

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

AUTOMATES RECONNAISSANT LE LANGAGE DES MOTS
RÉDUITS D'UN GROUPE DE COXETER

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
SÉBASTIEN OUMET

SEPTEMBRE 2016

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

Je débute par remercier mon directeur, professeur et maintenant ami et collègue, Christophe Hohlweg, sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Son support, dès les premières années de mon baccalauréat, fut sans relâche et indispensable au repoussement de mes limites. Merci d'avoir cru en moi et de m'avoir accompagné dans cette aventure !

Je dois aussi remercier tous mes collègues et professeurs du département de mathématiques de l'UQAM et du LaCIM. Votre entraide et votre joie de vivre aident à conserver l'ambiance amicale et motivante présente à l'UQAM. J'en profite aussi pour remercier tous les précieux amis que j'ai rencontrés lors de mon parcours, notamment Rachel, Dominic, mes deux anciens colocataires David et Jérémie, Nadia, Émilie, Pauline, Stéphanie et j'en passe. Je dois faire une mention spéciale à Francis Beauchemin Côté, Daniel Cardin et Jean-Christophe Giguère et à nos séances de badminton hebdomadaire. Vous m'avez aidé à me changer les idées lors des moments de remise en question. De plus, j'avais dit que j'allais trouver une façon de vous inclure dans mon mémoire, alors voilà !

Merci aussi à ma famille pour votre support inconditionnel dans tout ce que j'entreprends, même si vous ne comprendrez jamais ce que je fais... Je ne serais pas qui je suis aujourd'hui sans vous. Merci !

Je me dois de réserver une section spéciale aux deux personnes qui ont eu la plus grande influence sur moi lors des dernières années. Je commence par un immense merci à la femme qui partage ma vie aujourd'hui. Elle a su endurer mon attitude et mes sautes d'humeur dues au stress causé par ce mémoire. Chacun son tour comme on dit ! Merci Laurence pour ta compréhension et ta présence. Merci aussi à ta bande d'amis, que je considère aujourd'hui comme de la famille. Pour finir, on dit souvent qu'on peut compter ses meilleurs amis d'une vie sur les doigts d'une seule main. Et bien j'ai un doigt réservé à tout jamais au nom de Cédric Beau-

lac. Nos « Geek Nights » avec Dom, David et Jérémie durant la grève étudiante de 2012, nos rencontres hebdomadaires lors de la rédaction de ton mémoire et nos soupers « potées » ont mené à une amitié incommensurable. Nos discussions politico-sociales et nos élucubrations pour un monde meilleur ont fait de moi la personne engagée, consciente et idéologique que je suis aujourd'hui. Malgré la distance qu'a apportée ton départ à Toronto, nous avons su entretenir cette amitié en se contactant plusieurs fois par semaine, contacts débutant généralement par un « Yo!! TS? » et se terminant aux petites heures du matin par un « J'devrais être là demain quand ma blonde va se coucher... J'te tiens au courant! ». Merci pour cette grande amitié!

Je ne vous remercierai jamais suffisamment. Merci à tous de faire partie de mon quotidien; je vous en suis éternellement reconnaissant.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	vi
RÉSUMÉ	vii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
SYSTÈMES DE COXETER, THÉORIE DES AUTOMATES, SYSTÈME DE RACINES ET OMBRES DE GARSIDE	4
1.1 Systèmes et graphes de Coxeter	4
1.2 Longueur et mots réduits	8
1.3 Ordre faible	10
1.4 Théorie des automates	11
1.5 Représentation géométrique et système de racines d'un groupe de Coxeter	16
1.5.1 Système de racines	17
1.5.2 Poset des racines et ordre de dominance	22
1.5.3 Sous-groupes paraboliques	26
1.6 Ombres de Garside	27
CHAPITRE II	
AUTOMATE CANONIQUE	30
2.1 Automates n -canoniques	31
2.2 Minimalité de l'automate canonique	37
CHAPITRE III	
AUTOMATE LIÉ À UNE OMBRE DE GARSIDE	52
3.1 Projection de Garside	53
3.2 Automate lié à une ombre de Garside et $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$	58
3.3 Morphismes d'automates	65
CHAPITRE IV	

MINIMALITÉ DE L'AUTOMATE LIÉ À LA PLUS PETITE OMBRE DE GARSIDE, ÉLÉMENTS N -BAS ET STRUCTURE AUTOMATIQUE DES GROUPES DE COXETER	68
4.1 Éléments n -bas	69
4.2 L'automate lié aux éléments n -bas : $\text{Aut}_{L_n}(W, S)$	71
4.3 Structure automatique des groupes de Coxeter	72
4.3.1 Les groupes de Coxeter sont automatiques	73
CONCLUSION	76
RÉFÉRENCES	78

