habitus (au sens de Bauersfeld, 1994), tel qu'enseigner les mathématiques de façon procédurale (où les élèves reproduisent des procédures), ce qui entre en rupture avec la façon souhaitée d'enseigner les mathématiques en salle de classe.

Cette grille est un point de départ pour l'analyse. Toutefois, de façon similaire aux pratiques de la théorisation ancrée, elle a été modifiée et ajustée en cours d'analyse. Je suis donc partie de la grille de départ, en y ajoutant des éléments en fonction de chacun des cas, afin d'offrir une description parlante des données recueillies.

Pour chacun des cas, l'analyse s'attarde à deux aspects : les réponses des futurs enseignants face aux questions d'entrevues (voir section 3.3.1 au chapitre précédent) et leur travail des tâches (voir section 3.3.2).

4.1.2 Contexte de la formation

Une précision sur le contexte et la nature des cours de mathématiques avancées s'impose ici, puisqu'il donne une certaine couleur au vécu des futurs enseignants. La description qui suit est inspirée de la description du programme de l'université et *des propos des futurs enseignants en entrevues*. Dans leur université, les cours de mathématiques avancées de première année sont donnés à l'ensemble des étudiants en sciences, c'est-à-dire aux futurs physiciens, chimistes, biologistes, médecins, ingénieurs, enseignants et autres. À partir de la deuxième année, les cours sont davantage ciblés, s'adressant plus spécifiquement aux futurs mathématiciens ou aux futurs ingénieurs. Les futurs enseignants choisissent parmi cette banque de cours qui ne s'adressent pas vraiment, de prime abord, à eux. Le ratio dans ces cours varie d'un futur enseignant pour deux futurs mathématiciens à un futur enseignant pour 30 autres étudiants. En ce qui concerne l'approche d'enseignement, des cours de mathématiques avancées « traditionnels » sont offerts de façon magistrale, tel qu'en parle Burton (2004), selon laquelle le professeur détient les connaissances et les transmet aux élèves qui prennent des notes et font des exercices par la suite (voir aussi Bauersfeld, 1994; Proulx, 2009). Ainsi, aux dires des étudiants, ils sont assis et prennent des notes tout au long de leurs cours de mathématiques avancées, alors que le professeur expose les concepts et théorèmes mathématiques au tableau.

4.2 Cas 1 : Chloé (2e année)

Chloé est dans sa deuxième année de formation; elle a complété cinq cours de mathématiques avancées et, lors de l'entretien, en suivait trois autres. Le cheminement de Chloé est particulier puisqu'elle a fait sa première année dans un plus petit campus où, pour elle, les cours de mathématiques allaient plus à son rythme. En deuxième année, elle a été transférée au plus grand campus, ce qui a été pour elle un changement marquant. Entre autres, elle trouve que le niveau de difficulté des cours de mathématiques avancées a beaucoup augmenté. J'explique plus loin ce que Chloé retient de cette expérience.

De façon générale, voici ce que Chloé répond aux questions d'entrevues : (1) elle pense réinvestir des contenus mathématiques vus à l'université dans sa classe du secondaire; (2) ses cours de mathématiques avancées ont rendu les mathématiques du secondaire faciles; et (3) à travers ses difficultés mathématiques vécues elle arrive à cibler ce qui l'aide à réussir dans ses cours de mathématiques et donc à cibler ce qui pourrait aider ses élèves à réussir dans leurs cours de mathématiques.

4.2.1 Réponses aux questions d'entrevues

Voici les réponses de Chloé aux questions de l'entrevue, présentées en faisant ressortir les éléments de la grille d'analyse, soit les réinvestissements mathématiques, les réinvestissements métamathématiques et les ruptures.

4.2.1.1 Réinvestissements mathématiques : apports perçus des cours de mathématiques touchant aux contenus du secondaire.

Dans un premier temps, Chloé parle des apports des cours de mathématiques avancées dont les contenus sont directement reliés à ceux du secondaire. Elle donne l'exemple de ses deux cours d'analyse de première année, qui retravaillent en profondeur certains contenus mathématiques de la fin du secondaire (12^e^ année) telles les dérivées et les intégrales. Chloé a aimé ces cours pour diverses raisons, mais entre autres parce que retravailler les dérivées, mais en allant « plus loin » que ce qu'elle avait vu au secondaire, lui a permis d'approfondir ses propres connaissances sur ces contenus et ainsi de mieux les comprendre.

> C[21] : J'ai vraiment aimé les deux cours d'analyse mathématique appliquée. C'était vraiment la suite du secondaire. Et, en 1^re^ année, tout a bien été.
> (...)
> I : Ok. Pourrais-tu m'expliquer un peu pourquoi tu as aimé ces cours-là?
> C : Le premier cours était basé sur les dérivées et l'autre était basé sur les intégrales. On avait déjà vu ça au secondaire, donc on était juste en train d'approfondir nos connaissances.

---

[21] C représente Chloé et I représente l'Intervieweur, l'auteure du mémoire. Tous les noms des futurs enseignants ont été changés pour conserver l'anonymat, et ce, pour tout le mémoire. Les commentaires entre crochets dans les verbatim ont été ajoutés pour faciliter la compréhension.

Ce sentiment d'approfondissement rend Chloé plus confiante par rapport à ses propres connaissances mathématiques et par conséquent plus confiante dans ses capacités d'explications. Après avoir suivi ses cours de première année, elle se sent prête à enseigner les dérivées et les intégrales au secondaire.

> I : As-tu des exemples de comment ceci t'a bien préparée à mieux comprendre; un concept au secondaire, par exemple, que tu comprendrais mieux parce que tu l'as vu dans ton cours de mathématiques avancées.
> C : Bien, définitivement les dérivées. On a tellement été plus loin avec ça et on a tellement vu de trucs avec les dérivées que t'arrives à les enseigner. Je n'en ai pas enseignées pendant mon stage, j'étais en 9ᵉ et 10ᵉ année alors je n'ai pas eu la chance. Mais on dirait que j'aurais tellement été prête, parce qu'on venait juste de les étudier. Les dérivées et les intégrales, j'aurais... je serais arrivée au secondaire en 12ᵉ année et j'aurais été prête pour les enseigner, confiante de moi-même.

En gros, les cours de mathématiques avancées qui reprennent certains concepts du secondaire sont pertinents et significatifs pour Chloé puisqu'ils l'aident à approfondir ses propres connaissances à l'égard de ces concepts, ce qui la rend plus confortable et plus confiante à les enseigner. On perçoit ici l'idée d'un certain réinvestissement de contenu, comme en ont parlé Even (2011) et Zazkis et Leikin (2010), selon lesquels l'enseignant (ici la future enseignante) comprend mieux les contenus et/ou a l'intention d'incorporer dans sa classe quelques problèmes, idées ou concepts mathématiques travaillés durant ses cours de mathématiques avancées. Chloé n'a toutefois pas pu donner d'exemples précis de ce qui lui a permis de mieux comprendre les dérivées ou de ce qu'elle comprend mieux. Quand même, elle a l'impression de mieux les comprendre et se sent donc plus confiante en mathématiques et plus confiante à les expliquer à ses futurs élèves.

Dans un deuxième temps, Chloé parle des cours de mathématiques avancées qui traitent des contenus au-delà du secondaire. Voyons comment ils sont significatifs pour sa formation à l'enseignement des mathématiques au secondaire.

4.2.1.2 Réinvestissements *méta*mathématiques : les mathématiques avancées sont difficiles, mais en retour les mathématiques du secondaire deviennent faciles.

Tel que mentionné un peu plus haut, Chloé trouve que le niveau de difficulté des mathématiques avancées augmente beaucoup en deuxième année, d'un côté parce que les professeurs semblent survoler plus rapidement la matière et de l'autre parce tout le contenu mathématique est nouveau, contrairement au cours de première année où une bonne partie des contenus avait déjà été vue au secondaire. Elle donne l'exemple du cours d'analyse mathématique suivi au premier semestre de la deuxième année, dont les contenus mathématiques sont tous nouveaux pour elle. Selon le programme de l'université, ce cours se veut une suite des cours d'analyse mathématique appliquée suivis en première année, en amenant les étudiants « plus loin » dans les dérivées et les intégrales, c'est-à-dire en travaillant des contenus tels que les dérivées partielles, la règle de dérivation en chaîne, les extrema de fonctions de plusieurs variables, les multiplicateurs de Lagrange, l'intégrale double, les suites et séries réelles et les séries entières. Mais Chloé ne voit pas vraiment comment les contenus mathématiques de ces cours de deuxième année sont liés à ceux des cours de premières années et à ceux du secondaire. Pour elle, la matière est nouvelle. En plus, le débit est trop rapide : il s'agit d'un nouveau monde mathématique dont elle ne peut suivre le débit. Dans ses cours de mathématiques de deuxième année, Chloé manque de temps, dans un cours d'une heure et quart, pour s'approprier tout le contenu que le professeur enseigne; les cours avancent trop rapidement pour elle et elle sort de ses cours sans tout avoir compris. Pour comprendre, elle va souvent au bureau de ses professeurs pour leur poser des questions et va aussi sur « YouTube » pour réentendre quelqu'un expliquer la matière qu'elle n'avait pas saisie du premier coup. Ces efforts l'aident à s'approprier les contenus mathématiques avancés dans ses cours, mais pas assez pour pouvoir les expliquer à quelqu'un d'autre.

> C : C'est déjà assez difficile pour moi de comprendre, que l'enseigner à quelqu'un d'autre, je n'ai pas cette habileté-là. Si mon ami me dit : « Je n'ai pas compris, peux-tu m'expliquer comment le faire? », je ne suis pas capable. Je viens de le comprendre, mais le faire comprendre à quelqu'un d'autre, c'est autre chose!

Malgré sa difficulté à comprendre, Chloé trouve les cours de mathématiques avancées bénéfiques pour son enseignement futur. Elle dit être plus à l'aise avec la matière du secondaire, puisqu'elle a travaillé avec des mathématiques plus avancées.

> C : Je suis tellement plus à l'aise avec la matière [du secondaire]. Tu viens plus à l'aise avec la matière une fois que tu vois des choses plus compliquées.

En un mot, Chloé sent qu'en travaillant des mathématiques plus compliquées/avancées, les mathématiques du secondaire deviennent plus faciles. Pour elle, vivre des mathématiques plus avancées, même si elle explique qu'elle ne retouchera pas à la majorité de ces contenus dans son enseignement, lui permet de mieux comprendre et de mieux expliquer les mathématiques du secondaire. Ainsi, indépendamment des contenus qui sont différents, elle voit une pertinence à ces cours de mathématiques avancées, car ces derniers rendent les mathématiques du secondaire faciles.

> C : Je sais qu'en enseignement le ¾ des contenus qu'on voit maintenant on ne va même pas les toucher quand on enseignera. Mais ça nous permet d'être plus approfondis en mathématiques. Comme ça, quand t'arrives à en parler au secondaire, c'est tellement facile. On a tellement développé ça que t'arrives au point où c'est tellement facile à enseigner. Tu poses des questions et tu sais tout parce que tu sais d'où ça vient.

Par exemple, Chloé explique qu'il est maintenant plus facile pour elle d'isoler des variables. Dans ses cours de mathématiques avancées, elle manipule des objets plus complexes et plus avancés et donc isoler une variable ou une inconnue dans une équation en algèbre élémentaire devient facile.

> I : Quels sont les avantages et les inconvénients de tes cours de mathématiques [avancées] pour ton enseignement futur?
> C : C'est certain que tu deviens plus à l'aise à faire des calculs et à travailler avec des formules. On a vu tellement de formules différentes et on a travaillé avec tellement de choses, comme isoler ou trouver des réponses. Les calculs, je peux les faire beaucoup plus facilement maintenant qu'on a vu des calculs plus compliqués.

Toutefois, même si les mathématiques du secondaire deviennent plus faciles, Chloé est sensible au fait qu'elle ne sera pas toujours capable de répondre aux questions des élèves sur-le-champ. Elle réalise que parfois elle connaîtra la réponse, mais elle ne saura pas nécessairement comment l'expliquer.

> C : C'est sûr que des fois les élèves vont te demander des questions et tu bloques. Il y a des fois où des étudiants me demandent des questions et puis je sais ce que c'est, mais je ne sais pas comment l'expliquer.

Dans un troisième temps, Chloé parle des difficultés qu'elle vit dans ses cours de mathématiques avancées, et de ce qu'elle en retire.

4.2.1.3 Réinvestissements *méta*mathématiques : les mathématiques avancées pour cibler ce qui aide à mieux réussir en mathématique.

À travers les difficultés qu'elle vit dans ses cours de mathématiques avancées, Chloé réalise ce qui l'aide à mieux réussir. Il s'agit ici d'un réinvestissement métamathématique au sens de Zaskis et Leikin (2010). Sa formation en mathématiques avancées lui permet d'identifier ce qui l'aide à réussir dans ses cours de mathématiques avancées et en même temps à identifier ce qui, plus tard, pourrait l'aider à expliquer les mathématiques pour que ses élèves du secondaire les comprennent. C'est une façon dont Chloé conjugue ses expériences en mathématiques avancées avec sa préparation mathématique pour devenir enseignante. Voici trois exemples.

Trouver des trucs. Chloé dit souvent être éblouie par tous les théorèmes et les formules auxquels elle est introduite dans le cadre d'un cours de mathématiques avancées. Ceci l'entraine à trouver des trucs pour mémoriser les nombreux formules et théorèmes. Elle donne l'exemple d'un truc qu'elle a trouvé au secondaire pour ne pas confondre la formule de l'aire d'un cercle avec la formule de la circonférence d'un cercle :

> I : C'est intéressant. Aurais-tu des exemples des ces trucs-là [vécus dans tes cours de mathématiques avancées]?
> C : Je sais qu'il y en a [au secondaire] qui se mêlaient entre la circonférence d'un cercle et l'aire d'un cercle. Je leur disais : « pensez-y, l'aire c'est toujours au carré, l'aire de ton unité ça va toujours être des centimètres carrés, donc dans ta formule ça va être πr^2. Et $2\pi r$, il n'est pas au carré parce que… »

L'exemple de Chloé est ici tiré de son vécu comme élève au secondaire. Par contre, elle n'a pas pu donner d'exemples de trucs qu'elle a développés à l'université pour l'aider dans ses cours de mathématiques avancées.

Plus tard dans l'entrevue, elle précisera que ces trucs ne servent pas à la compréhension, mais sont utiles pour mémoriser les formules. Ce qui l'aide à comprendre est plutôt lorsque le professeur de mathématiques avancées donne des exemples qui montrent comment appliquer la formule ou lorsqu'il fait des liens entre deux représentations.

Des exemples qui parlent. Chloé aime lorsque ses professeurs de mathématiques donnent des exemples de comment appliquer une formule ou de comment utiliser un théorème. Sans les exemples, elle se sent un peu perdue dans les symboles et le formalisme. C'est avec les exemples qu'elle comprend mieux les théorèmes et les formules et qu'elle arrive à les utiliser.

> I : Est-ce que les trucs, est-ce que les formules t'aident à comprendre?
> C : Non. Moi, c'est les exemples, c'est le concret. Et là je me dis : « Ah, oui si tu fais ça, ça fait du sens » Et ensuite tu regardes la réponse, tu vois où tout a commencé et ça clique dans ta tête.

Et un peu plus tôt :

> I : Tu dis souvent, « en donnant des exemples ». Comment ça t'aide des exemples?
> C : C'est appliquer les formules. Des fois tu vois la formule et tu te dis : « OK, c'est beau. » Et il te donne un problème, mais tu ne sais pas comment intégrer le problème avec la formule. Une fois que tu l'as vu dans un exemple, tu comprends.

Faire des dessins. Un moment marquant dans la formation de Chloé a été lorsqu'un de ses professeurs de mathématiques a fait des liens explicites entre une formule et son graphique. Ces liens l'ont aidée à mieux comprendre le concept à l'étude, ce qui semble l'avoir sensibilisée au fait qu'une représentation visuelle peut aider un élève en difficulté à mieux comprendre une formule, une procédure ou un énoncé algébriques. Ce fut aussi le cas pour des enseignants dans l'étude d'Even (2011), qui disent aussi être devenus conscients de la contribution importante des représentations visuelles pour résoudre des problèmes mathématiques et interpréter les solutions. Ici non plus, toutefois, Chloé n'a pas réussi à donner d'exemples précis de ces liens, sauf le fait que ceci s'est produit lors de son cours d'analyse.

> C : Faire des dessins aussi, je sais que dans beaucoup de nos classes nos profs nous disent : « Fais le dessin, fais le graphique, fais le diagramme. » Et là tu peux vraiment comprendre.
> I : Ils font ça dans les cours avancés, ils font les liens avec le graphique...
> C : Je sais, en analyse, tout de suite c'est vraiment vague. Mais le professeur nous dit de faire un graphique. Et avec les points sur le graphique, on imagine et on peut voir la formule là-dedans. Je sais que moi, je vais essayer d'utiliser plus des dessins et des illustrations.

L'expérience en mathématiques avancées de Chloé joue sur sa vision de comment enseigner les mathématiques. Elle veut dans sa future classe donner des trucs et utiliser des dessins et des illustrations pour faire des liens avec les formules, car ceci l'a aidée à comprendre quand elle avait elle-même des difficultés. Ses expériences collent à celles des enseignants dans l'étude d'Even (2011) qui, à travers leurs difficultés dans leurs cours de mathématiques avancées, ont été sensibilisés aux difficultés des élèves et à ce qui peut les aider à comprendre. Autrement dit, vivre des difficultés en apprenant des mathématiques peut influencer la façon d'enseigner les mathématiques du futur enseignant, puisqu'il peut vouloir reproduire les conditions qui lui ont permis de mieux comprendre lorsque lui-même était en difficulté. Néanmoins, ces idées sont demeurées vagues dans l'entrevue, alors que Chloé n'a pas pu donner d'exemples concrets ou précis de dessins ou d'exemples qui l'ont aidée à mieux comprendre les contenus dans ses cours de mathématiques avancées.

4.2.2 Les tâches

Les tâches, il est bon de le rappeler, ont pour but de voir comment les futurs enseignants réagissent spontanément à des tâches mathématiques reliées à la salle de classe et aussi de voir potentiellement comment leurs expériences en mathématiques avancées se conjuguent avec ce type de tâche.

Tâche Livres et disques. Chloé se creuse la tête dans les tâches et s'intéresse à réfléchir à ses nouvelles questions. Elle résout la tâche Livres et Disques (voir Appendice A) en identifiant l'erreur de Brigitte, soit qu'elle associe le nombre 5 au prix du livre au lieu de l'associer au nombre de livres : « Ton équation, quand tu divises par 8, ça ne va pas donner 5$, ça donne 5L et L, c'est le nombre de livres ». Elle réussit aussi à répondre à une des explications fournies par un élève (qui essaie de trouver l'erreur de Brigitte) : « 2L + 6L = 40. Elle a fait une erreur. Le L est le nombre de livres et le D est le nombre de disques, ce n'est pas la même chose, ce ne sont pas des livres. » Chloé voit que, pour cet élève, le D et le L représentent de l'argent, alors que dans le problème ils représentent des nombres : « Elle est en train de dire que D c'est de l'argent et que L c'est de l'argent. Ce n'est pas ça ici. Ça représente des nombres. » En d'autres mots, elle perçoit la difficulté de l'élève qui traite les lettres comme des objets plutôt qu'un nombre d'objets, ce qui était une des significations de la lettre qui entre en jeu dans cette tâche (Bednarz et Dufour-Janvier, 1992).

Par la suite, Chloé est invitée à trouver d'autres manières d'expliquer le problème, au cas où l'élève ne comprendrait pas sa première explication. Chloé reste un peu surprise devant la question : comment expliquer autrement? Sa première idée est de changer les lettres L et D, qui symbolisent le nombre de livres et le nombre de disques, pour les lettres x et y, avec l'idée que l'élève associerait peut-être moins la lettre L à l'objet « livre » et accepterait peut-être plus L = D, ou dans ce cas x = y. Ceci évoque les propos de Booth (1984), qui informe que lorsque l'élève associe la lettre à un objet, certains pensent que la lettre dans l'expression est la première lettre de l'objet, de telle sorte qu'ils interprètent « 6a » comme « 6 ananas ». En utilisant x et y au lieu de L et D, Chloé veut aider l'élève à se dissocier de l'objet « livre » et de l'objet « disque » pour plutôt comprendre l'inconnue en termes de « nombre de livres » et « nombre de disques ».

> C : Je ne sais pas comment expliquer ça pour qu'il comprenne. J'aurais dit, parce que le L représente des nombres et le D représente des nombres et c'est le même nombre de chaque.
> I : OK.
> C : C'est juste une variable. L, c'est x, c'est y, c'est la même chose. Je pense qu'ils voient comme si L c'est des livres et D c'est des disques. Je ne vais pas mettre que L, c'est un disque. Mais si j'ai x et y, x c'est le nombre de livres et y c'est le nombre de disques... Parce que ce que je cherche, ce n'est pas les livres en général, tu cherches un nombre. Ici, tu cherches un nombre. Le L représente un nombre, ton D représente un nombre et le nombre est le même.

Chloé pense aussi à résoudre le problème avec de l'argent comptant. Elle ne voit pas tout de suite qu'on peut simuler les manipulations qu'on ferait avec l'argent par une représentation visuelle. L'idée même de faire un dessin lui semble une étape longue et laborieuse, ce qui questionne la pertinence qu'elle disait voir, plus tôt dans l'entrevue, à la représentation visuelle pour mieux comprendre et l'intérêt qu'elle y voit pour sa future classe. En poussant un peu, elle pense à dessiner des barres pour représenter un dollar (figure 4.2) et procède par addition répétée.

> C : C'est 6$ et l'autre vaut 2$. Donc, on est à huit. OK. Faut en faire un autre 6 et un autre 2, parce qu'il faut en avoir le même nombre de chaque. Après ça, on continue : 12, 13, 14, 15 ,16... ça en prend encore. Tu continues jusqu'à ce que tu te rendes à 40. Et là, tu verrais le nombre de chaque.

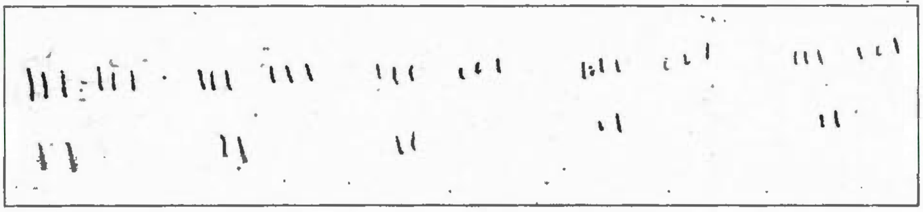


Figure 4.2 Dessin de Chloé pour la tâche *Livres et disques*

Tout bien considéré, Chloé a fait beaucoup de chemin dans cette tâche. Elle a résolu le défi en trouvant l'erreur de Brigitte (que le 5 qu'on trouve représente le nombre de livres et non le coût d'un livre) et elle a vu que les élèves qui ont tenté de résoudre le problème Livres et disque associait la lettre à l'objet et non au nombre d'objets. Néanmoins, elle n'avait pas d'elle-même d'autres outils pour expliquer autrement, pour creuser le sens derrière les symboles et les opérations. Ce sont, après tout, des nouvelles questions pour elle, devant lesquelles elle reste un peu surprise.

Tâche Système d'équations (voir Appendice B). Chloé trouve la tâche Système d'équation un peu drôle, surtout le commentaire de l'élève : « Hum, soustraire 14x + 14y de 27x + 14y… La deuxième est un nombre de billets et la première est un montant d'argent. On ne peut pas soustraire un nombre de billets d'un montant d'argent! ». Elle ne s'est dit-elle jamais posée de telles questions lorsqu'elle était élève. Pour elle, lorsqu'on résout un problème écrit avec un système d'équations, le contexte est important au début pour identifier les variables et construire les équations, mais par la suite on oublie le contexte et le sens des équations et on applique les opérations pour résoudre le système d'équations et trouver la valeur des variables. En un mot, on trouve les équations, puis on décontextualise et on trouve la valeur des variables, pour recontextualiser à la fin.

> I : Qu'est-ce que tu réponds à l'élève qui te dit ça [on ne peut pas soustraire un nombre de billets d'un montant d'argent]?
> C : Je dirais que ce sont des nombres et que des nombres ça se soustrait. S'il y a une variable, ça ne se soustrait pas. On prend un contexte de mots et on le met en chiffres, une fois que tu es rendu dans les chiffres, oublie ta phrase, concentre-toi sur les chiffres. Après que t'arrives à ta réponse finale, là tu peux revenir à ton énoncé. C'est ce que je leur dirais. C'est ce que je me suis toujours dit, je ne me suis jamais laissé influencer par… J'ai jamais pensé : « Ah non, ça, c'est des billets, ça, c'est des… ».

Chloé revient même au problème de Livres et disques pour dire que là aussi on ne cherche pas ce que veut dire le 8 dans 8L, car on cherche le L. Elle fait comprendre que c'est juste ça et qu'il n'y a pas d'intérêt à aller plus loin.

> C : Mais ta réponse là, qu'est-ce que tu cherches, tu cherches à trouver une variable, tu ne cherches pas à trouver la réponse ici. Ici ce que ça signifie, meh! Ton but ici, c'est d'isoler une variable, si t'essayes de trouver un nombre de billets. T'essayes pas de trouver qu'est-ce que ceci va te donner. C'est pareil comme si tu prends l'autre problème, ça donne 8L, mais ton 8, ce n'est pas ça que tu cherches, tu cherches ta variable.

L'idée de Chloé reflète une des forces des solutions algébriques, soit d'opérer de façon décontextualisée pour arriver à trouver la valeur de l'inconnue. Cette force de l'algèbre est un attrait qui la distingue des solutions arithmétiques, par exemple, où le contexte est habituellement présent à chaque étape (voir Proulx, 2006; Bednarz et Janvier, 1996). Mais, en même temps, Chloé semble avoir de la difficulté à voir au-delà de la procédure algébrique, le sens derrière les symboles ou qu'il existe d'autres méthodes non conventionnelles pour résoudre un tel problème.

Tâche Logarithmes. Chloé se sent un peu déstabilisée face à la tâche des logarithmes (voir Appendice C) : il ne s'agit pas du type de questions auxquelles elle est habituée. En discutant, elle voit que d'une étape à l'autre les équations ne sont pas équivalentes (contrairement à sa première impression où elle disait que les équations étaient équivalentes) car, comme elle l'avait dit plus tôt (sans toutefois, à ce temps, faire le lien avec l'équivalence) la première ligne est une équation du premier degré et la deuxième une équation du second degré.

> C : Les équations sont équivalentes. Mais, les deux [réponses] marchent ici [dans l'équation $\log_3 (2x+10)^2 = 6$], mais elles ne marchent pas ici [$2\log_3 (2x+10) = 6$]. Parce qu'à la deuxième étape, [$\log_3 (2x+10)^2 = 6$] ça donne au carré et au carré la réponse est positive. Alors, même si tu utilises un [argument] négatif ou un positif ça va donner la même chose. Tandis qu'ici [$2\log_3 (2x+10) = 6$], t'as pas l'exposant au carré, donc ce qui est négatif va rester négatif et ce qui est positif va rester positif.
> I : Donc, est-ce que c'est équivalent?
> C : Non! [Rire]
> (...)
> C : Wow, je vais avoir du fun comme enseignante!

Ce dernier commentaire de Chloé représente bien son sentiment lors des trois tâches, face à ces nouvelles questions sur le sens des symboles et des opérations et sur différentes manières d'expliquer, etc. Chloé est restée surprise devant plusieurs de ces questions et au début elle les croyait même un peu tirées par les cheveux, comme si ce n'était pas des questions qui allaient réellement être posées dans une « vraie » salle de classe du secondaire. Dans cette dernière tâche, elle voit davantage que les tâches sont représentatives d'une classe au secondaire et elle réalise à quel point elle s'est elle-même creusé la tête pour y répondre. Quel plaisir!

Retour sur les tâches. Après avoir résolu les trois tâches, j'ai demandé à Chloé comment sa formation en mathématiques l'a aidée à répondre à ces dernières. Cette question est toutefois biaisée puisque les tâches sont en lien avec des contenus du secondaire et demandent une certaine réflexion didactique pour répondre aux questions des élèves. Ce type de réflexion sur l'enseignement des contenus n'est pas un objectif des cours de mathématiques avancées, il peut donc sembler drôle de demander comment ces cours aident à répondre aux tâches. Par contre, Chloé elle-même dit dès le début de son entretien que les cours de mathématiques avancées rendent les mathématiques du secondaire plus faciles, et donc plus faciles à expliquer. Toutefois, il transparait à travers l'entretien, entre ses propos « avants » et « après » les tâches, un changement notable chez elle. À cette question, elle répond :

> C : C'est plus moi qui a pensé. Je ne sais pas si ma formation mathématique m'a aidée.
> I : Est-ce que ta formation mathématique t'amène à réfléchir?
> C : Je ne trouve pas. La formation mathématique aide à comprendre les maths, mais pas vraiment à les expliquer aux autres. C'est les cours d'éducation qui aident à expliquer.
> I : Tes cours d'éducation t'aident à expliquer les mathématiques?
> C : Juste à expliquer en général.
> I : En général. Ok.
> C : En maths, tu sais quelqu'un qui va faire une majeure en math, ça veut pas dire qu'il va être capable d'enseigner aux jeunes. C'est pour ça qu'il faut que tu fasses un baccalauréat en éducation. C'est pour ça que maintenant, juste les cours de maths, ça ne va pas m'aider à enseigner un cours. T'as besoin des cours d'éducation.

Chloé avance ici l'idée que les cours de mathématiques avancées aident à connaître et à comprendre les mathématiques, mais ils n'aident pas à les expliquer et donc ne la préparent pas à agir mathématiquement en salle de classe. Ainsi, après avoir travaillé les tâches (où elle est capable de résoudre les problèmes au niveau de la résolution mathématique et de trouver les erreurs des élèves, mais où elle éprouve certaines difficultés à expliquer autrement ou encore à donner sens à la procédure utilisée par l'élève), Chloé penche plutôt vers l'idée que les cours de mathématiques avancées permettent d'en savoir plus, mais n'aident pas nécessairement à savoir comment mieux expliquer. Pour elle, ce serait davantage les cours d'éducation qui aident à mieux expliquer en général. D'une certaine façon, Chloé explique que ses cours de mathématiques avancées, malgré tout ce qu'ils lui apportent d'important, ne l'aident pas nécessairement à répondre aux trois tâches proposées.

4.2.3 Retour sur le cas de Chloé

Chloé trouve bénéfiques les cours de mathématiques qui travaillent certains contenus du secondaire, puisqu'ils l'aident à mieux comprendre les concepts en jeu et la rendent plus confiante dans ses explications. En ce qui concerne les cours de mathématiques avancées qui vont plus loin que les contenus du secondaire, cette dernière les trouve difficiles mais pertinents, puisqu'ils rendent les mathématiques du secondaire plus faciles à ses yeux et donc plus faciles à expliquer. Aussi, à travers ses difficultés mathématiques dans ses cours de mathématiques avancées, Chloé cible ce qui l'aide à apprendre et donc la sensibilise à ce qu'elle pourrait faire en classe pour aider ses élèves qui ont de la difficulté, comme offrir des trucs à ses élèves pour les aider à mémoriser ou encore donner des exemples et faire des dessins pour les aider à comprendre.

À travers tout ceci, malgré le haut niveau de difficulté et bien qu'elle ne puisse expliquer ce qu'elle arrive à comprendre de ses cours de mathématiques avancées à quelqu'un d'autre, Chloé est satisfaite de sa formation en mathématiques avancées qui lui donne confiance puisque les mathématiques du secondaire deviennent plus faciles. Pour elle, les cours de mathématiques avancées sont bénéfiques, voire nécessaires, à sa préparation mathématique, et il manquerait quelque chose à sa formation s'il n'y en avait pas. Ceci dit, Chloé n'a pas d'exemples concrets et précis pour supporter ses diverses affirmations et ne peut pas dire pourquoi ces cours sont pertinents pour son enseignement, mis à part qu'elle travaille des choses plus compliquées.

4.3 Cas 2 : Alexa (3e année)

Alexa est en troisième année de formation (sur 5), ce qui implique que la majorité de ses cours ont été suivis à la faculté des sciences, mais qu'elle en a suivis un bon nombre à la faculté d'éducation. Ce va-et-vient entre les deux facultés n'est pas sans effet sur Alexa, qui se demande explicitement dans l'entrevue pourquoi ces deux aspects de sa formation sont déconnectés. Cette dichotomie qu'elle vit entre les deux facultés joue un rôle important sur la vision qu'elle adopte vis-à-vis sa formation en mathématiques avancées pour sa préparation à l'enseignement des mathématiques au secondaire : le manque de liens, pour elle, entre sa formation en mathématiques avancées et sa formation en éducation renforce sa difficulté à voir la pertinence de ses cours de mathématiques avancées pour sa pratique enseignante future.

Je présente ici-bas les réponses d'Alexa aux premières questions d'entrevues, suivies de son travail sur les tâches[22] qui ont été introduites au milieu de l'entrevue. Les tâches ont joué un rôle déterminant pour Alexa. Dans les quelques questions qui ont été posées après la résolution des tâches, elle a pu parler plus précisément des ruptures qu'elle vit dans sa formation, en plus d'éclairer sur quelques besoins qu'elle ressent pour mieux se préparer à l'enseignement des mathématiques au secondaire. D'abord, voici quelques apprentissages significatifs que retient Alexa de sa formation en mathématiques avancées.

4.3.1 Premières réponses aux questions d'entrevues

4.3.1.1 Réinvestissements mathématiques : pertinence des cours de mathématiques avancées qui retravaillent certains concepts du secondaire

Pour Alexa, un aspect positif de sa formation en mathématiques avancées est qu'elle lui permet de retravailler des contenus mathématiques du secondaire. Elle donne trois exemples de cours. D'abord, elle mentionne son premier cours universitaire d'analyse, qui est centré sur les dérivées. Alexa trouve ce cours utile puisqu'il lui permet de creuser le concept de dérivée, c'est-à-dire de l'étudier plus en profondeur que ce qu'elle avait pu faire au

---

[22] Les tâches ont été introduites avant de terminer toutes les questions afin de suivre le fil de la discussion.

secondaire, lui permettant entre autres de mieux comprendre le sens derrière certaines procédures en lien avec les dérivées.

> A : Le premier cours d'analyse était bien, parce qu'on voit les dérivées et les dérivées on les utilise en maths 12e année.
> I : Tu veux dire que ce cours est bien parce que tu revois des contenus mathématiques que tu vas utiliser au secondaire?
> A : Oui.
> I : Comment ça t'aide de refaire ces [contenus] mathématiques?
> A : C'est qu'on le refait [les contenus mathématiques du secondaire], mais plus en profondeur. Je comprends alors l'explication du pourquoi que je fais ça. Je trouve que c'est utile. Quand j'enseigne, je vais pouvoir dire : « Ça vient de ça. »
> I : As-tu des exemples de concept que tu aurais vus plus en profondeur?
> A : Hum. Toutes les affaires des dérivés, on voit les sommes de Riemann, on voit la définition, on utilise les limites... Ça, on l'utilise beaucoup en classe [du secondaire].

L'idée de revoir les contenus du secondaire lui donne confiance, un sentiment de compétence, et elle se sent dès lors plus confortable à les enseigner dans une classe du secondaire.

> I : Comment t'imagines-tu que ce cours-là va t'aider dans ta classe?
> A : Sûrement parce que je vais être préparée. Je les connais [ces contenus], je les ai travaillés, j'ai eu le temps d'y réfléchir, de les creuser à fond. Je vais me sentir plus compétente, car je sais vraiment comment le faire.

Dans la même lignée, Alexa mentionne aussi qu'elle trouve pertinent son cours de probabilités et statistiques, car les probabilités sont dans le programme d'étude du secondaire, mais elle n'entre pas en détail dans cet exemple de cours.

Un troisième cours significatif pour Alexa est son cours d'histoire des mathématiques. Elle aime ce cours et le trouve utile, non pas sur le plan mathématique, mais plutôt sur le plan historique. Ce cours parle de l'évolution des idées et des concepts mathématiques depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours, en s'intéressant aux œuvres de mathématiciens importants. L'aspect historique intéresse Alexa, puisque dans son enseignement elle pourra contextualiser les contenus mathématiques en les situant dans l'histoire ou en racontant la vie des mathématiciens qui les ont inventés.

> A : Aussi, j'aime le cours d'histoire des maths. Je le trouve utile, pas au niveau mathématique, mais au niveau [de l'histoire]... Disons que j'introduis le théorème de

Pythagore, je sais [maintenant] qui est Pythagore, je peux parler de sa vie… Je trouve ça intéressant. C'est un cours de maths qui est différent, ça fait du bien de voir autre chose.
I : C'est différent de quoi?
A : Des autres cours théoriques. Il y a un contexte, on n'apprend pas juste ça dans le milieu de nulle part. Tu sais d'où ça vient.

Plus tard dans l'entrevue, Alexa évoque à nouveau ses cours d'analyse mathématiques appliquées et d'histoire des mathématiques en soulignant qu'un avantage de ces cours est qu'elle y voit comment certains concepts mathématiques s'appliquent à la vie réelle, par exemple lorsqu'elle résout des problèmes écrits avec un contexte : « [Dans mon cours d'analyse] j'ai fait de la modélisation [de l'accroissement des populations] de bactéries ». Ceci distingue pour elle ces deux cours des autres cours de mathématiques avancées qu'elle a suivis et dans lesquels elle voit moins les liens avec la vie réelle et l'origine des mathématiques.

Ainsi, ces trois cours (son cours d'analyse mathématique, son cours d'histoire des mathématiques et son cours de probabilités et statistiques) sont significatifs pour Alexa puisqu'ils sont en liens avec des contenus mathématiques du secondaire. Alexa communique qu'en retravaillant des contenus du secondaire, que ce soit à travers un cours plus théorique ou par une entrée davantage historique, elle se sent plus confortable et plus confiante à les enseigner. On verra plus loin que ce travail sur les contenus mathématiques du secondaire est primordial pour Alexa et qu'elle aimerait en avoir plus dans sa formation mathématique.

Ces exemples sont donnés au début de l'entrevue, lorsque Alexa est invitée à réfléchir sur les apprentissages les plus significatifs de sa formation mathématique. Néanmoins, sa première remarque à l'égard de sa formation, et celle qui revient le plus souvent par la suite, est que de façon générale il manque de liens entre sa formation en mathématique avancées et sa formation en éducation.

4.3.1.2 Rupture entre la formation mathématique et la formation en éducation

Il n'est pas facile pour Alexa de faire les liens entre ses deux formations (éducation et mathématiques). Elle est dans sa troisième année à l'université et n'a pas encore vécu son cours de didactique des mathématiques. Elle vit présentement son cours de didactique de la biologie (sa mineure), mais de ce qu'elle comprend de la didactique elle ne peut s'imaginer qu'un seul cours de didactique des mathématiques va lui permettre de faire les liens nécessaires entre ses deux formations.

> A : Si je me place dans le contexte que le cours de didactique des mathématiques, ça va sensiblement être la même chose, je ne peux pas voir que c'est un cours comme ça qui va m'aider.

Et un peu plus tard :

> A : On voit les maths, on voit l'éducation, mais il n'y a jamais de liens. Il n'y a jamais quelqu'un... Je sais pas. On dirait que je me sens super qualifiée en maths [avancées], je sais que j'ai les connaissances. Je connais aussi des techniques et des stratégies d'enseignement. Mais, on dirait que je ne suis pas capable de faire le lien.

Cette dichotomie entre sa formation en éducation et en mathématique revient à plusieurs reprises dans le discours d'Alexa, au point où elle n'est pas satisfaite de sa formation en mathématiques avancées, car elle a beaucoup de difficultés à la conjuguer avec sa préparation à l'enseignement des mathématiques du secondaire.

> I : Es-tu satisfaite de ta formation?
> A : C'est pas tout mal.
> I : Qu'est-ce que tu trouves bien?
> A : Hum. J'aime le fait de pouvoir dire que je fais un baccalauréat en science, parce que ça m'intéresse. Ce n'est pas pour rien que je veux enseigner les mathématiques, parce que j'aime ça. Mais ce que je trouve de pas correct est qu'il n'y a aucun lien entre le baccalauréat en science et le baccalauréat en éducation. On dirait qu'ils devraient plus tenir compte du fait que nous on veut enseigner la science. On ne veut pas enseigner n'importe quoi et on ne veut pas juste faire de la science. On veut faire les deux! Trouver une façon... Il devrait y avoir des cours de sigle « EducMath », où on apprendrait les maths mais comme [dans un contexte d'enseignement].

Alexa exprime un besoin de faire plus de liens entre sa formation disciplinaire et sa formation en éducation, car elle sent qu'elles sont déconnectées. Bref, la rupture que vit Alexa entre la formation mathématique et la formation en éducation se résume bien par sa vision de la formation : « On fait un baccalauréat combiné, mais il n'est pas combiné! On fait deux baccalauréats séparés! » Les tâches mathématiques vont amener Alexa à discuter plus en détail de la rupture qu'elle vit entre ses expériences en mathématiques avancées et sa préparation à l'enseignement et c'est alors que son besoin de faire des liens entre ses deux formations (en mathématiques avancées et en éducation) se précisera. Regardons maintenant comment elle aborde les tâches.

4.3.2 Les tâches

Les trois tâches (Livres et disques, Système d'équations et Logarithmes) ont été choisies parce qu'elles collent à la réalité de la classe du secondaire. L'intention derrière elles est potentiellement de voir comment la formation en mathématiques avancées prépare à répondre à de tels problèmes mathématiques et questions d'élèves, ainsi que de susciter un questionnement/réaction par rapport à celles-ci. Alexa répond aux trois tâches de façon assez similaire, soit en mettant l'accent sur la procédure ou encore sur ce qu'il faut et ne faut pas faire en mathématiques.

Tâche Livres et disques. Pour répondre au commentaire de l'élève dans la tâche (qui lui aussi essaie de trouver l'erreur de Brigitte) : « 2L + 6L = 40. Elle a fait une erreur. Le L est le nombre de livres et le D le nombre de disques, ce n'est pas la même chose, ce ne sont pas des livres », Alexa met l'accent sur le fait que le L et le D sont des quantités et donc que le nombre de livres peut être égal au nombre de disques même si ce n'est pas le même objet.

> A : Même si le prix n'est pas le même, il ne faut plus penser en termes de prix. Quand tu construis ton équation, la partie prix a déjà été comblée. Tu parles juste en termes de montant de livres. Ça dit que t'as acheté le même nombre, donc tu as le droit d'écrire L = D.

Lorsque je demande à Alexa d'expliquer davantage ou encore d'expliquer d'une autre manière, elle pense à modifier le problème pour qu'il s'agisse en effet des mêmes objets.

> A : Je pense que je l'expliquerais peut-être en termes d'objets. Tu as acheté un certain nombre d'objets et là-dedans tu sais que tu as des livres et des disques. Tu sais aussi que tu as acheté le même nombre de livres que de disques.
> I : Ok.
> A : Je le ferais avec des objets. Tu as acheté le même nombre d'objets et tu sais là-dedans qu'il y en a qui coûtent 2$ et il y en a qui coûtent 6$. Et, que tu as acheté la même quantité. Ce sont tous des objets, c'est tout équivalent.
> I : Ok. Le nombre est équivalent.
> A : Le nombre.
> I : Ok. Alors, 8L = 40, quel est le sens derrière ça?

> A : Hum! C'est une bonne question. Attends, j'essaie de revenir à mon affaire d'objets. Si tu rends ça équivalent, que c'est tous des objets qui ont la même...C'est le même objet, comme si tu étais rendu avec toutes des pommes. Tu as des pommes qui coûtent 2$ et tu en as qui coûtent 6$... Non, ça ferait pas de sens! Je sais pas du tout.