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
1.1	Les graphes de Coxeter principalement utilisés en exemple dans ce mémoire.	7
1.2	Classification des systèmes de Coxeter finis : représentation par les familles de graphes de Coxeter	7
1.3	Graphe de Cayley du système $(\mathcal{D}_3, \{s, t\})$ représentant l'ordre faible.	10
1.4	Exemple du groupe diédral $\mathcal{D}_3$	17
1.5	Représentation projective partielle de $\tilde{A}_2$ et illustration du calcul des suprema.	21
1.6	Poset des racines de $\mathcal{D}_3$ (à gauche) et du groupe de type $\tilde{A}_2$ (à droite).	24
2.1	Exemple de chemin dans l'automate n -canonique qui reconnaît le mot $s_3 s_2 s_1$	33
2.2	Une représentation projective du système de racines de $\mathcal{D}_\infty$	35
2.3	L'automate $\text{Aut}_0(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ (à gauche) et l'automate $\text{Aut}_1(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ (à droite).	35
2.4	L'automate canonique reconnaissant $\text{Red}(\tilde{A}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$	49
2.5	$\text{Aut}_0(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$	51
3.1	Représentation projective de $\mathcal{D}_\infty$ et illustration de $\text{cone}(N(s) \cup N(t)) \cap Q \neq \emptyset$	60
3.2	$\text{Aut}_5(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$	60
3.3	$\text{Aut}_5(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$: l'automate minimal reconnaissant $\text{Red}(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$	64
4.1	Automate multiplicateur de $\mathcal{D}_\infty$	75

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous étudions les automates finis et déterministes reconnaissant le langage $\text{Red}(W, S)$ des mots réduits d'un système de Coxeter (W, S) . La construction d'automates reconnaissant ce langage est un sujet bien connu depuis plusieurs années : Brink et Howlett (Brink et Howlett, 1993) construisent le premier tel automate en démontrant que les groupes de Coxeter sont automatiques. La technologie des petites racines utilisée par Brink et Howlett est reprise par Eriksson (Eriksson, 1994) pour définir *l'automate canonique*. En 2015, Hohlweg, Nadeau et Williams (Hohlweg *et al.*, 2015) introduisent une définition simple d'un automate à partir de la notion d'ombre de Garside. Une question est toujours sans réponse : peut-on trouver une construction de l'automate minimal reconnaissant $\text{Red}(W, S)$ qui utilise les notions de petites racines ou d'ombres de Garside ? Cette question motive le propos de ce mémoire. Après un premier chapitre présentant les groupes de Coxeter, les petites racines et les ombres de Garside, nous définissons, dans le chapitre suivant, l'automate n -canonique en utilisant une généralisation de la technologie des petites racines et des petits ensembles d'inversions de Brink et Howlett. Nous montrons dans quels cas l'automate 0-canonique est minimal. La minimalité de l'automate 0-canonique n'est toutefois pas vérifiée en général et le contre-exemple du groupe de type $\tilde{C}_2$ illustre ce propos. Dans le troisième chapitre, nous discutons de résultats plus récents en introduisant l'automate lié à une ombre de Garside. Nous énonçons une conjecture de Hohlweg, Nadeau et Williams sur la minimalité de l'automate $\text{Aut}_{\tilde{g}}(W, S)$ lié à la plus petite ombre de Garside. Pour conclure, nous discutons, dans le dernier chapitre de ce mémoire, de problèmes ouverts motivant la minimalité de $\text{Aut}_{\tilde{g}}(W, S)$ et de la structure automatique des systèmes de Coxeter.

Mots clés : groupes de Coxeter, automates, automate minimal, mots réduits, racines, petites racines, ordre faible, ombres de Garside, éléments bas, automates multiplicateurs.

INTRODUCTION

Un *groupe de Coxeter* W est un groupe engendré par un ensemble d'involutions S avec les relations $(st)^{m_{st}}$ où $s, t \in S$ et m_{st} est un entier non nul ; s'il n'y a pas de relation entre s et t , on pose $m_{st} = \infty$, voir (Humphreys, 1990, Chapitre 5). On appelle le couple (W, S) un *système de Coxeter*. Ces systèmes sont introduits en 1934, puis classifiés dans les cas finis en 1935, par Harold Scott MacDonald Coxeter, voir (Coxeter, 1935). D'un point de vue algébrique et combinatoire, on considère, pour un groupe de Coxeter, la *longueur* de ses éléments. On note que chaque élément du groupe est une classe d'équivalence de mots sur l'alphabet S . Un mot de longueur minimale dans cette classe est appelé *mot réduit* et sa longueur est la longueur de l'élément qu'il représente. À partir des générateurs d'un groupe de Coxeter W , on construit le *système de racines* Φ et l'ensemble des *racines simples* Δ du groupe qui vivent dans un espace quadratique (V, B) où B est une forme bilinéaire. On exploite ici l'aspect plus géométrique des groupes de Coxeter. Dans ce cadre, l'ensemble des *petites racines* Σ est le plus petit ensemble tel que $\Delta \subseteq \Sigma$ et que, pour $s \in S$ et $\alpha \in \Sigma$ tels que $s(\alpha) \notin \Delta$, on a $s(\alpha) \in \Sigma$ si et seulement si $-1 < B(\alpha, \alpha_s) < 0$ (Björner et Brenti, 2005, Chapitre 4). Dans leur travail sur la structure automatique des groupes de Coxeter, Brink et Howlett montrent le résultat suivant :

Théorème ((Brink et Howlett, 1993)). *Le langage des mots réduits d'un groupe de Coxeter W est reconnaissable par des automates finis et déterministes.*

Le but de ce mémoire est de présenter des constructions d'automates reconnaissant le langage des mots réduits d'un groupe de Coxeter et d'en étudier la minimalité.