Ainsi, pour répondre à la conception de l'élève qui argumentait qu'il s'agissait des mêmes objets, Alexa pense à modifier le problème pour qu'il s'agisse en effet des mêmes objets. Elle réalise en essayant de verbaliser que son explication n'a pas trop de sens. En fait, en modifiant le problème pour qu'il s'agisse des mêmes objets, ceci renforce la conception erronée de l'élève qui pense en termes d'objets devant être les mêmes (pour écrire L = D) au lieu du nombre d'objets. On voit ici qu'Alexa sait très bien qu'on peut écrire L = D puisqu'il s'agit du même nombre, de la même quantité. Toutefois, elle n'est pas encore capable de trouver les mots pour amener l'élève à contrer sa conception et donner sens à la procédure et la réponse.

Tâche Système d'équations. Dans cette tâche, Alexa met l'accent sur la procédure à suivre et on voit qu'elle n'a pas vraiment l'habitude de se préoccuper du sens derrière les symboles et les opérations. Pour répondre au commentaire de l'élève : « la deuxième [équation] est un nombre de billets et la première est un montant d'argent. On ne peut pas soustraire un nombre de billets d'un montant d'argent », Alexa explique qu'une fois que les équations sont construites, on sort du contexte et on le remet juste à la fin, c'est-à-dire que les inconnues x et y dans l'équation ne signifient rien en soi et qu'elles ne reprennent un sens qu'une fois le système d'équations résolu.

> A : Je pense que ce serait juste de lui dire qu'une fois que tu as construit tes équations, il n'y a plus de dollars, il n'y a plus de valeur associée à ça [les coefficients et les inconnues]. C'est maintenant un système d'équations, tu n'es plus dans une phrase. Tu sais, dans une phrase tu vas dire « les dollars ». Quand tu transposes en système d'équations, tu ne dis plus « il y a des dollars ici, des dollars ici, des dollars ici ». Ils [les dollars/le contexte] s'en vont tous.

Et un peu plus tard :

> A : Tu poses x, c'est les billets des adultes, quand tu vas lire ton équation [$x + y = 35$], tu vas pas dire « les billets des adultes plus les billets des enfants ». Tu vas dire « x plus... ». Il n'y a plus de [contexte].

Il en va de même lorsque Alexa est invitée à donner un sens à la multiplication de la deuxième équation ($x + y = 35$) par 14. Pour elle, le 14 est tout simplement le nombre 14, sans contexte. L'équation reste la même, multiplier par 14 est tout simplement la procédure à suivre dans la méthode de réduction pour éliminer une variable et résoudre le système d'équations : « c'est juste ça que c'est ».

> A : Le 14, c'est juste, ça revient au même que de dire que t'as le nombre d'enfants plus le nombre d'adultes qui est égal à 35. Multiplier tout par 14 ça ne change rien. C'est la même équation.

Ceci rappelle le cas de Chloé, qui suggérait aussi d'opérer de façon décontextualisée pour arriver à trouver la valeur de l'inconnue et ensuite de redonner le contexte. Cette façon de procéder, tel que mentionné, est une des forces de l'algèbre, qui la distingue des solutions où le contexte est habituellement présent à chaque étape, comme lors de solutions arithmétiques (Bednarz et Janvier, 1996; Proulx, 2006). Il est facile pour Alexa de résoudre ce problème algébriquement, mais elle ne peut pas vraiment revenir au sens sous-jacent à ces opérations. Du moins, il ne semble pas vraiment naturel pour elle de s'arrêter au sens derrière ces procédures usuelles.

Tâche Logarithmes. Pour répondre à la tâche logarithmes, Alexa s'attarde initialement aux règles à suivre (comme « l'intérieur d'un log ne peut pas être négatif ») et à la procédure (comme « tu es sensé revenir au début pour vérifier »). C'est ainsi que, pour Alexa, il faut vérifier les deux réponses 17/2 et -37/2 dans l'équation initiale et la réponse $x = -37/2$ doit être rejetée puisqu'elle donne un argument négatif ($2x + 10 = 2(-37/2) + 10 = -27$). Lorsque je lui demande pourquoi la réponse -37/2 fonctionne pour la dernière ($(2x-17)(2x+37) = 0$) et même pour la deuxième étape ($\log3(2x+10)^2 = 6$) mais pas pour la première ($2\log_3(2x+10) = 6$), elle répond instinctivement qu'il faut toujours vérifier les réponses. Puis, en réfléchissant au pourquoi, elle voit que c'est l'exposant au carré qui ajoute la deuxième solution.

> A : Parce que son intérieur est devenu au carré, tu te retrouves avec une équation quadratique.

Et un peu plus tard :

A : Quand tu fais ce passage-là [de la première à la deuxième étape], tu l'as mis au carré [l'argument]. En le mettant au carré, ça peut possiblement donner deux racines sur un graphique.
I : Ok. Donc en mettant au carré on ajoute une solution?
A : Ça dépend par où passe ton graphique. Des fois non. Mais c'est pour ça que quand tu fais le passage, tu devrais avoir mis au départ, quand tu as un log, tes restrictions. Et après ça, en le mettant au carré, ça se peut que ça ajoute une solution et c'est pour ça qu'après il faut que tu les vérifies.

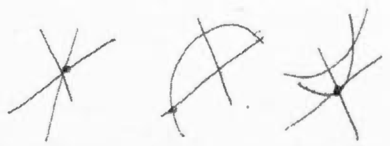
Alexa voit que la première équation ($6 = 2\log_3(2x + 10)$) n'est pas équivalente à la deuxième équation ($6 = \log_3(2x + 10)^2$), puisqu'en élevant l'argument au carré on ajoute la solution -37/2 qui ne fonctionne pas dans la première équation[23]. Dans cette tâche, Alexa commence à creuser le sens derrière la procédure : elle ne s'arrête pas à cette loi des logarithmes ($\mathrm{Log}_a\, M^N = N\mathrm{Log}_a\, M$), mais arrive à la questionner et à raisonner sur son sens sous-jacent.

Retour sur les tâches. Suite aux tâches, Alexa est de plus en plus convaincue que sa formation en mathématiques avancées n'est pas adéquate pour sa préparation mathématique à enseigner les mathématiques du secondaire.

I : Trouves-tu que tes cours de mathématiques t'ont aidée, ou non, dans la résolution des tâches pour répondre aux questions des élèves?
A : (petit rire) Ils ne t'aident pas du tout! [Dans les cours de mathématiques avancées], c'est comme un robot comme j'ai dit tantôt : on fait juste ce qu'on a à faire. Je ne fais pas ça pour comprendre, je n'ai pas le temps de comprendre, je le fais pour la note.

---

[23] Dans son explication, Alexa passe de l'équation linéaire ($y = 2x + 10$) à l'équation quadratique ($y = (2x + 10)^2$). Avec une équation quadratique, les solutions de l'équation sont les abscisses et il y peut y avoir zéro, une ou deux solutions selon la position de la parabole, c'est-à-dire si celle-ci croise l'axe des x zéro, une ou deux fois. Quoique la discussion ne soit pas allée dans cette direction dans l'entrevue, c'est un peu différent avec les fonctions logarithmes. Lorsqu'on élève au carré l'argument d'un logarithme ($y = \log(2x + 10)^2$), il y a toujours deux solutions.



Dessins d'Alexa : (a) équation linéaire à une solution; (b) équation quadratique à 2 solutions; (c) équations quadratiques à une et zéro solution.

Alexa aime ses cours de mathématiques et aime l'idée qu'elle fait un baccalauréat en science. Après tout, c'est parce qu'elle aime les mathématiques et les sciences qu'elle veut les enseigner au secondaire. Toutefois, elle sent que ses cours de mathématiques avancées ne s'adressent pas vraiment aux futurs enseignants et qu'ils ne répondent pas vraiment à ses besoins : « Je sens que je n'avance pas ». Et, un peu plus tard : « J'apprends des choses inutiles [pour ma profession future] ». La distinction est claire pour Alexa, elle ne veut pas être une mathématicienne, elle veut enseigner les mathématiques au secondaire : « Faire 5 ans de maths pures, ça fait pas de bon sens! On ne veut pas être des mathématiciens, ce n'est pas ce que je voulais faire ». C'est ainsi que ses expériences en mathématiques avancées ne la préparent pas vraiment, selon elle, à affronter la réalité scolaire d'une classe de mathématique, au point où elle ne se sent pas prête à aller en stage.

> A : Je ne sais pas, je n'aime pas ça. C'est épeurant de savoir que comme...
> I : Que tu vas peut-être avoir des questions comme ça [dans les tâches]?
> A : Oui. Aussi, c'est tannant de savoir que notre baccalauréat est 5 ans, pas 4 [ans] comme les autres, mais 5 ans et on ne se sent même pas formé. Il y a quelque chose qui ne va pas bien!

Alexa n'est pas satisfaite de la manière dont elle a répondu aux tâches. Ces dernières ont évoqué chez elle une certaine crainte, celle de ne pas pouvoir répondre aux questions de ses élèves dans ses stages ou dans son enseignement futur. Avant les tâches, Alexa ne savait pas trop ce dont elle avait besoin pour se préparer à enseigner les mathématiques au secondaire, sachant seulement que sa formation en mathématiques avancées n'était pas selon elle adéquate. Après les tâches, elle réussit à cibler des éléments qui pourraient bien la préparer au niveau mathématique, c'est-à-dire que l'insatisfaction d'Alexa par rapport à sa formation et sa difficulté à répondre aux tâches éveillent chez elle un triple besoin de formation, soit : (1) travailler en profondeur les contenus mathématiques du secondaire; (2) faire des liens entre sa formation en mathématiques avancées et les contenus qu'elle va enseigner; et (3) faire davantage de liens entre sa formation disciplinaire et sa formation en éducation. Ces trois idées de formation, pour elle, la prépareraient mieux à l'enseignement des mathématiques du secondaire et répondraient en quelque sorte aux ruptures qu'elle vit entre sa formation mathématique et sa préparation à l'enseignement, ainsi qu'aux lacunes qu'elle ressent en répondant aux tâches. Voici donc quelques ruptures et besoins de formation que Alexa précise après avoir résolu les tâches.

4.3.3 Propos suivant la résolution des tâches

4.3.3.1 Premier besoin : approfondir sa compréhension des mathématiques du secondaire

Alexa n'est pas satisfaite de ses réponses face aux questions des élèves dans les tâches et en plus elle sent que les cours de mathématiques avancées l'éloignent un peu des contenus du secondaire. Le besoin est clair pour elle : elle désire creuser les contenus mathématiques du secondaire. Ce besoin transparait dès le début de l'entrevue chez Alexa, puisque les cours de mathématiques avancées qu'elle trouvait pertinents étaient ceux qui retravaillaient les contenus du secondaire (les dérivées, les probabilités et l'histoire des mathématiques). Alexa est consciente qu'il n'est pas réaliste de revoir tous les concepts mathématiques des programmes d'études du secondaire à l'université et elle comprend que l'objectif de sa formation mathématique universitaire est de l'amener à en savoir plus que les élèves. Toutefois, elle aimerait étudier plus en profondeur ce qu'elle va enseigner plus tard.

> A : Notre formation est 5 ans, on a le temps de commencer à la base et de se rendre plus loin [en mathématiques]. Et plus loin, comme un plus loin raisonnable.

Et un peu plus tard :

> A : Même si les programmes d'études changent un peu à travers les années, j'aimerais passer à travers les programmes d'études, « vous allez enseigner ça, alors c'est ce qu'on va vous montrer »...

Alexa veut enseigner les mathématiques du secondaire, donc pour elle le but de sa formation devrait être de l'encadrer à approfondir sa compréhension des contenus mathématiques du secondaire, un peu comme avec les tâches.

> I : Et toi, qu'est-ce que tu aimerais dans ta formation?
> A : Des cours qui pourraient m'aider à, qui me dirait ça là [comment répondre aux élèves dans les tâches]. C'est vrai que tu peux jamais prévoir ce qu'un élève peut te poser, mais... De nous dire pourquoi lorsque tu le mets au carré ça fait deux [solutions, comme dans la tâche Logarithme].

En un mot, Alexa veut creuser les mathématiques du secondaire pour mieux les comprendre. Elle désire en savoir plus que ses élèves, mais un « plus » en lien avec les contenus mathématiques qu'elle va enseigner et non un « plus » qui réfère à d'autres contenus mathématiques déconnectés de ceux du secondaire. Pour elle, il ne s'agit pas dans la formation en mathématiques avancées des « bonnes » mathématiques pour la préparer à enseigner au secondaire.

4.3.3.2 Deuxième besoin : faire des liens pour connecter les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire

Initialement, en s'inscrivant à l'université, Alexa croyait « qu'ils [les professeurs] allaient nous montrer à enseigner ce qu'on avait vu [au secondaire] ». Elle est restée un peu surprise des nombreux cours de mathématiques avancées, de leur haut niveau de difficulté et de l'écart qu'elle voyait entre ces mathématiques avancées et les mathématiques qu'elle allait enseigner au secondaire. Comme elle le dit : « Je n'avais pas cliqué que je venais presque faire un baccalauréat en mathématique ». Elle ne s'attendait pas à ce que sa formation soit semblable à celle des futurs mathématiciens. Pour elle, les contenus mathématiques avancés qu'elle étudie à l'université sont déconnectés des contenus mathématiques du secondaire.

> A : En maths 10^e année, on enseigne le plan cartésien, la droite, etc. Ça fait trois ans que je suis à l'université et on n'en parle pas [de ces contenus du secondaire]. Je sais que pour être enseignant il faut aller plus loin que ce qu'on va enseigner, mais là on est rendu vraiment loin![24]

Alexa se sent confortable à parler des mathématiques qu'elle fait à l'université, mais est inquiète de ne pas être capable de revenir à la base et d'expliquer les mathématiques du secondaire pour deux raisons : il y a longtemps qu'elle a travaillé les contenus du secondaire et les mathématiques avancées l'ont habituée à une façon de penser « plus compliquée » ou encore plus compacte.

> A : On est tellement habitués à penser compliqué maintenant que penser simple ça ne fonctionne plus! [Par exemple, la] définition d'une droite, je crois même pas que je peux te la dire. Mais, je suis capable de te parler de n'importe quoi d'autre super

[24] Ceci rappelle l'écart qu'énonce Usiskin (2000) entre la formation des futurs enseignants au niveau des mathématiques avancées et les mathématiques qu'ils auront à enseigner à l'école.

complexe, comme les intégrales triples. Revenir à la base, [comme un] point sur un plan cartésien, on n'a pas vu ça depuis 5 ans!
I : Et comment ceci va t'affecter quand tu vas retourner en classe?
A : On ne pourra pas se remettre au niveau des élèves et se mettre dans la tête qu'il y en a qui ne comprennent pas.

Le vécu d'Alexa fait écho à la deuxième rupture, soit la nature compressée des mathématiques avancées (voir chapitre 1, section 1.2.3.2). L'idée derrière les cours de mathématiques avancées est d'aller plus loin et de se servir des concepts déjà vus pour avancer sur d'autres concepts et d'autres résolutions. Toutefois, comme elle l'a dit, c'est rendu trop loin : « Je sais que pour être enseignant il faut aller plus loin que ce qu'on enseigne, mais là on est rendu vraiment loin!». Alexa veut travailler les mathématiques pour en savoir plus que ses élèves, elle veut aller plus loin, mais un plus loin qu'elle dit « raisonnable ». Cette idée d'aller plus loin en mathématique est étroitement liée avec la nature des mathématiques avancées, qui est décrite comme étant très compacte et peu transparente (Adler et Davis, 2006; Moreira et David, 2005). Les recherches de Eisenhart *et al.* (1993), Sfard et Linchevski (1994) et Thompson et Thompson (1994, 1996) exemplifient bien cette compression des mathématiques avancées, qui semble pouvoir devenir un obstacle pour plusieurs futurs enseignants. Ainsi, si les futurs enseignants peuvent dès lors avoir une vision plus opaque et condensée des mathématiques, ils peuvent également éprouver certaines difficultés à décompresser les concepts et à faire ressortir leurs sens sous-jacents ou encore à percevoir certaines difficultés des élèves (Adler et Davis, 2006; Ball et Ball, 2000 et 2003; Huillet, 2009). C'est exactement ce qui inquiète Alexa, qui sent être allée trop loin dans les contenus en mathématiques avancées et qui a peur de ne pas être capable de retourner au niveau mathématique des élèves du secondaire. Les expériences en mathématiques avancées d'Alexa lui paraissent déconnectées des mathématiques mobilisées au secondaire.

Une manière de rendre son expérience en mathématiques avancées positive pour sa préparation à l'enseignement serait pour elle de faire des liens entre les contenus en mathématiques avancées et les contenus mathématiques du secondaire. D'ici découle un deuxième besoin : si les cours de mathématiques avancées sont obligatoires, alors il faudrait explicitement faire des liens entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire. Alexa aime faire des mathématiques et elle aime surtout les cours de mathématiques appliquées qui expliquent comment les mathématiques sont en lien avec la vie réelle. Elle donne l'exemple de ses cours d'analyse numérique et d'équations différentielles, deux cours de troisième année obligatoires pour les futurs ingénieurs, dans lesquels elle peut mieux saisir l'utilité de ces contenus mathématiques dans la vie réelle. Toutefois, elle les enlèverait de sa formation, car elle ne voit pas comment ils sont utiles pour la préparer à enseigner les mathématiques du secondaire

> A : J'ai aimé mes cours d'analyse numérique et d'équations différentielles parce que ce sont des cours de maths appliquées. Mais ils ne me servent à rien [pour mon enseignement]. Alors, j'enlèverais ça et, même si les programmes d'études [du secondaire] changent un peu à travers les années, j'aimerais passer à travers les programmes d'études [du secondaire], « vous allez enseigner ça, alors c'est ce qu'on va vous montrer ».

Pour Alexa, ses cours de mathématiques avancées sont si déconnectés de la réalité de l'école, notamment par rapport aux contenus, qu'ils deviennent non pertinents pour sa préparation à l'enseignement des mathématiques du secondaire : ils sont « inutiles pour ma classe » dira-t-elle.

> A : Je trouve que c'est bien peut-être pour ceux qui font un baccalauréat en mathématiques de faire beaucoup de mathématiques pures parce que c'est ça qu'ils vont faire eux autres, mais pas nous autres [les futurs enseignants].

Bref, que les contenus en mathématiques avancées soient théoriques ou appliqués, Alexa ne perçoit pas vraiment de lien avec les mathématiques qu'elle mobilisera dans sa pratique de classe. Ainsi, ce n'est pas par manque d'intérêt qu'Alexa veut moins de cours de mathématiques avancées, mais plutôt parce qu'elle ne voit pas comment les théories mathématiques ou même les mathématiques appliquées peuvent lui être profitables pour son enseignement des mathématiques au secondaire. Autrement dit, cette future enseignante aime les mathématiques et il ne lui déplait pas de faire des cours de mathématiques avancées à l'intérieur de sa préparation à l'enseignement des mathématiques du secondaire, à condition qu'on rende explicites les liens avec sa profession future.

> A : Ça ne me dérange pas d'apprendre ça [les mathématiques avancées], mais montre-moi à quoi ça va me servir dans ma vie et comment je pourrais m'en servir [dans mon enseignement]. Je suis prête à apprendre quelque chose de théorique s'il

faut, mais après ça il faut qu'il [le professeur] nous dise comment c'est en lien avec ce qu'on va enseigner.

Ceci rappelle la deuxième perspective de formation ressortie dans le groupe de travail #1 à l'Espace Mathématique Francophone en 2009 (Hache, Proulx et Sagayar, 2009) et les propos du mathématicien Gourdeau (Gourdeau et Proulx, 2012) selon lesquels l'idée est que le futur enseignant travaille des mathématiques avancées mais de façon reliée aux contenus à enseigner aux élèves du secondaire (voir section 2.2.2). Alexa exprime le besoin qu'on lui montre explicitement comment ses cours de mathématiques avancées, qu'ils soient appliqués ou théoriques, sont en liens avec les mathématiques du secondaire, parce qu'en ce moment elle ne perçoit pas ces liens. Bref, même si elle aime certains de ses cours de mathématiques avancées, elle ne se sent pas bien, voire même un peu coincée, dans sa formation parce qu'elle ne voit pas comment elle la prépare à sa profession.

Le troisième besoin qu'Alexa exprime va au-delà des contenus mathématiques et concerne la façon d'enseigner les mathématiques

4.3.3.3 Troisième besoin : faire des liens entre sa formation disciplinaire en mathématiques avancées et sa formation en éducation

Alexa parle de ses cours de mathématiques avancées comme étant plutôt théoriques et souvent sans contexte, c'est-à-dire qu'elle étudie des théories mathématiques mais qu'elle ne voit pas vraiment comment celles-ci s'appliquent à la vie réelle et ne voit pas non plus leur sens sous-jacent. Pour s'en sortir, elle apprend la théorie par cœur pour l'examen et ensuite elle l'oublie, comme un robot : « Dans les cours de maths [avancées], on apprend tout théoriquement, comme si on fait un peu ça robotique ». En un mot, elle perçoit les mathématiques qu'on lui enseigne dans ses cours de mathématiques avancées comme des objets statiques qu'elle doit apprendre tels qu'ils sont, déjà faits. Comme le dit Burton (2004), les cours de mathématiques avancées réfèrent souvent à une façon de faire où les mathématiques sont déjà toutes faites et où l'étudiant est laissé à lui-même pour appliquerr des procédures.

A : J'apprends tellement tout par cœur [les contenus des cours de mathématiques avancées], je me rappelle de rien [après l'examen]. Je l'ai tellement appris de peur!
I : Ok. Tu l'apprends pour l'examen?

A : Oui, c'est ça. Faut que tu l'apprennes, mais en réalité tu sais rien. C'est juste trop chargé.

Alexa vit une rupture entre sa formation en mathématiques avancées et sa formation en éducation. En mathématiques avancées, elle fait les mathématiques de façon robotique, alors que dans sa formation en éducation elle apprend des stratégies d'enseignement qui mettent l'accent sur l'implication de l'élève dans ses apprentissages.

A : Dans les cours de maths [avancées] on apprend tout théoriquement, comme si on fait un peu ça robotique. On est dans un cours de mathématiques, en sciences, mais il n'y a aucun lien avec l'éducation. Là, on s'en va en éducation, ils nous parlent juste d'éducation, mais rien par rapport aux mathématiques. On dirait qu'il n'y a pas de connexion.

C'est en réponse à cette rupture qu'elle vit entre sa formation en mathématiques avancées et sa formation en éducation que Alexa développe un besoin de faire des liens entre ses deux formations, comme dans les tâches. Ce que Alexa trouve de bien dans les tâches de l'entrevue est qu'elles lui permettent d'approfondir les contenus mathématiques du secondaire, tout en la situant dans un contexte de salle de classe. Pour elle, ces tâches font le lien entre le côté mathématique et le côté éducation, un type de lien qu'elle trouve important pour sa préparation mais qu'elle n'arrive pas à faire dans sa formation universitaire.

Cette future enseignante glisse aussi un mot sur la façon d'enseigner des professeurs dans ses cours de mathématiques avancées, disant que ces derniers ne sont pas des enseignants [du secondaire] et donc qu'ils n'ont pas l'habitude de contextualiser ou encore d'expliquer à quoi servent les contenus mathématiques. Bref, « ils ne sont pas habitués à penser comme si tu enseignais à des élèves de 13 ans ». En d'autres mots, ils n'enseignent pas les mathématiques pour préparer les futurs enseignants à les enseigner au secondaire ou encore ils n'enseignent pas les mathématiques comme Alexa s'imagine qu'on devrait les enseigner au secondaire. Cette future enseignante reconnait que les professeurs sont très compétents en mathématiques avancées, mais pense que de donner des cours n'est pas leur priorité. D'une certaine façon ceci rappelle la troisième rupture, soit que la façon plus traditionnelle d'enseigner les mathématiques des professeurs, la culture mathématique d'une classe universitaire, s'arrime peu avec celle du secondaire (voir section 2.3.3). Même si la rupture n'est pas entièrement claire chez Alexa, ce qu'elle sait est que les cours de mathématiques avancées sont déconnectés de sa préparation à l'enseignement des mathématiques du secondaire. Les tâches, par leur nature, ont contribué à faire voir ce manque et son besoin de connecter ces deux formations (mathématiques et éducation).

4.3.4 Retour sur le cas d'Alexa

Comme ce fut le cas pour Chloé, Alexa trouve pertinents les cours de mathématiques avancées qui lui permettent de travailler les mathématiques du secondaire. Toutefois, de façon générale, Alexa ne se sent pas bien dans ses cours de mathématiques avancées, puisqu'elle ne voit pas comment ils sont en lien avec les contenus mathématiques du secondaire ou la façon de les enseigner. Pour elle, il ne s'agit pas dans sa formation en mathématiques avancées des « bonnes » mathématiques pour la préparer à enseigner, car elle dit ne pas vouloir être une mathématicienne. En d'autres mots, elle trouve que les mathématiques avancées préparent à devenir mathématicien, ce qui n'est pas son objectif à elle. Pour elle, l'idéal serait d'avoir des cours de mathématiques avancées pour creuser et décortiquer les contenus mathématiques du secondaire et ainsi être préparée aux questions des élèves, comme dans les tâches. Pour Alexa, toutefois, si les cours de mathématiques avancées sont obligatoires, il faudrait pour que ces cours soient pertinents et que les professeurs explicitent des liens avec les contenus mathématiques du secondaire. De plus, elle aimerait pouvoir faire davantage de liens entre sa formation disciplinaire en mathématique et sa formation en éducation, pour mieux savoir comment enseigner les mathématiques, versus savoir comment enseigner et connaître les mathématiques de façon isolée. Somme toute, après trois ans de formation, cette future enseignante ne se sent pas prête à affronter une classe de mathématiques au secondaire (même pour son stage) et elle ne trouve pas ça très normal.

4.4 Cas 3 : Josie (4e année)

Josie est en quatrième année de formation (sur cinq), ce qui implique que ses semestres comportent maintenant plus de cours d'éducation que de cours de mathématiques, contrairement à ses deux ou trois premières années d'université où ses cours se donnaient majoritairement à la faculté des sciences, en mathématiques. Elle est donc avancée dans sa formation en éducation. On verra plus loin que ses nombreux cours d'éducation ne sont pas sans effet sur la vision qu'a Josie de sa formation mathématique. Au moment de l'entrevue, elle suivait son premier et unique cours de didactique des mathématiques. Ce cours est particulièrement marquant pour cette future enseignante, puisqu'elle sent qu'il la prépare à enseigner les mathématiques du secondaire, contrairement à ses cours de mathématiques avancées qui, pour elle, servent davantage à enrichir ses propres connaissances mathématiques.

Je présente ses premières réponses aux questions d'entrevue, son travail sur les tâches et ensuite, tout comme Alexa, ses réponses supplémentaires aux questions d'entrevues suite à la résolution des tâches. Les tâches mathématiques (Livres et disques, Système d'équations et Logarithmes) ont suscité chez Josie le besoin de retourner sur certains thèmes déjà abordés en entrevue.

4.4.1 Premières réponses aux questions d'entrevue

Le portrait de Josie se trace déjà assez bien avec ses premières réponses aux questions d'entrevue. Cette future enseignante aime les mathématiques et pour elle faire des mathématiques signifie les appliquer à la vie réelle, comme elle le fait dans son cours de didactique des mathématiques avec des situations problèmes. De plus, Josie est très réflexive et se pose beaucoup de questions sur l'enseignement des mathématiques au secondaire. Ses formations, l'une en mathématiques avancées et l'autre en éducation, offrent à leur façon des réponses à ses questionnements. Toutefois, on voit dans son discours que souvent ses deux formations (mathématique et éducation) forment un contraste. Je présente dans ce qui suit ce qu'elle retient de ses expériences en mathématiques avancées pour sa pratique enseignante.

Dans cette première partie de l'entrevue, Josie est ambivalente quant à ses expériences en mathématiques avancées pour sa préparation à l'enseignement. Elle veut croire en sa formation en mathématiques avancées et considère que celle-ci l'aide à développer sa « pensée mathématique » et lui permet de retravailler les contenus du secondaire. Tout ceci est positif pour elle. Toutefois, selon elle, ces mêmes cours de mathématiques avancées sont en rupture avec sa formation en éducation sous plusieurs points de vue, comme la façon dont les mathématiques sont enseignées dans ces cours, qui n'est pas la façon suggérée dans ses cours d'éducation (incluant le cours de didactique), et le fait que peu de liens sont faits en mathématiques avancées avec la vie réelle, alors que c'est ce qu'on l'encourage à faire dans son cours de didactique. Il y a donc une rupture entre ses deux formations, ce qui est problématique pour elle.

4.4.1.1 Réinvestissements mathématiques : utilisation des contenus mathématiques du secondaire en mathématiques avancées

De prime abord, pour Josie, les mathématiques avancées permettent de bien la préparer par rapport aux contenus du secondaire, dans le sens qu'en faisant des mathématiques avancées elle réutilise les concepts mathématiques du secondaire afin d'approfondir de nouveaux concepts et de nouvelles résolutions.

> I : Ok. Tu dis par contre que ta formation en mathématiques avancées te prépare bien pour les concepts [du secondaire].
> J : Ça prépare bien, oui, ça prépare bien, mais je te dirais plus pour les maths avancées. Parce qu'on ne les [les mathématiques avancées] revoit plus [au secondaire], peut-être juste en 12^e^ année. Mais ce qui prépare bien, c'est que dans les concepts [de mathématiques avancées], même si on voit des concepts beaucoup plus complexes, on a quand même besoin des concepts de base [du secondaire] qu'on va enseigner en 9^e^, 10^e^ et 11^e^ année.
> I : Ok. Aurais-tu un exemple?
> J : Dans le cours [d'introduction à l'analyse réelle], il fallait connaître le concept de racine. C'est quand même de base, mais tu en as besoin pour continuer. Et, avec Professeur C, on avait besoin des logarithmes et des lois des exposants. Il faut vraiment savoir bien les utiliser [les concepts du secondaire] pour pouvoir transposer dans quelque part d'autre.

Josie donne les exemples des racines, exposants et logarithmes qu'elle a dû réutiliser dans ses cours de mathématiques avancées. Toutefois, elle n'explique pas comment l'exercice de réinvestir ces contenus mathématiques du secondaire dans ses cours de mathématiques avancées l'aide à mieux comprendre ces concepts ou encore la prépare à enseigner ces concepts au secondaire.

Ceci fait penser à la deuxième rupture, selon laquelle les concepts mathématiques du secondaire (entre autres) sont utilisés de façon compressée dans les cours de mathématiques avancées afin d'approfondir de nouveaux concepts et de nouvelles résolutions (Ball et Bass, 2003). Plusieurs chercheurs voient cette compression des mathématiques du secondaire comme non-porteuse pour la préparation à l'enseignement des mathématiques puisque, dans sa pratique, l'enseignant se doit de décortiquer et de décompresser ces concepts mathématiques qu'il enseigne aux élèves afin d'en faire ressortir le sens (Adler et Davis, 2006; Ball et Bass, 2000, 2003; Bednarz, 2001; Huillet, 2009; Proulx, 2010). Ainsi, réutiliser des mathématiques compressées ne le préparerait pas en ce sens. Le point de vue de Josie sur cette question est toutefois différent, car elle voit cette compression de façon positive. Pour elle, utiliser les mathématiques du secondaire à l'intérieur des mathématiques avancées exige qu'on les maîtrise bien, c'est-à-dire que pour recycler ces contenus mathématiques du secondaire dans un autre contexte il faut bien les connaître.

Dans le cas de Josie, faire les mathématiques du secondaire de façon compressée n'est pas perçu de façon négative, mais plutôt comme une occasion de les utiliser dans un nouveau contexte. Ainsi, ce ne sont pas directement les contenus du cours, soit les mathématiques avancées, qui sont pertinents à sa préparation à l'enseignement, mais plutôt le contexte du cours, car il permet de réinvestir lesdits contenus du secondaire.

Néanmoins, pour Josie, tout n'est pas blanc ou noir. Elle poursuit sa pensée en nuançant son propos à l'égard des mathématiques du secondaire, qui sont utilisées de façon compressée à l'intérieur des mathématiques avancées. Elle ajoute que les contenus prérequis (ceux du secondaire ou ceux des cours de mathématiques préalables) ne font pas souvent l'objet d'une révision dans les cours de mathématiques avancées, ce qui peut créer des blocages pour les étudiants qui ne les comprennent pas en profondeur. Dans ce cas, l'utilisation compressée des mathématiques du secondaire à l'intérieur des mathématiques avancées devient un obstacle pour celui qui ne les comprend pas assez bien.

> J : Ça fait que ça, c'est bon, mais ils ne revoient pas les autres concepts [du secondaire] et ils ne les expliquent pas en profondeur. Des fois je trouve qu'ils pensent qu'on les maîtrise [les mathématiques du secondaire] juste parce qu'on a fait des maths encore plus complexes.

Josie voit la compression des mathématiques du secondaire à l'intérieur des mathématiques avancées de façon à la fois positive et négative. D'un côté, il faut bien comprendre les mathématiques du secondaire pour pouvoir les réutiliser en mathématiques avancées, mais, d'un autre, si les contenus ne sont pas bien compris, les utiliser de façon compressée devient un casse-tête et l'étudiant risque d'être perdu.

4.4.1.2 Réinvestissements *méta*mathématiques : Les mathématiques avancées pour développer la « pensée critique » et différentes façons de penser

Josie exprime qu'une des raisons, selon elle, pour laquelle l'université exige autant de cours de mathématiques avancées pour sa formation à l'enseignement est parce que les mathématiques développent la pensée critique. Toutefois, elle ne sait pas trop comment l'expliquer : « Je sais pas. C'est juste les maths, les maths développent la pensée critique. » Même si cette idée reste floue, ceci signale une certaine croyance qu'entretient Josie envers sa formation en mathématique avancées, soit qu'elle la considère bénéfique. Par la suite, elle parle d'apports un peu plus techniques, en lien avec des méthodes de travail.

> J : Ce que je vois qui est vraiment bon [dans la formation en mathématiques avancées], c'est que ça développe la pensée, ça développe différentes façons de penser.
> I : Comme quoi, par exemple?
> J : Mais juste, comme t'as des… c'est bizarre à, c'est difficile à expliquer. Mais se débrouiller, étendre son questionnement mathématique. Parce que, premièrement, on n'a pas autant de soutien à l'université, il faut que je me débrouille. Juste ça, me débrouiller toute seule, aller chercher mes propres ressources, ça développe ma façon de penser.
> I : Tes méthodes de travail?
> J : Les méthodes de travail et ça on va pouvoir l'amener dans notre enseignement. Mais, à part ça, comme pour les connaissances mathématiques [avancées] comme telles, ce n'est pas quelque chose que je vais enseigner.

Josie décrit ces « différentes façons de penser » comme apprendre à se débrouiller, à chercher ses propres ressources, à optimiser ses méthodes de travail, etc. On pense ici à des aspects organisationnels plus globaux développés lors de ses études universitaires, tel qu'apprendre à gérer son temps et ses ressources. Josie apprend aussi à apprendre et à se débrouiller, par exemple à apprendre à chercher dans son manuel et sur Internet si elle n'a pas compris dans le cours, à travailler en groupe pour étudier et faire les devoirs et à aller voir le professeur pour obtenir de plus amples explications. Ce sont des habiletés et méthodes de travail qu'elle peut amener avec elle dans son enseignement, lorsqu'elle aura la chance de collaborer avec ses collèges pour planifier son enseignement ou encore lorsqu'elle devra fouiller dans des manuels et sur Internet pour aller chercher des ressources.

4.4.1.3 Réinvestissements *méta*mathématiques : partir des procédures des étudiants pour répondre aux questions de leur devoir

Un événement marquant dans la formation de Josie, qui n'est pas en lien avec le contenu du cours en soi, est en lien avec les différentes façons de faire de ses professeurs lorsqu'ils répondent aux questions de leurs étudiants pendant leurs heures de consultation, c'est-à-dire en dehors des heures de cours. Elle compare leurs façons de faire comme suit :

> J : Le Professeur A et le Professeur B ne travaillent pas du tout de la même façon. Mais comme j'ai eu les deux, ça me permet de comparer leurs façons, leurs méthodes. J'amène ça avec moi, ça me permet de développer d'autres méthodes. Et ça élargit ma pensée en mathématiques.
> I : Quelles sont leurs méthodes? Quelles différences?
> J : Professeur A, il est beaucoup, il est rigoureux. Ils ont différentes façons de procéder. Si je lui amène quelque chose, il va regarder ce que j'ai fait et il va développer.
> I : Ok. Il va développer?
> J : À partir de ce que je fais, il va essayer de comprendre et il va continuer de le faire. Si je vais voir Professeur B avec mon travail, même si ça à l'air bien, il va mettre ma feuille de côté et il va faire de quoi de comme...
> I : Ok, il va faire autre chose.
> J : Autre chose, mais même si ce que j'ai fait a l'air bien.

Josie voit des avantages aux deux types de rétroactions des professeurs. D'un côté, elle aime apprendre différentes méthodes pour résoudre un même problème, alors ça ne lui déplait pas lorsqu'un professeur procède avec une démarche différente de la sienne. De l'autre, elle aime savoir quelles étapes de sa démarche et de son raisonnement sont bonnes, lesquelles sont erronées ou encore lesquelles elle a oubliées. Cette façon de tenir compte des procédures des élèves inspire Josie à faire de même dans sa classe : « C'est peut-être un peu comme ça aussi que je vais fonctionner en classe. » Ceci rappelle les propos de certains enseignants dans l'étude d'Even (2011), qui témoignent que la façon de faire de leur professeur les inspirait à faire de même dans leur propre classe, comme faire des liens entre la représentation visuelle et algébrique d'un problème ou encore mettre de l'avant une culture mathématique où les mathématiques sont vivantes et non statiques.

Il est important ici de souligner que Josie ne traite pas des contenus mathématiques, mais plutôt de certains aspects liés aux cours (par exemple, les méthodes de travail) et aux professeurs (par exemple, la manière dont un professeur répond à une question). Il s'agit d'aspects plus « métamathématiques » (au sens de Zazkis et Leikin, 2010) de sa formation, voir « extra » mathématiques. En ce qui a trait à la façon de faire de ses professeurs de mathématiques, Josie veut reprendre une des manières de faire de ses professeurs, soit de tenir compte des procédures de ses futurs élèves dans ses explications.

4.4.1.4 Rupture entre la façon dont les mathématiques avancées sont enseignées à l'université et la façon suggérée de les enseigner au secondaire

Les cours de mathématiques avancées sont reconnus pour être assez traditionnels (Burton, 2004) et c'est notamment le cas pour les cours que suit Josie. *A priori*, elle trouve que ses cours de mathématiques avancées la préparent bien sur le plan des contenus (elle le dira autrement par la suite, tel que j'explique plus bas), mais peu sur le plan de l'enseignement. Ils ne reflètent pas la culture de classe souhaitée au secondaire; du moins ce n'est pas la culture encouragée dans ses cours d'éducation. En d'autres mots, la façon dont les mathématiques avancées sont enseignées dans ses cours s'éloigne de la façon qu'on lui suggère d'enseigner dans ses cours d'éducation. Ceci rappelle la rupture que Alexa vit entre ses deux formations (mathématiques et éducation).

> I : Est-ce qu'en général tu trouves que ta formation mathématique te prépare bien à enseigner les mathématiques?
> J : (rires) Hum, pour les connaissances je te dirais oui. Mais pour la façon d'enseigner en classe, non, parce que je trouve qu'on n'a vraiment pas assez de cours de didactique. Et on n'est pas préparés à la réalité de la classe. Et la façon qu'ils enseignent à l'université, je ne parle pas des cours d'éducation, mais des cours de maths, c'est pas la façon qu'ils veulent [en éducation] qu'on enseigne dans les classes.

Il existe, pour Josie, une coupure entre sa formation mathématique et sa formation en éducation, à savoir entre la façon dont elle vit les mathématiques avancées comme étudiante et la façon qu'on lui suggère d'enseigner les mathématiques dans ses cours à la faculté d'éducation. Tout particulièrement, dans ses cours en mathématiques avancées, Josie est plongée dans une culture mathématique où le professeur, détenteur de connaissances, transmet la matière aux étudiants, qui restent passifs dans leurs apprentissages. Les interactions sont alors très limitées. Telle est son expérience. Elle se sent passive dans ses cours de mathématiques avancées. Ceci appuie les propos de Burton (2004), qui souligne que les cours de mathématiques avancées réfèrent souvent à des mathématiques déjà toutes faites, pour lesquelles l'étudiant doit mémoriser des formules et mettre en pratique des procédures.

> J : Dans les classes [de mathématiques] à l'université, c'est beaucoup plus théorique. Il y a plus ou moins d'interaction entre les profs. Il n'y a pas de situations problèmes. Tu t'assis là et tu prends des notes tout le cours. Tu poses vite tes questions, mais tu n'interagis pas beaucoup avec les autres. Si tu interagis [avec tes collègues ou avec le professeur], c'est après les heures de classe.

Tout au contraire, dans ses cours d'éducation, on met l'accent sur le travail de groupe, sur l'activité de l'élève dans ses apprentissages, sur les activités différenciées, etc. En plus d'apprendre ces approches, Josie les vit dans certains de ses cours d'éducation. La coupure entre la formation mathématique et la formation en éducation fait écho à la troisième rupture soulignée par la recherche sur la façon de faire les mathématiques. Cette rupture souligne que le format des cours de mathématiques avancées est davantage magistral (Burton, 2004) et fait vivre une culture mathématique différente de celle souhaitée au secondaire (Bauersfeld, 1994). Dans le cas de Josie, la coupure porte sur la culture mathématique mise de l'avant dans ses cours. D'un côté, les mathématiques sont vues comme des absolus déjà tous faits et par rapport auxquels l'apprenant est passif. De l'autre, on souhaite que les élèves soient actifs et qu'ils interagissent entre eux. Josie perçoit un problème, car elle veut enseigner autrement que ce qu'elle vit dans sa formation en mathématiques, mais ne sait trop comment s'y prendre pour appliquer les approches d'enseignement qu'elle apprend dans sa formation en éducation à son enseignement des mathématiques au secondaire.

4.4.1.5 Besoin de faire des liens avec la vie réelle

Dans ses cours de mathématiques avancées Josie est plongée dans une culture mathématique axée sur les théorèmes et les formules, qui laisse peu de place aux applications des mathématiques à la vie réelle : « Dans les classes [de mathématiques] à l'université c'est beaucoup plus théorique. (...) Il n'y a pas de situations problèmes. » Selon son expérience, il est plutôt rare qu'on prenne le temps dans ses cours d'expliciter ces liens. C'est ainsi que, pour elle, les mathématiques avancées apparaissent déconnectées de la vie réelle, c'est-à-dire qu'il n'est pas facile de voir comment elles s'appliquent au monde extérieur. À ceci Josie ajoute : « Surtout les mathématiques abstraites, ce n'est pas quelque chose que tu peux voir, que tu peux toucher, ce n'est pas appliqué à la vie de chaque jour. »

À l'opposé, dans son cours de didactique des mathématiques (qui fait partie de ses cours à la faculté d'éducation), elle voit comment les mathématiques du secondaire s'appliquent à la vie réelle en travaillant des situations problèmes. En d'autres mots, elle fait des liens entre les mathématiques du secondaire et le monde extérieur. Josie donne l'exemple d'une situation problème de peinture faisant appel au concept d'aire.

> J : Mets trois couches de peinture sur un patio de forme hexagonal. Dans cette situation problème, t'as besoin de l'aire, t'as besoin de savoir le coût, t'as besoin des concepts mathématiques. Il y a plein de concepts mathématiques que tu utilises et qui vont te servir à quelque chose de réel dans la vie.

Un écart ressort entre sa formation en mathématiques avancées et sa formation en didactique à l'égard des liens faits entre les mathématiques et la vie réelle et ceci fait en sorte que Josie se questionne beaucoup sur l'importance de la création de liens dans sa future classe au secondaire.

> J : Parce que mon enseignant de didactique fait beaucoup de liens [entre les mathématiques du secondaire et la vie réelle]. Des fois, je me demande si c'est possible, en tant qu'enseignant, de prendre le temps de faire des liens avec tout en math. Parce qu'on n'a pas beaucoup de temps!

À ce stade de sa formation, Josie se demande s'il est réaliste de vouloir prendre le temps de faire des liens dans sa classe de mathématiques au secondaire, étant donné la montagne de concepts à couvrir pendant un semestre. Elle trouve ces liens entre les mathématiques et la vie réelle pertinents et aime les activités dans son cours de didactique qui font ces liens. Mais, Josie n'est pas habituée dans ses cours de mathématiques (avancées) à faire des liens avec la vie réelle, au point où, même si pour elle ces liens sont au cœur des mathématiques, elle questionne leur pertinence pour son enseignement. Elle craint qu'elle non plus, dans sa classe, n'ait pas le temps de faire des liens et de montrer comment les mathématiques s'appliquent à la vie réelle. À ce stade de l'entrevue, on peut croire que l'enseignement que Josie reçoit dans ses cours de mathématiques avancées n'est pas si différent de ce qu'elle compte faire dans sa classe. En effet, dans ses propos, il semble que sa priorité soit d'abord de transmettre toute la matière à ses élèves et, s'il reste du temps, alors de faire des liens avec la vie réelle ou encore de faire des activités en groupe. Sa crainte de ne pas avoir le temps de faire autre chose signale une sorte de rupture inverse, selon laquelle elle favorise tout particulièrement la façon magistrale d'enseigner et l'importance de transmettre *tous* les contenus, et ce, au détriment de sa formation en didactique qui met l'accent sur les liens entre les mathématiques et la vie réelle. Ici, Josie favorise, sans nécessairement le vouloir et sans nécessairement s'en rendre compte, la façon d'enseigner les mathématiques comme elle l'a vécue dans ses cours de mathématiques avancées. C'est un mode de transmission qu'elle dit ne pas vouloir reproduire, mais qui est profondément ancré en elle, comme s'il lui était inconcevable, à ce stade de son cheminement, d'enseigner les contenus d'une autre manière. Comment enseigner autrement se dit-elle. Dans la discussion après les tâches, Josie clarifie qu'elle veut faire plus que ça et qu'elle veut réellement mailler sa formation en mathématiques avancées avec sa formation en éducation (incluant son cours de didactique). Mais, à ce stade de l'entrevue, la seule manière dont elle réussit à voir comment les mailler consiste à d'abord transmettre les contenus mathématiques et ensuite s'il reste du temps à faire des liens avec la vie réelle et amener les élèves à être actifs dans leurs apprentissages. En un mot, l'idée est de réaliser ces objectifs un à la suite de l'autre.

En somme, Josie se pose beaucoup de questions pour essayer de mailler sa formation en mathématiques avancées avec sa formation en éducation (incluant son cours de didactique), à l'égard de la façon de faire les mathématiques en salle de classe. On le voit dans les approches d'enseignement qui diffèrent d'une faculté à l'autre et dans l'importance qu'accorde chaque approche aux liens entre les mathématiques et la vie réelle.

4.4.2 Les tâches

Josie aime résoudre ces trois tâches, qui pour elle collent bien à la réalité du milieu scolaire : elle les trouve pertinentes pour son enseignement futur. La résolution de ces tâches éveille en elle une curiosité particulière, suscitant chez elle des réflexions supplémentaires sur sa formation, à l'égard des mathématiques du secondaire et de son besoin de formation en didactique.

Tâche Livres et disques. Dans cette tâche, Josie voit que Brigitte associe le L dans « 8L = 40 » au prix d'un livre plutôt qu'au nombre de livres. Ou, comme le disent Bednarz et Dufour-Janvier (1992), elle explique que Brigitte traite les lettres comme des *objets* au lieu d'un *nombre d'objets*.

J : Ok. Donc la première fois, elle dit que l'équation de 8 livres coûte 40$ donc un livre coûte 5$. Mais on a déjà dit que le livre coûte 2$.
I : Oui.
J : Donc, ça ne se peut pas. Ce serait le nombre, elle aurait trouvé, elle aurait fait une mauvaise interprétation et elle aurait trouvé le nombre de livres, c'est 5. Est-ce que ça se peut?
I : Ok, oui. Parce que le L...
J : Le L c'est le nombre de livres... Ça fait quand même pas de sens, je pense.

Josie n'est toutefois pas certaine de son raisonnement et de celui de Brigitte et ceci stimule ses réflexions avec des questions comme « Est-ce qu'on a le droit d'écrire L = D? ». Ses réflexions remettent en question sa façon habituelle de faire les mathématiques, façon qui met l'accent sur la résolution algébrique au lieu du sens sous-jacent : « On fait tellement ça dans les problèmes d'application, ça est égal à ça, on le remplace juste à l'intérieur. Hum... » Et un peu plus tard : « Non, je n'aime pas ça [décontextualiser, manipuler les symboles et redonner un sens à la fin], mais comment donner un sens? »

J'ai ensuite demandé à Josie si elle voyait une autre manière de résoudre le problème. Certaine qu'il y a d'autres méthodes, « puisqu'en mathématiques il y a toujours plusieurs façons de résoudre un même problème », elle pense d'abord aux matrices, un outil en mathématiques avancées. Par contre, cette dernière ne voit qu'une seule équation dans le problème et ne voit donc pas comment utiliser les matrices ici. Elle pense alors à le résoudre par essais-erreurs, mais n'entre pas dans les détails de cette résolution. Puis, en réfléchissant au commentaire de l'élève dans la tâche qui se lit : « 2L + 6L = 40. Elle a fait une erreur. Le L est le nombre de livres et le D le nombre de disques, ce n'est pas la même chose, ce ne sont pas des livres. », Josie voit que l'élève dans la tâche (qui commente sur la solution de Brigitte) associe lui aussi la lettre à l'objet au lieu du nombre et en même temps ne veut pas additionner deux monômes (2L et 6D) qui n'ont pas les mêmes inconnues (deux objets qui ne sont pas pareils), mais elle ne sait trop comment contrer cette conception.

Josie explique par la suite que sa formation mathématique ne la prépare « pas du tout » à répondre à cette tâche, donc à expliquer pour que les élèves comprennent, ni à contrer les conceptions erronées des élèves. Par contre, elle mentionne que son cours de didactique pourrait la préparer (si les contenus vus dans le cours de didactique étaient les mêmes que dans les tâches), puisque certaines conceptions erronées des élèves sont abordées dans ce cours. Elle explique alors qu'elle aimerait avoir plus de cours de didactique des mathématiques pour en savoir davantage sur les conceptions erronées des élèves à l'égard des mathématiques du secondaire, et donc pouvoir mieux intervenir. Mais, aussi, elle veut approfondir ses propres compréhensions des mathématiques du secondaire, « parce que ça se peut que nous autres, comme enseignant, on en a [des conceptions erronées] qu'on n'a pas changées et on enseigne ça, nous autres, là! » Et un peu plus tard, dans cette même tâche : « Il y a surement des concepts qu'on a compris d'une certaine manière au secondaire et peut-être que dans un cas ça marche pas, mais on ne le sait pas! » Josie craint que, comme l'élève dans la tâche (qui ne voulait pas qu'on remplace le D par le L parce que ce n'est pas le même objet), elle ait des conceptions erronées à l'égard des mathématiques du secondaire, sans même le réaliser.

Josie explique qu'elle désire comprendre les contenus mathématiques du secondaire plus en profondeur et qu'elle veut savoir comment répondre, de façon didactique et mathématique, à ce type de questions d'élèves. Elle veut, dans son enseignement, aller au-delà des procédures mathématiques pour donner un sens aux mathématiques, mais elle ne sait pas trop comment y arriver. C'est là qu'elle souligne les limites de sa préparation mathématique, qui ne revoit pas en profondeur les contenus du secondaire et leurs sens sous-jacents. C'est ainsi que cette première tâche déclenche une réflexion supplémentaire chez elle, liée à un besoin de formation, un besoin d'avoir, entre autres, plus de cours de didactique.

Tâche Système d'équations. Pour répondre au commentaire de l'élève, « La deuxième [équation] est un nombre de billets et la première est un montant d'argent. On ne peut pas soustraire un nombre de billets d'un montant d'argent », Josie met l'accent sur l'idée que ce sont des nombres et qu'ils gardent la même signification dans chacune des équations.

> I : La question de l'élève, c'est « j'ai de l'argent, j'ai des billets, pourquoi j'ai le droit des soustraire? ».
> J : Oui (rire). Qu'est-ce que tu réponds à ça! Moi, je dirais que les équations ont été formées selon ce que tu cherches, l'argent et les billets, c'est vrai. Mais que ton x et ton y restent les mêmes [dans les deux équations], le nombre d'adultes et le nombre d'enfants.
> I : Oui.

> J : Donc, ça serait plus ce que tu cherches [ton x et ton y], que comment tu as formulé ton équation [des billets versus de l'argent]. C'est dur à expliquer! Mais, une fois que l'équation est formée, ce que tu cherches, c'est les variables x et y. Si x vaut la même chose dans les deux équations, et y vaut la même chose, c'est ça qui compte. Faut transformer.

Dans cet extrait, Josie met de l'avant l'idée qu'on peut opérer sur les deux équations puisqu'elles ont les mêmes inconnues, soit x et y, et ce indépendamment du fait que les deux équations représentent les mêmes objets ou non (dans ce cas, l'une représente des billets et l'autre de l'argent). Cependant, Josie n'est pas tout à fait satisfaite de son explication, car elle n'aime pas trop l'idée de résoudre sans contexte et de redonner un sens à la fin et elle aimerait travailler davantage le sens dans son enseignement. Elle pense alors qu'expliquer avec du matériel permettrait de donner un sens, comme on le suggère dans certains de ses cours d'éducation (incluant son cours de didactique), mais elle ne sait pas trop comment utiliser le matériel pour ce problème.

> J : J'aurais tendance à vouloir l'expliquer avec du matériel on dirait, peut-être des jetons. Mais comment, je ne suis pas vraiment certaine. Il faudrait que j'y pense comme il faut. (rires) J'irais voir d'autres enseignants. Mais, ouf!

À travers la résolution de la tâche, Josie pose des questions concernant le sens des coefficients et des variables dans les équations, par exemple « pourquoi [on multiplie la deuxième équation par] 14, pourquoi pas 16? » Mais elle ne trouve pas de réponse à ses questions. Elle aimerait pouvoir donner sens à la procédure et aux mathématiques derrière cette tâche afin d'aider l'élève à mieux comprendre; elle aimerait pouvoir répondre avec différentes méthodes, comme du matériel ou des illustrations. Cette tâche a fait émergé chez Josie une envie d'avoir des réponses à ces maintes questions, voire une inquiétude quant au fait de ne pas avoir de réponses à ses questions pour l'instant.

> J : Hum, c'est difficile à expliquer. Ah mon dieu! (...) Et pourquoi 14, pourquoi pas 16?
> I : Bonne question, pourquoi 14? Le 14, il vient d'où?
> J : Il vient du prix des billets pour les enfants.
> I : Dans la première équation [$27x + 14y = 750$], le 14, c'est de l'argent. Est-ce que là [lorsqu'on multiplie la deuxième équation par 14], c'est encore de l'argent, le coefficient devant la variable?
> J : Ah mon dieu! (rires)

La difficulté qu'éprouve Josie à donner un sens aux symboles et aux opérations rappelle le cas de Mme Daniels dans l'étude d'Eisenhart *et al.* (1993), qui ne peut se sortir du caractère compact et compressé de l'algorithme de division de fraction pour expliquer à un élève le sens sous-jacent à cet algorithme. Mme Daniels tente d'expliquer avec un dessin, et Josie pense à utiliser du matériel, mais ni l'une ni l'autre n'y arrive vraiment. Ce qui est remarquable chez Josie et chez Mme Daniel est leur désir d'expliquer le sens derrière les symboles et les procédures : elles veulent contextualiser, mais n'ont pas les outils pour le faire (contrairement à d'autres enseignants qui ne sentiraient pas le besoin d'expliquer le sens sous-jacent, voir Proulx, 2010).

Tâches Logarithmes. Pour vérifier laquelle des deux solutions est bonne dans la tâche des Logarithmes, Josie suggère de vérifier les réponses 17/2 et -37/2 dans l'équation initiale $2\log_3(2x + 10) = 6$, comme on lui a appris au secondaire. Elle est consciente que son explication reste axée sur la procédure à suivre et en vient à questionner cette procédure usuelle qu'on lui a répétée au secondaire. Encore une fois, ceci fait réfléchir Josie : elle est intriguée et aimerait mieux comprendre ces concepts et procédures mathématiques du secondaire et leurs sens sous-jacents.

> J : On m'a toujours dit de remplacer mes réponses dans mon équation initiale, mais je me demande pourquoi!
> I : Humhum. D'où vient la 2^e^ réponse qui n'est pas bonne?
> J : Humhum. J'ai aucune idée. Vas-tu avoir des réponses à me donner quand on va finir? Je sortirais avec beaucoup de connaissances!

En continuant à scruter le problème, elle voit que c'est en élevant au carré qu'on créé la deuxième réponse, ce qui fait en sorte que dans ce cas la réponse négative ne fonctionne pas dans l'équation initiale, mais pourquoi? « Il y a deux réponses, il y en a une qui ne fonctionne pas, ça me questionne beaucoup! » Et un peu plus tard : « Mais qu'est-ce que tu dis à l'élève? Remplace juste dans la première équation! Ah, frustration! Je suis curieuse, on doit voir ça quelque part, non? » De nouveau, Josie est curieuse d'en savoir plus à la fois sur le concept mathématique de la tâche et sur l'intervention didactique en classe, par exemple comment répondre aux questions des élèves, comment expliquer le pourquoi à ceux-ci, etc., au point d'être frustrée de ne pas avoir d'outils pour répondre à ces questions et d'en connaitre si peu sur ce sujet. Cette future enseignante exprime ici son besoin d'avoir des cours qui répondraient à de telles questions.

En ce qui concerne l'apport de ses cours de mathématiques avancées pour cette tâche, elle répète constamment qu'ils ne l'aident pas. Plus tôt dans l'entrevue, elle avait mentionné un cours dans lequel il fallait pouvoir réutiliser les logarithmes à l'intérieur des nouvelles notions de mathématiques avancées et qu'il fallait alors vraiment bien comprendre ce concept du secondaire pour pouvoir le réinvestir. À ce stade de l'entrevue, en reparlant de ce cours, elle dit le contraire et affirme avoir appliqué les logarithmes, mais qu'ils n'ont pas été « revus » en profondeur. Elle ajoute qu'en général, dans ses cours de mathématiques avancées, elle n'entre pas en profondeur sur les concepts mathématiques du secondaire en jeu : « Ils [dans ses cours d'éducation] nous disent que c'est pas la quantité, mais la qualité qui compte. Mais nous autres, on a [des mathématiques] en quantité, mais pas tout le temps en qualité! » Un changement transparait chez Josie : alors que plus tôt elle portait un regard positif sur la réutilisation des concepts du secondaire à l'intérieur des mathématiques avancées, maintenant elle ne voit plus trop comment ceux-ci la préparent à leur enseignement dans sa classe future.

De plus, au cours de cette tâche, Josie réalise qu'elle est bonne pour expliquer le *comment*, mais que ses explications sur le *pourquoi* sont limitées, et elle désire en savoir plus. Ceci rappelle les propos d'Even et Tirosh (1995), pour qui connaître les contenus mathématiques nécessite à la fois de « savoir quoi » et de « savoir pourquoi ». Ces dernières insistent sur le fait que les enseignants doivent connaître les deux, ce que Skemp (1976) appelle une compréhension relationnelle. Et c'est ce que désire Josie.

Ces trois tâches suscitent une triple réflexion chez Josie. D'abord, elles l'ont amenée à réfléchir sur ses limites, car elle réalise qu'elle a sûrement, elle aussi, des conceptions erronées à l'égard des mathématiques du secondaire et aimerait les rectifier avant de les enseigner à ses élèves. Ensuite, Josie réalise aussi que sa compréhension mathématique est davantage instrumentale (le comment) et veut développer une compréhension relationnelle (le pourquoi). Finalement, d'un point de vue plus didactique, elle veut aussi avoir les outils pour mieux répondre aux questions des élèves et pour expliquer de différentes manières.

Ces trois tâches ont réveillé un double besoin de formation chez Josie, qu'elle partage en détail après les tâches.

4.4.3 Propos suivant la résolution des tâches

Plus tôt, Josie accentuait sa vision positive de sa formation en mathématiques avancées en disant que celle-ci développe sa « pensée mathématique » et qu'elle lui permet de réutiliser certains contenus du secondaire, mais de façon « plus complexe ». Elle disait vivre une rupture entre la façon dont on lui suggère d'enseigner en éducation et la façon dont on lui enseigne dans ses cours de mathématiques avancées. Après les tâches, comme les prochaines sections l'expliquent, ses idées se précisent, voire se transforment. D'abord, elle précise que, quoiqu'elle aime sa formation mathématique, celle-ci est surtout pour elle et non pour son enseignement. Elle clarifie alors la rupture entre sa formation disciplinaire en mathématique et sa formation en éducation. Elle partage aussi une deuxième rupture, soit sur le plan de son identité mathématique, car elle sent qu'on ne s'adresse pas à elle comme future enseignante dans ses cours de mathématiques avancées, mais plutôt à des futurs mathématiciens (ce qui rappelle le commentaire d'Alexa). En somme, Josie oscille encore entre le positif et le négatif de sa formation. De façon générale, elle ne se sent ~~pas tout à fait~~ prête à aller enseigner dans une classe, manquant de confiance quant à sa compréhension des contenus mathématiques du secondaire. Ceci résulte en un besoin de formation chez Josie. Elle termine en partageant son besoin, suscité par les tâches, de suivre plus de cours de didactique.

4.4.3.1 Rupture au niveau de l'identité mathématique dans les cours de mathématiques avancées

Josie aime ses cours de mathématiques avancées, mais elle est aussi consciente qu'ils ne la forment pas à enseigner. Les contenus des cours ne sont pas ceux qu'elle va enseigner, sauf peut-être les dérivées et les intégrales qu'elle revoit dans les deux premiers cours à l'université et qui sont introduites en 12^{e} année. Les cours qu'elle suit sont les mêmes que ceux des futurs mathématiciens, de telle sorte que pour elle sa formation en mathématiques avancées la forme comme spécialiste des mathématiques, mais non comme spécialiste de l'enseignement : « Je referais ma formation, j'ai l'amour des maths, c'est pas une question. Mais, les maths que je fais tout de suite, c'est pour moi, pas pour quand je vais enseigner. »

Dans le même ordre d'idées, Josie ne sent pas qu'on s'adresse à elle comme future enseignante dans ses cours de mathématiques avancées. Dans ceux-ci, on parle de façon générale à des futurs mathématiciens. Elle vit de plus une certaine rupture d'identité dans ses cours, dans lesquels elle ne se sent pas libre de poser ses questions mathématiques en lien avec l'enseignement, comme de demander de contextualiser, d'expliquer un concept plus en profondeur pour faire ressortir le sens, de demander pourquoi, etc.

> J : Ce que je ne trouve pas bon des cours à l'université, c'est que les premiers cours de maths, on est avec des ingénieurs, des physiciens... Je ne peux pas dire : « Je suis en enseignement des maths, j'aimerais savoir comment tu peux contextualiser ça? », parce que je fais perdre le temps des autres.

Dans son programme, les premiers cours de mathématiques avancées sont donnés à l'ensemble des étudiants en sciences, que leur formation soit en génie, en physique, en mathématiques pure, en biologie, en sciences de la santé ou en enseignement. À partir de la deuxième année, les cours sont plus ciblés, certains s'adressant aux futurs mathématiciens et d'autres aux futurs ingénieurs. Les futurs enseignants choisissent parmi cette banque de cours qui ne s'adressent, de prime abord, pas vraiment à eux. Même si ces cours font partie de sa préparation mathématique dans sa formation à l'enseignement des mathématiques au secondaire, Josie ne se sent pas libre de poser des questions dans le cours, puisque la majorité des étudiants ne sont pas en éducation et elle sent que ses commentaires ne seraient pas pertinents pour eux. Cette rupture d'identité renforce le fait que les cours ne s'adressent pas à elle, puisqu'en s'empêchant de faire des commentaires qui sont pertinents à son domaine elle élimine toute possibilité qu'il y ait discussion sur des thèmes qui la rejoignent. Ainsi, Josie ne s'investit pas et ne pose pas ses questions, car elle ne veut pas faire perdre le temps des autres, de telle sorte que les cours deviennent encore moins pertinents pour elle. De plus, quoique Josie aime beaucoup les mathématiques, puisque les cours ne s'adressent pas à elle comme enseignante, sa difficulté à faire des liens entre sa formation disciplinaire et sa formation en éducation s'accentue.

4.4.3.2 Rupture entre la formation en éducation et la formation en mathématiques

Tel que mentionné, la façon dont on lui enseigne les mathématiques dans ses cours de mathématiques avancées n'est pas la façon dont on lui suggère d'enseigner les mathématiques dans ses cours d'éducation. Cette rupture est marquante pour Josie, puisqu'elle veut enseigner les mathématiques comme on l'encourage à le faire dans ses cours à la faculté d'éducation, mais elle ne sait pas trop comment sortir de l'enseignement traditionnel qu'elle vit dans ses cours de mathématiques : elle n'a pas les outils pour faire autrement. Plus tôt dans l'entrevue, ses propos suggéraient que sa façon de les jumeler était de juxtaposer les approches, soit de transmettre la matière en premier (comme elle le vit dans ses cours de mathématiques avancées) et ensuite, s'il reste du temps, de faire des liens avec la vie réelle ou encore de faire des activités où les élèves sont plus actifs (comme elle le vit et comme on lui suggère dans ses cours d'éducation). Dans l'extrait ci-dessous, on voit que Josie veut faire plus que ça, alors qu'elle explique vouloir réellement mailler ces deux formations, afin que les élèves dans sa classe de mathématiques soient constamment actifs ou encore qu'elle parte de leurs connaissances pour en construire des nouvelles avec eux. Toutefois, Josie ne sait pas vraiment comment en arriver là. Pour elle, la question est là : comment, au-delà de simplement ajouter des activités d'introduction, de révision ou d'enrichissement, enseigner autrement? Comment, quotidiennement, enseigner autrement? Josie n'arrive pas à visualiser ou à s'imaginer à quoi ressemblerait un enseignement autre que magistral pour transmettre les contenus aux élèves. Elle ne sait pas comment s'approprier les approches d'enseignement et les théories d'apprentissages qu'on lui suggère dans ses cours d'éducation pour sa pratique d'enseignante. Après tout, elle ne l'a jamais vécu dans ses cours de mathématique.

> J : Surtout je trouve qu'ils veulent, on était beaucoup... béhavioristes. On essaie d'aller sur le constructiviste, socioconstructiviste, mais on se fait enseigner béhavioriste [dans les cours de mathématiques avancées] et ils [les cours d'éducation] veulent qu'on soit socioconstructiviste. Ils [en mathématiques] nous enseignent pas comme ils [en éducation] veulent qu'on soit. J'ai des beaux rêves pour le socioconstructiviste, mais c'est dur de toi-même essayer de décoller [de l'enseignement traditionnel qu'on vit].
> I : De sortir de ce que tu as vécu en tant qu'élève, de ce que tu as vécu en tant qu'étudiante? Et ils veulent que t'enseignes autrement...
> J : Oui, c'est ça. Tu sais, j'ai la belle définition, je sais qu'est-ce qu'ils veulent, mais comment le faire? Ils ne te le disent pas ça, ils ne te le disent pas comment le faire dans un cours de mathématiques.

Et un peu plus tard :

J : Le rêve [d'être socioconstructiviste dans une salle de classe en mathématiques], il est beau, il est loin, mais comment je me rends là? Quels outils pour se rendre là? Ces outils-là, ils ne te les donnent pas.

Dans cet extrait, Josie parle en termes d'« enseignement constructiviste » et d'« enseignement béhavioriste ». Quoique ces deux théories soient des théories d'apprentissage et non d'enseignement (voir Proulx, 2006), son message reste clair : elle veut conjuguer sa formation en éducation à sa formation mathématique, mais les liens entre les deux ne sont pas évidents pour elle. Elle est dans une culture où l'enseignant, qui détient les connaissances mathématiques, transmet celles-ci à ses élèves sous forme de cours magistraux (lesquels elle associe à la théorie béhavioriste); c'est la seule façon qu'elle connaît pour enseigner les nouveaux contenus à ses élèves. Les situations problèmes travaillées dans son cours de didactique sont pour elle un premier outil pour « faire autrement ». C'est un outil qui facilite les interactions avec les élèves, qui amène les élèves à faire des mathématiques et qu'elle peut utiliser directement dans sa salle de classe de mathématiques du secondaire. Néanmoins, d'après ses propos avant les tâches, il semble qu'elle voit cet outil plus comme une activité qui bonifierait l'enseignement magistral et ne le voit pas encore comme une approche d'enseignement en soi, pas encore comme une autre et nouvelle façon de faire des mathématiques avec ses élèves. Josie rêve d'une classe où ses élèves sont actifs, où tous interagissent ensemble pour construire des connaissances mathématiques, mais elle ne peut voir au-delà du professeur qui transmet sa passion et ses connaissances à des élèves assis passivement à leur pupitre. Cette future enseignante aimerait avoir davantage de cours de didactique pour créer des ponts entre la formation en éducation et la formation disciplinaire, entre autres savoir comment transmettre les contenus mathématiques autrement que par un cours magistral, comme on le lui suggère dans sa formation en éducation.

4.4.3.3 Le *manque* de confiance au niveau des contenus mathématiques de niveau secondaire

Comme on l'a vu à travers les tâches, Josie est très curieuse et a soif d'en savoir plus sur les mathématiques du secondaire. Or, et contrairement à Chloé et aux enseignants dans l'étude d'Even (2011) et de Zazkis et Leikin (2010), sa formation en mathématiques avancées ne la rend pas confiante au niveau de ses connaissances mathématiques. Ce n'est pas par difficulté dans ses cours de mathématiques avancées qu'elle ne se sent pas encore confortable avec l'enseignement des mathématiques du secondaire, c'est plutôt par question de manque de pertinence des mathématiques avancées pour sa salle de classe : « Les questions qu'on a en classe [du secondaire], c'est difficile à répondre parce qu'on ne les a pas vus [les contenus du secondaire] nous-mêmes en profondeur. » Elle rajoute un peu plus tard : « J'ai presque, j'ai pas peur d'aller enseigner, mais je ne trouve pas que ma formation est adéquate pour tout ce qu'on nous demande dans notre formation en éducation. » Josie peut résoudre les problèmes mathématiques de niveau secondaire, mais elle partage qu'elle ne se sent pas nécessairement prête à enseigner tous les contenus et, souligne-t-elle : « Ça, c'est terrible parce qu'on est en éducation!» Dans ses cours de mathématiques avancées, cette future enseignante se sent déconnectée de la réalité de l'école, elle veut des cours pour mieux comprendre les mathématiques du secondaire et pour apprendre à mieux les enseigner.

4.4.3.4 Un double besoin de formation

Les tâches provoquent ainsi une double réflexion chez Josie quant à sa formation. Josie souligne que ses cours de mathématiques avancées ne la préparent pas à la réalité mathématique de la classe. Elle reste fascinée par les tâches et par la façon dont elles collent avec le quotidien de la classe. Elle veut travailler sur des tâches comme celles proposées pour être mieux préparée à enseigner.

> J : Est-ce qu'il existe des livres de problèmes [contenant ce type de tâches]?
> I : Ce sont tous des problèmes tirés d'articles de chercheurs qui travaillent avec des enseignants.
> J : Ça, c'est quelque chose qu'on devrait voir! Je ne savais pas qu'il y avait des gens qui faisaient ça!

Les tâches ont suscité un besoin de formation chez Josie, dans le sens qu'elle veut savoir comment expliquer pour que les élèves comprennent, pour contrer les conceptions erronées des élèves et savoir comment clarifier le sens des concepts mathématiques. Elle sent que son cours de didactique pourrait la préparer à ce type de tâche, puisque certaines conceptions erronées des élèves sont abordées. Mais, dit-elle : « un cours de trois heures par semaine, pour un semestre, sur cinq ans, ce n'est pas assez. » Elle a besoin de suivre plus de cours de didactique et plus de cours de mathématiques qui s'adressent à elle comme future enseignante. Josie décrit ce qu'elle aimerait apprendre comme suit :

> J : Au début, on aurait la base de tout ce qu'on fait [les mathématiques du secondaire]. Pourquoi, comme le log qu'on a vu [dans troisième la tâche], que c'est une égalité, mais que ça ne fonctionne plus. Tous les gros pourquoi! Moi, j'aime ça des pourquoi. Et, après ça, comment tu fais une situation d'apprentissage? Quoi faire en classe pour amener les élèves à apprendre? Qu'est-ce que tu as besoin de plus pour développer la compréhension des élèves? Comment les faire évoluer? Tu sais, la motivation, c'est tellement un gros facteur, tout de suite dans nos classes on prend des notes, tu fais un devoir pour appliquer la nouvelle matière... T'es encore en rangée d'oignon. Je trouve ça terrible! C'est difficile aussi des fois de faire des activités interactives avec tes élèves. Tout ça, si on pouvait tout apprendre ça, un cours [de didactique des mathématiques] de 3h par semaine, pour un semestre, pendant 5 ans, ce n'est pas assez.

Dans cet extrait, Josie exprime un double besoin de formation. Le premier besoin est d'avoir des cours de mathématiques qui s'adressent à elle comme enseignante et consiste à pouvoir développer sa compréhension relationnelle des mathématiques du secondaire. Elle a soif d'apprendre le sens derrière les contenus mathématiques du secondaire, mais n'a pas de ressources qui lui offrent ces outils. Le deuxième besoin est plus étroitement lié à sa formation à l'enseignement : elle veut savoir comment s'y prendre en classe pour amener les élèves à apprendre en étant actifs, en interagissant, mais a de la difficulté à s'imaginer comment faire autrement que de la façon qu'elle connait, soit l'enseignement traditionnel. En un mot, Josie exprime ici aussi un besoin de faire le pont entre ses cours d'éducation et ses cours de mathématiques avancées. Son cours de didactique répond partiellement à ce besoin, en lui offrant des outils qu'elle peut amener avec elle dans sa salle de classe (telles les situations problèmes) et en lui permettant d'approfondir ses propres connaissances des mathématiques du secondaire. Pour elle, son cours de didactique fait le pont entre sa formation en éducation et sa formation en mathématiques, mais un seul cours n'est pas suffisant.

4.4.4 Retour sur le cas de Josie

Au final, pour Josie, sa formation en mathématiques avancées ne la prépare pas à la réalité de la classe du secondaire, car il lui manque deux choses. D'abord, Josie veut savoir comment enseigner les mathématiques *autrement* que l'enseignement traditionnel qu'elle reçoit dans ses cours de mathématiques à l'université. Elle veut enseigner comme on lui suggère d'enseigner dans sa formation en éducation (incluant son cours de didactique). Toutefois, elle ne sait pas vraiment comment y arriver, elle ne sait pas comment jumeler ses deux formations (mathématiques et éducation). Ensuite, Josie veut aussi mettre l'emphase sur le pourquoi, et non seulement sur la procédure et le comment, dans son enseignement. Mais comment s'y prendre? Elle aimerait bien en avoir une idée. Elle sent le besoin d'approfondir ses compréhensions des mathématiques du secondaire, car, même si elle aime ses cours de mathématiques avancées (à travers eux elle « développe sa pensé mathématique » et réutilise certains concepts du secondaire), ils ne la préparent pas quant aux contenus du secondaire.

Une certaine ambivalence ressort ainsi chez Josie à l'égard de sa formation en mathématique avancée pour sa préparation à l'enseignement des mathématiques du secondaire : elle aime ses cours, mais ils ne la préparent pas à l'enseignement. Une chose est certaine, c'est qu'il lui manque quelque chose, et ce quelque chose pour elle se traduit par (1) plus de cours de didactique pour faire le pont entre sa formation disciplinaire en mathématiques et sa formation en éducation et (2) un approfondissement de sa compréhension des contenus du secondaire.

4.5 Cas 4 : Rémi (5e année)

Rémi est dans sa cinquième année de formation, sa dernière. Ceci implique qu'il a passé la majorité de ses deux dernières années à la faculté d'éducation, en plus d'avoir terminé son troisième et dernier stage d'enseignement, d'une durée de quatre mois, lors du premier semestre de sa cinquième année. Ce stage et sa formation en éducation ne sont pas sans influence pour Rémi qui, on le voit dans son discours pendant l'entrevue, désire faire découvrir des mathématiques aux élèves, discuter avec eux, faire des activités concrètes et en lien avec la vie réelle, etc., au lieu de leur donner des procédures ou des formules déjà toutes prêtes et de les faire appliquer machinalement. Ainsi, comme il l'explique, sa façon d'enseigner est influencée par sa formation en éducation, qui à son tour joue un rôle sur la façon dont il considère sa formation en mathématiques avancées.

Avant même de vouloir caractériser comment Rémi conjugue ses expériences en mathématiques avancées avec sa préparation à l'enseignement, je rends compte ici de sa vision des mathématiques et de leur enseignement. Cette vision ressort dans les tâches, qui l'incitent à s'exprimer sur l'enseignement des mathématiques, tout particulièrement la tâche Livres et disques. Cette façon de voir de Rémi offre un portrait global de qui il est, portrait qui à son tour éclaire sur la façon dont il perçoit sa formation en mathématiques avancées en tant que préparation à sa profession d'enseignant de mathématiques du secondaire.

> R : Ça me dit, comme je disais tout à l'heure. On donne une formule aux élèves et on ne leur explique pas ce que c'est. Eux, ils voient juste une formule, ils font du calcul. C'est ça, trop d'application, ils n'essayent plus de comprendre le sens de l'équation. Tantôt tu m'as demandé c'est quoi, les maths, pour moi. C'est prendre une situation de la vraie vie, trouver une équation, une façon de le calculer. Mais on ne fait peut-être pas assez ça.
> (...)
> R : C'est ça, les élèves [dans la tâche Livres et disques] voient peut-être juste l'équation et ils ne la comprennent pas. Oui, les mathématiques sont bonnes, Brigitte n'a pas fait d'erreur de calcul, mais elle ne peut plus lire les maths. Elle a la réponse, le nombre, mais ne peut pas dire ce que ça veut dire. À quoi ça sert de faire des maths si on ne sait pas ce que les réponses veulent dire?

Pour Rémi, donner un sens aux mathématiques et faire des liens avec la vie réelle sont deux éléments importants et très liés. Au-delà du calcul, il veut que ses élèves sachent comment utiliser les mathématiques dans leur quotidien, donc qu'ils comprennent les procédures qu'ils utilisent. En un mot, il semble vouloir développer leur raisonnement mathématique.

> I : Parce que les maths, c'est quoi? Le calcul ou le sens?
> R : Les mathématiques, c'est calculer *et* donner un sens, mais on fait pas mal juste le calcul. Aujourd'hui, avec toute la technologie, on n'a presque plus besoin de savoir comment calculer. On peut faire le calcul sur l'ordinateur. Il faut habituer les élèves à comprendre le sens.

Rémi réfléchit aussi beaucoup à la façon d'aider les élèves à voir l'utilité des mathématiques. Il pense qu'« au lieu de leur donner des problèmes écrits, où toutes les données sont déjà toutes prêtes et ils ont juste besoin de l'insérer dans une formule », il serait pertinent de discuter avec eux pour voir quelles données seraient nécessaires et d'aller chercher ces données concrètement, par exemple en mesurant des longueurs si on a besoin de calculer l'aire d'une surface. Il aimerait partir d'une situation problème, les faire explorer mathématiquement et aussi chercher dans leurs manuels ou sur Internet pour voir s'ils peuvent trouver la formule. Quoique certains diront que d'aller chercher la formule dans un manuel ou sur Internet revient au même que de la donner aux élèves (voir Hewitt, 1999), il transparait que Rémi veut que les élèves s'approprient les mathématiques et qu'ils comprennent ce qu'ils font, au lieu de les faire appliquer des procédures auxquelles ils ne donnent aucun sens.

Cette vision de Rémi pour les mathématiques et leur enseignement n'est pas sans influence sur la façon dont il conjugue ses expériences en mathématiques avancées avec sa préparation à l'enseignement des mathématiques du secondaire. Voici maintenant le détail de son entrevue.

4.5.1 Réponses aux questions d'entrevues

Rémi trouve en général ses expériences en mathématiques avancées positives pour sa préparation à l'enseignement des mathématiques au secondaire, et ce, selon trois aspects. D'abord, les cours de mathématiques avancées qui revoient certains concepts du secondaire l'aident à approfondir ses connaissances à l'égard des concepts qu'il va enseigner et lui donnent des outils pour sa pratique future. Aussi, à travers sa formation en mathématiques avancées, Rémi a appris à apprendre des nouvelles mathématiques, c'est-à-dire qu'il a développé son raisonnement mathématique au point de pouvoir maintenant apprendre plus facilement des nouveaux concepts mathématiques. Ceci lui a donné confiance pour aller enseigner n'importe quel contenu du secondaire, car il sent qu'il pourra se débrouiller avec les mathématiques rencontrées, quelles qu'elles soient. Néanmoins, Rémi aurait aimé faire davantage de liens entre les mathématiques et la vie réelle dans sa formation disciplinaire, pour ainsi être mieux préparé à en faire dans sa propre classe. Ces trois points positifs et cet inconvénient surviennent dans ses réponses aux questions d'entrevue, présentées ci-dessous suivies de son travail sur les tâches.

4.5.1.1 Réinvestissements mathématiques : les cours de mathématiques avançées qui voient certains concepts du secondaire, pour mieux comprendre et se donner des outils

En ce qui concerne les cours de mathématiques avancées qui retravaillent directement les concepts du secondaire, Rémi donne deux exemples de cours qu'il trouve significatifs pour sa préparation à l'enseignement des mathématiques au secondaire, soit le cours d'histoire des mathématiques et les cours d'analyse de première année. Pour lui, chacun d'eux est significatif pour deux raisons : (1) ils lui permettent de mieux comprendre certains concepts du secondaire et (2) ils lui donnent des outils pour sa pratique future d'enseignement.

Exemple 1. Le premier exemple est le cours d'histoire des mathématiques. Ce cours est marquant pour Rémi, puisqu'il lui donne des *outils* pour sa pratique future. D'ailleurs, comme il l'explique un peu plus tard dans l'entrevue, il a utilisé quelques-unes de ces histoires et anecdotes dans son stage.

> I : Est-ce qu'il y a des cours de mathématiques qui t'ont plus marqué? Ou des événements significatifs que tu as vécus dans certains cours?
> R : Hum, Histoire des mathématiques avec Monsieur P. Ça m'a marqué, car je me disais : « Quand je vais enseigner les maths, c'est quelque chose que je vais pouvoir utiliser. » Juste l'histoire, c'est toujours intéressant de voir l'histoire des maths et non juste les maths.

Et, un peu plus tard :

> I : Est-ce que tu trouves que ta formation mathématique te prépare bien à enseigner? Et as-tu des exemples?
> R : C'est sûr que ça va être oui et non. Il y a des avantages et des inconvénients. J'essaie de penser à des exemples. Si je reviens au cours d'histoire des mathématiques, dans mon stage ça m'a permis de raconter des histoires à propos des maths. Je faisais ça pour introduire des notions. J'allais piger dans des choses que j'avais déjà vues. Je trouve que ça c'est le fun, parce que dans les classes on ne peut pas toujours parler de maths maths maths, je veux aussi faire des petites conversations pour introduire [les concepts]. Ça, ça m'a marqué.
> I : As-tu un exemple, que tu as fait en stage?
> R : Oui! Pour introduire les différentes familles/catégories de nombres, les nombres réels, les nombres naturels... J'ai raconté l'histoire, je m'en souvenais, Monsieur P nous avait raconté l'histoire des irrationnels : quand ils les ont trouvés, ça avait été le gros choc! J'ai raconté cette histoire-là pour introduire la notion. Ça, c'est un exemple qui m'a servi.

Pour Rémi, le cours d'histoire de mathématiques est bénéfique pour sa préparation à l'enseignement des mathématiques au secondaire puisqu'il trouve que l'histoire ou les anecdotes derrière les mathématiques rendent l'apprentissage plus intéressant et motivant pour les élèves. Ceci est semblable à Alexa, qui trouvait ce cours utile pour son enseignement sur le plan historique, mais non sur le plan mathématique. Les histoires et les anecdotes sont ici vues par Rémi comme des outils pertinents à ramener dans sa salle de classe.

De plus, pour Rémi, le contexte historique peut ajouter une certaine signification aux mathématiques. Il explique que son cours d'histoire des mathématiques lui a permis de *comprendre le sens* derrière certaines preuves ou procédures, c'est-à-dire qu'il a approfondi ses compréhensions des mathématiques du secondaire à travers ce cours. Donc, il croit que ceci pourra aussi lui permettre d'aider ses élèves à mieux comprendre les contenus mathématiques.

> R : [Dans mon cours d'histoire des mathématiques], pour démontrer des choses comme des théorèmes, il y avait toujours des petits contextes avant. Le professeur parlait de comment c'est arrivé... Ça donnait plus de signification à la preuve même.

Le contexte historique est donc doublement pertinent pour Rémi, puisqu'il rend les mathématiques plus intéressantes pour lui et pour ses élèves, mais aussi parce qu'il lui permet de mieux comprendre les concepts en jeu dans son cours de mathématiques à l'université, donc il souhaite que le contexte historique aide aussi ses élèves à mieux comprendre.

Exemple 2. Un deuxième exemple concerne les cours d'analyse de première année. Ces cours sont pertinents, selon Rémi, puisqu'ils retravaillent les concepts de la fin du secondaire. Entre autres, le premier cours a pour objectif de réviser des concepts comme les fonctions linéaires, les fonctions exponentielles et logarithmiques, les fonctions trigonométriques, les opérations sur les fonctions, les limites, la fonction dérivée, etc. Ce cours est significatif pour Rémi, encore une fois pour les deux mêmes raisons : il l'aide à mieux comprendre les concepts en jeu et lui donne des outils qu'il pourra utiliser, à sa façon, dans sa salle de classe.

D'abord, ce cours lui permet de travailler plus en profondeur les concepts du secondaire, de prendre le temps de bien y réfléchir, de se les approprier en les appliquant à des problèmes plus difficiles que ceux du secondaire, et ainsi de *mieux les comprendre*. Entre autres, ces concepts mathématiques sont maintenant plus faciles pour lui.

> R : C'est certain, je dirais les premiers cours d'analyse mathématique. Là, on a vraiment, je crois que ça va me servir parce que c'est des choses qu'on voit en 11e et 12e. Ça fait que là, on a été plus en profondeur dans des concepts que je vais enseigner. Là, je peux voir que ça va me préparer pour être enseignant.
> I : En quoi ça te prépare? Tu dis aller plus en profondeur, ça veut dire quoi, aller plus loin?

> R : Je crois que c'est juste travailler, premièrement le revoir, ça fait que comme ça s'est plus creusé dans ma tête. Ça fait que je vais plus pouvoir m'en souvenir quand j'arrive à l'enseigner.

Tout particulièrement, Rémi explique que ces cours le préparent à enseigner, car ils lui permettent de vivre des difficultés en mathématiques et de les surpasser, ce qui peut le sensibiliser à des difficultés semblables que vivront ses élèves. En d'autres mots, en résolvant des problèmes dans ces cours, Rémi rencontre des difficultés mathématiques et doit corriger certaines de ses conceptions erronées. En surmontant ces obstacles, il approfondit sa propre compréhension de ces contenus mathématiques du secondaire. Pour Rémi, ceci est pertinent pour sa préparation mathématique, car il pourra mieux intervenir auprès de ses élèves lorsqu'ils feront face à des difficultés semblables. Ainsi, en vivant lui-même des difficultés avec ces contenus, il est plus sensible aux difficultés que vivront ses élèves.

> I : En quoi de voir ces contenus plus en profondeur va t'aider à les enseigner?
> R : Je dirais, pour savoir quelles questions demander à mes élèves. Je vais savoir peut-être c'est quoi les difficultés de ces notions-là, vu que je l'ai fait plus en profondeur. J'ai peut-être vécu moi-même des difficultés, avec cette notion-là.
> I : C'est intéressant. Donc, en vivant ces difficultés, tu te dis que tes élèves aussi vont peut-être les vivre.
> R : Humhum. Même si ce sont des problèmes plus faciles pour eux, ils peuvent quand même vivre les mêmes difficultés que moi j'ai vécues avec des [problèmes] plus complexes. Ça m'aide aussi à développer des exemples, à développer des questions pour des évaluations formatives ou des évaluations sommatives. Veut, veut pas, les manuels de mathématiques n'ont pas toujours des questions à haut niveau.

Dans cet extrait, Rémi mentionne un deuxième apport de ce cours pour sa préparation à l'enseignement : retravailler des concepts du secondaire à l'université lui donne des *outils* pour sa salle de classe, dont une banque d'exemples un peu plus difficiles que ceux du secondaire. Ces problèmes « de plus haut niveau » peuvent bonifier l'éventail de problèmes dans les manuels scolaires et donc lui servir dans ses planifications ou ses évaluations. De plus, retravailler ces concepts du secondaire l'outille à développer de belles questions à poser à ses élèves.

Bref, les cours de mathématiques avancées qui retravaillent certains concepts du secondaire sont significatifs pour Rémi pour deux raisons principales. D'abord, ils lui permettent de mieux comprendre les concepts du secondaire (un peu plus tard, pour la tâche

Logarithme, Rémi explique comment le premier cours d'analyse mathématique l'aide à mieux comprendre la notion des logarithmes et à répondre à la tâche). De plus, ces cours de mathématiques avancées lui donnent des outils pour sa classe comme des anecdotes historiques sur un concept mathématique ou sur un mathématicien, des pistes de questions à poser à ses élèves ou encore des problèmes mathématiques un peu plus difficiles que les problèmes habituels du secondaire.

Voici maintenant le troisième avantage de sa formation en mathématiques avancées, soit qu'il a appris à apprendre des nouvelles mathématiques.

4.5.1.2 Réinvestissements *méta*mathématiques : la formation en mathématiques avancées, pour apprendre à apprendre des nouvelles mathématiques

En ce qui concerne l'ensemble de la formation en mathématiques avancées (incluant notamment les cours de mathématiques avancées qui n'ont pas comme objectif de retravailler certains concepts mathématiques du secondaire), Rémi croit qu'elle est bénéfique pour sa préparation à l'enseignement des mathématiques du secondaire parce qu'il a appris à se débrouiller pour apprendre des nouveaux concepts mathématiques. En d'autres mots, ce futur enseignant a appris à apprendre des mathématiques par lui-même, à travers sa formation mathématique universitaire. Il est devenu habile à faire des mathématiques, comme s'il avait développé une certaine façon de penser en mathématiques qui lui permettait de raisonner et de résoudre plus aisément des problèmes. Ainsi, si de nouveaux concepts mathématiques sont inclus dans les programmes du secondaire, comme ce fut le cas des matrices depuis son entrée à l'université, Rémi est confiant qu'il peut s'approprier ces concepts et les enseigner, même s'il n'a pas eu de formation spécifique à leur sujet.

> R : L'avantage [de la formation en mathématiques avancées], c'est qu'avec les cours plus avancées je me sens confiant. Je sais que je vais pouvoir aller enseigner n'importe quelle notion mathématique, même si je l'ai jamais vue avant. Même s'il y a quelque chose qui change dans le programme, je sais que je vais pouvoir l'apprendre et me débrouiller pour l'enseigner.
> I : Donc, un avantage de voir des mathématiques avancées c'est que tu apprends à apprendre des nouveaux concepts mathématiques…
> R : Je crois que, en me poussant en mathématiques, si je reviens aux mathématiques du secondaire, elles sont rendues faciles. Peut-être que ma façon de penser a été plus développée.

Cette habileté à apprendre de nouvelles mathématiques fait écho à la conclusion de Proulx, Corriveau et Squalli (2012), qui avancent, dans le collectif sur la formation mathématique des enseignants de mathématique, qu'un élément important de la formation mathématique semble être de rendre « les enseignants fluides en mathématiques et capables de résoudre les divers problèmes mathématiques qu'ils rencontrent » (p. 336). Ces auteurs soulignent que la formation mathématique de l'enseignant ne se termine pas à la formation initiale, mais qu'elle continue toute sa vie (voir aussi Bednarz, 2012). Ainsi, au-delà des contenus, la formation mathématique veut « former les enseignants à se former eux-mêmes en mathématiques et à trouver des moyens d'y parvenir » (Proulx, Corriveau et Squalli, 2012, p. 336). C'est le rôle qu'a joué la formation en mathématiques avancées pour Rémi. En un mot, pour Rémi, sa formation en mathématiques avancées l'a outillé à apprendre par lui-même des mathématiques.

De plus, ceci veut aussi dire pour Rémi qu'il est capable de se réapproprier rapidement les mathématiques du secondaire, qu'il n'a pas faites depuis longtemps. Dans son stage, Rémi a enseigné les mathématiques en 9e année. Bien qu'il n'ait pas travaillé ces contenus mathématiques depuis plusieurs années, il explique qu'il a pu se remettre assez rapidement « dedans » en survolant le manuel. Ainsi, avec une relecture rapide des notes de cours, il pouvait assez facilement répondre aux questions des élèves, et ce, de la 9e à la 11e année.

> R : Je suis retourné en 9e année, ça fait longtemps que je n'ai pas vu ces notions-là, mais avec la formation que j'ai eue, je pouvais juste le relire vite fait et répondre aux questions. J'ai enseigné à des [élèves de] 9e année, mais on avait une classe où plusieurs élèves viennent et font leurs devoirs. Je pouvais même répondre à des questions d'élèves en 10e et 11e année. Juste en regardait rapidement leurs notes, je peux répondre à leurs questions. Je me sens quand même assez confiant en maths pour aller enseigner n'importe quel cours.

Rémi est confiant en ses habiletés mathématiques, car il a été capable dans son stage de se réapproprier rapidement des contenus et a pu répondre aux questions des élèves, même s'il n'a pas retravaillé explicitement ces contenus depuis plus de cinq ans. Cette confiance, il l'associe à sa formation en mathématiques avancées, pendant laquelle il a appris à se débrouiller pour apprendre n'importe quelle notion mathématique.

Somme toute, la formation en mathématiques avancées de Rémi le prépare bien à enseigner les mathématiques du secondaire pour trois raisons. D'abord, à travers les cours qui retravaillent explicitement les contenus du secondaire, elle l'aide à approfondir ses connaissances des mathématiques qu'il va enseigner. Ensuite, ces cours lui donnent des outils pour sa classe. Finalement, sa formation mathématique lui a permis de devenir habile à apprendre des nouveaux concepts mathématiques. Toutefois, autant Rémi croit en sa formation disciplinaire, autant il trouve qu'elle comporte un peu trop de cours de mathématiques avancées et que ces cours prennent peut-être la place d'autres cours qui pourraient être plus utiles à sa préparation à l'enseignement.

> R : Si je parle de mon bacc, je trouve qu'on a peut-être trop fait de mathématiques avancées. J'aurais vu une couple de cours mathématiques avancées pour voir plus loin, mais aussi des cours qui sont peut-être plus axés sur les mathématiques du secondaire.

Dans cette lignée, Rémi aurait toutefois aimé que sa formation le prépare aussi à expliquer la pertinence des mathématiques dans la vie réelle, mais ça n'a pas été le cas. La prochaine section aborde cet aspect.

4.5.1.3 Un trou dans sa formation : faire des liens avec la vie réelle

Quelques questions restent ambiguës à l'égard des mathématiques, des questions auxquelles Rémi aurait aimé avoir des réponses à travers sa formation mathématique universitaire. Entre autres, il ne se trouve pas bien formé pour expliquer la pertinence des mathématiques. Rémi aurait aimé pouvoir faire davantage de liens entre les mathématiques et la vie réelle afin de mieux répondre à la question populaire des élèves : « À quoi ça sert les maths?» Sa réponse générale à cette question est de nommer des domaines connexes aux sciences, comme l'ingénierie, la médecine ou la chimie. Pour lui, les mathématiques forment le langage des sciences et sont donc utiles pour tous ces domaines (biologie, chimie, physique, etc.). Mais, encore là, il n'est pas satisfait de sa réponse. Bref, il aimerait voir plus concrètement les liens entre les mathématiques et la vie réelle et être davantage capable d'expliquer de tels liens à ses élèves. La difficulté se situe surtout, pour lui, avec les élèves qui n'envisagent pas d'aller à l'université. Rémi se demande comment leur montrer à quoi vont leur servir leurs cours de mathématiques.

> R : La fameuse question, « à quoi ça sert les maths? » Souvent j'essaie [de répondre à mes élèves]. Je pense que j'ai des bonnes réponses, mais je ne suis pas satisfait de mes réponses.
> I : Quel type de réponse leur donnes-tu?
> R : Quand ils [mes élèves] me demandent ça, j'essaie toujours de faire des liens avec des carrières. C'est sûr que je peux toujours en faire comme les ingénieurs, hum... J'peux pas penser tout de suite là, mais médecin. Ou n'importe quelle, en sciences, tu as certainement besoin des maths. Les mathématiques, c'est le langage de la science. Ça prend les maths pour n'importe quel domaine de la science.

Et, un peu plus tard :

> R : Lorsque je vais enseigner, surtout en mathématiques, je veux faire des liens avec la vie réelle, avec peut-être des carrières. Si on ne les fait pas à l'université, on ne pourra pas les faire nous autres même, comme enseignant.
> I : Ok. De montrer les liens entre les mathématiques qu'on voit et la vie réelle, c'est ça?
> R : Oui, c'est ça. Peut-être des maths, je sais pas, avec de l'argent, on voit souvent ça. Peut-être de l'économie, peut-être pousser plus dans différents champs comme ça.

Rémi veut faire des liens entre les mathématiques et la vie réelle et s'intéresse donc davantage à l'application des mathématiques dans d'autres domaines. Dans sa préparation à l'enseignement, il trouve que les liens entre les mathématiques et la vie réelle devraient être plus explicites. Pour lui, si sa formation ne réussit pas à le convaincre de la pertinence des mathématiques, alors il ne pourra pas lui non plus convaincre ses élèves. Lorsque c'est trop poussé, trop abstrait, il ne voit plus de liens avec le quotidien et cela l'inquiète un peu, car il aimerait mieux comprendre la pertinence (ce qui est pour lui l'« utilité ») des mathématiques appliquées et abstraites. Il aimerait suivre, par exemple, des cours où des liens explicites sont faits entre les mathématiques et les carrières comme l'économie, la chimie, la physique, l'ingénierie, etc.

> R : Encore là, ça serait peut-être de moins avoir de cours poussés, pour avoir peut-être pas juste des cours poussés, mais des cours qui sont plus axés sur la vie réelle. Quelque chose comme ça.

Dans la tâche Livres et disques, Rémi reviendra sur l'importance qu'il accorde à faire des mathématiques tirées du quotidien et à aider les élèves à voir le sens derrière les procédures, et non simplement à arriver à calculer. Regardons maintenant son travail sur les tâches.

4.5.2 Les tâches

Les tâches amènent Rémi à s'exprimer sur l'enseignement des mathématiques. Pour certains futurs enseignants, elles déclenchent des réflexions sur leur formation. Mais, pour lui, ces tâches lui permettent de parler de l'enseignement. Il est très axé sur l'élève et non pas sur sa propre formation. Tel que mentionné, Rémi est sensible à ce que les mathématiques soient significatives pour l'élève et à faire des activités concrètes et en lien avec la vie réelle dans sa classe. Ce désir transparait beaucoup dans les tâches, où il réagit sur l'incompréhension des élèves et veut donner un sens aux mathématiques.

Tâche Livres et disques. Dans cette tâche, Rémi voit assez rapidement que Brigitte ne comprend pas la signification du coefficient et de la variable dans l'équation 8L = 40 : « Les [calculs] mathématiques sont bons, mais le sens n'est pas bon. » Brigitte associe le prix à la variable L, alors que les prix sont déjà déterminés par le coefficient 8 et que les variables L et D sont respectivement le nombre de livres et le nombre de disques. Mais, plutôt que de l'amener à parler des mathématiques dans la tâche, celle-ci fait réfléchir Rémi à l'enseignement des mathématiques. C'est ici qu'il fait part de sa vision des mathématiques et de l'importance qu'il accorde à ce que l'élève comprenne les procédures qu'il utilise (comme il fut mentionné ci-dessus pour présenter Rémi). Au-delà du calcul, il veut que ses élèves sachent comment utiliser les mathématiques dans leur quotidien et donc qu'ils leur donnent un sens.

Tâche Système d'équations. Dans cette tâche, comme ce fut le cas pour Chloé et Alexa, Rémi explique qu'une fois les variables et les équations déterminées, il faut faire l'algèbre et revenir au sens à la fin.

> I : Le fois 14, qu'est-ce que ça pourrait vouloir dire?
> R : Juste 14 des deux côtés de l'équation, ouin. Moi, je crois qu'il faudrait peut-être faire comprendre à l'élève qu'une fois qu'on a les équations, pourvu que ce que tu fais est correct mathématiquement, ça ne dérange pas vraiment.

Par contre, il aime aussi l'idée de donner sens à la procédure et donc oscille un peu entre les deux positions. Rémi peut s'imaginer que le 14, par lequel on multiplie la deuxième équation (x + y = 35) qui représentait initialement un nombre de billets d'adultes, est un montant d'argent. Et, donc, soustraire les deux équations aurait plus de sens, car elles représentent alors toutes deux un montant d'argent. Mais, il ne sait pas si ce jeu sur le sens mêlerait ou aiderait les élèves.

> R : Donner du sens dès le début, faire tes calculs et tu redonnes le sens à la fin. Tu regardes si ça a du sens, ta réponse. En faisant ça, peut-être que j'essaierais de lui [l'élève dans la tâche] expliquer avec les dollars, mais peut-être que je lui dirais juste : « Pourvu que tu comprennes le sens au début, fais ton calcul, si c'est bien mathématiquement, à la fin regarde, refais le sens. »

Rémi oscille ici entre deux mondes. D'un côté, son intuition lui dit qu'il faut que l'élève donne un sens à la procédure mathématique, mais il ne sait pas si ce questionnement sur le sens derrière l'aiderait vraiment. D'un autre côté, il y a la puissance de l'algèbre, grâce à laquelle on peut sortir du contexte pour résoudre le problème et revenir au sens à la fin. Une chose est certaine pour lui : peu importe le chemin pris, il veut que les élèves comprennent et donnent un sens aux mathématiques et non qu'ils apprennent la procédure par cœur.

Tâche Logarithme. Comme mentionné, Rémi trouve que ses cours de mathématiques avancées qui revoient des concepts mathématiques du secondaire l'aident à mieux comprendre ces concepts. La tâche Logarithme lui permet d'exemplifier comment ses cours de mathématiques l'aident. Dans cette tâche, Rémi reprend la notion de domaine de définition, qu'il se souvient d'avoir vue dans son cours d'analyse mathématique, pour expliquer ce qui se passe dans la tâche.

> R : Oui, certainement on a fait. On voit un peu les logs en 11^e et 12^e année, mais rendus à l'université on les voit encore plus. Peut-être en 12^e année je comprenais un peu les logs, mais maintenant avec ma formation plus poussée en math, je comprends plus ce qu'est un logarithme.

Ainsi, dans la tâche Logarithme, Rémi explique que l'argument (soit 2x+10 dans l'équation initiale $2\log_3(2x + 10) = 6$) doit être positif, donc qu'il faut rejeter la réponse, -37/2, car elle donne un argument négatif. Questionné sur l'équivalence des équations à la première et à la deuxième étape, respectivement $2\log_3(2x + 10) = 6$ et $\log_3(2x+10)^2 = 6$, Rémi dit instinctivement qu'elles sont équivalentes. Puis, il revient sur le domaine de définition, soit qu'il faut que l'argument soit positif:

> R : Je suis certain que ça ne marcherait pas à la première étape, le -37/2 n'est pas dans le domaine de définition de cette fonction-là, le logarithme.

Bref, pour Rémi, revoir les logarithmes à l'université l'aide à comprendre plus en profondeur ce concept mathématique : « À l'université, on ne parle pas juste des calculs, mais aussi du domaine de définition. Il faut comprendre vraiment ce qu'est un log. » Il explique qu'à force de faire des graphiques, il peut s'imaginer à quoi ils ressemblent et il comprend alors mieux le besoin d'avoir un domaine de définition.

4.5.3 Retour sur le cas de Rémi

Pour Rémi, faire des mathématiques représente plus que simplement faire les calculs ou appliquer des procédures machinalement, c'est donner un sens aux contenus et aux procédures pour ainsi être capable de les utiliser quotidiennement. Dans cette idée, les cours significatifs pour lui sont donc ceux qui l'aident à donner un sens aux mathématiques. D'abord, à travers les cours de mathématiques avancées qui travaillaient les concepts du secondaire, Rémi a approfondi ses connaissances des contenus mathématiques qu'il va enseigner. Sa formation a aussi été bénéfique quant aux outils qu'elle lui a donnés pour sa pratique future, comme des anecdotes historiques ou une banque de problèmes plus difficiles. Ensuite, au-delà des contenus, en général sa formation en mathématiques avancées lui a permis d'apprendre à apprendre des nouvelles mathématiques, c'est-à-dire qu'il a développé son raisonnement mathématique au point de pouvoir maintenant apprendre à se débrouiller pour faire de nouvelles mathématiques et les enseigner. C'est ainsi que Rémi se sent confiant d'apprendre et d'enseigner n'importe quel contenu au secondaire, même s'il ne l'a jamais vu avant. Il sort satisfait de sa formation disciplinaire en mathématiques avancées, car il se sent compétent en mathématiques et prêt à les enseigner.

Néanmoins, comme Rémi associe le sens des mathématiques à leur usage dans la vie réelle, il aurait aimé faire davantage de liens entre sa formation mathématique universitaire (avec les contenus du secondaire ou même les contenus en mathématiques avancées) et la vie réelle, afin d'être davantage en mesure d'expliquer à ses élèves la pertinence des mathématiques.

4.6 Cas 5 : Monic (4e année)

L'analyse du cas de Monic, ainsi que les deux prochains et derniers cas, est décrite de façon plus synthétique, sans s'appuyer systématiquement sur de nombreux extraits de verbatim[25]. Pour synthétiser le travail sur les tâches, j'ai choisi de présenter celle(s) qui ont le plus parlé aux futurs enseignants et qui ont davantage stimulé leurs réflexions.

Monic, en quatrième année de formation, a complété la plupart de ses cours en mathématiques avancées dans ses trois premières années à l'université et les cours qu'elle suit maintenant se situent majoritairement à la faculté d'éducation. Elle se prépare pour son troisième stage de formation, celui-ci de quatre mois, qui aura lieu au semestre d'automne (les entrevues ont lieu au milieu du semestre d'hiver, soit six mois avant le stage). Le stage qui s'en vient n'est pas sans effet sur Monic, qui se questionne sur son cheminement universitaire et l'effet de sa formation en mathématiques avancées pour son enseignement au secondaire. Maintenant qu'elle a un bagage en mathématiques avancées, elle craint avoir de la difficulté à expliquer les concepts mathématiques du secondaire au niveau des élèves. Cette peur ressort dans les tâches, pendant lesquelles elle aimerait pouvoir mieux répondre aux questions des élèves.

Néanmoins, et je commence par ceci, Monic voit un avantage double à sa formation en mathématiques avancées pour sa préparation à l'enseignement des mathématiques, soit qu'elle lui permet de mieux comprendre et de mieux expliquer les concepts du secondaire et qu'elle lui offre une vision panoramique des mathématiques.

4.6.1 Réponses aux questions d'entrevues

4.6.1.1 Réinvestissements mathématiques : cours de mathématiques qui retravaillent certains concepts du secondaire, pour mieux les comprendre et mieux les expliquer

Pour Monic, les cours de mathématiques avancées qui revoient certains concepts du secondaire sont utiles pour sa préparation à l'enseignement puisqu'ils lui permettent de mieux comprendre les procédures du secondaire. Donc, ces cours l'outillent pour expliquer

---

[25] Il est important de noter que l'analyse des sept cas s'est effectuée de la même façon, mais que seulement quatre cas sur sept, comme mentionné, sont décrits de façon détaillée dans l'analyse offerte dans le mémoire.

ces procédures plus clairement à ses élèves. Elle donne l'exemple du cours d'algèbre matricielle appliquée, qu'elle a trouvé utile lorsqu'elle a enseigné les matrices dans son deuxième stage, car les matrices ont tout récemment été ajoutées au programme d'études de sa province. En fait, Monic faisait partie de la première cohorte du secondaire qui étudiait les matrices et elle explique que ce concept était alors flou pour elle. À l'université, elle a travaillé les matrices plus en profondeur, c'est-à-dire qu'« à l'université, on a vu la *vraie* méthode [pour résoudre un système d'équations]. » Maintenant qu'elle comprend mieux la procédure, elle a pu mieux l'expliquer à ses élèves. Monic mentionne aussi les concepts de dérivées et d'intégrales, qu'il est avantageux de revoir à l'université puisqu'ils lui permettent de s'exercer aux procédures à suivre en algèbre : « Ça nous pratique au niveau des résolutions de problème, comme identifier nos variables, voir ce que ça représente, comment mettre ça dans les équations. » Bref, pour Monic, les cours de mathématiques avancées qui revoient certains concepts du secondaire sont utiles puisqu'ils lui permettent de mettre en pratique et donc de mieux comprendre/expliquer les procédures à suivre dans la résolution de problèmes, procédures qu'elle doit à son tour enseigner au secondaire.

Toutefois, ces cours de mathématiques ne sont pas les seuls qu'elle trouve pertinents pour sa préparation à l'enseignement des mathématiques du secondaire, car il y a aussi les cours qui vont un peu plus loin, tout en restant connectés aux mathématiques du secondaire.

4.6.1.2 Réinvestissements *méta*mathématiques : une formation en mathématiques avancées qui donne une vision du panorama mathématique aux élèves

Monic se soucie de rendre les mathématiques intéressantes pour les élèves de sa classe et de montrer que celles-ci ne s'arrêtent pas à celles du secondaire. Dans cet ordre d'idées, elle trouve le cours Théorie des nombres intéressant, puisqu'il travaille les relations entre les nombres et qu'elle peut s'en inspirer pour montrer des « Fun facts » mathématiques à ses élèves. Elle donne un exemple en lien avec le théorème de Pythagore : « Si tu as $a^3 + b^3 = c^3$, ça ne fonctionnera jamais. Je trouve que ça peut être intéressant, juste amener les élèves à réaliser ça. » Le cours Théorie des nombres travaille des concepts tels que l'algorithme d'Euclide (le théorème fondamental de l'arithmétique), les congruences linéaires et quadratiques, les fractions continues et les nombres premiers. Ainsi, pour Monic, ce type de cours rend les mathématiques plus intéressantes et en même temps amène les élèves à avoir une vision plus globale du panorama mathématique, en particulier concernant les relations entre les nombres, comme une formule qui permet de trouver plusieurs nombres premiers (Monic n'a toutefois pas donné d'exemples plus précis en entrevue).

De plus, ces « Fun Facts » permettent de faire des liens entre les mathématiques du secondaire et les mathématiques avancées, selon Monic. Ceci aide les élèves à avoir une idée des « autres » mathématiques qu'ils peuvent voir dans les cours de mathématiques avancées à l'université. Ceci est important pour Monic, car elle aurait aimé avoir une idée, en sortant du secondaire, des mathématiques avancées qui l'attendaient à l'université.

En somme, ce type de cours (elle nomme ici le cours Théorie des nombres) lui semble pertinent pour sa future pratique de classe, sans pour autant être un élément critique à son enseignement. Toutefois, de façon globale, elle explique que cette formation en mathématiques avancées l'éloigne de sa pratique de classe future.

4.6.1.3 Rupture des mathématiques avancées « compactes », qui l'éloignent des mathématiques du secondaire

Au secondaire, Monic jouait à l'enseignante en répondant aux questions des autres élèves en classe et elle organisait même des « soirées mathématiques » pour aider ses amis avant les tests. Elle était alors confiante en ses habiletés mathématiques et en sa capacité à expliquer de différentes manières. Elle était confiante qu'elle allait devenir une bonne enseignante. Une fois à l'université, toutefois, plus elle suivait de cours de mathématiques avancées, plus elle se sentait s'éloigner des mathématiques du secondaire, au point d'avoir maintenant peur de s'aventurer dans son stage, car elle ne considère plus qu'elle connait la matière qu'elle va enseigner. Ainsi, non seulement elle ne se « rappelle de rien » de ses cours de mathématiques avancées, mais elle se sent déconnectée des mathématiques qu'elle va enseigner.

> M : J'ai une bonne base en mathématique, mais je ne comprends pas tout ce que j'ai appris [dans mes cours de mathématiques avancées]. En plus, on me lance dans le milieu scolaire, où c'est des maths que je n'ai pas faites depuis 4 ans ou plus. Je ne me sens pas du tout confortable, comme si j'ai perdu mon « don ». J'ai hâte, mais j'ai peur de voir comment ça va aller. J'ai peur de perdre mes élèves totalement. [...] Je perçois les choses d'une certaine façon, qui n'est pas nécessairement la façon dont je

> les percevais au secondaire. Donc, la façon que je le perçois n'est pas nécessairement compatible avec les connaissances que les élèves ont déjà.

Monic craint qu'elle ne réussisse pas à expliquer à l'échelle des élèves, comme si elle est allée trop loin en mathématiques et que les mathématiques du secondaire étaient maintenant faciles au point d'être difficiles à décompresser. Ceci rappelle les propos d'Usiskin (2000), qui avance que plus un enseignant prend de cours de mathématiques avancées, plus il s'éloigne des mathématiques qu'il va enseigner. Ceci fait aussi penser au cas de Bill dans l'étude de Thompson et Thompson (1994, 1996), qui comprenait le concept de taux variation et de vitesse de façon avancée, mais qui n'avait pas été capable de le décompresser pour le faire comprendre à son élève Ann. Comme le font ressortir Gattuso (2000) et Proulx (2010), le niveau avancé de symbolisme dans les mathématiques avancées peut entraîner chez les futurs enseignants une certaine difficulté à sortir de l'abstrait et du formalisme pour rendre les mathématiques accessibles aux élèves. C'est le cas de Monic. Cette dernière donne l'exemple des limites, dont l'idée au secondaire est qu'on se rapproche d'un point ou d'une droite, mais qu'on n'arrive jamais vraiment à le toucher, alors qu'à l'université, elle voit la définition formelle des limites « qui n'est pas du tout la même chose, tu lances des deltas et des epsilons là-dedans et tout. » Monic se sent maintenant loin des mathématiques du secondaire et a peur de faire référence à des éléments plus formels dans son stage, en enseignant les limites par exemple, et ainsi de complètement perdre ses élèves.

> M : Disons que j'arrive à mon stage et que j'enseigne les limites, peut-être qu'il y a des choses que j'ai appris à cause de la définition formelle que je vais commencer à dire à mes élèves et qu'ils vont être comme : « Hein! De quoi tu parles? Je ne comprends pas. » Et là, tu réalises que tu n'es plus à leur niveau. Je le voyais comment dans ce temps-là [lorsque j'étais moi-même au secondaire], pour pouvoir me mettre à leur niveau et les aider à comprendre?

Ce fossé apparaitra aussi dans son travail des tâches, où elle est confrontée à des questions d'élèves sur le sens des opérations et des procédures. Face à ce questionnement, elle ne sait pas trop comment répondre.

4.6.2 Les tâches

Tâche Livres et disques. En lisant le commentaire de l'élève « La deuxième [équation] est un nombre de billets et la première est un montant d'argent. On ne peut pas soustraire un nombre de billets d'un montant d'argent. », Monic se dit qu'elle s'est surement posé la même question lorsqu'elle a appris à résoudre des systèmes d'équations à l'école, mais « maintenant, l'algèbre est claire et évidente. Une fois que ça a cliqué, ça a cliqué. Mais je ne me rappelle plus comment j'ai fait pour arriver là. » En d'autres mots, bien que Monic ait eu besoin de comprendre le sens des procédures lorsqu'elle a appris la résolution d'un système d'équations au secondaire, une fois qu'elle l'a compris elle ne s'est plus vraiment attardée au sens sous-jacent, mais plutôt à se rappeler des procédures. Questionnée sur la façon dont ses cours de mathématiques avancées l'aident à accomplir la tâche Livres et disque, Monic explique qu'elle se sent sûrement comme ses professeurs à l'université, qui ne semblent pas comprendre que les étudiants ne comprennent pas. En un mot, la tâche est évidente pour elle, mais elle ne peut pas l'expliquer.

> M : Les profs sont tellement dans leur matière, ils ne comprennent pas comment on ne comprend pas. Tout comme moi maintenant, je ne peux pas donner d'explication à ta tâche. Je comprends que l'élève ne comprend pas, que ce n'est pas évident pour un élève du secondaire. Juste en regardant la feuille, je trouve que c'est évident. Mais là tu me demandes une explication et je ne peux pas t'en donner! C'est la même chose à l'université, le prof dit que c'est évident, mais les étudiants ne le voient pas.

À travers les tâches, Monic éprouve de la difficulté à répondre aux questions des élèves. Elle se sent déconnectée des mathématiques du secondaire. Elle peut très bien les résoudre, mais ne réussit pas à « décompresser » la procédure pour lui donner un sens, elle ne peut pas « retourner » à ses mathématiques du secondaire et ceci la dérange.

> M : Ça fait tellement longtemps que je n'ai pas fait quelque chose comme ça. Oui, tu me donnes le problème, je vais le résoudre, c'est dans mon cerveau. Mais, au niveau du pourquoi, je ne suis tellement pas dedans, on ne voit tellement plus ça! À ce niveau ici c'est tellement perçu comme la base, tu le sais, ça se fait. Je ne suis pas dans le pourquoi des choses. C'est juste ça que c'est. C'est difficile pour moi de retourner en arrière.

Pour Monic, au fur et à mesure qu'elle avance dans sa formation en mathématiques avancées, elle sent qu'elle s'éloigne petit à petit des mathématiques du secondaire. Même si elle a retravaillé certains contenus du secondaire dans des cours de mathématiques avancées (comme l'exemple des matrices mentionné plus tôt), elle a davantage travaillé les procédures que le pourquoi sous-jacent. Cette tâche, ainsi que sa difficulté à retourner en arrière pour répondre aux questions, confirme pour elle qu'elle s'est éloignée des mathématiques du secondaire, et ceci la trouble.

4.6.3 Retour sur le cas de Monic

Monic voit des avantages ponctuels à sa formation en mathématiques avancées pour sa future classe : mieux comprendre des concepts et procédures mathématiques des mathématiques de niveau 11^e et 12^e année du secondaire (comme les matrices) et construire une meilleure vision du panorama mathématique qu'elle peut transférer à ses élèves à travers des « Fun Facts ». Toutefois, en prenant du recul sur l'ensemble de sa formation universitaire en mathématiques, Monic trouve qu'il n'est pas facile de retourner aux mathématiques du secondaire après s'être aventuré si loin en mathématiques avancées. Elle trouve que cette formation en mathématiques avancées, mise en place pour la préparer à enseigner, ne l'aide pas vraiment et même l'éloigne des mathématiques qui seront mobilisées dans sa future salle de classe. Bref, pour Monic, sa formation en mathématiques avancées l'éloigne des compréhensions mathématiques de ses élèves.

4.7 Cas 6 : Talia (4^e année)

Comme Josie et Monic, Talia est en quatrième année de formation (sur cinq). Ses expériences dans sa formation mathématiques ressemblent à celles d'Alexa et de Josie, dans le sens qu'elle voit certains avantages aux mathématiques avancées, mais qu'elle aurait en général aimé être davantage formée quant aux contenus mathématiques du secondaire. Ce besoin de formation est accentué par les tâches, durant lesquelles Talia se sent sans outils et ne sait pas vraiment quoi répondre aux élèves. Les tâches l'amènent à réfléchir et à se questionner sur les mathématiques du secondaire, qu'elle aimerait comprendre plus en profondeur.

Dans cette entrevue, la moitié des questions ont été posées avant les tâches et l'autre moitié après. De plus, les réponses aux questions d'entrevue après les tâches permettent de clarifier les premiers propos de Talia sur les questions, tout particulièrement à l'égard de son besoin de formation par rapport aux mathématiques du secondaire.

4.7.1 Réponses aux questions d'entrevues

En ce qui a trait aux apports de sa formation en mathématiques avancées pour sa préparation à l'enseignement des mathématiques du secondaire, Talia en voit deux principaux : développer une vision panoramique/évolutive des mathématiques et étudier les mathématiques « plus loin » que ses élèves le font.

4.7.1.1 Réinvestissements *méta*mathématiques : développer une vision panoramique et évolutive des mathématiques

Cet apport de sa formation demeure clair et certain pour Talia : il provient du cours d'histoire des mathématiques. Ce cours est significatif pour elle puisqu'il lui a permis de construire une vision plus historique et évolutive des mathématiques, tout particulièrement en lui montrant d'où provenaient certains théorèmes mathématiques et qu'il existe plus d'une méthode pour résoudre un problème.

> T : [Dans le cours d'histoire des mathématiques], on a vu comment les anciens faisaient leurs mathématiques et comment il y a des choses qui s'appliquent encore aujourd'hui. D'où viennent les mathématiques, tu sais elles ne sont pas tombées du ciel, ça a commencé quelque part. Et différentes méthodes qu'ils utilisaient aussi.

Ce cours d'histoire des mathématiques a aidé Talia à voir les mathématiques de façon évolutive et non statique. Elle réalise maintenant que les mathématiques changent et qu'il ne s'agit pas nécessairement de vérités absolues, même si ce n'est pas la façon dont on présente les mathématiques dans la plupart de ses cours de mathématiques avancées, dans lesquels on ne questionne pas les concepts : « [Dans les cours de mathématiques avancées] on dit, c'est ça que c'est, c'est de même que c'est toujours, ça marche, applique ça. » Une coupure transparait alors entre ses cours de mathématiques avancées et la façon dont elle veut enseigner les mathématiques au secondaire. Cette coupure que voit Talia fait écho à la troisième rupture soulevé par la recherche (section 1.2.3.3), soit que la façon magistrale par laquelle les mathématiques avancées sont enseignées transmet une vision statique et préexistante des mathématiques (Burton, 2004), alors qu'on souhaite jouer avec des mathématiques vivantes dans la classe (Bednarz, 2001). Néanmoins, Talia choisit de construire sa vision des mathématiques à partir de son cours d'histoire des mathématiques et donc choisit de voir les mathématiques comme étant évolutives.

Bref, son expérience l'amène à garder l'esprit ouvert en mathématiques. Elle réalise que ce n'est pas la façon habituelle dont on enseigne les mathématiques, ni au secondaire ni à l'université, mais elle aimerait amener ce côté ouvert et évolutif des mathématiques dans sa classe.

> T : [Je trouve ça important] de développer la pensée critique, surtout en mathématiques, parce qu'on a trop l'impression que ça, c'est ça, ça marche comme ça, applique cette formule-là, ça marche toujours. Et c'est comme ça qu'on enseigne à nos élèves! Il y a une façon de faire, c'est ça que c'est.

Pour Talia, une façon d'illustrer ce côté non statique des mathématiques est de travailler plusieurs méthodes, nouvelles et anciennes, avec ses élèves, pour ainsi leur montrer qu'il n'existe pas juste une façon de faire les choses en mathématiques.

> T : Je me verrais montrer aux élèves qu'on peut multiplier en utilisant des carrées et des petites barres, comme on le faisait anciennement. Et peut-être que les élèves vont mieux comprendre ces anciennes méthodes-là! Qu'ils appliquent ça ou qu'ils appliquent la calculatrice qu'on fait aujourd'hui, ou une multiplication croisée, ça revient au même point.

Mais, comme pour Josie, il semble que cet avantage soit plutôt ponctuel, dans le sens qu'elle le voit plus comme un aspect qui vient bonifier son enseignement et non un aspect central de sa formation mathématique.

4.7.1.2 Les mathématiques avancées pour voir plus loin

Talia réalise qu'il faut en savoir plus que les élèves, au cas où un élève poserait une question qui va au-delà du programme d'études. Elle pense que si elle n'est pas capable de répondre à toutes les questions de ses élèves, alors elle perdra, d'une certaine façon, sa crédibilité. Un avantage de sa formation en mathématiques est qu'elle lui permet de voir « plus loin » et d'en connaître plus que ses élèves. Dans cet ordre d'idée, elle trouve le cours d'analyse mathématique utile puisqu'il revoit des notions qu'elle enseignera au secondaire, telles que les limites, les suites géométriques et les séries. Le cours d'histoire des mathématiques est aussi utile, par exemple, puisqu'il lui a permis de voir d'où venait le théorème de Pythagore. Ainsi, les cours significatifs pour Talia sont ceux qui touchent directement les contenus du secondaire et qui lui permettent de mieux les comprendre et non ceux qui sont plus avancés et qu'elle juge « inutiles » pour sa préparation.

Talia est convaincue qu'elle doit comprendre les contenus du secondaire « plus loin » que ses élèves. Le « plus loin » qu'elle a vécu dans ses cours de mathématiques à l'université consiste à partir des contenus liés au secondaire pour avancer vers de nouvelles mathématiques. Ayant ainsi vu « plus loin », elle se sent mieux équipée pour répondre à certaines questions plus avancées des élèves. Toutefois, les tâches proposées en entrevue vont faire émerger chez elle l'idée qu'il existe une autre sorte de « plus loin », qui consiste à scruter en profondeur les contenus et les procédures mathématiques du secondaire pour comprendre leur sens, leur signification. Confrontée à cette réalité des tâches qui, pour elle, collent à la réalité du secondaire, elle exprime alors le besoin de réfléchir et de se questionner sur les mathématiques du secondaire, de mieux les comprendre et d'aller, dans ce sens, « plus loin ».

4.7.2 Les tâches

Dans les trois tâches, Talia reste un peu surprise devant les questions et commentaires des élèves qui cherchent à comprendre le pourquoi derrière certaines procédures. Talia aimerait avoir d'autres outils pour mieux répondre à ces questions et ainsi comprendre plus en profondeur les mathématiques du secondaire. La tâche Logarithme exemplifie son questionnement et son besoin de voir « plus loin ».

Tâche Logarithmes. Dans cette tâche, Talia voit rapidement que transformer l'équation initiale ($2\log_3(2x + 10) = 6$) en une équation du deuxième degré ($\log_3(2x + 10)^2 = 6$) ajoute la deuxième solution -37/2 : « C'est donc le carré qui influence tout, parce que ça devient une équation quadratique du 2^e degré. » Ceci pousse Talia à se questionner, puisque selon les lois des logarithmes, ces équations sont équivalentes et devraient donc avoir les mêmes solutions : « Dans tes lois tu as le droit, c'est la même chose. Mais là je questionne les lois, ce n'est pas mieux si ça fonctionne pas toujours (rires). » Face à cette question d'élève et à son propre questionnement subséquent sur les lois des logarithmes, Talia ne sait pas vraiment ce qu'elle répondrait. Puis, elle explique que même si elle travaille les logarithmes dans certains cours de mathématiques avancées, elle n'a pas vraiment été amenée à questionner les lois, du moins pas de cette manière-là. Bref, elle ne sait pas trop quoi répondre à l'élève dans cette tâche et sent le besoin d'être mieux préparée à ce type de questionnement sur le « pourquoi », sur le sens des lois et des procédures. Elle veut voir « plus loin », plus en profondeur.

Les trois tâches suscitent chez Talia une réflexion sur sa formation en mathématiques avancées pour sa préparation à l'enseignement et un besoin de travailler davantage les contenus mathématiques du secondaire comme on les retrouve dans celles-ci. Ceci transparait dans l'exemple ci-haut, dans lequel Talia est consciente qu'elle a travaillé les logarithmes dans ses cours de mathématiques avancées, mais réalise aussi que la façon dont elle les a travaillés ne l'aide pas nécessairement à comprendre ce concept plus en profondeur et ne la prépare pas nécessairement à l'enseigner au secondaire. D'une certaine façon, les tâches aident Talia à voir ce qu'elle doit savoir « de plus » que ses élèves.

> T : Non, c'était intrigant tes questions de mathématiques. Je te jure je vais rêver à ça ce soir! Peut-être bien faire un peu de recherche, ce sont de bonnes questions.

4.7.3 Propos suivant la résolution des tâches

4.7.3.1 Un besoin de formation sur les contenus mathématiques du secondaire

Au retour des tâches, Talia discute d'un besoin de formation qu'elle ressent à l'égard des contenus mathématiques du secondaire. Pour Talia, un désavantage de sa formation mathématique universitaire est qu'elle ne la prépare pas à répondre aux questions sur le sens et la signification des concepts et procédures mathématiques du secondaire. Elle souligne que des questions comme celles dans les tâches vont « inévitablement » survenir dans sa classe, mais qu'elle n'a pas été formée à y répondre. Ainsi, Talia aimerait scruter et mieux comprendre le sens derrière les mathématiques du secondaire et aller « plus loin » en ce sens, c'est-à-dire qu'elle souhaiterait dans sa formation mathématique qu'on la questionne comme elle a été questionnée dans les tâches, afin qu'elle puisse mieux comprendre ces contenus du secondaire et en même temps apprendre à « jouer » avec les mathématiques pour être capable de se débrouiller si un élève pose une question de ce type. Sur le moment, elle ne sait pas quoi répondre à l'élève quant au sens de la procédure, ni vraiment comment le creuser pour arriver à mieux le comprendre. Bref, elle se sent sans outil et elle aimerait être poussée à réfléchir sur les concepts du secondaire dans sa formation mathématique universitaire, ce qui l'aiderait à mieux les comprendre elle-même et ainsi à mieux aider ses élèves.

4.7.4 Retour sur le cas de Talia

Talia voit des avantages dans sa formation en mathématiques avancées, comme le fait qu'elle lui a permis de développer une vision plus historique et évolutive des mathématiques, tout particulièrement à travers le cours d'histoire des mathématiques. Un autre avantage provient des cours de mathématiques avancées qui travaillent certains concepts du secondaire et lui permettent ainsi d'en connaître « plus » que ses élèves. Pour elle, ce « plus » l'aidera à répondre aux questions avancées des élèves. Toutefois, les tâches l'amènent à nuancer ce propos. Les tâches initient Talia à une autre sorte de « plus loin ». C'est ainsi que Talia se demande en quoi les enseignants doivent en savoir « plus » que leurs élèves. Initialement, elle croyait que les cours de mathématiques avancées répondaient à ce besoin d'en savoir plus, puisqu'il s'agit des mathématiques plus avancées. Toutefois, les tâches lui permettent de voir qu'il existe une autre sorte de « plus loin » en mathématiques, un « plus loin » différent de ce qu'elle étudie dans sa formation en mathématiques avancées, soit celui de connaître les mathématiques du secondaire plus en profondeur en les décompressant pour mieux comprendre leur sens, leur signification. Talia voit que ce « plus loin » est indispensable à sa pratique future de classe. C'est ainsi que Talia sent le besoin de travailler plus en profondeur le sens des concepts mathématiques du secondaire.

4.8 Cas 7 : Gilles (4^{e} année)

Gilles est en quatrième année à l'université (sur cinq) et donc bien avancé dans sa formation disciplinaire en mathématiques et dans sa formation en éducation. Tout au long de l'entrevue, Gilles met l'accent sur les apports positifs de sa formation en mathématiques avancées. Par exemple, il parle de l'avantage des cours qui travaillent le sens derrière certains concepts du secondaire et aussi de la confiance qu'il développe au fur et à mesure de son cheminement dans sa formation en mathématiques avancées (parce que les mathématiques du secondaire deviennent de plus en plus faciles). Les tâches lui permettent de préciser et de nuancer son discours, ce qui (lui) donne une meilleure idée de son vécu en mathématiques avancées.

Voici d'abord quatre aspects significatifs de sa formation en mathématiques avancées pour sa préparation à l'enseignement des mathématiques du secondaire, suivis de son travail sur les tâches et les nuances qu'elles déclenchent.

4.8.1 Réponses aux questions d'entrevue

Comme dans les études d'Even (2011) et de Zazkis et Leikin (2010), Gilles voit deux types de réinvestissements de sa formation en mathématiques avancées pour sa pratique de classe future, soit un réinvestissement des contenus et un réinvestissement d'aspects métamathématiques. Lorsqu'il s'agit pour lui d'un réinvestissement des contenus, il ne s'agit pas des contenus des mathématiques avancées, mais plutôt des contenus mathématiques du secondaire qui sont travaillés d'une autre façon dans ses cours de mathématiques avancées. En ce qui a trait au réinvestissement d'aspects métamathématiques, Gilles trouve, de façon générale, que sa formation mathématique lui donne confiance et lui permet de voir plus de liens entre les mathématiques et la vie réelle.

4.8.1.1 Réinvestissements mathématiques : les cours de mathématiques avancées qui retravaillent des concepts du secondaire, pour comprendre *pourquoi*

Comme ce fut le cas pour les autres futurs enseignants, Gilles trouve que les cours de mathématiques qui retravaillent certains concepts précédemment vus à l'école secondaire sont utiles pour sa préparation à l'enseignement des mathématiques du secondaire. Il donne quelques exemples, soit le cours d'histoire des mathématiques, le cours d'algèbre matricielle appliquée et les cours d'analyse de première année. Ces cours sont utiles à sa préparation, car selon lui ils permettent de voir ces mathématiques plus en profondeur et de mieux les comprendre. Par exemple, dans le cours d'histoire des mathématiques, il a compris le « pourquoi » derrière plusieurs théorèmes/procédures/concepts mathématiques, comme le théorème de Pythagore.

> G : Par exemple, le théorème de Pythagore, tout le monde sait que c'est $a^2 + b^2 = c^2$. On le savait parce que quelqu'un nous avait dit que c'était ça, mais on ne savait pas pourquoi c'était ça. Tandis que dans le cours on a vraiment démontré la preuve. Alors, c'est une réalité $a^2 + b^2 = c^2$!

Pour Gilles, si un élève lui pose une question sur le sens d'un concept, alors il pourra lui expliquer pourquoi en lui montrant une telle preuve. À noter que ce cours est significatif pour lui non parce qu'il ajoute des éléments historiques intéressants à la salle de classe, comme c'est le cas pour Alexa, Chloé et Talia, mais parce qu'il lui permet à lui, comme apprenant, de mieux comprendre le sens derrière les mathématiques en jeu. Il croit aussi que cela va aider ses élèves à mieux comprendre. Il s'agit ici, d'une certaine façon, d'un réinvestissement des contenus des cours de mathématiques avancées dans sa classe du secondaire, même s'il ne s'agit pas de contenus en mathématiques avancées, mais de contenus déjà travaillés au secondaire. Néanmoins, plus tard dans les tâches Gilles explique que ce ne sont pas tous ses cours de mathématiques avancées qui sont axés sur le sens.

4.8.1.2 Réinvestissements mathématiques : les mathématiques avancées sont difficiles, mais les mathématiques du secondaire deviennent faciles

Pour Gilles, comme pour Chloé, les mathématiques avancées sont tellement difficiles que les mathématiques du secondaire deviennent faciles. Dans ses nombreux cours de mathématiques avancées, le degré de difficulté est élevé et il trouve parfois cela frustrant d'avoir à en faire autant, sachant qu'il ne retravaillera jamais ces notions au secondaire : « C'est enrageant dans un sens des fois. Quand c'est difficile, tu te dis : Je ne vais jamais enseigner ça de ma vie! » Malgré ceci, il croit les mathématiques avancées quand même pertinentes pour sa préparation à l'enseignement puisqu'elles sont pour lui une occasion de développer sa logique, en plus de rendre les mathématiques du secondaire faciles. Ceci le rend confiant et compétent dans ses connaissances mathématiques du secondaire et dans son enseignement.

> G : Tu travailles à un niveau tellement élevé et que tu retombes à un niveau de base, ce qui fait en sorte que tu es plus prêt à enseigner, tu te sens beaucoup plus confiant. Parce que si je n'étais pas allé à l'université, puis j'avais seulement arrêté au secondaire et j'avais seulement essayé de répéter et d'enseigner ce que j'ai appris, j'aurais trouvé ça dur. Mais là, étant donné que j'ai été à l'université et que j'ai vraiment vécu ce que c'était, des difficultés, et que je retombe à un niveau de base et bien c'est plus facile. Dans ce sens-là, oui je crois que c'est utile.

Étant plus confiant dans ses connaissances mathématiques du secondaire, Gilles se sent confiant à les enseigner. Il ne précise toutefois pas comment passer au travers d'une formation en mathématiques avancées l'aide à être plus confortable avec les mathématiques du secondaire, ni en quoi les mathématiques du secondaire sont devenues plus faciles. Son travail sur les tâches, décrit plus bas, éclaire toutefois à ce sujet.

4.8.1.3 Réinvestissements mathématiques : des applications à la vie réelle

Pour Gilles, certains cours de mathématiques avancées lui montrent comment les mathématiques sont applicables à la vie réelle. Il donne l'exemple de son professeur de matrices, qui a mentionné que les matrices pouvaient être utiles dans la construction d'un budget. Ou encore, dans son cours d'analyse numérique qu'il suit avec les futurs ingénieurs, son professeur a fait le lien entre une formule mathématique et la construction d'un pont solide. Ces cours lui donnent une idée de ce à quoi peuvent servir les mathématiques avancées dans différents domaines, donc si un élève lui demande à quoi servent les mathématiques, il en a « au moins une petite idée ».

De plus, dans les cours de mathématiques avancées de niveau 2^e^, 3^e^ et 4^e^ année, Gilles a eu besoin de certaines notions mathématiques vues dans les cours de mathématiques avancées préalables à ces derniers. Par exemple, dans son cours d'analyse mathématique de deuxième année, il a eu besoin des identités trigonométriques vues dans son cours d'analyse mathématique de première année. Ou encore, il utilise les dérivées et les intégrales vues dans ses cours d'analyse de première année dans une grande partie de ses cours de mathématiques avancées. Ainsi, à l'intérieur de ses cours de mathématiques avancées de 2^e^, 3^e^ et 4^e^ année, Gilles a dû retourner dans ses manuels de mathématiques ou rencontrer ses professeurs pour se rappeler de la matière. De cette façon, il est « plus amené à penser » à l'université, car il doit faire des retours en arrière et des liens entre les concepts. Pour lui, ceci différencie les mathématiques avancées des mathématiques du secondaire, dont les concepts sont enseignés de façon séparée ou fragmentée.

> G : [Au secondaire] l'enseignant te donne des notes sur telle partie de la matière et tout de suite après il donne les problèmes pour pratiquer. Il suffit de prendre les problèmes et appliquer ce que l'enseignant vient de faire.

Ainsi, un apprentissage significatif que Gilles soutire indirectement de ses expériences en mathématiques avancées est l'importance de retravailler les concepts mathématiques à plusieurs occasions et non seulement lorsqu'ils viennent d'être introduits en classe. D'une certaine façon, la distinction que Gilles fait ici se situe entre *réfléchir* et *reproduire*. À l'université, il a dû réfléchir et retourner à des concepts vus préalablement, alors qu'au secondaire, pour lui, il ne s'agissait que de reproduire la procédure fournie par l'enseignant. Gilles se demande toutefois comment amener les élèves dans une classe à réfléchir au lieu de reproduire.

> G : Sûrement, je pense que l'erreur qu'on fait souvent, c'est juste de, *c'est certain que ce serait difficile de faire autrement*, mais c'est qu'on présente la matière et on donne des devoirs en lien avec la matière qu'on vient juste d'enseigner. L'élève sait exactement quoi faire.

Gilles voit la pertinence de retravailler les concepts dans un autre contexte, mais il ne sait pas trop comment s'y prendre pour faire autrement que l'enseignement traditionnel qu'il a lui-même vécu. Bref, sa formation en mathématiques avancées l'a initié à une culture mathématique où les concepts sont reliés et retravaillés à différents moments et dans différents contextes, mais il ne sait pas trop ce que ceci veut dire pour sa pratique de classe. D'une certaine façon, il s'agit ici, pour lui, d'une rupture à l'inverse, selon laquelle les mathématiques avancées l'ont forcé à faire des liens entre les concepts mathématiques, alors qu'au secondaire tout est fragmenté. Pour lui, ces liens sont un avantage et il aimerait en faire dans son enseignement, mais il ne sait pas trop comment s'y prendre.

4.8.2 Les tâches

Les tâches ont amené Gilles à se questionner sur le sens de certaines procédures utilisées dans les cours de mathématiques au secondaire. Ce questionnement est nouveau pour lui : il ne s'est jamais posé de telles questions sur le sens des mathématiques du secondaire avant, même si dans ses cours de mathématiques avancées il a retravaillé certains de ces contenus. N'étant pas habitué à ce type de question, il éprouve de la difficulté à y répondre. Les tâches Système d'équations et Logarithmes permettent d'exemplifier ceci.

Tâche Système d'équations. De prime abord, en faisant face à la tâche et à la question de l'élève qui veut comprendre le sens derrière la méthode de réduction, Gilles explique que ses cours de mathématiques avancées, même ceux qui ont retravaillé les systèmes d'équations, ne l'aident pas. Dans ces cours, on ne parle pas du sens, l'accent étant plutôt mis sur les différents procédures et algorithmes à connaître : « On peut le faire par substitution, par réduction, etc., il y a plusieurs méthodes, mais ils ne te disent pas... Il y a jamais un enseignant qui a posé une question "pourquoi que tu ne peux pas faire ça". » Quoique certains cours de mathématiques avancées, tel que son cours histoire des mathématiques, lui permettent de mieux comprendre le sens des concepts, Gilles trouve qu'une bonne partie des cours de mathématiques avancées ne sont pas axés sur le sens. Ceci est différent de ce qu'il évoquait au début de l'entrevue, lorsqu'il disait de façon générale que les cours de mathématiques revoyant des concepts du secondaire sont utiles pour sa préparation à l'enseignement, car ils permettent de voir ces concepts plus en profondeur et de comprendre le pourquoi sous-jacent. Il nuance ces propos ici, en spécifiant que d'autres cours de mathématiques avancées (autres que le cours d'histoire des mathématiques) retravaillent les contenus du secondaire, sans pour autant creuser les concepts pour mieux comprendre leur signification.

Tâche Logarithmes. Dans la tâche des logarithmes, Gilles se questionne sur la signification d'une loi des logarithmes, soit $N\text{Log}_a M = \text{Log}_a M^n$. À travers ce questionnement, qui est nouveau pour lui, il ne trouve pas que ses cours de mathématiques l'ont aidé à comprendre cette tâche. Il précise qu'il a vu les logarithmes de façon plus poussée dans ses cours de mathématiques avancées, dans le sens qu'il a travaillé sur plus d'équations logarithmiques, mais il ne se souvient pas d'avoir travaillé sur des questions comme ça, sur le pourquoi sous-jacent. Il s'agit, en mathématiques avancées, d'un autre type de travail que celui retrouvé dans les tâches, mais sur les mêmes contenus.

Il semble important de noter que malgré les obstacles et les nouveaux questionnements survenus lors des tâches, Gilles reste satisfait en général de sa formation en mathématiques avancées pour le préparer à enseigner les mathématiques du secondaire. Même si Gilles n'a pas réussi à donner du sens aux procédures mathématiques dans les tâches ou encore à les résoudre autrement, il peut facilement les résoudre avec la procédure prescrite (par exemple, la méthode de réduction dans la tâche système d'équations) ou les lois (par exemple, les lois des logarithmes dans la tâche Logarithme). C'est ce qui est important pour lui, soit de respecter les lois mathématiques. En d'autres mots, Gilles n'est pas « expert » des mathématiques qu'il va enseigner, même que dans les tâches il ne se rend pas vraiment compte à quel point il a de la difficulté à donner un sens. Mais, il a confiance. Sa formation en mathématiques avancées lui donne confiance (car les mathématiques du secondaire sont selon lui maintenant devenus faciles à résoudre), et ce n'est pas rien. Ainsi, même s'il explique que d'aller à l'université n'aide pas avec ce type de tâches, car dans les cours de mathématiques avancées on ne parle pas vraiment de la signification derrière les concepts mathématiques du secondaire, ceci ne semble pas le préoccuper et il reste satisfait de sa formation. En ce sens, Gilles ne vit pas de rupture entre sa formation en mathématiques avancées et sa préparation à l'enseignement des mathématiques au secondaire, malgré ses propos émis en ce sens au cours des tâches.

Gilles dit qu'après avoir vécu des cours de mathématiques avancées avec un haut niveau de difficulté, les mathématiques du secondaire sont maintenant faciles; il explique que lors de son stage en 9^e année il a pu répondre à toutes les questions rapidement. Ceci lui donne confiance. Toutefois, il faut souligner qu'il a eu de la difficulté à répondre aux tâches et à leur donner un sens.

4.8.3 Retour sur le cas de Gilles

Dans ses expériences en mathématiques avancées, Gilles vit certaines frustrations à l'égard du degré de difficulté élevé de ses cours et du fait qu'il n'enseignera pas la plupart de ces contenus dans ses classes au secondaire. Malgré ceci, il voit plusieurs avantages à ses expériences en mathématiques avancées. D'abord, les contenus scolaires sont maintenant beaucoup plus faciles pour lui (en comparaison avec les mathématiques avancées qu'il étudie à l'université), ce qui lui donne confiance quant à ses connaissances mathématiques du secondaire. De plus, certains cours qui retravaillent explicitement les concepts mathématiques du secondaire, comme le cours d'histoire des mathématiques, lui ont permis de mieux comprendre la signification de certains concepts et procédures mathématiques. Toutefois, comme il le précise suite à la tâche Système d'équations, ce ne sont pas tous les cours de mathématiques avancées qui retravaillent certains concepts du secondaire qui sont axés sur leur sens et donc qui lui permettent de mieux comprendre le pourquoi sous-jacent de ces concepts et procédures. Dans un autre ordre d'idées, Gilles souligne que certains cours de mathématiques appliquées lui ont permis de faire des liens entre les mathématiques appliquées et la vie réelle. Enfin, sa formation en mathématiques avancées l'a initié à une culture mathématique où les concepts sont retravaillés à différents moments et dans différents contextes. Gilles aime cette idée d'avoir besoin d'un concept vu préalablement pour résoudre un problème nouveau dans un autre contexte, au lieu de demander à l'élève de simplement répéter une procédure qui vient de lui être enseignée. Or, il ne sait pas vraiment comment ceci fonctionnerait dans une salle de classe. Un écart transparait dans le vécu de Gilles, où d'un côté dans son stage en mathématiques de 9e année il trouvait les mathématiques plus faciles et où de l'autre il trouve les tâches (tirées de classes du secondaire) difficiles. Ceci rappelle les propos de Proulx (2010), qui suggère que les futurs enseignants passant par une formation en mathématiques avancées « considèrent souvent, au premier coup d'œil, les concepts mathématiques développés au secondaire comme étant faciles et non problématiques conceptuellement » (p. 131). Les tâches jouent ici un rôle important, puisqu'elles confrontent Gilles au fait que les mathématiques du secondaire ne sont pas si faciles. Ceci ne préoccupe pas Gilles toutefois, qui reste en général satisfait de sa formation.

4.9 Tableau synthèse des sept cas

Pour donner une vue d'ensemble des vécus des futurs enseignants, et en même temps faire ressortir la diversité de leurs expériences, voici un tableau synthèse.

Chloé (2e année)	• Les cours de mathématiques avancées qui reprennent les contenus du secondaire l'aident à mieux comprendre ces contenus mathématiques, ce qui lui donne confiance pour son enseignement. • Bien que plusieurs cours soient non reliés à sa pratique, elle sent que d'avoir étudié des mathématiques plus avancées et plus difficiles rendent les mathématiques du secondaire faciles, ce qui lui donne confiance pour aller les enseigner. • Chloé est toutefois incapable de donner des exemples concrets sur ce qu'elle avance.
Alexa (3e année)	Les tâches évoquent chez Alexa trois besoins de formation. • Pour elle, il ne s'agit pas des « bonnes » mathématiques dans sa formation en mathématiques avancées. Alexa veut creuser et mieux comprendre les mathématiques *du secondaire*, tel dans les tâches. • Pour elle, les contenus en mathématiques avancées sont déconnectés des mathématiques du secondaire. Si les cours de mathématiques sont obligatoires à sa préparation à l'enseignement, il faut faire des liens explicites entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire pour aider le futur enseignant à les percevoir. • Alexa connait les mathématiques avancées et connait des stratégies d'enseignement, mais ne sait pas comment les mettre ensemble. En

	ce sens, elle vit une rupture entre sa formation disciplinaire et sa formation en éducation et sent le besoin de faire un pont entre elles, surtout au niveau de la façon d'enseigner.
Josie (4e année)	• Elle ne sent pas qu'on s'adresse à elle comme future enseignante dans ses cours de mathématiques avancées. Sa formation mathématique est plus pour elle et non pour son enseignement. • Elle vit une rupture quant à la façon d'enseigner les mathématiques, entre sa formation en éducation (la manière dont on lui suggère d'enseigner) et sa formation en mathématiques avancées (l'enseignement traditionnel qu'elle vit). Elle sent le besoin de suivre plus de cours de didactique pour faire le pont entre ses deux formations. • Elle éprouve un *manque* de confiance à l'égard de ses compréhensions des mathématiques du secondaire et sent le besoin de travailler les mathématiques du secondaire plus en profondeur (le pourquoi) pour pouvoir les enseigner.
Rémi (5e année)	• Les cours significatifs pour Rémi sont ceux qui l'aident à donner un sens aux mathématiques. Il approfondit ses compréhensions des mathématiques du secondaire à travers les cours de mathématiques avancées qui retravaillaient les concepts du secondaire. Et, au-delà des contenus, sa formation en mathématiques avancées lui a permis d'apprendre à apprendre des nouvelles mathématiques, c'est-à-dire qu'il a développé son raisonnement mathématique au point de pouvoir maintenant apprendre à se débrouiller pour faire des nouvelles mathématiques et les enseigner. Tout cela lui donne confiance. • Sa formation en mathématiques universitaire lui donne des outils pour sa pratique future, comme des anecdotes historiques ou encore une banque de problèmes plus difficiles. • Rémi aimerait faire davantage de liens entre les mathématiques et la vie réelle dans sa formation disciplinaire, pour ainsi être mieux préparé à en faire dans sa propre classe.
Monic (4e année)	• Elle trouve que les mathématiques avancées sont compressées et le sens sous-jacent n'est pas travaillé. Plus elle suit de cours de mathématiques avancées à l'université, plus elle se sent s'éloigner des mathématiques du secondaire, au point de craindre être déconnectée des mathématiques du secondaire et de ne plus être au

	niveau de ses élèves. • Deux effets positifs ressortent de sa formation en mathématiques avancées : les cours qui revoient les concepts du secondaire (telles que les matrices) l'aident à mieux comprendre et à mieux expliquer les *procédures* à ses élèves du secondaire (mais non le sens sous-jacent) et sa formation lui donne une vision panoramique des mathématiques avancées, qu'elle peut à son tour offrir à ses élèves à travers, entre autres, des « fun facts ».
Talia (4e année)	• Elle trouve les cours de mathématiques avancées qui retravaillent les concepts du secondaire utiles pour sa préparation à l'enseignement, car ils lui permettent d'en savoir « plus » que ses élèves. • Les tâches l'initient à un autre « plus loin » qu'elle trouve indispensable à sa formation, soit de comprendre les concepts du secondaire plus en profondeur pour faire ressortir et travailler leur sens. Ceci l'amène à exprimer des besoins de formation, soit de réfléchir sur des conceptions d'élèves pour savoir comment y remédier et de décompresser les mathématiques du secondaire pour mieux les comprendre.
Gilles (4e année)	• Les mathématiques avancées sont difficiles (ce qui s'avère frustrant pour lui, car il ne reverra jamais ces contenus-là dans son enseignement), mais elles rendent les mathématiques du secondaire plus faciles, ce qui lui donne confiance. • Les tâches confrontent Gilles à sa perception que les mathématiques du secondaire sont plus faciles. Il se questionne sur le sens de certaines procédures mathématiques et n'arrive pas à leur donner un sens. Malgré ceci, il reste satisfait de sa formation en mathématiques avancées.

CHAPITRE V

DISCUSSION DES RÉSULTATS

Les modèles usuels de formation en mathématiques (avancées) pour préparer les futurs enseignants de mathématiques du secondaire ont été questionnés par plusieurs chercheurs et formateurs (voir, entre autres, Ball, 1990; Bednarz, 2010; Even, 2011; Moreira et David, 2005, 2008; Proulx et Bednarz, 2010; Tanguay, 2012; Usiskin, 2001; Zazkis et Leikin, 2010). Ce questionnement a amené ces derniers, entre autres, à analyser les relations entre les mathématiques avancées et les mathématiques enseignées au secondaire (Moreira et David, 2005, 2008), à réfléchir sur la façon de mieux articuler les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire (Usiskin, 2001; Hache, Proulx et Sagayar, 2009; Tanguay, 2012), à aller voir le type de compréhension mathématique que les futurs enseignants amènent dans leur enseignement (Ball, 1990), à théoriser sur les effets d'une formation en mathématiques avancées sur l'enseignement des mathématiques au secondaire (Even, 2011; Proulx et Bednarz, 2010; Zazkis et Leikin, 2010). À travers ces travaux ressortent divers réinvestissements et ruptures entre la formation en mathématiques avancées et les mathématiques mobilisées par l'enseignant dans sa classe du secondaire. Cela dit, dans ces travaux, ces effets sont vus à travers l'œil du chercheur et du formateur, qui peut être fort différent de l'œil du formé, c'est-à-dire de celui qui « vit » réellement cette formation. En allant à la rencontre du formé, de ses expériences, de son vécu et de ses impressions, j'ai pu accéder à une compréhension de l'intérieur, à ce que le formé vit durant sa formation. Ces données et analyses ont le potentiel de contribuer à la compréhension des questions reliées à la préparation mathématique des futurs enseignants du secondaire, en offrant une perspective additionnelle sur celles-ci. Dans ce but, dans ce chapitre, je jumelle et compare mes résultats avec cette littérature en didactique des mathématiques sur les questions de formation mathématique des enseignants.

Mes données sont regardées à travers ma grille d'analyse initiale (voir section 4.1), c'est-à-dire que je regarde chacun des aspects de ma grille en fonction des analyses conduites au Chapitre IV, pour voir si ces derniers sont cohérents avec la littérature, s'ils en diffèrent ou s'ils permettent d'ajouter des éléments à cette dernière. Ce faisant, j'approfondis en retour les thèmes de ma grille avec ces résultats[26].

Comme premier thème, j'aborde les réinvestissements sur le plan des contenus, suivi dans un deuxième temps des réinvestissements métamathématiques. Dans un troisième temps, j'aborde les questions de ruptures pour enfin discuter de l'impact de la formation mathématique sur la confiance des futurs enseignants.

5.1 Réinvestissements sur le plan des contenus

À ma connaissance, peu de chercheurs ou formateurs ont parlé en termes de réinvestissement des contenus en mathématiques avancées dans la salle de classe du secondaire. Parmi eux, on retrouve Zazkis et Leikin (2010) et Even (2011), qui se sont intéressés, à travers leurs études, à savoir entre autres quels contenus en mathématiques avancées étaient essentiels pour les enseignants ou encore quels contenus en mathématiques avancées les enseignants réinvestissaient dans leurs salles de classe au secondaire. Les enseignants de leurs études soulignent des contenus telles que les dérivées, les limites, les asymptotes, les probabilités et les statistiques. Zazkis et Leikin (2010) remarquent que ces contenus, souvent tirés des cours de calculs ou d'analyses, sont présents dans les programmes (de la fin) du secondaire. Le cours d'histoire des mathématiques ressort aussi comme pertinent pour les enseignants de leurs études, car il donne des outils et une motivation pour dédier du temps à l'histoire des mathématiques en classe, par exemple en racontant des histoires sur des mathématiciens célèbres en lien avec les concepts du secondaire. Pour les

---

[26] Je fais une parenthèse ici sur le rôle des tâches qui ne sont pas sans effet sur les résultats de recherche obtenus. Les tâches ont eu un rôle de déclencheur dans les discussions en entrevue. Dans la plupart des cas, elles ont permis d'avoir un accès plus approfondi sur la vision qu'ont les futurs enseignants de leur formation et de leurs expériences. Dans certains cas, les tâches ont même permis de faire ressortir de nouvelles idées ou de modifier le regard sur la formation en mathématiques avancées des futurs enseignants. Je pense ici au cas de Talia qui, à travers les tâches, change sa perception de ce qu'il faut savoir « de plus » que les élèves (voir section 4.7.1.2), ce qui n'est pas sans effet sur sa façon de concevoir sa formation disciplinaire.

enseignants de leurs études, ces contenus sont pertinents, voire nécessaires, à leur préparation mathématique. Peu est dit, toutefois, sur les raisons pour lesquelles ces enseignants trouvent ces cours pertinents, et même nécessaires, pour leur préparation mathématique. On y souligne que les mathématiques avancées donnent des idées pour des activités d'enrichissement (Even, 2011), qu'elles permettent de mieux comprendre les mathématiques du secondaire en général (Even, 2011; Zazkis et Leikin, 2010) ou encore qu'elles permettent de faire des liens entre les contenus (entre les contenus du secondaire et entre les contenus du secondaire et les mathématiques avancées) (Zazkis et Leikin, 2010). Gourdeau et Hodgson (dans Gourdeau et Proulx, 2012) et Hache, Proulx et Sagayar (2009) parlent de l'importance de faire des liens explicites à la formation entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire. Ces idées restent toutefois floues pour les enseignants des études de Zazkis et Leikin (2010) et d'Even (2011) et rien n'est vraiment dit sur ce que ces cours leur permettent de mieux comprendre. On en sait donc peu sur la façon dont la formation mathématique les prépare aux mathématiques qui seront mobilisées dans leurs classes du secondaire.

Tanguay (2012), formateur et professeur en didactique des mathématiques, offre une raison pour laquelle les cours de mathématiques avancées ont été pertinents pour lui comme étudiant en mathématiques. Il explique qu'elles lui ont permis de comprendre plus en profondeur le sens et le pourquoi des mathématiques du secondaire. Les mathématiques avancées ont induit chez lui une « clarification des contenus mathématiques plus "bas" dans l'édifice » (p. 133). Dans son cas, les mathématiques avancées lui ont permis de mieux comprendre les mathématiques introduites au secondaire et donc l'ont mieux outillé pour expliquer des règles vues au secondaire. Il donne l'exemple suivant :

> « Comme la plupart, j'ai été instruit au secondaire des arguments standards par lesquels on justifie cette règle : régularité dans des suites, conservation de la règle $a^n \times a^m = a^{n+m}$ pour n et m entiers, etc. Mais ce n'est véritablement qu'à l'université, à travers l'étude des structures algébriques et de l'isomorphisme entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ réalisé par toute exponentielle de base $a > 0$, que j'ai eu la conviction d'appréhender cette règle dans toute sa profondeur et de comprendre véritablement l'identité des structures en cause. » (p. 133)

Pour Tanguay (2012), ce sont les significations sous-jacentes des règles mathématiques qu'il réinvestit de sa formation en mathématiques avancées dans un contexte de mathématiques du secondaire.

Par ailleurs, Proulx (2010), dans son récit de formateur, amène aussi cette idée de réinvestissement des contenus mathématiques vus à l'université par les futurs enseignants dans leur pratique enseignante au secondaire. Il présente toutefois un autre côté de la médaille, un côté moins positif. Lorsque les futurs enseignants résolvent des problèmes ou expliquent leurs raisonnements aux élèves en classe, ils font parfois référence à des procédures et notions mathématiques qui ne sont pas toujours en lien avec les mathématiques du curriculum scolaire (par exemple, pour résoudre des problèmes simples, les futurs enseignants réfèrent aux notions de calculs différentiel et intégral ou aux matrices, alors que les élèves du secondaire concernés n'ont pas encore vu ces contenus). Le réinvestissement des contenus semble alors inadéquat pour l'explication aux élèves, puisqu'il ne tient pas compte de leurs connaissances antérieures, de leur niveau d'étude. Néanmoins, les procédures avancées peuvent être utiles pour l'enseignant, comme le partage une enseignante dans l'étude d'Even (2011). Celle-ci explique qu'elle utilise les procédures avancées dans sa classe, mais seulement pour elle-même, dans le but de s'aider à résoudre un problème plus vite qu'un élève et ainsi être capable de vérifier sa réponse rapidement.

Divers réinvestissements des contenus sont alors possibles, soit les mathématiques avancées permettent de mieux comprendre le sens des mathématiques du secondaire, soit les notions mathématiques avancées sont réinvesties de diverses façons dans le travail en classe de l'enseignant (par exemple, comme activité d'enrichissement pour faire des liens entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire ou comme outil personnel de l'enseignant pour résoudre un problème plus vite qu'un élève). Voyons ce que disent les futurs enseignants de mon étude à ce sujet.

5.1.1 Les expériences des futurs enseignants de mon étude

Les futurs enseignants de ma recherche partagent l'avis des enseignants des études de Zazkis et Leikin (2010) et d'Even (2011), c'est-à-dire que les cours de mathématiques avancées qui revoient les mathématiques du secondaire sont pertinents pour leur préparation à l'enseignement des mathématiques. De plus, malgré le nombre limité d'exemples qu'ils donnent, ils offrent des raisons spécifiques pour lesquelles ils trouvent ces cours pertinents dans leur préparation mathématique. Ceci aide à mieux comprendre ce que peuvent signifier ces réinvestissements. Une première idée qui ressort des réponses des futurs enseignants est que les cours qui revoient certains concepts du secondaire sont utiles, car ils permettent de mieux comprendre les concepts en jeu, comme les dérivées (Chloé, Alexa, Gilles et Rémi), les matrices (Monic), les limites (Talia), les suites et séries (Talia) ou le théorème de Pythagore par le cours d'histoire des mathématiques (Gilles). Cette idée de mieux comprendre est très large, mais se précise chez certains futurs enseignants. J'offre dans ce qui suit ces exemples plus précis, soit que les cours de mathématiques avancées permettent (1) de mieux comprendre les procédures des mathématiques du secondaire, (2) de mieux comprendre pour cibler les difficultés en lien avec l'apprentissage d'un concept mathématique, (3) de mieux comprendre le pourquoi derrière les mathématiques du secondaire et (4) de leur donner des outils pour leur enseignement. En même temps, ces raisons donnent aussi un aperçu de leur façon de voir la formation et ce qu'ils en retirent.

À travers leur formation en mathématiques avancées, les futurs enseignants disent **développer une maîtrise des procédures** (le « comment faire ») des mathématiques du secondaire. On retrouve ceci lorsque Chloé et Gilles expliquent que les mathématiques du secondaire sont maintenant faciles à comprendre et que les problèmes sont plus faciles à résoudre. Durant leurs stages, ils ont été capables de répondre à toutes les questions des élèves rapidement, car les problèmes mathématiques du secondaire sont devenus pour eux faciles à résoudre. Il en est de même pour les autres futurs enseignants, qui eux aussi sont confortables avec la résolution (le comment) des problèmes mathématiques du secondaire. Monic est tout particulièrement explicite à ce sujet, à savoir que les cours de mathématiques avancées qui revoient des concepts du secondaire lui permettent de maîtriser les procédures introduites au secondaire. Elle donne l'exemple qu'à l'école, elle avait plus ou moins compris comment résoudre une matrice, mais qu'elle a vraiment réussi à maîtriser les procédures pour les résoudre dans son cours d'algèbre matricielle à l'université.

De son côté, Rémi partage que les cours de mathématiques avancées qui revoient les contenus du secondaire lui permettent de prendre le temps de réfléchir à ces contenus et donc de mieux les comprendre. Tout particulièrement, en vivant des difficultés mathématiques à travers ces cours, il a réussi à corriger ses conceptions erronées sur des contenus (de fin) du secondaire, comme les dérivées. Avoir lui-même surpassé ces difficultés l'aide à **cibler en quoi ces notions mathématiques (de fin) du secondaire sont difficiles** et donc à mieux voir où ses futurs élèves auraient de la difficulté. Rémi n'avait pas par contre d'exemple précis de ces difficultés ou conceptions qu'il a surmontées. Notons que cette idée n'est pas survenue chez les autres futurs enseignants, même que certains partagent qu'ils aimeraient être davantage capables d'identifier les difficultés des contenus mathématiques du secondaire, mais disent n'avoir reçu aucune formation mathématique à cet égard, mis à part dans leur cours de didactique.

Gilles, de son côté, avance l'idée que tous les cours de mathématiques avancées, tout particulièrement ceux qui travaillent les preuves, permettent de **comprendre le pourquoi** derrière les théorèmes et procédures du secondaire. À ce stade, pour lui, la preuve est en elle-même l'explication du pourquoi. Par exemple, dans son cours d'histoire des mathématiques, il a pu mieux comprendre la signification de certains contenus du secondaire, comme le théorème de Pythagore, grâce à diverses preuves explorées dans le cours. Cela dit, il change d'idée au cours de la résolution des trois tâches en entrevue. Certes, selon lui, son cours d'histoire des mathématiques lui a permis de comprendre le pourquoi, de comprendre le sens sous-jacent aux théorèmes et lois mathématiques du secondaire, mais cela est plus ou moins vrai, dira-t-il, pour les autres cours de mathématiques avancées. Même si ces cours contiennent eux aussi des preuves (celles-ci plus formelles), ils n'aident pas Gilles à comprendre en profondeur les notions abordées. Ce changement apparait dans la tâche Système d'équations, pendant laquelle Gilles explique que ses cours de mathématiques avancées, incluant ceux qui ont retravaillé les systèmes d'équations, ne l'aident pas, car ils ne parlent pas du sens et mettent plutôt l'accent sur les différents procédures et algorithmes à connaître. Les autres participants de ma recherche partagent cet avis, c'est-à-dire qu'ils n'explorent pas vraiment le sens (le pourquoi) des mathématiques à l'intérieur de leurs cours de mathématiques avancées[27].

Il est intéressant de noter que le cas de Gilles, qui comprend mieux le pourquoi des procédures du secondaire à l'aide des preuves explorées dans son cours d'histoire des mathématiques, se distingue du cas de Tanguay[28] (2012), qui comprend mieux le sens des mathématiques du secondaire à cause des mathématiques avancées. Dans le cas de Gilles, ce sont les concepts mêmes du secondaire qui sont explorés plus en profondeur (pour comprendre le pourquoi sous-jacent) dans un langage mathématique (symboles, dessins, graphiques) de niveau secondaire, ou même avec un dessin, et non dans un langage formel. Dans le cas de Tanguay, ce sont les notions mathématiques avancées, dans leur forme formelle, qui lui ont permis personnellement de mieux comprendre les contenus du secondaire; c'est lui qui fait les liens entre les contenus avancés et ceux du secondaire et c'est lui qui explique savoir comment transformer les notions avancées dans leur langage formel en une explication non formelle pour les élèves.

Enfin, une quatrième raison pour laquelle les futurs enseignants trouvent pertinents les cours de mathématiques avancées qui retravaillent certains contenus du secondaire est qu'ils leur **donnent des outils** pour leur pratique future de classe. Rémi explique que ces cours lui donnent une banque de problèmes un peu plus difficiles que ceux retrouvés dans les manuels du secondaire et qu'il pense utiliser cette banque pour des activités d'enrichissement ou pour des évaluations formatives/sommatives. Aussi, son cours d'histoire des mathématiques lui donne des anecdotes instructives à raconter pour rendre ses cours de mathématiques plus intéressants. Alexa et Talia ont elles aussi l'intention de raconter à leurs élèves des histoires tirées de leur cours d'histoire des mathématiques. Il y a aussi Monic qui

---

[27] Ce résultat peut de prime abord sembler évident, car l'intention des cours de mathématiques avancées n'est pas d'explorer le pourquoi derrière les mathématiques du secondaire pour mieux comprendre leur sens. Donc, on peut s'attendre à ce que ce ne soit pas ce que les futurs enseignants en retirent. Or, il y a des futurs enseignants, comme Gilles et Chloé, qui expliquent qu'en travaillant des mathématiques avancées ils comprennent mieux les mathématiques du secondaire, que ces dernières deviennent faciles à faire, faciles à résoudre et faciles à expliquer. Cette impression qui existe chez eux de mieux comprendre les contenus du secondaire en faisant des mathématiques avancées est fort intéressante, comme si pour eux « mieux comprendre » et « facile à faire » étaient synonymes.

[28] Notez que, dans son récit réflexif, Tanguay (2012) partage lui aussi son expérience personnelle en tant qu'étudiant de mathématiques.

tire des « fun facts » de son cours de théorie des nombres et qui veut les ramener dans sa classe; les « fun facts » étant des relations amusantes entre les nombres comme une formule pour trouver plusieurs nombres premiers. Sans dire qu'ils sont des techniciens et qu'ils ne feront que transporter ces outils dans leur classe, les futurs enseignants apprécient que leur formation mathématique leur donne des outils « clé en main » qu'ils peuvent réinvestir, à leur façon, dans leur enseignement.

5.1.2 Retour sur les réinvestissements mathématiques : la littérature et mes résultats

De la même façon que les enseignants des études de Zazkis et Leikin (2010) et d'Even (2011), les futurs enseignants de ma recherche trouvent que les cours de mathématiques avancées qui revoient certains concepts du secondaire les aident à mieux comprendre les concepts qu'ils enseigneront. Un nouvel aspect amené par ma recherche est que les futurs enseignants offrent des exemples de comment ils trouvent ces cours pertinents pour leur pratique future. Leur formation disciplinaire leur permet (1) de mieux maîtriser les procédures mathématiques du secondaire, (2) de mieux comprendre pour cibler des difficultés mathématiques derrière des concepts (de fin) du secondaire, (3) de comprendre le pourquoi derrière certaines formules ou méthodes ou encore (4) d'obtenir des outils qu'ils peuvent réutiliser dans leur enseignement.

À noter que ces réinvestissements sur le plan des contenus sont tirés des cours de mathématiques avancées qui retravaillent des concepts mathématiques (de fin) du secondaire. Pour les cours de mathématiques avancées qui vont plus loin que les contenus du curriculum du secondaire, contrairement à Tanguay (2012) pour qui les mathématiques avancées l'ont aidé personnellement à mieux comprendre le sens des mathématiques du secondaire, les futurs enseignants de mon étude ne tirent de ces cours aucun réinvestissement sur le plan des contenus. En fait, les futurs enseignants ne font pas vraiment de liens avec les contenus en mathématiques avancées et ceux du secondaire. Ce manque de liens crée pour eux des ruptures entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire, ruptures sur lesquelles j'élabore plus tard (voir section 5.3.1).

5.2 Réinvestissements *méta*mathématiques

Un deuxième thème pour les réinvestissements des mathématiques avancées pour la préparation mathématique de l'enseignant est celui des réinvestissements métamathématiques. Les recherches de Zazkis et Leikin (2010) et d'Even (2011), ainsi que de Hache, Proulx et Sagayar (2009) et de le collectif de Proulx, Corriveau et Squalli (2012) soulignent des apports de la formation en mathématiques avancées sur le plan des réinvestissements métamathématiques. On parle ici des aspects de niveau « méta », comme la vision des mathématiques et la compréhension de ce que signifie faire des mathématiques. En particulier, on retrouve les réinvestissements suivants : (1) la façon de faire les mathématiques du professeur de mathématiques avancées en salle de classe peut inspirer les enseignants dans leur pratique, (2) les formés font des apprentissages lorsqu'ils vivent des difficultés mathématiques, (3) la formation en mathématiques avancées offre une vision plus large du panorama mathématique, (4) la formation en mathématiques avancées permet de faire des liens entre les mathématiques et la vie réelle et (5) la formation en mathématiques avancées permet d'apprendre à apprendre des nouvelles mathématiques. Ces cinq réinvestissements métamathématiques sont regardés à travers l'apport des données recueillies chez les futurs enseignants de mon étude.

5.2.1 Premier réinvestissement *méta*mathématique : la façon de faire les mathématiques du professeur de mathématique inspire les formés

L'idée de faire faire des mathématiques aux futurs enseignants ressort de la synthèse de Proulx, Corriveau et Squalli (2012) comme une entrée importante pour la formation. Deux intentions ressortent de l'idée de faire faire des mathématiques aux futurs enseignants dans cette synthèse de Proulx, Corriveau et Squalli (2012). Une première intention est de rendre les étudiants fluides en mathématiques et capables de résoudre les divers problèmes mathématiques qu'ils rencontrent. Au-delà des contenus, c'est l'expérience mathématique elle-même qui est recherchée, pour que les futurs enseignants puissent continuer à se former eux-mêmes en mathématiques lorsqu'ils enseigneront. Une deuxième intention est de faire vivre des expériences mathématiques authentiques aux futurs enseignants (et qu'ils en prennent conscience), pour les sensibiliser à l'intérêt de faire vivre des expériences mathématiques à leurs élèves (voir aussi Gourdeau et Proulx, 2012; Hache, Proulx et Sagayar, 2009).

Ces idées font écho aux cours de mathématiques avancées offerts aux enseignants de l'étude d'Even (2011), où l'intention était d'élargir la compréhension mathématique des futurs enseignants et leur vision des mathématiques. Ces cours ont été offerts par des mathématiciens avec l'intention de montrer aux enseignants que les mathématiques sont excitantes et qu'elles évoluent. Ces cours amenaient les enseignants à vouloir eux aussi faire vivre une activité mathématique à leurs élèves. Les enseignants de l'étude d'Even partagent qu'ils veulent amener leurs élèves à se questionner et à réfléchir pour résoudre un problème, comme ils l'ont vécu dans leurs cours de mathématiques avancées, au lieu de donner à leurs élèves une procédure déjà toute faite qu'ils n'ont qu'à reproduire. À ce sujet, voyons ce que les futurs enseignants de mon étude retirent de la façon de faire les mathématiques de leurs professeurs.

5.2.1.1 Les expériences des futurs enseignants de mon étude

Ce réinvestissement n'est pas du même ordre dans mon étude. En fait, il ne s'agit pas du même genre de cours dans les deux cas. Dans mon étude, les futurs enseignants suivent des cours de mathématiques avancées « traditionnels », offerts de façon magistrale (Burton, 2004), où le professeur détient les connaissances et les transmet aux élèves qui prennent des notes et font des exercices par la suite (voir Bauersfeld, 1994; Burton, 2004; Proulx, 2009). D'une certaine façon, les mathématiques sont déjà faites pour eux. Ceci est différent du type d'enseignement qu'ont vécu les enseignants dans l'étude d'Even (2011), qui y ont vécu une certaine activité mathématique. Ainsi, les futurs enseignants de mon étude ne se disent pas inspirés par la façon d'enseigner de leurs professeurs de mathématiques avancées. D'autant plus, les futurs enseignants ne veulent pas (du tout) enseigner au secondaire comme on leur a enseigné les mathématiques à l'université, alors qu'ils étaient assis et prennaient des notes tout au long de leurs cours pendant que le professeur expose des mathématiques toutes faites au tableau. Cette façon de faire les mathématiques dans leurs cours de mathématiques avancées est, pour eux, en rupture avec la façon souhaitée par leur faculté d'éducation d'enseigner les mathématiques en salle de classe (je parle aussi de cet aspect dans la prochaine section sur les ruptures, voir section 5.3.4). Néanmoins, un exemple positif ressort dans mes données, mais à travers un contexte très différent. Il ne s'agit pas d'un contexte de classe, mais d'une interaction personnelle avec le professeur, hors des heures de cours. Josie mentionne avoir été inspirée par la manière dont son professeur de mathématiques répondait à ses questions mathématiques sur un devoir. Ce dernier partait de ce qu'elle avait fait, de sa procédure, pour lui montrer ce qui manquait et lui donner une piste pour continuer. Cette manière de partir des procédures des élèves pour entamer les explications a été inspirante pour Josie, qui aimerait faire de même en répondant aux questions de ses futurs élèves sur la résolution d'un problème.

5.2.1.2 Retour sur le 1er réinvestissement *méta*mathématique : la littérature et mes résultats

Il est intéressant de faire ressortir les différences entre l'étude d'Even (2011) et la mienne à l'égard de ce que les étudiants retirent de la façon d'enseigner de leurs professeurs. Dans l'étude d'Even, le but des cours suivis était de faire vivre une activité mathématique aux étudiants et de leur montrer que les mathématiques évoluent et ne sont pas statiques. Les enseignants étaient alors inspirés à faire vivre une telle activité mathématique à leurs élèves et à leur transmettre, à leur tour, cette vision vivante des mathématiques. Dans mon étude, le type de cours suivi était plutôt traditionnel et le but était d'abord et avant tout (et peut-être uniquement) de transmettre des contenus mathématiques. Les futurs enseignants n'ont pas été inspirés par la façon d'enseigner des professeurs, cette façon traditionnelle de transmettre les contenus étant même pour eux en rupture avec ce qu'on leur suggère de faire dans leur formation en éducation. Toutefois, dans les deux cas, la façon de faire du professeur de mathématiques a influencé la vision de l'enseignement des mathématiques du futur enseignant.

5.2.2 Deuxième réinvestissement *méta*mathématique : les apprentissages des formés lorsqu'ils vivent des difficultés mathématiques

Les enseignants de l'étude d'Even (2011) soulignent qu'ils ont vécu des difficultés dans leurs cours de mathématiques avancées (parfois c'était même la première fois que les mathématiques n'allaient pas de soi pour eux) et que ceci les a sensibilisés aux difficultés et frustrations que vivent leurs propres élèves lorsque ces derniers ne réussissent pas. Un enseignant en particulier explique que lorsque le contenu mathématique est facile pour lui, il lui est alors difficile de comprendre les frustrations de ses élèves. Le sentiment d'incapacité qu'il ressent lorsqu'il fait face à un problème complexe dans ses cours de mathématiques avancées lui rappelle, en tant qu'enseignant, le vécu de ses élèves qui éprouvent des difficultés. Il s'agit ici d'un côté « émotif » que peut évoquer l'apprentissage des mathématiques.

5.2.2.1 Les expériences des futurs enseignants de mon étude

Plusieurs futurs enseignants de mon étude vivent eux aussi des difficultés dans leur cours de mathématiques avancées. De ces difficultés, ils retirent deux apports positifs pour leur pratique future. D'abord, pour Chloé, vivre des difficultés à travers sa formation en mathématiques avancées l'amène à cibler ce qui lui permet de mieux réussir dans ses cours de mathématiques. Par exemple, elle se trouve des « trucs » pour mémoriser les nombreuses formules, par exemple que la formule de l'aire d'un cercle est πr^2 et non $2\pi r$, car l'aire est une surface et donc elle est au carré (elle n'a pas pu toutefois donner d'exemples additionnels de « trucs » tirés de ses cours de mathématiques avancées). Les difficultés mathématiques qu'elle vit lui permettent de cibler ce qui l'aide à réussir et donc ce qui pourra lui servir dans son enseignement lorsque ses élèves vivront des difficultés. Chloé explique aussi qu'à travers sa formation disciplinaire universitaire, les exemples et les dessins donnés par le professeur l'aident à mieux comprendre comment appliquer une formule ou comment utiliser un théorème et elle peut dès lors les utiliser elle aussi. Toutefois, sans les exemples elle se sent un peu perdue à travers les symboles et le formalisme en mathématiques avancées. Les représentations visuelles l'aident aussi, qu'elles soient sous forme de graphique, de tableau ou de schéma, et ce, surtout lorsque des liens explicites sont faits entre cette représentation visuelle et la représentation plus formelle. De cette façon, ses difficultés mathématiques l'éclairent sur certains choix qu'on pourrait dire « didactiques », soit les exemples pour amener les élèves à comprendre, soit l'utilisation d'une illustration ou d'un truc pour les aider à réussir; choix qu'elle pourra faire dans son enseignement.

Pour Rémi, c'est en vivant des difficultés dans les cours de mathématiques avancées qui retravaillent des contenus du secondaire qu'il a réussi à corriger ses conceptions erronées sur des contenus (de fin) du secondaire, c'est-à-dire qu'il a été confronté, à l'université, à certaines conceptions erronées qu'il avait à l'égard des contenus mathématiques du secondaire (comme les dérivées) et qu'il a dû les surpasser. C'est ainsi qu'il a développé de nouvelles (bonnes) conceptions et qu'il a approfondi sa propre compréhension des mathématiques du secondaire. En même temps, surpasser ces obstacles lui a permis de mieux cibler les difficultés conceptuelles liées à ces contenus et ainsi de mieux intervenir en classe si ses élèves possèdent des conceptions semblables. En d'autres mots, comme Rémi est passé par là, il peut mieux comprendre les conceptions des élèves et les aider. Par contre, Rémi n'avait pas d'exemples précis à fournir, laissant floue la façon dont les mathématiques avancées lui ont permis de corriger ses conceptions erronées et la façon dont il pourra réinvestir ceci en salle de classe.

5.2.2.2 Retour sur le 2e réinvestissement *méta*mathématique : la littérature et mes résultats

Ces résultats, tout comme ceux d'Even (2011), permettent de voir que les difficultés mathématiques vécues durant la formation en mathématiques avancées peuvent être pertinentes pour l'enseignement des mathématiques aux élèves. Par leurs expériences en mathématiques avancées, les enseignants de l'étude d'Even sont plus sensibles aux frustrations que vivent les élèves lorsqu'ils ne comprennent pas. Toutefois, les apports qu'en retirent les participants de mon étude sont différents : Chloé apprend ce qui l'aide à mieux réussir en mathématique (trucs, dessins, exemples) et en même temps voit quel type d'explication pourrait aider ses futurs élèves à réussir (trucs, dessins, exemples) et Rémi est sensibilisé aux difficultés mathématiques dans l'apprentissage de certains concepts (de fin) du secondaire.

5.2.3 Troisième réinvestissement *méta*mathématique : le panorama mathématique

Une retombée souvent soulignée de la formation en mathématiques avancées est qu'elle offre au futur enseignant un large éventail sur le plan des mathématiques pour voir et comprendre comment les concepts enseignés au secondaire s'insèrent dans le panorama mathématique (Hache, Proulx et Sagayar, 2009). C'est tout particulièrement le cas pour les enseignants de l'étude de Zazkis et Leikin (2010), qui expliquent que les mathématiques avancées permettent d'obtenir un meilleur portrait du champ mathématique. Savoir ce qui vient après les mathématiques du secondaire leur permet d'élaborer sur le curriculum mathématique du secondaire et de montrer à leurs élèves des liens entre les mathématiques du secondaire et les mathématiques avancées. Les enseignants de l'étude de Zazkis et Leikin

(2010) ne donnent toutefois pas d'exemple précis de ces liens et donc on en sait encore très peu sur ce réinvestissement. Qu'en disent les futurs enseignants de mon étude?

5.2.3.1 Les expériences des futurs enseignants de mon étude

Les divers types de cours en mathématiques avancées permettent aussi aux futurs enseignants de mon étude d'élargir leur vision de ce que sont les mathématiques. C'est un des rôles qu'a joués la formation en mathématiques avancées pour eux et ils veulent, à leur tour, élargir la vision des mathématiques de leurs futurs élèves. Ils en disent beaucoup à ce sujet, par des exemples, ce qui permet en retour de bonifier la littérature. C'est ainsi que certains futurs enseignants expliquent qu'ils veulent offrir à leurs élèves une vision plus large du panorama mathématique, de ce qu'elles étaient hier (Alexa, Gilles, Rémi, Talia), de la façon dont elles évoluent à travers le temps et ne sont pas statiques (Talia et Rémi), de ce qu'elles sont à un niveau plus avancé (Monic) et de ce à quoi elles peuvent servir pour les ingénieurs (Gilles). Voici deux exemples.

Un premier exemple est celui de Monic, qui veut amener ses futurs élèves à goûter aux mathématiques avancées. Elle aurait aimé être informée dès le secondaire de ce à quoi ressembleraient les mathématiques qu'elle verrait à l'université, parce que l'entrée à l'université dans les cours de mathématiques avancées a été difficile pour elle. Elle ne se sentait pas bien préparée, car personne ne lui avait parlé du côté plus théorique et abstrait des mathématiques avancées. Même si elle a aimé son parcours en mathématiques avancées, elle aimerait éviter que ses élèves vivent le même choc. C'est pourquoi elle veut parler avec ses élèves des mathématiques avancées et faire des liens avec eux entre les mathématiques du secondaire et les mathématiques avancées. Pour y parvenir, par exemple, elle veut réinvestir des propriétés amusantes des nombres entiers, ce qu'elle appelle les « fun facts » de son cours Théorie des nombres, dans sa pratique future. C'est ainsi qu'elle veut approfondir les contenus du secondaire, en montrant des liens avec les mathématiques avancées, et en même temps donner à ses élèves une idée de ce à quoi ressembleront leurs cours de mathématiques avancées.

Un deuxième exemple est celui de Talia et de Rémi. Rémi raconte que dans son stage, il a ajouté une touche historique à son enseignement, en racontant l'histoire de la découverte des nombres irrationnels à ses élèves, pour leur montrer à quel point ce fut un gros choc pour les mathématiciens de l'époque. De son côté, à travers son cours d'histoire des mathématiques, Talia a compris que les mathématiques n'étaient pas statiques et qu'elles évoluaient. Elle veut à son tour transmettre cette vision plus évolutive des mathématiques à ses élèves, en comparant des méthodes utilisées aujourd'hui à des méthodes utilisées dans le passé : « Je me verrais montrer aux élèves qu'on peut multiplier en utilisant des carrés et des petites barres, comme on le faisait anciennement. »

5.2.3.2 Retour sur le 3e réinvestissement *méta*mathématique : la littérature et mes résultats

Mon étude appuie cette idée, soulevée par Hache, Proulx et Sagayar (2009) et par Zazkis et Leikin (2010), que la formation en mathématiques avancées offre une vision plus large du panorama mathématique. Les participants de mon étude viennent approfondir cette idée en donnant quelques exemples des types de réinvestissements possibles qu'ils retiennent. Les cours de mathématiques avancées, de par leur nature diverse, ont plongé les futurs enseignants dans une variété de mathématiques, soit des mathématiques appliquées aux mathématiques abstraites, des « mathématiques où il n'y a plus de chiffres » à l'histoire des mathématiques, etc., donc des mathématiques qu'ils ne pouvaient s'imaginer exister avant leur arrivée à l'université. C'est ainsi qu'ils veulent, à leur tour, faire goûter ces diverses mathématiques à leurs élèves, par l'entremise d'anecdotes, d'histoires, d'exemples, etc.

Toutefois, les futurs enseignants ont des difficultés significatives à fournir des exemples précis, que ce soit d'un outil (anecdotes, « fun facts », histoires, exemples) à réinvestir en classe ou d'un contenu mieux compris (la procédure ou le pourquoi). C'est aussi le cas pour les enseignants de l'étude de Zazkis et Leikin (2010), qui ont éprouvé des difficultés significatives à donner des exemples de problèmes ou à se souvenir de situations pendant lesquelles les contenus en mathématiques avancées pouvaient être utiles dans leur future classe. En un mot, les futurs enseignants de mon étude et ceux des autres études affirment beaucoup de choses en entrevue, mais lorsque vient le temps de donner des exemples, ils ont souvent un blanc, ce qui questionne à quel point leurs affirmations sont claires et bien ancrées pour eux.

5.2.4 Quatrième réinvestissement *méta*mathématique : les liens entre les mathématiques et la vie réelle

Les enseignants dans les études d'Even (2011) et de Zazkis et Leikin (2010) expliquent que leur formation en mathématiques avancées leur a fait connaître des liens entre les mathématiques et la vie réelle. C'est ainsi que les mathématiques avancées leur permettent de mieux comprendre comment les mathématiques sont utilisées pour modéliser des problèmes de la vie réelle ou encore comment les mathématiques sont importantes à un plus haut degré et dans différents domaines (en architecture, en sciences sociales, en sciences humaines, etc.). Les enseignants partagent qu'ils veulent à leur tour utiliser dans leur salle de classe des exemples vus dans leurs cours de mathématiques avancées, par exemple la dynamique des populations en biologie ou la construction pour résister aux phénomènes naturels. Les liens sont clairs pour ces enseignants et ils ont des exemples concrets à ramener dans leur salle de classe.

5.2.4.1 Les expériences des futurs enseignants de mon étude

Les expériences des futurs enseignants de mon étude sont toutes autres : ils ont de la difficulté, dans leur formation disciplinaire en mathématiques avancées, à faire des liens entre les mathématiques avancées et la vie réelle. Faire ces liens entre les mathématiques et les différentes professions, comme ingénieur, médecin et charpentier, ou entre les mathématiques et la vie quotidienne, comme interpréter les graphiques et les statistiques dans les journaux ou gérer ses finances personnelles, serait pertinent pour eux. Avec ces liens, ils affirment qu'ils pourraient dès lors expliquer à leurs élèves la pertinence des mathématiques pour différentes carrières et pour leur propre vie quotidienne. Gilles explique que dans le cours de mathématiques qu'il suit avec des ingénieurs (analyse numérique), il a vu brièvement quelques formules qui peuvent servir à construire un pont. Ceci lui donne une idée générale de ce à quoi les mathématiques peuvent servir, mais ces liens restent ambigus. Ces liens entre les mathématiques et la vie réelle n'ont pas vraiment été mis de l'avant dans les cours de mathématiques avancées qu'ils ont suivis. C'est aussi la perception de Josie, pour qui les mathématiques avancées paraissent déconnectées de la vie réelle. Il en est de même pour Rémi, qui ne se trouve pas bien formé pour expliquer la pertinence des mathématiques et pour répondre à la question populaire des élèves : « À quoi ça sert, les maths? ».

5.2.4.2 Retour sur le 4^e réinvestissement *méta*mathématique : la littérature et mes résultats

Cette difficulté chez les futurs enseignants de mon étude est intéressante, car elle diffère des expériences des enseignants des études d'Even (2011) et de Zazkis et Leikin (2010), qui disaient mieux voir les liens entre les mathématiques et la vie réelle grâce à leur formation en mathématiques avancées. Au contraire de ces enseignants, les futurs enseignants de mon étude affirment ne pas vraiment savoir à quoi ces contenus en mathématiques avancées servent dans la vie réelle, ce qui les freine à montrer la pertinence des mathématiques à leurs élèves.

5.2.5 Cinquième réinvestissement *méta*mathématique : apprendre à apprendre les mathématiques

Un autre réinvestissement tiré des expériences des futurs enseignants est que la formation en mathématiques avancées permet d'apprendre à apprendre des mathématiques. Proulx, Corriveau et Squalli (2012) soulignent dans leur synthèse qu'au-delà des contenus, il est important que le futur enseignant développe lors de sa formation mathématique (initiale) une certaine fluidité en mathématique, pour être capable de résoudre les divers problèmes mathématiques qui surviendront ensuite. En d'autres mots, il est important que le futur enseignant obtienne une certaine expérience mathématique, qu'il développe une certaine curiosité mathématique, afin qu'il soit capable d'explorer des concepts, de creuser des nouveaux problèmes et d'arriver à leur donner un sens. Après tout, la formation mathématique de l'enseignant ne se termine pas à la formation initiale, mais elle continue tout au cours de sa carrière (Bednarz, 2012). C'est donc dire qu'au-delà des contenus, la formation mathématique veut « former les enseignants à se former eux-mêmes en mathématiques et à trouver des moyens d'y parvenir » (p. 336).

5.2.5.1 Les expériences des futurs enseignants de mon étude

Rémi est un exemple de ce que Bednarz (2012) affirme, c'est-à-dire qu'il dit avoir été formé à se former. Il partage qu'à travers sa formation en mathématiques avancées il a développé une habileté à apprendre de nouvelles mathématiques par lui-même. Il est devenu habile à faire des mathématiques, comme s'il avait développé une certaine façon de penser en mathématiques qui lui permet de raisonner et de résoudre plus aisément des problèmes. Ainsi, si de nouvelles mathématiques surviennent dans sa classe, par exemple un nouveau concept intégré dans les programmes du secondaire, Rémi est confiant de pouvoir s'approprier ces concepts et les enseigner, même s'il n'a pas eu de formation spécifique à leur sujet. Il a donc appris à apprendre des mathématiques.

5.2.5.2 Retour sur le 5^e^ réinvestissement *méta*mathématique : la littérature et mes résultats

Une différence significative existe entre les expériences de Rémi et ce qu'avancent les formateurs dans le collectif de Proulx, Corriveau et Squalli (2012). Pour les formateurs, c'est l'activité mathématique qui sert de moyen de développer une fluidité en mathématiques, en faisant faire des mathématiques aux futurs enseignants, en les plongeant dans des situations de résolutions de problèmes, en les mettant dans l'action, en les faisant réfléchir, etc. Rémi, lui, développe une fluidité en mathématiques à travers des cours magistraux qui ne visent pas cette activité mathématique. L'entrée dans les cours magistraux se fait par les contenus, ce qui veut souvent dire qu'on est plus axé sur les savoirs mathématiques que sur « la mathématique qui se fait » (Claude Janvier, dans Bednarz, Golding et Lefevre, 1997, p. vi). Néanmoins, à travers ces exposés magistraux, Rémi se plonge lui-même dans une réflexion mathématique et vit, à sa façon, une activité mathématique.

Cet apport de la formation est assez frappant, si l'on pense que les cours de mathématiques avancées qu'a suivis Rémi sont les mêmes que ceux qu'ont suivis les autres futurs enseignants, soit des cours magistraux. Rémi partage que ces cours lui ont permis de réfléchir sur les mathématiques (entre autres sur les contenus du secondaire). Donc, même si le professeur lui transmet la matière alors qu'il est en train de prendre des notes, Rémi, lui, réfléchit silencieusement sur sa chaise et il n'est pas si passif. Cette image d'un étudiant passif à côté d'un étudiant réflexif, assis dans un même cours, au cours duquel l'enseignant transmet des contenus, est parlante. Elle met en évidence que chaque étudiant peut vivre un même événement de manière différente et rappelle que ce n'est pas parce qu'un élève est silencieux dans un cours, ou parce qu'un cours est donné de façon traditionnelle, que l'étudiant est passif.

5.2.6 Retour global sur les réinvestissements *méta*mathématiques

Somme toute, les formés de mon étude viennent approfondir et nuancer les cinq réinvestissements métamathématiques qu'avance la littérature à l'égard de la formation en mathématiques avancées comme préparation mathématique à l'enseignement. Premièrement, Even (2011) avance que vivre des difficultés en mathématiques sensibilise les enseignants (qui n'ont jamais vraiment vécu de difficultés en mathématiques) aux frustrations que vivent leurs élèves lorsque ces derniers ne réussissent pas. Les futurs enseignants dans ma recherche ajoutent que vivre des difficultés en mathématiques les sensibilise aux types d'explications qui leur permettent de mieux comprendre, comme des représentations visuelles et des exemples qui montrent comment appliquer une formule et aussi que surpasser ces difficultés mathématiques permet de mieux comprendre les contenus mathématiques en jeu.

Deuxièmement, la façon d'enseigner les mathématiques des professeurs de l'étude d'Even (2011), pour lesquelles l'activité mathématique est mise de l'avant, influence les étudiants à eux aussi faire vivre des expériences mathématiques à leurs élèves et à leur montrer que les mathématiques évoluent et ne sont pas statiques. Ce n'est pas la façon dont les cours de mathématiques avancées ont été enseignés aux futurs enseignants de mon étude, car les professeurs présentaient sous forme d'exposés magistraux des mathématiques déjà « toutes faites » (Claude Janvier, dans Bednarz, Golding et Lefevre, 1997, p. vi). Les futurs enseignants ne semblent pas beaucoup retirer de la façon de faire les mathématiques de leurs professeurs de mathématiques, si ce n'est qu'ils ne veulent pas enseigner de cette façon-là; ce qui est déjà quelque chose en soi.

Le troisième réinvestissement métamathématique soulevé par la littérature (Hache, Proulx et Sagayar, 2009; Zazkis et Leikin, 2010) est qu'une formation en mathématiques avancées élargit le panorama mathématique des enseignants. Les futurs enseignants de mon étude ajoutent à cette idée en donnant quelques exemples, comme réinvestir en salle de classe des propriétés amusantes des nombres entiers tirées du cours Théorie des nombres pour faire goûter aux élèves un aperçu des mathématiques avancées.

Le quatrième réinvestissement souligné par les enseignants des études d'Even (2011) et de Zazkis et Leikin (2010) est que les mathématiques avancées permettent de faire des liens entre les mathématiques et la vie réelle. Ce n'est pas le cas pour les futurs enseignants de mon étude, qui ont de la difficulté à établir ces liens et à expliquer, voire à percevoir pour eux-mêmes, à quoi servent les mathématiques dans les différentes professions. Les enseignants des études d'Even et de Zazkis et Leikin avaient des exemples précis à ce sujet, mais les futurs enseignants de mon étude n'ont, au mieux, offert qu'une idée générale.

Enfin, le cinquième réinvestissement concerne la fluidité en mathématiques. Dans la littérature, c'est l'activité mathématique qui est prônée pour développer cette fluidité, les étudiants explorant des concepts en classe, se questionnant et réfléchissant activement aux mathématiques qu'ils développent ensemble. L'image qu'on entretient de la formation en mathématiques avancées est souvent que les mathématiques sont statiques et que les étudiants sont passifs (comme Alexa et Chloé, qui disent mémoriser les contenus pour leur examen et les oublier après). Le cas de Rémi nous rappelle que cette formation en mathématiques avancées, même dans la forme traditionnelle où la plupart du temps on transmet les contenus de façon magistrale, est aussi une occasion pour réfléchir, pour apprendre à faire des mathématiques et ainsi apprendre à se débrouiller avec les mathématiques qui émergeront en enseignement. En ce sens, mon étude rappelle qu'une certaine activité mathématique peut être vécue même dans un cours magistral, par un étudiant qui se questionne, qui réfléchit et qui fait des liens silencieusement, par lui-même mais activement, et qui apprend ainsi à apprendre des mathématiques.

À noter qu'un des réinvestissements soulevés par les enseignants de l'étude de Zazkis et Leikin (2010) n'est pas apparu chez mes participants, soit que les mathématiques avancées sensibilisent à l'utilisation d'une démarche et d'un langage précis. Ceci ne veut pas dire qu'il est absent chez les futurs enseignants de ma recherche, ni qu'il soit moins pertinent comme façon de faire des liens entre les mathématiques avancées et la pratique de classe, mais il n'est tout simplement pas ressorti dans les entrevues. Aussi, l'aspect confiance sera repris plus tard à la section 5.4.

Ceci mène au troisième thème, soit celui des ruptures entre la formation en mathématiques avancées et les mathématiques mobilisées en classe.

5.3 Les ruptures

Les liens entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire ne vont pas de soi selon Gourdeau et Proulx (2012), Hache, Proulx et Sagayar (2009) et Kahane (2003). Dans leur revue de littérature, Proulx et Bednarz (2010) mettent en évidence trois ruptures sur le plan des mathématiques, soit la forme des mathématiques avancées qui est formelle et symbolique, leur nature qui est compacte et la façon dont les mathématiques sont faites et enseignées. Ces trois ruptures sont aussi vécues par les futurs enseignants de mon étude, auxquelles ils en ajoutent une autre, soit celle de l'identité développée à travers les cours de mathématiques avancées. Toutefois, au-delà de ces quatre ruptures, une autre rupture, une cinquième, vécue par les futurs enseignants de mon étude, est plus globale : les mathématiques avancées sont déconnectées des mathématiques du secondaire. Il ne s'agit tout simplement pas, pour eux, des mêmes mathématiques au secondaire et à l'université. Je présente dans ce qui suit ces ruptures, en débutant avec cette rupture plus globale.

5.3.1 Première rupture : les mathématiques avancées sont déconnectées des mathématiques du secondaire

Les futurs enseignants de mon étude ont de la difficulté à faire des liens entre les contenus en mathématiques avancées et les contenus mathématiques du secondaire. Dans la formation qu'ils suivent ces liens sont laissés à la charge des étudiants, mais ils ne vont pas de soi pour eux (Hache, Proulx et Sagayar, 2009; Gourdeau et Proulx, 2012). Ce manque de liens se traduit pour eux par une rupture globale sur le plan des contenus. À l'exception des cours de première année, qui revoient les concepts de la fin du secondaire tels que les dérivées et les matrices, les contenus en mathématiques avancées sont différents de ceux du secondaire. Alexa explique qu'elle aime les cours de mathématiques appliquées, comme son cours d'analyse numérique (dans lequel on traite de la résolution des systèmes d'équations non linéaires, de la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre, etc.) et son cours d'équations différentielles (dans lequel on traite des techniques de résolution des équations du premier ordre et de certaines équations d'ordre supérieur, etc.). Toutefois, elle explique aussi ne voir aucun lien entre ces contenus et ceux du secondaire, comme la droite, les systèmes d'équations linéaires et les fonctions quadratiques et logarithmes. Donc, elle ne voit pas ce que ces cours de mathématiques apportent à sa préparation mathématique.

> Alexa : Ça ne me dérange pas d'apprendre ça [les mathématiques avancées], mais montre-moi à quoi ça va me servir dans ma vie et comment je pourrais m'en servir [dans mon enseignement]. Je suis prête à apprendre quelque chose de théorique s'il faut, mais après ça il faut qu'il [le professeur] nous dise comment c'est en lien avec ce qu'on va enseigner.

Il en est de même pour Josie, qui est passionnée par les mathématiques qu'elle étudie et qui aime tous ses cours de mathématiques avancées. Toutefois, elle considère que sa formation mathématique universitaire est pour elle-même, comme apprenante, et non pour sa préparation mathématique comme future enseignante. Elle affirme que sa formation en mathématiques avancées ne la prépare « pas du tout » à expliquer de façon à ce que les élèves comprennent, elle ne la prépare pas à anticiper différentes explications pour faire ressortir le sens des mathématiques et les raisonnements utilisés et elle ne la prépare pas aux types de mathématiques qui seront mobilisées en salle de classe. En un mot, ces futures enseignantes ne voient pas comment les contenus de mathématiques avancées sont connectés aux contenus du secondaire et donc pour elles ces cours de mathématiques avancées sont inutiles pour leur préparation mathématique de future enseignante (bien qu'elles les apprécient, personnellement). L'établissement de liens entre les contenus, qui est laissé sur les épaules des futurs enseignants, n'est pas toujours évident pour ces derniers, ce qui peut enlever comme on le voit dans le cas d'Alexa et de Josie toute la pertinence que peut avoir à leurs yeux leur formation en mathématiques avancées par rapport à leur préparation mathématique.

5.3.1.1 Retour sur la 1re rupture : la littérature et mes résultats

Cette rupture sur le plan du manque de liens entre les contenus en mathématiques avancées et les contenus mathématiques du secondaire est peu mise de l'avant dans la littérature. Hache, Proulx et Sagayar (2009) soulignent ce manque de liens et suggèrent, dans une perspective de formation, que ces liens soient explicitement faits dans les cours et non laissés à la charge des étudiants. Gourdeau et Hodgson (dans Gourdeau et Proulx, 2012) insistent aussi sur l'importance de faire ces liens avec les futurs enseignants : ils ont même bâti leurs cours de mathématiques dédiés aux futurs enseignants avec ces liens en tête : les contenus de mathématiques avancées travaillées en cours sont donc spécifiquement choisis, car ils sont en lien (de près ou de loin) avec les contenus mathématiques du secondaire. Les expériences des futurs enseignants de mon étude montrent que le choix des contenus n'est pas sans importance pour eux et qu'ils veulent faire des liens entre les contenus qu'ils apprennent à l'université et les contenus mathématiques qu'ils enseigneront au secondaire. Dans l'ensemble, les futurs enseignants ne voient pas vraiment de liens entre les contenus vus dans leurs cours de mathématiques avancées et les contenus mathématiques du secondaire qu'ils auront à enseigner. Ceci les amène à questionner la pertinence de leur formation en mathématiques avancées, allant même jusqu'à la trouver inutile pour leur préparation mathématique d'enseignant.

5.3.2 Deuxième rupture : la forme formelle et symbolique des mathématiques avancées *versus* la nécessiter d'expliquer et de verbaliser

Les mathématiques avancées, dans leur forme, sont travaillées de façon formelle et dans un symbolisme accru (Corriveau et Tanguay, 2007; Moreira et David, 2005, 2008; Fulvi, 2010). Ce langage mathématique avec des symboles concis représente un outil efficace pour les mathématiciens, car il leur permet de manier de grandes quantités d'information avec précision (Glaeser, 1973). Toutefois, ce degré avancé de symbolisation peut entraîner chez les futurs enseignants une difficulté à sortir de l'abstrait et du formalisme pour rendre les mathématiques accessibles aux élèves (Proulx, 2010). Le symbolisme est alors utilisé pour expliquer les idées, comme s'il parlait de lui-même, sans s'attarder à travailler le sens sous-jacent des concepts (Dionne, 2000; Gattuso, 2000; Sierpinksa, 1999). En d'autres mots, ce formalisme accru éloigne le futur enseignant de la manière de parler et d'écrire les mathématiques au secondaire, où, comme Bednarz (2012) le rappelle, il est nécessaire d'anticiper différents niveaux d'explications, de verbalisations et de symbolisations, de manière à articuler clairement les raisonnements pour les élèves. La forme formelle des mathématiques avancées crée ainsi un fossé entre les mathématiques avancées, où le symbolisme prime, et les mathématiques de la pratique de classe (voir aussi Proulx et Bednarz, 2010).

5.3.2.1 Les expériences des futurs enseignants de mon étude

L'expérience de Monic est parlante à ce sujet. Au secondaire, elle se plaisait à expliquer les mathématiques à ses camarades de classe. Toutefois, une fois à l'université, plus elle avance dans sa formation en mathématiques avancées et plus elle sent s'éloigner des mathématiques mobilisées dans la classe du secondaire, à un point tel qu'elle craint utiliser un langage trop formel et symbolique dans ses stages sans s'en rendre compte et ainsi perdre ses élèves.

> Monic : [Dans] la définition de la limite, qui n'est pas du tout la même chose [qu'au secondaire], tu lances des deltas et des epsilons là-dedans et tout! » [...] « Disons que j'arrive à mon stage et que j'enseigne les limites, peut-être qu'il y a des choses que j'ai appris à cause de la définition formelle que je vais commencer à dire à mes élèves et qu'ils vont être comme : « Hein! De quoi tu parles? Je ne comprends pas. » Et là, tu réalises que tu n'es plus à leur niveau. Je le voyais comment dans ce temps-là [lorsque j'étais moi-même au secondaire], pour pouvoir me mettre à leur niveau et les aider à comprendre?

Dans cet extrait, Monic exprime sa crainte de ne pas avoir les mots, le langage, pour verbaliser une explication compréhensible par ses élèves. Elle craint que l'explication qui lui viendra en tête soit dotée de symboles que les élèves ne comprendront pas. Monic sent qu'elle a perdu sa capacité à expliquer au niveau des élèves, comme elle le faisait quand elle était elle-même élève, avant d'être influencée par le symbolisme accru présent en mathématiques avancées. La même chose se produit pour Alexa, que les mathématiques avancées ont habituée à une certaine façon de penser « plus compliquée » et qui craint ne plus être capable de revenir à « la façon simple » de les expliquer pour que les élèves comprennent. C'est ainsi que l'aspect formel des mathématiques dans les cours de mathématiques avancées éloigne Monic et Alexa de la forme que devront prendre leurs explications dans leur classe au secondaire pour qu'elles soient compréhensibles par les élèves. Bref, le formalisme des mathématiques avancées et leur symbolisation accrue créent un obstacle sur le plan des explications, pour les futurs enseignants qui « retournent » au secondaire et doivent expliquer avec des symboles, des schémas et un langage compréhensibles aux élèves du secondaire.

5.3.2.2 Retour sur la 2e rupture : la littérature et mes résultats

Les futurs enseignants de mon étude vivent cette rupture soulignée dans la littérature sur le plan de la forme des mathématiques. Dionne (2000) et Gattuso (2000) expliquent que l'aspect formel et symbolique des mathématiques avancées conduit souvent à une insistance prématurée sur la notation mathématique, au point de bien souvent la priver de sens véritable. C'est le cas pour Monic et Alexa, pour qui le langage formel et symbolique des mathématiques avancées a été marquant, et ce, au détriment du sens sous-jacent à ces mathématiques. Ces futures enseignantes sont maintenant habituées à expliquer avec un langage formel, ce qui devient un obstacle pour leur enseignement, car elles craignent ne pas pouvoir expliquer en fonction du niveau d'apprentissage des élèves. Les symboles parlent maintenant d'eux-mêmes pour elles, à un point tel qu'elles éprouvent beaucoup de difficultés à décompresser les mathématiques pour faire ressortir le sens sous-jacent des symboles. Monic et Alexa sont deux exemples de ce que Bednarz (2012) avance, soit que le formalisme accru éloigne le futur enseignant de la manière de parler et d'écrire les mathématiques au secondaire.

5.3.3 Troisième rupture : la nature compressée des mathématiques avancées *versus* la nécessité de décompresser les mathématiques en enseignement

À l'intérieur de ce langage formel et symbolique, les mathématiques avancées sont souvent compressées et leur sens est souvent caché (Adler et Davis, 2006; Ball et Bass, 2003; Moreira et David, 2005). Cette concision en mathématiques fait partie de la beauté des mathématiques (Burton, 2004) et s'avère en être une force puisqu'elle rend les concepts mathématiques faciles à utiliser (Ball et Bass, 2003). L'intérêt est en effet d'aller plus loin et de se servir des concepts étudiés précédemment pour continuer à avancer sur d'autres concepts et résolutions, sans revenir au sens des concepts « de base », comme ceux du secondaire. Ces derniers sont utilisés de façon compressée pour avancer vers de nouveaux contenus. Cette compression ne rend pas nécessairement les mathématiques, tout particulièrement les mathématiques du secondaire, plus transparentes pour le futur enseignant. La rupture se trouve là, dans la nature compressée des mathématiques avancées, qui est inadéquate, selon Ball et Bass (2000 et 2003), pour l'enseignement des mathématiques puisque dans sa pratique l'enseignant doit décompresser les concepts mathématiques pour les rendre accessibles aux élèves (voir aussi Adler et Davis, 2006; Bednarz, 2001; Huillet, 2009). Le problème est que les enseignants peuvent dès lors développer une vision plus opaque et condensée des mathématiques et éprouver certaines difficultés eux-mêmes à décompresser ces concepts et à faire ressortir leurs sens sous-jacents ou encore ne plus percevoir certaines difficultés des élèves (voir, par exemple, Eisenhart *et al.*, 1993; Sfard et Linchevski, 1994; Thompson et Thompson, 1994, 1996).

5.3.3.1 Les expériences des futurs enseignants de mon étude

C'est ce que craignent en effet Monic et Josie. Les mathématiques avancées les ont habituées à une certaine façon de penser plus compacte et elles ont peur de ne plus être capables de revenir à la base dans leur enseignement. Ceci transparait aussi dans les tâches qui sont, pour elles, faciles à faire, mais lors desquelles elles n'arrivent pas à expliquer le sens derrière les procédures. Monic partage qu'à travers sa formation en mathématiques avancées, elle s'est éloignée des mathématiques du secondaire et de leurs subtilités. La rupture ici n'est pas sur le plan de la forme, du langage, des symboles utilisés ou des explications, comme c'est le cas avec la rupture précédente, mais plutôt dans la nature même des mathématiques et de leurs significations et subtilités.

> Monic : J'ai peur de perdre mes élèves totalement. [...] Je perçois les choses d'une certaine façon, qui n'est pas nécessairement la façon dont je les percevais au secondaire. Donc, la façon que je le perçois n'est pas nécessairement compatible avec les connaissances que les élèves ont déjà.

Monic utilise les mathématiques du secondaire de façon compressée et ne se sent plus capable de pouvoir les décompresser pour faire ressortir le sens derrière les concepts. Sous la nature compressée des mathématiques qu'elle connait aujourd'hui se « cache », comme le disent Moreira et David (2005), une variété d'idées, de sens et de raisonnements mathématiques à laquelle elle n'a plus accès. Usiskin (2000) le dit bien : « Often the more mathematics courses a teacher takes, the wider the gap between the mathematics the teacher studies and the mathematics the teacher teaches » (p. 86). Auparavant, lorsqu'elle était élève au secondaire, elle disait comprendre les mathématiques dans leur nature décompressée. Mais aujourd'hui, après avoir passé à travers sa formation en mathématiques avancées, elle les comprend de façon compressée. Comment alors revenir en arrière, se demande-t-elle?

Josie amène un point de vue différent sur cette rupture sur le plan de la nature compressée des mathématiques. De prime abord, elle perçoit de façon positive la réutilisation des mathématiques du secondaire de façon compressée à l'intérieur des mathématiques avancées, puisque pour elle ceci exige de devoir bien maîtriser les contenus du secondaire utilisés. Faire les mathématiques du secondaire de façon compressée, pour Josie, n'est pas vu de façon négative et c'est même l'occasion de développer son aisance avec elles et les travailler encore plus. Le contexte du cours qui permet de réinvestir les contenus du secondaire lui est alors pertinent pour sa préparation mathématique.

> Josie : Ce qui prépare bien, c'est que dans les concepts [de mathématiques avancées], même si on voit des concepts beaucoup plus complexes, on a quand même besoin des concepts de base [du secondaire] qu'on va enseigner en 9e, 10e et 11e année.

Son expérience à jouer avec les mathématiques du secondaire de façon compressée à l'intérieur des mathématiques avancées est positive. Ceci questionne la rupture soulevée ci-haut, qui suggère que le sens des mathématiques dans leur forme compressée est, d'une certaine façon, « caché ». Pour Josie, être capable de réutiliser les contenus mathématiques du secondaire de façon compressée dans un nouveau contexte nécessite de bien les comprendre et, d'une certaine façon, elle approfondit sa connaissance de ces contenus en les travaillant dans un autre contexte. Elle ne donne toutefois pas d'exemple qui permettrait d'éclairer précisément ce qui doit être bien compris des mathématiques du secondaire pour être réutilisé dans les mathématiques avancées, ni si cette compréhension des mathématiques est la même que de celle mobilisée dans une classe du secondaire.

En fait, Josie nuance cette idée lors du travail des tâches. Lors de ces dernières, elle a eu par exemple à creuser en profondeur le concept du logarithme et a alors réalisé qu'elle ne les comprend pas de façon approfondie (elle ne comprend pas le pourquoi derrière les lois logarithmiques), et ce, même si elle a utilisé ce concept maintes fois (de façon compressée) dans ses cours de mathématiques avancées. Il s'agit pour elle, dans les tâches, d'une autre manière de comprendre les logarithmes, à laquelle elle explique ne pas avoir été initiée dans ses cours de mathématiques avancées. Cette réalisation chez Josie est remarquable, puisqu'elle met en évidence une certaine différence entre la façon d'utiliser les mathématiques du secondaire dans les cours de mathématiques avancées et la façon dont elles sont mobilisées au secondaire. Ainsi, elle doit bien comprendre les contenus du secondaire pour les utiliser dans les cours de mathématiques avancées, mais doit les comprendre d'une autre façon, d'une façon décompressée, pour les travailler dans sa pratique au secondaire. De plus, elle ajoute que si les contenus mathématiques ne sont pas bien compris avant d'être manipulés de façon compressée en mathématiques avancées, alors l'étudiant est perdu dans les symboles. L'expérience de Josie fait donc ressortir des aspects positifs et des aspects négatifs de la nature compacte des contenus du secondaire.

5.3.3.2 Retour sur la 3e rupture : la littérature et mes résultats

Les mathématiques du secondaire sont réutilisées de façon compressée dans les cours de mathématiques avancées, ce qui crée un obstacle pour les (futurs) enseignants qui devront décompresser ces contenus dans leur pratique (Adler et Davis, 2006; Ball et Bass, 2000, 2003; Bednarz, 2001; Huillet, 2009; Proulx et Bednarz, 2010). Le cas de Monic exemplifie cette rupture théorisée dans la littérature. De son côté, Josie amène un point de vue nouveau à l'égard de la nature compressée des mathématiques avancées, soit que de réutiliser les contenus du secondaire dans d'autres contextes mathématiques nécessite de bien les comprendre. Ce regard positif nuance la façon de voir la nature compressée des mathématiques, qui habituellement est davantage présentée de façon négative. On n'en sait toutefois que très peu sur les compréhensions mathématiques qui sont développées lorsqu'on utilise un contenu mathématique du secondaire de façon compressée dans un autre contexte, ni s'il existe des liens entre cette compréhension développée et la compréhension mathématique nécessaire pour l'enseignant. L'expérience de Josie, qui oscille entre les côtés positif et négatif de la nature compacte des mathématiques, soulève ces nouvelles questions.

5.3.4 Quatrième rupture : la façon de faire les mathématiques à l'université en rupture avec la culture mathématique souhaitée au secondaire

Une autre rupture soulignée par la recherche est liée à la façon de faire les mathématiques dans les cours de mathématiques avancées. Proulx (2010) avance que la façon de penser les mathématiques est indissociable de la façon de faire les mathématiques. À l'université, le format des cours de mathématiques avancées est davantage magistral (Burton, 2004). Les mathématiques avancées réfèrent alors non seulement à un corpus de savoirs, mais aussi implicitement à une façon de faire les mathématiques. Cette façon de faire les mathématiques dans les cours de mathématiques avancées, dans lesquels on expose des concepts et des procédures déjà toutes faites (Burton, 2004), est en rupture avec la pratique de classe dans laquelle on souhaite que l'élève raisonne et construise un sens au concept (Bednarz, 2001). En d'autres mots, la culture de classe dans les cours de mathématiques avancées ne reflète pas la culture de classe souhaitée au secondaire (Bednarz et Proulx, 2010) et il y a un travail significatif à faire à la formation des maîtres pour initier les futurs enseignants à une façon alternative de faire et de penser l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques (Proulx, 2010). Selon Bauersfeld (1994) et Proulx, Corriveau et Squalli (2012), les enseignants ont besoin de faire et de produire des mathématiques eux-mêmes, d'être plongés dans des résolutions de problèmes, des réflexions mathématiques et des situations authentiques. Ils ont besoin d'être plongés dans une certaine culture mathématique où ils sont en action et où les mathématiques sont vivantes, et ce, pour deux raisons principales : pour qu'ils deviennent fluides en mathématiques et pour qu'à leur tour ils fassent vivre, dans leur classe, des activités mathématiques à leurs élèves.

5.3.4.1 Les expériences des futurs enseignants de mon étude

Pour Alexa et Josie, la façon dont elles vivent les mathématiques comme étudiantes et la façon dont on leur suggère d'enseigner dans leurs cours d'éducation sont en rupture. Dans les cours de mathématiques avancées, elles sont plongées dans une culture mathématique où le professeur détient les connaissances et les transmet aux étudiants via des exposés magistraux et où les mathématiques sont vues comme des absolus déjà tous faits. Après tout, selon leurs dires, leurs « expériences mathématiques » sont (dans la plupart des cours) limitées à l'écoute, à la prise de notes d'exposés magistraux et à des exercices à faire en devoir. Ces futures enseignantes se sentent alors passives dans leurs apprentissages (contrairement à Rémi). Alexa partage qu'elle apprend souvent par cœur (ou par « peur ») la matière que lui transmettent ses professeurs et qu'elle l'oublie après l'examen. Cette passivité est contraire à ce qui est promu dans leurs cours d'éducation, dans lesquels leurs professeurs mettent l'emphase sur l'activité de l'élève dans ses apprentissages, sur le travail de groupe, etc. Cette rupture est problématique pour Alexa et Josie, car elles veulent enseigner autrement que ce qu'elles vivent dans leur formation en mathématiques, mais ne savent pas trop comment s'y prendre pour appliquer les approches d'enseignement qu'elles apprennent dans leur formation en éducation. Pour elles, ceci se traduit en une rupture entre leur formation disciplinaire en mathématiques avancées et leur formation en éducation, car elles veulent enseigner les mathématiques autrement que par un enseignement magistral, mais ne savent pas comment.

Josie explique qu'elle ne sait pas comment sortir de l'enseignement traditionnel, car c'est la seule façon qu'elle connaît pour enseigner des nouveaux contenus mathématiques aux élèves. Les situations problèmes qu'elle travaille dans son cours de didactique sont pour elle un premier outil pour faire autrement, car ils amènent les élèves à faire des mathématiques en lien avec la vie réelle et ils facilitent les interactions entre pairs, pour qu'ils soient constamment actifs. Néanmoins, cet outil est, pour elle et à ce stade, une activité qui vient bonifier l'enseignement magistral et non une approche d'enseignement en soi. Josie veut pourtant plus que ça, elle veut plus qu'ajouter des activités différenciées ou des activités de groupe dans sa classe pour bonifier son enseignement. Elle veut réellement mailler ces deux formations (mathématiques et éducation), afin que les élèves de sa classe de mathématiques soient constamment actifs ou encore qu'elle puisse partir de leurs connaissances et raisonnements pour en construire des nouveaux avec eux. Mais, elle ne sait pas comment s'y prendre. Elle ne sait pas ce que les théories d'apprentissages qu'elle apprend dans sa formation en éducation veulent dire concrètement dans une classe de mathématiques. Bref, la façon dont Josie vit les mathématiques dans ses cours de mathématiques avancées, ce qu'elle connaît comme façon d'enseigner les mathématiques, est déconnectée de la façon dont elle souhaite que les mathématiques soient mobilisées dans sa future salle de classe.

5.3.4.2 Retour sur la 4e rupture : la littérature et mes résultats

Tout bien considéré, Alexa et Josie veulent mailler leurs deux formations (mathématiques et éducation). Toutefois, elles ne savent pas vraiment comment y arriver. Pour Proulx (2010), il y a un travail significatif à faire à la formation pour initier les futurs enseignants à une façon alternative de faire des mathématiques et de penser l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. La façon traditionnelle par laquelle on leur enseigne les mathématiques avancées est, pour les futurs enseignants, déconnectée de la façon dont on leur suggère d'enseigner. C'est en effet le besoin qu'expriment Alexa et Josie, soit de savoir comment enseigner les mathématiques autrement que de la façon qu'elles ont connue en tant qu'étudiantes et en même temps comment les enseigner pour répondre aux exigences de leur formation en éducation.

Cette rupture liée à la façon d'enseigner se traduit aussi, pour Alexa et Josie, en une rupture entre leur formation disciplinaire en mathématiques et leur formation en éducation.

Quoique ces deux futures enseignantes aiment leurs deux formations (éducation et mathématiques), celles-ci sont vues de façon distincte et Alexa et Josie ne savent pas comment les mailler. Ces futures enseignantes aimeraient avoir des cours qui lieraient l'aspect disciplinaire en mathématiques et l'aspect éducation afin de se sentir préparées aux mathématiques de l'enseignement ou à l'enseignement des mathématiques versus être formées en mathématique et en enseignement de façon séparée.

> Alexa : Hum. J'aime le fait de pouvoir dire que je fais un baccalauréat en science, parce que ça m'intéresse. Ce n'est pas pour rien que je veux enseigner les mathématiques, parce que j'aime ça. Mais ce que je trouve incorrect est qu'il n'y a aucun lien entre le baccalauréat en science et le baccalauréat en éducation. On dirait qu'ils devraient plus tenir compte du fait que nous on veut enseigner la science. On ne veut pas enseigner n'importe quoi et on ne veut pas juste faire de la science. On veut faire les deux! Trouver une façon… Il devrait y avoir des cours de sigle « EducMath », où on apprendrait les mathématiques mais comme [dans un contexte d'enseignement].

5.3.5 Cinquième rupture : l'identité des futurs enseignants dans les cours de mathématiques avancées

À ceci, les futurs enseignants ajoutent une cinquième et dernière rupture, une rupture sur le plan de leur identité professionnelle dans les cours de mathématiques avancées. Celle-ci n'est pas soulignée dans la littérature. À titre d'exemple, Josie et Gilles vivent une certaine rupture d'identité dans leurs cours, comme si on ne s'adressait pas à eux en tant que futurs enseignants dans leurs cours de mathématiques avancées, alors qu'on parle davantage à des futurs mathématiciens (ou à des futurs ingénieurs dans le cas de Gilles). Gilles partage que dans un de ses cours, la première chose que son professeur a dite est qu'il ne savait pas en quoi les contenus de son cours étaient utiles pour les futurs enseignants. Josie, elle, explique qu'elle ne se sent pas libre de poser ses questions mathématiques en lien avec l'enseignement, comme de contextualiser, d'expliquer un concept plus en profondeur pour faire ressortir le sens et le pourquoi, etc. Ainsi, Josie ne s'investit pas et ne pose pas ses questions, car elle ne veut pas faire perdre le temps des autres étudiants non futurs enseignants, de telle sorte que les cours deviennent encore moins pertinents pour elle, puisqu'elle s'y sent peu interpellée en tant qu'enseignante.

L'identité de l'enseignant est la reconnaissance de qui il est, par lui-même et par les autres. Josie et Gilles reconnaissent qu'ils sont des futurs enseignants, mais ils ne se sentent pas reconnus comme futurs enseignants à l'intérieur de leurs cours de mathématiques avancées, où on les traite plutôt comme des futurs mathématiciens. Les futurs enseignants se forment une certaine identité de qui ils sont comme enseignants de mathématiques à travers les expériences mathématiques qu'ils vivent en formation (Bednarz, 2012). Les futurs enseignants de mon étude nous informent que l'identité mathématique qu'ils développent à travers leur formation en mathématiques avancées n'est pas celle d'un enseignant de mathématiques, mais plutôt celle d'un mathématicien; comme si leur façon de voir les mathématiques, leur façon de les comprendre, de les faire et de les expliquer, leur façon de les parler et de les écrire... se développaient comme celles d'un mathématicien et non comme celles d'un futur enseignant[29]. Ces derniers ne sentent pas qu'on s'adresse à eux comme futurs enseignants dans leurs cours de mathématiques avancées. Ce faisant, ils ressentent un malaise à poser des questions pour faire des liens ou encore pour comprendre le sens derrière les symboles ou manipulations mathématiques, car ces questions ne seraient pas pertinentes pour les autres étudiants de la classe (mathématiciens, ingénieurs, physiciens, etc.).

Cette rupture sur le plan de l'identité mathématique des futurs enseignants est nouvelle et importante. Les futurs enseignants de mon étude soulèvent une question fondamentale, soit celle de l'auditoire à qui l'on s'adresse. Non seulement les contenus mathématiques (leur forme, leur nature et la façon de les faire) peuvent être en rupture avec les mathématiques mobilisées en classe du secondaire, mais le message dans son ensemble s'adresse à des futurs mathématiciens qui veulent avancer dans les contenus et non à des futurs enseignants qui se posent des questions sur le sens des mathématiques du secondaire, sur leur enseignement et sur leur apprentissage, à travers l'apprentissage de ces contenus avancés. C'est ainsi que les futurs enseignants ne se sentent pas libres de poser leurs questions en lien avec leur domaine et ne sentent pas qu'on s'adresse à eux, ce qui rend leurs cours moins pertinents pour eux.

---

[29] Même si, bien évidemment, la façon de faire les mathématiques en mathématiques avancées n'est pas non plus la façon de faire les mathématiques du futur mathématicien (Burton, 2004; Proulx et Bednarz, 2010).

5.3.5.7 Retour global sur les ruptures

Dans un premier temps, mon étude permet d'ajouter à la littérature en exemplifiant les trois hypothèses de ruptures soulevées dans Proulx et Bednarz (2010). Alexa et Monic partagent que le formalisme et le symbolisme accrus en mathématiques avancées les éloignent de la manière de parler et d'écrire les mathématiques au secondaire. Monic explique qu'autant la nature compressée et l'aspect hautement symbolique des mathématiques avancées l'éloigne de la compréhension profonde qu'elle avait auparavant des mathématiques du secondaire. Enfin, Alexa et Josie font part de l'écart entre la façon de faire les mathématiques avancées du professeur de mathématiques et la façon souhaitée de les faire en classe du secondaire.

En plus d'exemplifier les trois ruptures, les futurs enseignants de mon étude font part de deux autres ruptures. D'une part, les liens entre les contenus en mathématiques avancées et les contenus mathématiques du secondaire sont laissés à la charge des étudiants (Hache, Proulx et Sagayar, 2009), mais ils ne sont pas évidents à faire pour eux. Ce manque de liens explicites se traduit par une rupture globale, une déconnexion, entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire. D'autre part, une rupture additionnelle se situe sur le plan de leur identité mathématique en tant que futurs enseignants de mathématiques du secondaire. Dans les cours de mathématiques avancées, on s'adresse à des futurs mathématiciens, et non à des futurs enseignants, ce qui rend ceux-ci mal à l'aise pour poser des questions en lien avec les mathématiques du secondaire (comme des questions sur le sens sous-jacent aux concepts ou sur des liens entre les contenus du secondaire et les contenus en mathématiques avancées). Les futurs enseignants rappellent ici qu'ils font partie de l'auditoire et qu'ils aimeraient qu'on s'adresse aussi à eux. Les cours de mathématiques avancées jouent un rôle dans le développement de leur identité mathématique, mais ils ont davantage d'opportunités de développer leur identité de mathématiciens que de futurs enseignants de mathématiques dans ces cours.

Enfin, ma recherche fait plus qu'exemplifier les ruptures et d'en ajouter des nouvelles, car elle nuance aussi la question de la nature compressée des mathématiques avancées. De prime abord, Josie perçoit de façon positive l'utilisation compressée des mathématiques du secondaire à l'intérieur des cours de mathématiques avancées, puisque pour elle il faut bien comprendre un contenu pour pouvoir l'utiliser dans un autre contexte. Sa perception remet en question la rupture qui suggère que le sens des mathématiques est « caché » lorsque celles-ci sont sous forme compressée. Bref, elle soulève des nouvelles questions à l'égard des liens possibles entre les compréhensions mathématiques développées en utilisant les mathématiques de façon compressée dans d'autres contextes et les compréhensions mathématiques « décompressées » nécessaires pour l'enseignement. Son regard positif nuance la rupture, qui auparavant était perçue davantage négativement.

5.4 La confiance

À tout ceci s'ajoute une dimension importante sur le plan de la confiance. Cette idée de confiance, tirée de l'étude de Zazkis et Leikin (2010), a pris une tournure très différente dans mon étude. Dans la recherche de Zazkis et Leikin (2010), certains participants disent être plus confiants et confortables en mathématiques à cause de leur formation en mathématiques avancées : ils en savent maintenant plus que leurs élèves et sont capables d'effectuer certaines tâches plus rapidement. Ceci les aide dans leur planification, la formulation des problèmes et la transmission du contenu. Dans mon étude, la question de la confiance ressort aussi chez les futurs enseignants interviewés, et ce, sous différents angles : alors que certains gagnent de la confiance à travers leur cheminement en mathématiques avancées, d'autres en perdent.

5.4.1 Les futurs enseignants *gagnent* confiance en mathématiques à travers leur formation en mathématiques avancées

De façon générale, en revoyant les mathématiques du secondaire à l'intérieur de cours de mathématiques avancées, les futurs enseignants se disent plus confiants dans leur compréhension des contenus. Avec un regard plus fin, on voit que les futurs enseignants tirent leur confiance de différentes sources, c'est-à-dire que ce qui leur donne confiance est différent pour chacun. Voici trois exemples qui illustrent ce gain de confiance.

Un premier exemple est celui de Gilles qui dit être plus confiant à l'égard de certains concepts mathématiques, comme le théorème de Pythagore, car il a étudié les preuves qui expliquent le pourquoi sous-jacent dans son cours d'histoire des mathématiques. Ceci lui permet de comprendre le sens derrière ces mathématiques au lieu de seulement savoir comment les résoudre ou comment appliquer la formule. Il gagne ainsi de la confiance, car il peut désormais davantage répondre aux questions des élèves qui veulent aller au-delà des procédures mathématiques pour comprendre le sens derrière certaines formules mathématiques.

Un deuxième exemple est tiré des cas de Chloé et de Gilles, qui gagnent de la confiance à l'égard des mathématiques du secondaire car ils ont étudié des mathématiques avancées plus difficiles, ce qui rend les mathématiques du secondaire plus faciles. Cette idée que les mathématiques du secondaire sont maintenant faciles apparaît aussi dans l'étude de Zazkis et Leikin (2010), dans laquelle un futur enseignant partage que sa facilité à calculer rapidement les problèmes algébriques lui permet de voir rapidement les erreurs de ses élèves. Chloé et Gilles font le lien entre cette facilité à résoudre les problèmes mathématiques du secondaire et la confiance qu'ils ressentent à aller enseigner ces contenus mathématiques.

Le degré de difficulté des cours de mathématiques avancées qui vont plus loin que les contenus du secondaire (cours de niveau 2^{e} à 4^{e} année) est élevé. Les futurs enseignants restent surpris face au haut degré de difficulté des cours. Par exemple, les cours sont difficiles au point que ça en est frustrant pour Gilles, que Chloé ne les comprend pas vraiment ou encore que Alexa les apprend par cœur pour son examen et les oublie après. Chacun vit à sa façon ces difficultés et en retire différents éléments pour sa préparation mathématique comme futur enseignant. Pour Gilles et Chloé, ayant maintenant travaillé avec des mathématiques avancées plus difficiles, les mathématiques du secondaire sont pour eux plus faciles à résoudre, ce qui leur donne confiance pour aller les enseigner. Chloé donne l'exemple qu'il est maintenant plus facile pour elle d'isoler des inconnues ou des variables d'une équation en algèbre élémentaire puisque, dans ses cours de mathématiques avancées, elle manipule des objets beaucoup plus abstraits et formels. C'est aussi le cas de Gilles, pour qui c'est en retournant dans une classe du secondaire (9^{e} année), par l'entremise d'un stage, qu'il a réalisé à quel point sa formation disciplinaire l'a fait cheminer, car il a pu répondre à toutes les questions des élèves sans problème et les mathématiques du secondaire sont pour lui désormais faciles à faire. En un mot, à travers les difficultés mathématiques que les futurs enseignants vivent dans leur formation disciplinaire, les mathématiques enseignées au secondaire deviennent plus faciles[30]. Ce n'est pas le cas d'Alexa qui, elle, ne voit pas l'utilité de ses cours de mathématiques dont les contenus sont plus avancés que ceux du secondaire. Sa formation mathématique à un tout autre impact sur sa confiance, comme on le verra plus bas.

Un troisième exemple est celui de Rémi. La raison pour laquelle il est plus confiant est très différente. Il est confiant parce qu'il est devenu habile à travers sa formation en mathématiques avancées à apprendre des nouvelles mathématiques. Tout particulièrement, revoir les contenus du secondaire dans ses cours universitaires lui a permis de prendre le temps de réfléchir à ces contenus et de corriger certaines de ses conceptions erronées. Ainsi, si les élèves posent des questions en classe qui l'amènent à réfléchir différemment sur un problème mathématique, il est confortable à l'idée d'explorer avec eux, non pas parce qu'il a déjà travaillé sur ces mathématiques, mais parce qu'il est confortable avec l'apprentissage de nouvelles mathématiques. Pour lui, sa formation en mathématiques avancées lui a permis de développer une aisance à apprendre des mathématiques, ce qui lui donne confiance en ses habiletés mathématiques et en sa capacité à enseigner n'importe quel contenu mathématique.

Cependant, ce ne sont pas tous les futurs enseignants qui développent confiance à travers leur formation en mathématiques avancées. Cette dernière joue parfois l'effet contraire.

5.4.2 Les futurs enseignants *perdent* confiance à travers leur formation en mathématiques avancées.

La formation en mathématiques avancées a aussi joué l'effet contraire chez certains futurs enseignants de mon étude, qui ont perdu confiance par rapport à leurs compréhensions

---

[30] Les cas de Gilles et Chloé sont toutefois particuliers. Ils précisent dans l'entrevue que, pour eux, ce sont les procédures qui sont plus faciles à faire (grâce à leur formation en mathématiques avancées) et qu'il n'est pas plus facile de comprendre le sens derrière les mathématiques du secondaire (ils le disent et c'est aussi ce qu'ils vivent dans les tâches où ils ont de la difficulté à les résoudre). Malgré ceci, ils sont plus confiants à aller enseigner, car les mathématiques du secondaire sont plus faciles à leurs yeux. D'une certaine manière, on pourrait dire qu'il s'agit dans le cas de Gilles et Chloé d'une « confiance imaginaire », car ils ne comprennent pas mieux le sens des mathématiques du secondaire et sont simplement plus habiles et plus rapides à les résoudre. Reste que, cette facilité à manipuler entraine chez eux une confiance à enseigner ces contenus. Ils sont plus confiants, et ceci n'est pas négligeable comme « effet » de leur formation.

des mathématiques du secondaire. Voici trois exemples qui illustrent cette perte de confiance sur le plan mathématique, soit celui de Talia, celui d'Alexa et de Josie et celui de Monic. Aussi, j'ajoute un exemple concernant la perte de confiance sur le plan de l'enseignement des mathématiques.

Le premier exemple est celui de Talia, mais avant, voici un petit retour à la littérature pour le contextualiser. Dans les recommandations pour la formation mathématique des futurs enseignants de mathématiques au secondaire, on entend souvent que les enseignants doivent en savoir plus et être plus formés en mathématiques que leurs élèves, ce qui se traduit par une recommandation pour qu'ils aient plus de cours en mathématiques avancées. Toutefois, Davis et Simmt (2006) rappellent que cette recommandation est difficile à appuyer (voir Begle, 1979; Mapolelo, 1999; Monk, 1994) et soulèvent même que cette suggestion pour que les futurs enseignants suivent « plus » de mathématiques n'est peut-être pas appropriée. Pour eux, il ne s'agit pas de voir « plus » de mathématiques, mais de les voir « plus en qualité », plus en profondeur. Ce travail de qualité fait écho aux travaux de Ball et Bass (2000) et de Ma, (1999) sur les mathématiques pour l'enseignement. Ces chercheurs avancent que les mathématiques mobilisées en pratiques sont sous forme décompressée, c'est-à-dire que l'enseignant doit être capable de déconstruire ses propres connaissances mathématiques dans une forme moins finale pour qu'elles soient accessibles aux élèves; il doit les connaitre en profondeur et être flexible pour s'adapter aux idées émergentes des élèves.

Le vécu de Talia remet fortement en question cette idée voulant que les enseignants en sachent plus que leurs élèves et donc qu'ils soient plus formés en mathématiques avancées. Les tâches l'amènent à voir qu'il existe une autre sorte de « plus loin », c'est-à-dire que le « plus loin » qu'elle a vécu dans ses cours de mathématiques avancées qui réfère à des nouveaux contenus de mathématiques avancées, est différent du « plus loin » des mathématiques présentées dans les tâches, qui demande de creuser les contenus et les procédures mathématiques du *secondaire* plus en profondeur pour comprendre leur sens, leur signification. Bref, pour Talia, le « plus » qu'elle apprend dans sa formation en mathématiques avancées n'est pas le même « plus » qu'elle doit connaître pour enseigner les mathématiques.

Alexa, Josie et Monic sentent aussi le besoin de creuser les mathématiques du secondaire pour mieux comprendre le sens derrière les procédures, les relations entre les différents concepts mathématiques et les subtilités cachées. De ce manque nait, pour elles, un manque de confiance en mathématiques pour aller enseigner. Les deux prochains exemples abordent leur vécu.

Le deuxième exemple concerne Alexa et Josie. Les contenus en mathématiques avancées sont pour elles déconnectés de ceux du secondaire. Elles ne voient pas comment les mathématiques avancées sont en lien avec les contenus mathématiques du secondaire et encore moins avec les mathématiques mobilisées en classe, comme dans les tâches. Josie craint ne pas pouvoir répondre aux questions des élèves, car elle n'a pas elle-même étudié les mathématiques du secondaire en profondeur. Alexa, elle, ne se sent simplement pas prête sur le plan mathématique pour aller enseigner; les mathématiques avancées ne l'ont pas du tout préparée, selon elle, sur le plan mathématique pour son enseignement futur. C'est ainsi qu'elles manquent de confiance sur le plan des contenus mathématiques du secondaire, car elles ne croient pas mieux les comprendre, même avec une formation universitaire en mathématiques. Elles sentent le besoin de creuser les mathématiques du secondaire plus en profondeur, pour mieux comprendre leurs significations, leurs sens, leurs difficultés, leurs subtilités, etc.

Le cas de Monic est parlant par rapport à la perte de confiance. Au secondaire, elle était confiante dans ses habiletés mathématiques et dans sa capacité à expliquer de différentes manières. Après quatre ans d'études en mathématiques avancées, elle ne se sent plus vraiment confortable à l'idée d'aller enseigner, car elle a peur que ses explications soient trop formelles et trop « avancées » pour ses élèves. De plus, elle craint ne plus comprendre les mathématiques du secondaire de façon décompressée, comme elle les comprenait quand elle était elle-même élève.

> Monic : Je ne me sens pas du tout confortable, comme si j'ai perdu mon « don ». J'ai hâte [d'enseigner], mais j'ai peur de voir comment ça va aller. J'ai peur de perdre mes élèves totalement. [...] Je perçois les choses d'une certaine façon, qui n'est pas nécessairement la façon dont je les percevais au secondaire. Donc, la façon que je les perçois n'est pas nécessairement compatible avec les connaissances que les élèves ont déjà.

Monic craint qu'elle ne réussisse pas à expliquer au niveau des élèves, comme si elle est allée trop loin en mathématiques et que les mathématiques du secondaire étaient maintenant faciles au point d'être difficiles à décompresser, à expliquer, à rendre concrets et accessibles. Monic se sent même moins prête sur le plan mathématique que lorsqu'elle était au secondaire, car les mathématiques avancées l'ont éloignée des mathématiques mobilisées en classe.

Le dernier et quatrième exemple ne concerne pas la confiance sur le plan de la compréhension des contenus mathématiques, mais plutôt la confiance sur le plan de l'enseignement des mathématiques. Certains futurs enseignants ne savent pas comment jumeler leur formation en éducation avec leur formation universitaire en mathématique. Les futurs enseignants s'entendent sur le fait que ce qu'ils vivent dans leurs cours de mathématiques avancées est loin de la façon dont on leur suggère d'enseigner dans leur formation en éducation. D'un côté, on leur dit d'enseigner d'une certaine manière (en faisant interagir les élèves, en partant de leurs connaissances et raisonnements, en prônant le travail de groupe, etc.) et, de l'autre côté, on leur enseigne de façon magistrale dans les cours de mathématiques avancées. Pour Josie et Alexa, ceci fait en sorte qu'elles ne savent pas comment mettre en pratique les théories qu'elles apprennent dans leur formation en éducation, pour enseigner les mathématiques d'une manière qu'elles n'ont elles-mêmes jamais vécue.

5.4.3 Retour sur le thème « confiance »

La formation disciplinaire en mathématiques avancées a une diversité d'effets sur la confiance mathématique que bâtissent les futurs enseignants pour aller enseigner les mathématiques au secondaire. Pour certains futurs enseignants de mon étude, comme ce fut le cas pour des enseignants de l'étude de Zazkis et Leikin (2010), ils ont plus confiance qu'avant en leurs compétences mathématiques. Mon étude permet de voir ce qui peut donner confiance. Par exemple, que les mathématiques du secondaire sont maintenant plus faciles à leurs yeux ou encore que la formation en mathématiques avancées permet d'apprendre des nouvelles mathématiques, ce qui ouvre la porte à pouvoir aborder des mathématiques nouvelles et émergentes en classe.

Cependant, le thème de la confiance ne se termine pas là. Mon étude ajoute à ce thème en avançant l'effet contraire, soit que certains futurs enseignants vivant une formation en mathématiques avancées perdent confiance sur le plan mathématique au fur et à mesure qu'ils avancent dans leur programme. C'est le cas d'Alexa, de Josie, de Monic et de Talia, qui manquent de confiance sur le plan de leur compréhension des mathématiques du secondaire. Elles ne connaissent pas les mathématiques du secondaire en profondeur (elles n'ont pas creusé leur sens dans leur formation mathématique) et n'ont pas les outils pour les comprendre plus en profondeur. Contrairement à Rémi, elles n'ont pas vraiment appris à apprendre des mathématiques et ne savent pas comment creuser un contenu pour le comprendre plus en profondeur. Pour elles, les mathématiques avancées les éloignent des mathématiques mobilisées en classe, par la façon dont elles sont faites, par la façon dont elles sont parlées et écrites et par leur nature compressée. De plus, elles manquent aussi de confiance à l'égard de leur façon d'enseigner les mathématiques. Alexa et Josie expliquent qu'elles désirent diversifier leur enseignement, comme le prônent leurs professeurs de faculté d'éducation, mais elles ne savent pas comment procéder autrement que de reproduire l'enseignement magistral qu'elles ont vécu dans leurs cours de mathématiques avancées.

5.5 En guise de conclusion

La littérature de recherche met de l'avant trois façons dont les formés conjuguent leur formation en mathématiques avancées avec leur préparation mathématique à l'enseignement des mathématiques du secondaire, soit des réinvestissements mathématiques, des réinvestissements métamathématiques et des ruptures. La formation mathématique influence aussi la confiance des futurs enseignants, et ce, de différentes manières. Mes données de recherche viennent bonifier ces thèmes en donnant des exemples, en ajoutant des aspects et en nuançant des idées.

Parlons premièrement des réinvestissements mathématiques. Par leurs expériences, les futurs enseignants de mon étude informent qu'à travers les cours de mathématiques avancées qui retravaillent les contenus (de fin) du secondaire, comme les dérivées et les matrices, ils arrivent à maîtriser les procédures (le « comment faire ») et, à l'occasion, à mieux comprendre le pourquoi derrière certains théorèmes ou formules et à cibler des difficultés mathématiques derrière des concepts (de fin) du secondaire. De plus, ils en retirent aussi des outils qu'ils peuvent réinvestir, à leur façon, dans leur pratique de classe, comme des exemples ou des anecdotes historiques intéressantes à raconter. Ceci bonifie le thème des réinvestissements des contenus introduit par Zazkis et Leikin (2010) et par Even (2011), en informant en quoi les cours de mathématiques avancées qui revoient les contenus du secondaire sont pertinents pour eux. Notons toutefois qu'aucun réinvestissement sur le plan des contenus mathématiques n'est tiré des cours de mathématiques avancées qui vont plus loin que les contenus du secondaire (par exemple, suite à l'établissement de liens entre les contenus en mathématiques avancées et ceux du secondaire).

Deuxièmement, regardons les réinvestissements métamathématiques. D'abord, comme le montre l'étude d'Even (2011), la façon de faire les mathématiques du professeur dans le cours de mathématiques avancées influence aussi la vision de l'enseignement des mathématiques du futur enseignant. Sauf que, dans l'étude d'Even (2011), les enseignants étaient inspirés par la façon d'enseigner du professeur, alors que dans mon étude les futurs enseignants ne veulent pas reproduire le type d'enseignement (magistral) qu'ils vivent dans les cours de mathématiques avancées. Par contre, ils ne savent pas trop comment faire autrement. Ensuite, les futurs enseignants donnent des exemples de ce qu'ils apprennent lorsqu'ils vivent des difficultés mathématiques dans leurs cours de mathématiques avancées ou de comment les mathématiques avancées élargissent leur vision du panorama mathématique. Enfin, ma recherche nuance aussi certains réinvestissements métamathématiques, comme le fait que les mathématiques avancées ne permettent pas, pour tous, de faire des liens entre les mathématiques et la vie réelle. Ces liens sont un apport important de la formation en mathématiques avancées pour les enseignants des études d'Even (2011) et de Zazkis et Leikin (2010), mais ils ne sont pas clairs pour les futurs enseignants de mon étude. Une autre nuance soulignée par ma recherche est qu'on peut apprendre à apprendre des mathématiques même si les mathématiques sont souvent présentées déjà toutes faites, c'est-à-dire qu'une certaine activité mathématique peut être vécue par un étudiant même si c'est à travers un cours magistral, lorsqu'il réfléchit activement par lui-même.

Troisièmement, les futurs enseignants vivent aussi des ruptures. Les mathématiques avancées ne sont, pour eux, pas les mêmes mathématiques que les mathématiques mobilisées dans la classe du secondaire. Elles diffèrent dans leurs contenus, leurs formes, leurs natures et dans la façon dont elles sont faites en classe. En plus des ruptures sur le plan mathématique, les futurs enseignants vivent aussi une rupture entre leur formation disciplinaire en mathématiques avancées et leur formation en éducation, à l'égard de la façon dont les mathématiques sont enseignées (dans leur cours de mathématiques avancées) et la façon dont ils devraient les enseigner (selon leurs cours d'éducation). À ceci s'ajoute une dernière rupture sur le plan de leur identité professionnelle d'enseignant de *mathématiques*, qui n'est pas vraiment considérée dans leurs cours de mathématiques avancées dans lesquels on s'adresse davantage aux mathématiciens qu'aux enseignants de mathématiques.

Enfin, la formation en mathématiques avancées joue aussi un rôle sur la confiance mathématique des futurs enseignants et sur leur confiance à aller enseigner ces mathématiques. Cet aspect est nouveau et ajoute à l'idée soulignée dans l'étude de Zazkis et Leikin (2010) qui avançait un gain de confiance. Pour certains, les mathématiques avancées donnent confiance, car elles rendent les mathématiques du secondaire faciles et donc faciles à enseigner. Mais pour d'autres, les mathématiques avancées font perdent confiance, car elles les éloignent des mathématiques mobilisées dans une classe au secondaire, soit des compréhensions mathématiques du secondaire et de la façon de les enseigner.

CHAPITRE VI

CONCLUSION

Dans le but d'offrir des éléments de réponses à mes questions de recherche, j'aborde dans ma conclusion diverses thématiques importantes qui ressortent de mon étude et qui apportent des éléments nouveaux au domaine de recherche. Cela dit, alors que depuis le début j'ai structuré mes analyses en fonction de mon cadre d'analyse, soit en commençant avec les réinvestissements des contenus, les réinvestissements métamathématiques et ensuite les ruptures, je me permets ici de sortir de cette structure pour souligner les grandes thématiques qui se dégagent de mon étude. Par la suite, je discute de quelques retombées de mon étude pour la formation des enseignants.

6.1 Retour sur les questions de recherche

À travers ma problématique de recherche et par l'élaboration de mon cadre conceptuel, j'ai montré que la formation disciplinaire en mathématiques avancées, en tant que préparation mathématique à l'enseignement des mathématiques au secondaire, est beaucoup questionnée en recherche. Les travaux font ressortir divers réinvestissements possibles de la formation en mathématiques avancées, ainsi que diverses ruptures entre cette formation et les mathématiques mobilisées par l'enseignant dans sa classe du secondaire. Le corpus de recherche sur ce type de formation amenait ainsi des résultats divergents, allant de retombées positives à des retombées négatives, voire même à aucune ou presque retombées dans certains cas, pour les futurs enseignants par rapport à leur pratique de classe. Il y avait place à mieux comprendre ce flou. En allant questionner directement les futurs enseignants vivant cette formation en mathématiques, ma recherche a dès le début eu l'intention d'offrir des éclaircissements sur ces questions. Par une entrée que j'ai appelée « la voix du formé », j'ai voulu ajouter aux écrits des chercheurs et formateurs des éléments supplémentaires sur les questions de formation mathématique des enseignants du secondaire. À ce titre, la question qui a orienté ma recherche est la suivante :

> Comment les futurs enseignants conjuguent-ils leurs expériences en mathématiques dans leurs cours de mathématiques avancées et leur préparation à devenir des enseignants de mathématiques au secondaire?

À celle-ci s'ajoutent deux-sous questions de recherche :

> Qu'en est-il au niveau des réinvestissements des contenus et des réinvestissements métamathématiques?

> Les enseignants vivent-ils des ruptures, telles qu'en parle la recherche, au niveau de leur préparation à l'enseignement des mathématiques au secondaire? Si oui, de quelle nature sont-elles?

Voici, dans ce qui suit, diverses thématiques importantes qui sont ressorties.

6.1.1 Les contenus « plus » avancés

En recherche et en formation, on entend que les mathématiques avancées permettent de vraiment creuser un contenu de base pour le connaître en profondeur, c'est-à-dire que d'étudier pendant trois ou quatre ans les embranchements des contenus du secondaire à l'intérieur des mathématiques avancées (par exemple, étudier l'analyse vectorielle pour mieux comprendre les vecteurs) permet de comprendre leurs subtilités et leurs sens (voir, par exemple, Tanguay 2012). Pour les futurs enseignants de mon étude, ce n'est toutefois pas le cas. Aucun futur enseignant n'a mentionné vouloir réinvestir les contenus mathématiques plus avancés que ceux du secondaire dans leur pratique de classe. Pour eux, l'étude de ces mathématiques ne leur permet pas de mieux comprendre les mathématiques du secondaire, ni de faire des liens. Cette absence de réinvestissement des contenus plus avancés que ceux du secondaire est parlante et peut amener à remettre en question le choix de ces contenus pour la formation mathématique du futur enseignant. Les futurs enseignants ont expliqué que les liens entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire ne vont pas de soi pour eux et qu'ils vivent même une rupture dans laquelle les mathématiques avancées sont déconnectées des mathématiques du secondaire. Mes données viennent supporter l'idée que les liens entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire ne vont pas de soi pour les futurs enseignants (Gourdeau et Proulx, 2012; Hache, Proulx et Sagayar, 2009). Les expériences des futurs enseignants montrent que le choix des contenus n'est pas sans importance pour eux et qu'ils veulent faire des liens entre les contenus mathématiques qu'ils apprennent à l'université et les contenus mathématiques qu'ils enseigneront au secondaire. Ma recherche va toutefois encore plus loin que ce manque de lien, en montrant que le travail des contenus en mathématiques avancées n'aide pas les futurs enseignants à mieux comprendre les mathématiques du secondaire. Les futurs enseignants de mon étude expliquent que ce qui les aide à mieux comprendre et approfondir les contenus mathématiques du secondaire sont les cours qui revoient directement ces contenus, comme les cours sur les dérivées et les matrices, ainsi que le cours d'histoire des mathématiques. Ces cours sont pertinents pour eux, car ils leur permettent directement de mieux comprendre les contenus du secondaire en jeu et ils peuvent ainsi réinvestir dans leur classe leurs nouvelles compréhensions (du comment et du pourquoi), en plus de quelques outils tirés de leurs cours (comme des exemples ou des anecdotes historiques).

Bien que ce résultat puisse sembler évident, les contenus mathématiques réinvestis par les enseignants sont ceux en lien étroit avec les contenus du secondaire. C'est ainsi que les contenus mathématiques (plus) avancés sont pour certains très peu pertinents pour leur préparation mathématique, ces contenus ne les aidant pas à mieux comprendre les contenus du secondaire et leur paraissant même déconnectés des mathématiques qu'ils vont enseigner. Pour d'autres, toutefois, la pertinence et l'impact de ces cours se manifestent par rapport à un autre aspect, soit un aspect métamathématique. J'aborde cet aspect dans les trois prochaines sections.

6.1.2 Les difficultés en mathématiques

Les cours de mathématiques avancées donnent un contexte dans lequel les futurs enseignants vivent, souvent pour la première fois, des difficultés en mathématiques. Les futurs enseignants de mon étude expliquent apprendre beaucoup à travers les difficultés mathématiques qu'ils vivent dans leur formation en mathématiques avancées. Par exemple, certains ont appris à cibler ce qui les aide à mieux comprendre, comme l'utilisation des exemples et des représentations visuelles. Ceci leur donne des idées d'explications lorsque leurs élèves vivront eux aussi des difficultés en mathématiques. Ici, les futurs enseignants portent un regard métamathématique sur leur difficulté en mathématiques avancées et, par ce regard, en apprennent sur l'enseignement des mathématiques et sur la façon d'intervenir lorsqu'un élève ne comprend pas.

Un autre apprentissage lié aux difficultés vécues est qu'en surpassant leurs difficultés ou conceptions erronées, les futurs enseignants en apprennent aussi sur les mathématiques elles-mêmes et arrivent à cibler diverses difficultés conceptuelles liées aux contenus mathématiques appris. Les futurs enseignants apprennent ainsi sur les diverses subtilités des mathématiques. Dans le cas où il s'agit des mêmes contenus que ceux du secondaire, les futurs enseignants affirment que ceci leur permettra de mieux intervenir en classe si leurs élèves possèdent des conceptions semblables.

Mon étude met en relief que les mathématiques avancées peuvent représenter une belle occasion pour les futurs enseignants de vivre des difficultés sur le plan mathématique et à travers lesquelles, avec un regard méta, ils en apprennent beaucoup sur les mathématiques et aussi sur l'enseignement des mathématiques. On peut faire un parallèle avec la résolution de problème en mathématiques avancées tel que souligné dans Proulx, Corriveau et Squalli (2012), dont l'idée est de faire vivre des expériences mathématiques aux futurs enseignants pour qu'ils puissent se mettre dans la peau de leurs élèves, développer une certaine sensibilité envers les élèves avec lesquels ils vont travailler et conséquemment être empathiques. Dans le cas de mon étude, c'est l'expérience de vivre des difficultés mathématiques qui a joué ce rôle pour les futurs enseignants. Ces derniers se sont sensibilisés, à travers leur formation en mathématiques avancées, aux types d'explications qui aident à comprendre (les dessins ou les exemples) et aux difficultés derrière certains concepts. Et, à travers leurs difficultés, ils deviennent empathiques aux types de difficultés que vivront peut-être leurs élèves.

6.1.3 Le panorama mathématique

La formation en mathématiques avancées a permis d'élargir la vision du panorama mathématique de plusieurs futurs enseignants de mon étude, c'est-à-dire qu'elle les a plongés dans le monde mathématique du mathématicien en les faisant travailler des contenus mathématiques avancés qui sont à la source des grandes découvertes mathématiques du XX^e siècle, qui sont à la base du travail des ingénieurs, de l'informatique et des technologies et qui reculent jusqu'aux mathématiques anciennes comme celles des Babyloniens. Ceci a fait en sorte que les futurs enseignants veulent, à leur tour, offrir à leurs élèves une vision plus large du champ mathématique, de ce qu'elles étaient hier, de comment elles évoluent à travers le temps, de ce qui fait qu'elles ne sont pas statiques. Aussi, certains veulent offrir à leurs élèves un aperçu de ce à quoi les mathématiques ressemblent à un niveau plus avancé. Ce désir de transmettre à leurs élèves cette vision plus large des mathématiques vient du fait que ces mathématiques sont belles pour eux et qu'ils veulent faire vivre à leurs élèves divers moments marquants qu'ils ont eux-mêmes vécus (comme raconter des anecdotes de mathématiciens d'autrefois, enseigner des procédures mathématiques utilisées dans le passé dans l'intention de leur montrer que les mathématiques évoluent, montrer des « fun facts » pour leur donner une idée de ce à quoi ressemblent les mathématiques avancées). Mais, aussi, parce qu'ils auraient eux-mêmes aimé, à leur entrée à l'université, avoir une idée, aussi petite soit-elle, de ce à quoi ressemblent les mathématiques au-delà du curriculum scolaire, ce qui leur aurait peut-être évité certaines surprises lorsqu'ils ont fait face pour la première fois aux mathématiques avancées, notamment au haut degré d'abstraction. Bref, les cours de mathématiques avancées, par l'étendue des contenus qu'ils offrent, ont permis à certains futurs enseignants de voir et de goûter aux mathématiques dans un panorama plus large, non restreint au curriculum du secondaire. On voit que les mathématiques avancées ont joué un grand rôle dans la vision qu'ont développée ces futurs enseignants par rapport à ce que sont les mathématiques et ceci les inspire à transmettre cette vision plus large à leurs élèves.

6.1.4 Apprendre à apprendre

Pour certains futurs enseignants, la formation en mathématiques avancées leur a permis de développer une habileté primordiale à leur carrière en enseignement des mathématiques, soit d'apprendre à apprendre en mathématiques en devenant habile à faire des mathématiques et à raisonner les mathématiques pour résoudre plus de problèmes, plus facilement. Il s'agit ici d'un effet important qui, jusqu'à maintenant, a été peu mis de l'avant dans la littérature. La façon magistrale d'enseigner les mathématiques avancées est souvent critiquée, car le travail des étudiants semble alors limité à la prise de notes et à faire en exercices des mathématiques dites statiques (Burton, 2004) ou déjà « toutes faites » (Janvier, dans Bednarz, Golding et Lefèvre, 1997). Cet effet positif rappelle qu'au-delà des contenus et de la façon dont ils sont transmis (et des critiques que certains futurs enseignants en font), la formation en mathématiques avancées peut réussir à faire réfléchir l'étudiant pour qu'il se questionne mathématiquement, qu'il bloque devant des problèmes mathématiques, qu'il soit satisfait d'avoir trouvé la réponse après s'être creusé la tête, qu'il apprenne à raisonner en mathématiques, etc. Bref, qu'il apprenne à se former lui-même, car tout au long de sa carrière, l'enseignant sera confronté à des nouvelles questions et à de nouvelles mathématiques. On voit par le vécu des futurs enseignants que la formation en mathématiques avancées peut former le futur enseignant à se former, soit à être capable d'apprendre ces nouvelles mathématiques lorsqu'elles se présenteront.

On voit à travers les trois dernières thématiques que même si les contenus en mathématiques avancées sont différents de ceux du secondaire, les cours de mathématiques avancées peuvent avoir un impact significatif, au niveau méta, sur la formation du futur enseignant. Ces nombreux apprentissages métamathématiques rappellent qu'au-delà des contenus, la formation en mathématiques amène beaucoup aux futurs enseignants, jouant (souvent implicitement) sur la vision qu'ils développent de ce que sont les mathématiques, sur leurs habiletés à résoudre des problèmes, sur leur vision de l'apprentissage des mathématiques, etc. Pour plusieurs formateurs et chercheurs (voir le collectif de Proulx, Corriveau et Squalli, 2012), au-delà des contenus ce sont ces réflexions méta qui sont au cœur de la formation initiale du futur enseignant, pour qu'il puisse prendre en charge sa formation mathématique et qu'il développe une sensibilité envers les élèves avec lesquels il va travailler. Ma recherche appuie ces idées et donne un aperçu de la richesse des réflexions métamathématiques tirées des expériences en mathématiques avancées.

6.1.5 La confiance

Pour les futurs enseignants de mon étude, la formation en mathématiques avancées semble avoir eu une diversité d'effets sur leur confiance mathématique pour aller enseigner les mathématiques au secondaire. Pour certains futurs enseignants, la formation en mathématiques avancées leur a donné confiance. Ce gain de confiance est aussi soulevé par des enseignants de l'étude de Zazkis et Leikin (2010), qui disent être devenus confiants car ils en savent maintenant plus que leurs élèves du secondaire. Les futurs enseignants de mon étude, tout en disant la même chose, vont plus loin en expliquant diverses sources de leur confiance. La confiance gagnée à travers leur formation mathématique universitaire provient, pour certains, de l'opportunité qu'ils ont eue de prendre le temps de réfléchir (à nouveau) aux mathématiques du secondaire, ce qui leur a permis de mieux se les approprier. Tout particulièrement, ils ont creusé le sens (le pourquoi) de divers concepts, comme le théorème de Pythagore qu'ils ont exploré par certaines preuves dans le cours d'histoire des mathématiques. Pour d'autres, la confiance gagnée vient des difficultés qu'ils ont vécues, du haut degré de difficulté des mathématiques. Après un tel cheminement, les mathématiques du secondaire deviennent plus faciles à résoudre pour eux : ils peuvent trouver la solution rapidement, répondre sans hésitation aux questions des élèves (pendant les stages), etc. Enfin, pour d'autres, le gain de confiance émerge du fait qu'ils ont appris, à travers leur formation en mathématiques avancées, à apprendre des mathématiques, c'est-à-dire qu'en faisant constamment des mathématiques nouvelles (et avancées dans ce cas), ils ont développé une certaine aisance à explorer de nouvelles mathématiques et à se débrouiller pour les apprendre. Ainsi, si les élèves soulèvent de nouvelles questions ou de nouveaux problèmes en salle de classe ou si un nouveau contenu s'ajoute au curriculum scolaire, ils se sentent confortables, car ils sont confiants qu'ils peuvent apprendre ces nouvelles mathématiques même s'ils n'ont pas eu de cours spécifiques sur ce sujet. Bref, comme ce fut le cas pour les enseignants de l'étude de Zazkis et Leikin (2010), la formation en mathématiques avancées donne confiance à plusieurs futurs enseignants de mon étude, et ce, pour diverses raisons.

Par contre, certains futurs enseignants expriment tout le contraire : leur formation en mathématiques avancées a provoqué un manque, voire une perte de confiance. Le manque de confiance, pour certains, vient du fait qu'ils s'attendaient à approfondir leurs connaissances des mathématiques du secondaire à travers leur formation universitaire. Ces futurs enseignants connaissent les contenus mathématiques du secondaire, ils les connaissaient à la fin de leur secondaire. Mais, ils sont aussi conscients qu'ils ne les maîtrisent pas entièrement, qu'il y a place à mieux les comprendre et que, pour pouvoir bien les enseigner, ils ont besoin de les comprendre en profondeur, de comprendre le sens et le pourquoi caché derrière les symboles et les procédures. Or, la formation en mathématiques avancées ne leur a pas permis de comprendre plus en profondeur les mathématiques du secondaire. Ainsi, même s'ils savent très bien comment résoudre les problèmes provenant des mathématiques du secondaire, ils manquent de confiance et ils ne se sentent pas prêts, sur le plan mathématique, à aller enseigner, car ils ne connaissent pas les subtilités cachées des mathématiques du secondaire, ils ne connaissent pas celles-ci en profondeur. Dans d'autres cas, les futurs enseignants perdent confiance au fur et à mesure qu'ils avancent dans leur programme. Il ne s'agit pas ici du fait que les mathématiques avancées n'aident pas à mieux comprendre les mathématiques du secondaire, mais que les mathématiques avancées *éloignent* les futurs enseignants des mathématiques mobilisées en classe. Comme le dit Monic, elle sent qu'elle ne parle plus le même langage que ses élèves et qu'elle ne comprend plus les mathématiques de la même façon. Et ceci l'inquiète! De plus, certains développent aussi un manque de confiance à l'égard de la façon d'enseigner les mathématiques, c'est-à-dire qu'ils veulent enseigner comme le prônent leurs professeurs dans la faculté d'éducation, mais qu'ils ne savent pas comment faire autrement que de reproduire l'enseignement magistral vécu dans leurs cours de mathématiques avancées. À travers ces éloignements sur le plan mathématique et sur le plan de l'enseignement, un manque de confiance s'est installé, et ce, à travers une formation mathématique qui veut les préparer à enseigner les mathématiques.

6.1.6 L'identité mathématique

À la base, les cours de mathématiques avancées sont développés pour former les futurs mathématiciens. Ceci implique que, pendant leur formation en mathématiques avancées, les futurs enseignants se retrouvent dans des classes où leurs collègues sont de futurs mathématiciens ou ne sont tout simplement pas de futurs enseignants (variant, je le rappelle, d'un ratio d'un futur enseignant pour deux futurs mathématiciens à un ratio d'un futur enseignant pour 30 autres étudiants). Ainsi, comme l'explique Josie, ils se retrouvent dans des classes où les autres étudiants ne se posent pas le même genre de question qu'eux, ce qui crée parfois chez eux un malaise à poser leurs questions liées à l'enseignement des mathématiques du secondaire (par exemple, sur les liens entre les contenus en mathématiques avancées et ceux du secondaire). Ici, les futurs enseignants vont plus loin que les trois ruptures soulevées par la recherche à l'égard de la forme symbolique, de la nature compressée et de la façon magistrale d'enseigner les mathématiques avancées. Ils partagent que les cours de mathématiques avancées affectent leur façon de parler, d'écrire, de faire et de comprendre les mathématiques et que, dans l'ensemble, ils vivent une rupture d'identité. En d'autres mots, par rapport à tous ces aspects, soit la forme, la nature et la façon de faire les mathématiques, on ne s'adresse pas à eux et donc ils ne peuvent s'identifier comme futurs enseignants par rapport à aucun de ces aspects. Grossièrement, les futurs enseignants se sentent parachutés dans des cours qui s'adressent à un public cible de mathématiciens et où l'on ne s'adresse pas vraiment à eux comme futurs enseignants. Ainsi, l'identité qu'ils développent à travers leur formation en mathématiques avancées est davantage celle d'un mathématicien que celle d'un enseignant de mathématiques.

Cette rupture d'identité n'est pas une idée que l'on retrouve beaucoup dans la littérature. Elle est toutefois importante, aux dires des futurs enseignants de mon étude. C'est entre autres par l'accès à la voix du formé que cette constatation a été rendue possible. Les propos des futurs enseignants par rapport à leur identité montrent que cette question de l'auditoire n'est pas sans importance pour eux et que leur identité mathématique en dépend. Quelle identité existe-t-il pour le futur enseignant? En quoi est-elle semblable à l'identité mathématique du mathématicien? En quoi est-elle différente? Et comment y arriver? L'auditoire à qui l'on s'adresse semble jouer un rôle significatif sur l'identité mathématique des futurs enseignants. À quoi ressemblerait un cours de mathématiques avancées qui s'adresse aussi (ou uniquement) aux futurs enseignants? En quoi serait-il différent? En quoi serait-il semblable?

6.1.7 La compression vue sous différents angles

La nature compressée des mathématiques avancées est souvent présentée de façon négative dans la littérature de recherche, car on explique qu'elle crée un obstacle pour les futurs enseignants qui, dans leur pratique, ne doivent non pas compresser, mais plutôt décompresser les contenus (Adler et Davis, 2006; Ball et Bass, 2000, 2003; Bednarz, 2001; Huillet, 2009; Proulx et Bednarz, 2010). Les futurs enseignants de mon étude permettent toutefois de faire ressortir une diversité de bons et de moins bons aspects de cette compression. D'une part, certains expliquent que de réutiliser les contenus du secondaire de façon compressée dans d'autres contextes mathématiques est une bonne chose, car ceci nécessite une bonne compréhension des concepts chez l'apprenant. Le contexte du cours qui permet de réinvestir et de travailler les contenus mathématiques du secondaire devient alors pertinent pour eux en tant que futurs enseignants, car il les force à revenir sur les contenus du secondaire et il leur donne l'occasion de réfléchir à nouveau à ces contenus, ce qui les pousse à apprendre. C'est donc un regard tout à faire positif qui est ici porté sur le phénomène de compression.

Toutefois, une mise en garde est énoncée par ces mêmes étudiants: si les contenus mathématiques ne sont pas bien compris avant de devoir les manipuler de façon compressée en mathématiques avancées, l'étudiant peut alors se perdre. Autrement dit, si l'étudiant ne peut réinvestir ou réutiliser les contenus du secondaire, il ne peut alors pas vraiment réfléchir aux nouvelles mathématiques plus avancées (qui utilisent de façon compressée les mathématiques du secondaire), ce qui peut avoir un effet boule de neige sur ses apprentissages mathématiques. C'est un autre aspect négatif des mathématiques compressées, relatif à l'apprentissage d'autres mathématiques.

Une troisième dimension de cette compression qui ressort des propos des étudiants est que même si la manipulation des contenus compressés nécessite une bonne compréhension de ces derniers, il ne s'agit pas de la même compréhension nécessaire à la maîtrise des mathématiques mobilisées au secondaire. Les futurs enseignants distinguent deux façons de comprendre un même contenu mathématique. Dans les mathématiques mobilisées en classe (comme les futurs enseignants l'ont vécu dans les tâches), il faut comprendre les mathématiques de façon approfondie, il faut comprendre le pourquoi derrière les procédures, les symboles ou les lois, ce qui est différent de la compréhension nécessaire pour réutiliser ces mêmes contenus, de façon compressée, en mathématiques avancées. Cette façon de comprendre les mathématiques (pour les réutiliser de façon compressée en mathématiques avancées) reste encore floue, les futurs enseignants n'ayant pas ici d'exemple précis. Néanmoins, cette façon compressée de comprendre semble pour eux différente de la compréhension profonde et décompressée nécessaire dans les mathématiques mobilisées en classe. Toutefois, les propos des futurs enseignants ne permettent pas de creuser ces différences/similitudes. Il y a ici un filon à creuser dans des recherches ultérieures.

Ces diverses dimensions soulevées nuancent l'aspect négatif de la compression qui est présenté dans la littérature. Les propos des futurs enseignants nous informent qu'il y a quelque chose de positif dans l'utilisation compressée des mathématiques du secondaire en mathématiques avancées et qu'il y a quelque chose d'intéressant à creuser pour mieux comprendre le type de compréhensions utilisés dans la compression.

6.1.8 La rupture formation-mathématique et formation-éducation

Les futurs enseignants partagent que leurs deux formations (mathématiques et éducation) sont disjointes. Ils désirent mettre en pratique les théories et les principes que leurs formateurs généralistes leur enseignent dans le cadre de leur formation en éducation (que l'élève doit être actif dans ses apprentissages, par exemple), mais ils sont incapables de voir concrètement à quoi cela ressemble dans une classe de mathématiques. Cette rupture découle de la troisième rupture soulevée par la recherche à l'égard de la façon magistrale d'enseigner les mathématiques avancées, qui est différente de la façon dont on suggère d'enseigner au secondaire. Les futurs enseignants veulent faire autrement que l'enseignement magistral qu'ils ont eux-mêmes vécu, mais ils ne savent pas vraiment comment s'en détacher. Ils ne savent pas comment appliquer ce qu'ils apprennent dans leur formation en éducation à une classe de mathématiques. Ils peuvent ajouter des activités différenciées et des activités de groupe (s'il reste du temps après avoir transmis la matière aux élèves), mais la base de leur enseignement est ancrée dans l'idéologie que l'enseignant, détenteur de connaissances, transmet la matière à ses élèves par un exposé magistral et ils ne peuvent s'imaginer faire apprendre les contenus aux élèves d'une autre manière que de les leur transmettre via un cours magistral. Les futurs enseignants partagent qu'ils veulent faire autrement, mais ils ne savent pas vraiment comment et cela les dérange profondément. La rupture va donc plus loin, et pour les futurs enseignants de mon étude ceci se traduit aussi en une rupture entre leurs deux formations qui restent distinctes malgré leurs efforts pour les mailler.

6.1.9 Le manque d'exemples

À travers les entrevues, les futurs enseignants ont beaucoup parlé de leurs expériences et ont ainsi éclairé les apports et les effets de la formation en mathématiques avancées sur leur préparation mathématique. Dans plusieurs cas, toutefois, avoir eu des exemples supplémentaires, ou même un seul exemple, aurait aidé à mieux comprendre leurs propos. Cette remarque n'est pas sans rappeler une limite de mon mode de collecte de données, soit que les entrevues laissent peu de temps au participant pour penser en profondeur aux réponses données aux questions. Une piste pour des recherches futures serait donc d'utiliser une procédure complémentaire, comme un questionnaire (demandant explicitement de donner des exemples), un questionnaire suivi d'une autre entrevue ou encore un journal de bord d'un stagiaire avec des demandes spécifiques liées à la formation en mathématiques, donnant ainsi un temps de réflexion aux futurs enseignants qui leur permettrait de donner des exemples plus concrets pour compléter leurs propos.

Malgré cette limite de la recherche, le manque récurrent d'exemples chez certains futurs enseignants pour supporter leurs affirmations peut amener à questionner la nature de ce qu'ils affirment et à se demander à quel point ces affirmations sont fondées. Voici trois exemples pour illustrer ces difficultés à donner des exemples.

Un premier exemple est celui de Chloé, qui dit développer des trucs en mathématiques avancées pour mémoriser les formules et les théorèmes. L'exemple qu'elle donne pour appuyer ses propos est toutefois un truc qu'elle a développé au secondaire (pour distinguer la formule de la circonférence de celle de l'aire d'un cercle). Au moment de l'entrevue, elle a expliqué ne pas pouvoir penser à un autre exemple de truc développé à l'intérieur de ses cours de mathématiques avancées, bien qu'elle ait expliqué en avoir développé plusieurs dans ses cours. Un deuxième exemple est celui de Rémi, qui explique qu'en retravaillant certains contenus (de fin) du secondaire, il a pu cibler certaines de ses difficultés conceptuelles liées aux contenus mathématiques (de fin) du secondaire. Ceci, d'après lui, l'aidera à mieux intervenir en classe si ses élèves possèdent des conceptions semblables. Toutefois, lorsque interrogé, il n'a pas réussi à donner d'exemple de ces difficultés conceptuelles qu'il a découvertes. Finalement, le troisième exemple est celui de Josie, qui dit que de réutiliser les mathématiques du secondaire de façon compressée en mathématiques avancées nécessite de bien les comprendre. Josie n'a toutefois pas d'exemples précis sur la façon dont les mathématiques sont réutilisées en mathématiques avancées, ce qui aurait permis d'éclairer le type de compréhensions nécessaires pour réutiliser de façon compressée les mathématiques du secondaire en mathématiques avancées.

6.1.10 Retour sur les thématiques

Ces thématiques de recherche s'ajoutent au corpus de recherche actuel, alors qu'on en sait maintenant plus sur la formation en mathématiques avancées. Au final, ce que les futurs enseignants retirent des cours de mathématiques avancées est beaucoup de niveau méta. Ma recherche montre que les cours qui vont au-delà des contenus mathématiques du secondaire n'aident pas vraiment les futurs enseignants à mieux comprendre les contenus qu'ils vont enseigner et que, selon eux, les contenus en mathématiques avancées sont déconnectés de ceux du secondaire. Les cours de mathématiques avancées sont toutefois pertinents pour les étudiants au niveau méta : ils apprennent de leurs difficultés, ils élargissent leur vision du panorama mathématique et ils apprennent à apprendre. Les cours qui sont pertinents sur le plan des contenus sont ceux qui touchent directement les contenus du secondaire, car ceux-ci leur permettent de mieux comprendre ces contenus (la procédure et le pourquoi) et leur donnent des outils qu'ils peuvent réinvestir dans leur classe. En plus de ces aspects positifs, la formation en mathématiques avancées joue sur la confiance et l'identité mathématique du formé. Certes certains gagnent en confiance, mais d'autres en perdent. Dans cette idée, la forme symbolique, la nature compressée et la façon magistrale d'enseigner les mathématiques avancées sont différentes des mathématiques en classe du secondaire. Ces ruptures jouent un rôle sur la confiance des futurs enseignants, mais aussi sur leur identité mathématique qui est en pleine croissance. Or, les futurs enseignants expliquent qu'ils vivent une rupture d'identité, à savoir que l'identité qu'ils développent à travers la formation en mathématiques avancées est davantage celle d'un mathématicien que celle d'un enseignant de mathématiques.

6.2 Retombées et pistes pour la formation des enseignants

Ma recherche ne dit pas si la formation en mathématiques avancées est bonne ou non et ce n'était pas son objectif, ni son résultat. Ce qu'elle met en relief est une diversité de vécus, une diversité de bonnes et de moins bonnes expériences, selon l'acteur en cause, et ce, à travers une même formation en mathématiques avancées. Ce faisant, ma recherche rappelle que chaque futur enseignant vit la formation à sa façon et en retire diverses expériences selon le regard qu'il y porte. Cela dit, certains besoins de formation mathématique reviennent à travers les cas et il semble pertinent de souligner ce point de vue du formé comme piste pour la formation.

Les futurs enseignants expriment le besoin de creuser en profondeur les mathématiques du secondaire et ainsi d'en développer une compréhension plus profonde. À travers les tâches, ils ont vu que les mathématiques mobilisées en salle de classe ne sont pas les mêmes que celles qu'ils ont expérimentées dans leurs cours de mathématiques avancées. Les tâches, de par leur nature, les ont amenés à réfléchir sur des erreurs d'élèves et à s'interroger en profondeur sur la signification derrière certaines procédures mathématiques, comme la raison pour laquelle la méthode par réduction fonctionne dans la résolution d'un système d'équations ou encore pourquoi deux différentes procédures mènent à différentes réponses lorsqu'on résout une équation logarithmique. Ceci est différent de ce qu'ils font dans leurs cours de mathématiques avancées, lorsqu'ils partent des contenus mathématiques du secondaire pour avancer vers de nouvelles mathématiques et dont le travail est davantage de faire/reproduire des mathématiques « toutes faites ». Il ne s'agit donc pas de la même façon de comprendre et de « jouer » avec les mathématiques. Et, en fait il ne s'agit pas des mêmes mathématiques. Comme Talia l'explique, comprendre « plus » de mathématiques en avançant plus loin dans les mathématiques avancées est différent de comprendre « plus en profondeur » les mathématiques mobilisées en classe. À la lumière de ces différences, le besoin de mieux approfondir les mathématiques du secondaire s'est accentué. Bien que les futurs enseignants puissent résoudre les problèmes mathématiques de niveau secondaire sans difficultés apparentes, ils ressentent le besoin d'approfondir leurs connaissances mathématiques du secondaire pour mieux comprendre le sens sous-jacent aux symboles, procédures et formules.

Un deuxième besoin soulevé par les futurs enseignants de mon étude concerne les liens entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire. Les futurs enseignants aiment étudier les contenus en mathématiques avancées. Le problème est qu'ils ne voient pas les liens entre ces contenus avancés et les contenus mathématiques du secondaire qu'ils vont enseigner. Ils ne voient donc pas comment leur formation en mathématiques avancées les prépare, sur le plan mathématique, à enseigner. En d'autres mots, les futurs enseignants étudient les mathématiques avancées pour eux-mêmes, ce qui est plaisant en soi, mais non pertinent selon eux pour leur préparation mathématique à enseigner. Ainsi, si les mathématiques avancées sont obligatoires à leur formation (ce qui n'est pas un problème en soi), les futurs enseignants veulent qu'on leur montre explicitement dans leurs cours comment les mathématiques avancées sont connectées aux mathématiques du secondaire. Les liens entre les mathématiques avancées et les mathématiques du secondaire ne vont pas de soi pour eux. Par exemple, comment les mathématiques du secondaire sont-elles utilisées en mathématiques avancées? À quoi aboutissent-elles dans le panorama mathématique? Comment les mathématiques avancées permettent-elles de mieux comprendre les contenus du secondaire? Il se manifeste une nécessité de montrer explicitement aux futurs enseignants les liens entre les contenus en mathématiques avancées et les contenus mathématiques du secondaire, comme l'avancent d'ailleurs Hache, Proulx et Sagayar (2009) et Gourdeau et Proulx (2012).

Je me permets ici de faire une parenthèse sur une thématique qui transparait chez les futurs enseignants lorsqu'ils expriment ces besoins, soit les frustrations qu'ils vivent à travers leur formation en mathématiques avancées. À plusieurs reprises, les futurs enseignants ont dit être frustrés, et même déçus ou découragés, que les cours de mathématiques ne s'adressent pas vraiment à eux : les contenus en mathématiques avancées sont différents de ceux qu'ils vont enseigner, aucun lien n'est explicite entre les contenus en mathématiques avancées et ceux du secondaire, la façon de parler et d'écrire les mathématiques est différente, etc. Ceci rappelle la rupture d'identité qu'ils vivent, c'est-à-dire qu'ils se sentent parachutés dans des cours qui s'adressent à un public cible de mathématiciens et, par conséquent, que l'identité qu'ils développent est davantage celle d'un mathématicien que celle d'un futur enseignant. Les futurs enseignants de mon étude partagent le sentiment de travailler fort pour devenir les meilleurs enseignants de mathématiques qu'ils puissent être, mais d'être frustrés que leur formation en mathématiques n'offre pas un contexte dans lequel ils peuvent maximiser leur préparation mathématique. Cette frustration n'est pas sans importance et indique, d'une certaine façon et selon eux, à quel point les cours de mathématiques avancées sont déconnectés des mathématiques mobilisées en classe du secondaire, ainsi que de l'ampleur des besoins qu'ils expriment. Je ferme ici la parenthèse.

Un troisième besoin concerne la façon d'enseigner les mathématiques. Les futurs enseignants expriment que la façon magistrale dont on leur enseigne les mathématiques avancées crée un double blocage pour eux. D'une part, ils ne savent pas comment enseigner les mathématiques autrement que de la façon qu'ils ont vécue et, d'autre part, cette façon magistrale de transmettre les contenus n'est pas conforme avec la façon dont on leur suggère d'enseigner dans leur formation en éducation. Cette rupture soulignée dans la littérature est récurrente : la culture de classe dans leurs cours de mathématiques avancées ne reflète pas la culture de classe souhaitée au secondaire (Bednarz et Proulx, 2010), où l'on souhaite que l'élève raisonne et construise lui-même un sens au concept (Bednarz, 2001). Comme l'avance Proulx (2010), il y a un travail considérable à faire lors de la formation pour initier ces futurs enseignants à une façon alternative de faire et de penser l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Une piste possible soulevée par la littérature est de faire vivre aux futurs enseignants l'activité mathématique qu'on souhaite qu'ils reproduisent dans leur enseignement (voir Hache, Proulx et Sagayar, 2009; Houdement et Kuzniak, 1996; Proulx, Corriveau et Squalli, 2012), c'est-à-dire qu'ils explorent et approfondissent des concepts dans leurs cours de mathématiques, qu'ils rendent explicite leurs compréhensions, qu'ils négocient le sens construit avec leurs pairs, qu'ils valident leurs solutions, etc. L'intention est qu'à travers cette activité mathématique, le futur enseignant vive une culture de classe où l'apprenant est actif, fait des mathématiques, réfléchit, etc. Ainsi, le futur enseignant goûte ce à quoi peut ressembler une salle de classe dans laquelle les mathématiques sont vivantes.

De plus, l'activité mathématique est aussi pertinente pour apprendre à apprendre les mathématiques (Proulx, Corriveau et Squalli, 2012). Rémi raconte qu'il a appris à apprendre les mathématiques à travers ses cours de mathématiques avancées, pendant lesquels il réfléchissait activement et faisait des mathématiques (tout en étant assis silencieusement en classe). Les contenus en mathématiques avancées semblent pertinents pour apprendre aux étudiants à apprendre des mathématiques. Mais, les futurs enseignants partagent qu'ils ne se sentent pas toujours stimulés en classe, car ils restent souvent passifs en prenant les notes de cours et finissent même parfois par apprendre les contenus par cœur (par « peur ») pour l'examen. Pour plusieurs, la façon magistrale par laquelle les mathématiques sont présentées semble un obstacle à une réflexion mathématique riche. L'activité mathématique est beaucoup mise de l'avant en recherche, soit de faire faire des mathématiques aux futurs enseignants, pour qu'ils développent une fluidité en mathématiques et qu'ils soient capables de résoudre les problèmes qu'ils rencontrent (voir Proulx, Corriveau et Squalli, 2012). Ma recherche appuie cette idée.

Je termine cette section en ouvrant une parenthèse sur la thématique de la confiance. Les besoins exprimés ci-dessus en disent beaucoup sur les expériences des futurs enseignants dans la formation en mathématiques avancées. L'aspect « confiance » en dit lui aussi beaucoup sur leur vécu. Au-delà des contenus qu'ils ont mieux compris, de leur façon de parler et d'écrire les mathématiques qui est maintenant différente et de tous les réinvestissements ou ruptures qu'ils retiennent, les futurs enseignants sortent de leur formation en mathématiques avancées avec un certain sentiment de compétence. L'enjeu est que certains gagnent en confiance, alors que d'autres en perdent. Ce gain et cette perte de confiance nous informent sur les bons et moins bons côtés de la formation en mathématiques avancées, mais ils mettent aussi en relief la complexité de la question sur la formation mathématique à travers les cours de mathématiques avancées. Cette dimension souligne le besoin de s'y pencher plus précisément, dans le futur, autant lors des réflexions sur la formation mathématique des futurs enseignants qu'à travers des recherches futures.

Somme toute, ces résultats apportent beaucoup à la réflexion récente déclenchée en recherche et en formation sur la question de la formation mathématique des enseignants de mathématiques au secondaire. Celle-ci est une question complexe, qui ne peut être traitée de façon simple avec des solutions toutes faites. En ce sens, ma recherche apporte à cette réflexion.

6.3 Piste pour une recherche ultérieure

En guise de mot de la fin, j'offre une piste pour une recherche ultérieure qui provient d'un aspect qui a émergé des données en relation avec les tâches offertes en entrevues. Il faut se rappeler que les tâches ont eu un effet déclencheur pendant les entrevues en permettant de clarifier, et même parfois de nuancer, le regard que portent les étudiants sur leurs expériences et leur formation en mathématiques avancées. De plus, les tâches ont eu un effet marquant sur le développement de compréhensions mathématiques chez les futurs enseignants de mon étude; à travers ces tâches, les futurs enseignants ont appris des mathématiques. Les futurs enseignants ont été fascinés par ces tâches, qui soulevaient des questions mathématiques auxquelles ils semblaient n'avoir jamais vraiment réfléchi avant (des réflexions nouvelles sur la nature des contenus, des questions reliées directement à la réalité de la classe). Cet effet « mathématique » découlant de tâches « didactiques » n'a pas été analysé à fond dans ce mémoire, mais il y a intérêt à creuser pour voir quelles sont les mathématiques et les compréhensions mathématiques qui émergent de la résolution de ce type de tâche didactique chez les futurs enseignants. On en sait très peu sur les compréhensions mathématiques développées à travers de telles tâches didactiques. Dans ma recherche doctorale, qui s'intéresse aux apprentissages mathématiques dans des contextes didactiques, je vais explorer cette piste plus à fond.

APPENDICE A

Tâche Livres et Disques (Bednarz, 1999)

On a donné ce problème à Brigitte

Je vais au magasin et j'achète le même nombre de livres que de disques. Les livres coûtent deux dollars chacun et les disques coûtent six dollars chacun. Je dépense 40 dollars en tout. Combien de livres et de disques ai-je achetés?

Brigitte a répondu ceci au problème

$2L + 6D = 40$

Puisque $L = D$, je peux écrire $2L + 6L = 40$

$8L = 40$

Cette dernière équation indique que huit livres coûtent 40$, donc un livre coûte 5$

En supposant que l'équation $2L + 6D = 40$ est correcte, trouve ce qui est incorrect dans ce que dit et ce que fait Brigitte. Explique-toi le plus clairement possible.

Voici quelques exemples d'explications fournies par les élèves (13-14 ans) :

- $2L + 6L = 40$. Elle a fait une erreur. Le L est le nombre de livres et le D est le nombre de disques, ce n'est pas la même chose, ce ne sont pas des livres.
- $L = D$, c'est incorrect, car le prix n'est pas le même, alors ce n'est pas la même chose, elle ne peut pas dire que L est égal à D.
- De mettre les livres et les disques ensemble, c'est incorrect, car sinon on arrive à la conclusion que tous les articles ont la même valeur et ce n'est pas vrai.
- $L = D$, ce n'est pas égal parce que L vaut 2$ et D vaut 6$, alors il ne faut pas dire ça.
- On ne peut pas dire $L = D$ parce que les disques coûtent plus cher que les livres.

APPENDICE B

Tâche Système d'équations (source inconnue)

Problème : un groupe de personnes composé de 35 adultes et enfants achète des billets de train. Le prix d'un billet est de 27$ pour un adulte et de 14$ pour un enfant. Si le montant total payé pour les billets est de 750$, peux-tu dire combien il y a d'adultes et combien il y a d'enfants dans le groupe ?

> **Voici la solution proposée par l'enseignant (méthode de réduction) :**
>
> Soit x les billets d'adultes et y les billets d'enfants. Nous avons alors :
>
> (1) $27x + 14y = 750$
>
> (2) $x + y = 35$
>
> Pour éliminer une variable, on peut multiplier l'équation (2) par 14 :
>
> (3) $14x + 14y = 490$
>
> On peut soustraire l'équation (3) de la (1) et on obtient
>
> $$(27x + 14y) - (14x + 14y) = 750 - 490$$

Cette résolution donne lieu à l'interaction suivante entre un élève et l'enseignant :

Élève :	Hmm, soustraire 14x+14y de 27x+14y ... La deuxième est un nombre de billets et la première est un montant d'argent. On ne peut pas soustraire un nombre de billets d'un montant d'argent!
Enseignant :	...
Élève :	L'équation (1) n'est pas bonne. Il faut qu'il y ait x fois des 27 et y fois des 14.
Enseignant :	Tu veux dire quoi ici?
Élève :	Si x ... Si tu places x après, 27x veut dire un nombre de billets.
Enseignant :	Explique-moi, je ne te suis pas.
Élève :	Par exemple, deux dollars. Si on dit que « deux dollars » c'est correct, alors ça veut dire « 27 quelque chose ». J'ai l'impression que le 750 vient du nombre de billets, pas des dollars.

(la discussion par la suite diverge vers autre chose autour de la résolution...)

APPENDICE C

Tâche Logarithmes[31]

La résolution d'une équation logarithmique

$$2\log_3(2x+10)=6$$
$$\frac{2\log_3(2x+10)}{2}=\frac{6}{2}$$
$$\log_3(2x+10)=3$$
$$2x+10=3^3$$
$$2x+10=27$$
$$2x+10-10=27-10$$
$$2x=17$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{17}{2}$$
$$x=\frac{17}{2}$$

$$2\log_3(2x+10)=6$$
$$\log_3(2x+10)^2=6$$
$$(2x+10)^2=3^6$$
$$4x^2+40x+100=729$$
$$4x^2+40x+100-729=729-729$$
$$4x^2+40x-629=0$$
$$(2x-17)(2x+37)=0$$

D'où

$$x=\frac{17}{2} \quad OU \quad x=\frac{-37}{2}$$

[31] Cette tâche a été obtenue de Frédéric Gourdeau, professeur au département de mathématiques et statistiques de l'Université de Laval, et de Mario Goudreault, enseignant à l'École secondaire de la Seigneurie, Commission scolaire des Premières-Seigneuries.

RÉFÉRENCES

Adler, Jill, et Zain Davis. 2006. «Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education». *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 37, no 4, p. 270.

Ball, Deborah L. 1990. «The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education». *The elementary school journal*, vol. 90, no 4, p. 449-466.

Ball, Deborah L., et Hyman Bass. 2000. «Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics». In *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*, Jo Boaler, p. 83-104. Westport (CT): Ablex.

Ball, Deborah L., et Hyman Bass. 2003. «Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching». In *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Educatin Study Group* (Edmonton, AB: CMESG/GCEDM, 24-28 mai 2002), sous la dir. de Brent Davis et Elaine Smitt, p. 3-14. Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Ball, Deborah L., Mark H. Thames et Geoffrey Phelps. 2008. «Content knowledge for teaching: What makes it special». *Journal of Teacher Education*, vol. 59, no 5, p. 398-407.

Barton, Bill, et Frédéric Gourdeau. 2008. «Disciplinary Mathematics and School Mathematics». In *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education* (Rome, 5-8 mars), sous la dir. de Fulvia Furinghetti , Marta Menghini, Livia Giacardi et Ferdinando Arzarello, 328 p. Rome.

Bauersfeld, Heinrich. 1994. «Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire». *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 20, no 1, p. 175-198.

Bednarz, Nadine. 2001. «Didactique des mathématiques et formation des enseignants: le cas de l'Université du Québec à Montréal». *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, vol. 1, no 1, p. 61-80.

Bednarz, Nadine. 2012. «Formation mathématique des enseignants: état des lieux, questions et perspectives». In *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques*, sous la dir. de Jérôme Proulx, Claudia Corriveau et Hassane Squalli, p. 13-54. Québec: Presses de l'Université du Québec.

Bednarz, Nadine, et Bernadette Dufour-Janvier. 1992. «L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves». In *Didactique des mathématiques: Actes du colloque sur la formation des enseignants* (Marrakech, Maroc: École normale supérieure Marrakech, 20 au 22 mai), sous la dir. de Ahmed Daïfe *et al.*, p. 21-40. Marrakech, Maroc: École normale supérieure Marrakech.

Bednarz, Nadine, Linda Gattuso et Claudine Mary. 1995. «Formation à l'intervention d'un futur eneignant en mathématique au secondaire». *Bulletin l'Association Mathématique du Québec*, vol. 35, no 1, p. 17-30.

Bednarz, Nadine, Gerald A. Goldin et Jacques Lefevre. 1997. «In memoriam Claude Janvier». *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 17, no 2, p. v-vii.

Bednarz, Nadine, Maheux, Jean-François., et Proulx, Jérôme. 2012. Évolutions curriculaires récentes en enseignement des mathématiques au Québec : design curriculaire et vision des mathématiques. In *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF2012)*. Genève, Suisse. http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Bednarz, Nadine, et Jérôme Proulx. 2009. «Knowing and Using Mathematics in Teaching: Conceptual and Epistemological Clarifications». *For the learning of mathematics*, vol. 29, no 3, p. 11-17.

Begle, Edward G. 1979. *Critical variables in mathematics education: Findings from a survey of empirical research.* Reston (Virginia): Mathematics Association of America and the National Council of Teachers of Mathematics, 165 p.

Boileau, André, et Maurice Garançon. 1993. «Géométrie et formation des maîtres au secondaire». *Bulletin l'Association Mathématique du Québec*, no 1 et 2, p. 40-49.

Booth, Lesley. 1984. «Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire». *Petit x*, vol. 5, p. 5-17.

Burton, Leone. 2004. *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*: Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 253 p.

Conference Board of the Mathematical Sciences. 2001. «The Mathematical Education of Teachers». *Mathematics Education Series*, vol. 11, p. 145.

Confrey, Jere. 1994. ««Voix et perspective»: à l'écoute des innovations épistémologiques des étudiants et des étudiantes». *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 20, no 1, p. 115-133.

Cooney, Thomas J., et Heide G. Wiegel. 2003. «Examining the mathematics in mathematics teacher education». *Second international handbook of mathematics education*, vol. 2, p. 795-828.

Corriveau, Claudia, et Denis Tanguay. 2007. «Formalisme accru du secondaire au collégial: les cours d'algèbre linéaire comme indicateurs». *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, vol. 48, no 1, p. 6-25.

DeBlois, Lucie, et Hassane Squalli. 2002. «Implication de l'analyse de productions d'eleves dans la formation des maitres du primaire». *Educational studies in mathematics*, vol. 50, no 2, p. 212-237.

Dionne, Jean. 2000. «Enseignement des mathématiques, formation des enseignants, formateurs des enseignants». In *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, sous la dir. de Pascale Blouin et Linda Gattuso, p. 1-13. Trois-Rivière: Modulo Éditeur.

Dufour-Janvier, Bernadette, et Nathalie Hosson. 1999. «L'étudiant futur enseignant en interaction dans le cadre d'activités géométriques variées: observations et éléments de réflexion». In *Actes du Groupe de Didactique des Mathématiques du Québec* (17-19 mai 1999), p. 35-53: Montréal.

Eisenhart, Margaret, Hilda Borko, Robert Underhill, Catherine Brown, Doug Jones et Patricia Agard. 1993. «Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding». *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 24, no 1, p. 8-40.

Even, Ruhama. 2011. «The relevance of advanced mathematics studies to expertise in secondary school mathematics teaching: practitioners' views». *ZDM Mathematics Education*, vol. 43, p. 941-950.

Fulvi, Julia. 2010. «Préparation à la démonstration et au formalisme suppléée au collégial par le cours Mathématiques pour les sciences». Mémoire de maîtrise, Montréal, Département de mathématiques, Université du Québec à Montréal, 352 p.

Gattuso, Linda. 2000. «Quel est le rôle du didacticien». In *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, sous la dir. de Pascale Blouin et Linda Gattuso, p. 14-18. Trois-Rivière: Modulo Éditeur.

Glaeser, Georges. 1973. «La transmission des connaissances mathématiques. Hier, aujourd'hui, demain». *L'enseignement mathématique*, vol. 18, no 3+4, p. 277-287. Disponible en ligne: http://www.er.uqam.ca/nobel/r21245/mat27191_fich/Glaeser_21973.pdf.

Gourdeau, Frédéric, et Jérôme Proulx. 2012. «Formation mathématique pour les enseignants de mathématiques au secondaire: croisement des regards du mathématiciens et du didacticiens». In *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques*, sous la dir. de Jérôme Proulx, Claudia Corriveau et Hassane Squalli, p. 101-120. Québec: Presses de l'Université du Québec.

Hache, Christophe, Jérôme Proulx et Mohamed Sagayar. 2009. «Synthèse du GT1: Formation mathématique des enseignants : contenux et pratiques». In *Enseignement des mathématiques et développement: enjeux de société et de formation,* Espace mathématique francophone 2009. Dakar.

Hodgson, Bernard. 2001. «The Mathematical Education of School Teachers: Role and Responsabilities of University Mathematicians». In *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICIM Study,* Derek Holton, p. 501-518. Netherlands: Kluwer Academic Publichers.

Houdement, Catherine, et Alain Kuzniak. 1996. «Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 16, no 3, p. 289-322.

Huillet, Danielle. 2009. «Mathématiques pour l'enseignement: une approche anthropologique». In *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2009,* 11p. Dakar, Sénégal. CD-ROM.

Kahane, Jean-Pierre. 2003. «Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques: la formation des maîtres en mathématiques». *http://www.cfem.asso.fr/Formation_maitres.pdf.*

Karsenti, Thierry, et Stéphanie Demers. 2000. «L'étude de cas». In *Introduction à la recherche en éducation,* sous la dir. de Thierry Karsenti et Lorraine Savoie-Zajc, p. 225-247. Sherbrooke, Qc: Edition du CRP.

Lipschutz, Seymour, et Marc Lipson. 2003. *Algèbre linéaire*, 3e édition. Dunod, Paris, 516 p.

Ma, Liping. 1999. *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*: Lawrence Erlbaum Associates Mahwah, NJ, 166 p.

Mapolelo, Dumma C. 1999. «Do pre-service primary teachers who excel in mathematics become good mathematics teachers?». *Teaching and teacher education,* vol. 15, no 6, p. 715-725.

Marchand, Patricia, et Nadine Bednarz. 1999. «L'enseignement de l'algèbre au secondaire: Une analyse des problèmes présentés aux élèves». *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec,* vol. 39, no 4, p. 30–42.

Mary, Claudine. 2003. *Les hauts et les bas de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire.* : Éditions Bande didactique. Publication d'une thèse intitulée à l'origine "Place et fonction de la validaction chez les enseignants de mathématiques au secondaire". Thèse présentée en 1999 à l'Université de Montréal en vue de l'obtention du grade de Philosiphiae Doctor (Ph.D) en éducation, 348 p.

Mason, John en collaboration avec Leone Burton et Kaye Stancey. 1997. *L'esprit mathématique*. Paris: De Boeck Université 178 p.

Merriam, Sharan B. 1988. *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco (CA): Jossey-Bass, 226 p.

Monk, David H. 1994. «Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and student achievement». *Economics of Education Review*, vol. 13, no 2, p. 125-145.

Moreira, P. C., et M. M. David. 2008. «Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements». *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 11, no 1, p. 23-40.

Moreira, Plinio C., et Maria M. David. 2005. «Mathematics in teacher education versus mathematics in teaching practice: A revealing confrontation». In *The 15th ICMI study–The Professional education and development of teachers of mathematics*. Sao Paolo, Brazil. CD-ROM. Disponible en ligne: http://stwww.weizmann.ac.il/g-math/icmi/log_in.html.

Nathan, Mitchell J., et Kenneth R. Koedinger. 2000. «Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning». *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, no 2, p. 168-190.

National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM]. 2000. *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM, 402 p.

Otte, Michael. 1976. «A6: The training and professional life of mathematics teachers». In *Proceedings of the Third International Congress on Mathematics Education*, Hermann Athen et Heinz Kunle, p. 194-201. Karlsruhe, Germany: ICME-3.

Poirier, Louise. 2012. «Quelle formation mathématique pour les enseignants en formation continue». In *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques*, sous la dir. de Jérôme Proulx, Claudia Corriveau et Hassane Squalli, p. 215-222. Québec: Presses de L'Université du Québec.

Proulx, Jérôme. 2003. «Pratiques des futurs enseignants de mathématiques au secondaire sous l'angle des explications orales ». Mémoire de maîtrise, Montréal, Département de mathématiques, Université du Québec à Montréal, 248 p.

Proulx, Jérôme. 2006. «Making the Transition to Algebraic Thinking: Taking Students' Arithmetic Modes of Reasoning into Account». *delta- K*, vol. 1, p. 8-16.

Proulx, Jérôme. 2007. ««Objectifs comme points de départ» versus «objectifs à atteindre à la fin»: un défi pour les programmes de formation des maîtres». In *EMF 2006: L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*

(Sherbrooke, QC, 27-31 mai 2006), sous la dir. de Nadine Bednarz et Claudine Mary, CD-ROM. Sherbrooke, QC: Éditions du CRP.

Proulx, Jérôme. 2010. «Reconnecter les futurs enseignants avec les mathématiques du secondaire: travailler autour de conceptualisations riches en «faisant» des mathématiques». In *Formation des enseignants en mathématiques: tendances et perspectives actuelles,* sous la dir. de Jérôme Proulx et Linda Gattuso, p. 129-152. Sherbrooke, Qc: Éditions du CRP.

Proulx, Jérôme, et Bednarz, Nadine. 2009. «Resources used and "activated" by teachers when making sense of mathematical situations». *Proceedings of the 33rd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 4, p. 417-424. Thessaloniki, Greece: PME.

Proulx, Jérôme, et Nadine Bednarz. 2010a. «Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 1: Réflexions fondées sur une analyse des recherches». *Revista de Educação Matemática e Tecnologica Ibero-americana,* p. 30.

Proulx, Jérôme, et Nadine Bednarz. 2010b. «Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 2: Une entrée par les mathématiques professionnelles de l'enseignant». *Revista de Educação Matemática e Tecnologica Ibero-americana,* p. 23.

Proulx, Jérôme, Mary Beisiegel, Helena Miranda et Elaine Simmt. 2009. «Rethinking the teaching of systems of equations.». *Mathematics Teacher*, vol. 102, no 7, p. 526-533.

Proulx, Jérôme, Claudia Corriveau et Hassane Squalli. 2012. *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques: pratiques, orientations et recherches*. Québec: Presses de l'Université du Québec, 368 p.

Robinson, Ken (2006). Ken Robinson says schools kill creativity. TED: Ideas worth spreading. United States: Video,19 min 29 s. Disponible en ligne: http://www.ted.com/talks/ken_robinson_says_schools_kill_creativity.html?quote=87

Rowland, Tim, Peter Huckstep et Anne Thwaites. 2005. «Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi». *Journal of Mathematics Teacher Education,* vol. 8, no 3, p. 255-281.

Rowland, Tim, Libby Jared et Anne Thwaites. 2011. «Secondary Mathematics Teachers' Content Knowledge: the Case of Heidi». In *Cerme7: working group 17A* (Rzeszow, Poland, 9-13 février, 2011), 12 p. Rzeszow, Poland.

Sfard, Anna, et Liora Linchevski. 1994. «The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra». *Educational studies in mathematics,* vol. 26, no 2, p. 191-228.

Shulman, Lee S. 1986. «Those who understand: Knowledge growth in teaching». *Educational researcher*, vol. 15, no 2, p. 4-14.

Sierpinska, A., T. Dreyfus et J. Hillel. 1999. «Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, no 1, p. 7-40.

Skemp, Richard R. 1978. «Relational understanding and instrumental understanding». *The Arithmetic Teacher*, vol. 26, no 3, p. 9-15.

Stake, Robert E. 1995. *The art of case study research*. Thousand Oaks (CA): Sage, 192 p.

Tanguay, Denis. 2012. «Mathématiques de l'explorateur ou du bâtisseur? Deux perspectives incompatibles?». In *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques. Pratiques, orientations et recherches,* sous la dir. de Jérôme Proulx, Claudia Corriveau et Hassane Squalli, p. 131-140. Québec: Presses de l'Université du Québec.

Theis, Laurent. 2012. «Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du primaire et du préscolaire? À la recherche des mathématiques dans une séquence sur l'enseignement des probabilités». In *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques: Pratiques, orientations et recherches,* sous la dir. de Jérôme Proulx, Claudia Corriveau et Hassane Squalli, p. 181-203. Québec: Presses de l'Université du Québec.

Thompson, Alba G., et Patrick W. Thompson. 1996. «Talking About Rates Conceptually, Part II: Mathematical Knowledge for Teaching». *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 27, no 1, p. 2-24.

Thompson, Patrick W., et Alba G. Thompson. 1994. «Talking About Rates Conceptually, Part I: A Teacher's Struggle». *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, no 3, p. 279-303.

Usiskin, Zalman. 2000. «Teachers' mathematics: A collection of content deserving to be a field». *UCSMP Newsletter*, vol. 6, no 1, p. 86-98.

Watson, Anne. 2008. «Developing and deepening mathematical knowledge in teaching: being and knowing». In *Mathematical Knowledge in Teaching Seminar series* (Loughborough, UK, Loughborough, UK, March), Loughborough, UK: Disponible en ligne: http://www.mkit.maths-ed.org.uk/seminar5.html.

Yin, Robert K. 1994. *Case study research. Design and methods*, 2e édition. Thousand Oaks (CA): Sage, 200 p.

Zazkis, Rina, et Roza Leikin. 2010. «Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers». *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 12, no 4, p. 263-281.