Pour démontrer le précédent théorème, Brink et Howlett construisent un automate fini dont les états sont étiquetés par les *petits ensembles d'inversions*. Toutefois, l'automate de Brink et Howlett ne reconnaît qu'un sous-ensemble du langage des mots réduits : le langage des plus petits représentants réduits pour l'ordre lexicographique. Eriksson (Eriksson, 1994) donne quant à lui la construction de *l'automate canonique* reconnaissant l'entière du langage des mots réduits en utilisant les mêmes technologies que Brink et Howlett. De notre côté, nous étudions une généralisation de ces automates : les automates n -canoniques.

En 2015, C. Hohlweg, P. Nadeau et N. Williams (Hohlweg *et al.*, 2015) montrent qu'il est possible de construire des automates reconnaissant le langage des mots réduits en utilisant la structure des *ombres de Garside*. On dit que $A \subseteq W$ est une ombre de Garside si A vérifie les trois conditions suivantes :

- $S \subseteq A$;
- si $x \in A$, alors tous les suffixes de x sont aussi dans A ;
- pour tout $x, y \in A$, le supremum $x \vee y$ de x et y pour l'ordre faible, s'il existe, est aussi élément de A .

Il existe une projection $\pi_A : W \rightarrow A$ qui permet de construire les *automates liés à une ombre de Garside*, notés $\text{Aut}_A(W, S)$.

Théorème ((Hohlweg *et al.*, 2015, Théorème 1.2)). *L'automate $A_A(W, S)$ est fini et déterministe et reconnaît le langage des mots réduits pour toute ombre de Garside finie A .*

On rappelle qu'un des objectifs principaux de ce mémoire est d'étudier la minimalité de certains automates reconnaissant le langage des mots réduits. Myhill et Nerode (Nerode, 1958) montrent que l'automate *minimal* reconnaissant un langage donné est unique à changement des noms des états près. Notre objectif est de trouver une construction générale d'un automate minimal reconnaissant le lan-

gage des mots réduits en utilisant la théorie des ombres de Garside. Nous montrons qu'il existe une plus petite ombre de Garside pour un système de Coxeter (W, S) et nous la notons $\tilde{S}$. Dyer et Hohlweg (Dyer et Hohlweg, 2015) montrent que $\tilde{S}$ est finie pour tout système de Coxeter (W, S) . Hohlweg, Nadeau et Williams (Hohlweg *et al.*, 2015) énoncent alors la conjecture suivante :

Conjecture ((Hohlweg *et al.*, 2015, Conjecture 1)). *Soit $\tilde{S}$ la plus petite ombre de Garside d'un système de Coxeter (W, S) , alors $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ est l'automate minimal reconnaissant le langage des mots réduits.*

Nous débutons ce mémoire en donnant les propriétés de base des groupes de Coxeter pour ensuite, dans le deuxième chapitre, introduire la construction de l'automate n -canonique. Nous discutons de la minimalité de l'automate 0-canonique, aussi simplement appelé *automate canonique*. Nous illustrons par la suite un contre-exemple à la minimalité de cet automate en étudiant l'automate canonique reconnaissant le langage des mots réduits du groupe de type $\tilde{C}_2$, $\text{Aut}_0(\tilde{C}_2, S)$. Dans le troisième chapitre, pour une ombre de Garside A , nous donnons quelques propriétés de la projection de Garside π_A et nous construisons l'automate lié à A . Nous étudions ensuite la minimalité de $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$. Le quatrième chapitre porte quant à lui sur certains problèmes ouverts relatifs aux ombres de Garside et aux éléments n -bas (Dyer et Hohlweg, 2015). La plupart des résultats et conjectures énoncés dans ce chapitre sont présentés afin de motiver la minimalité de $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$. Finalement, nous concluons ce mémoire en étudiant brièvement la structure automatique des groupes de Coxeter et, en particulier, les automates *multiplicateurs*.

CHAPITRE I

SYSTÈMES DE COXETER, THÉORIE DES AUTOMATES, SYSTÈME DE RACINES ET OMBRES DE GARSIDE

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous discutons des notions préalables à la compréhension des concepts visités lors des chapitres suivants. Nous débutons par une introduction aux systèmes de Coxeter pour ensuite discuter de la notion de longueur et de mot réduit. Nous présentons par la suite l'ordre faible qui fournit un ordre partiel sur les éléments d'un groupe de Coxeter. Nous continuons en étudiant les notions de base de la théorie des automates qui sont nécessaires pour les constructions d'automates discutées ultérieurement. Nous présentons les concepts de base d'une représentation géométrique d'un système de Coxeter afin de discuter des systèmes de racines et nous terminons ce chapitre par une introduction aux ombres de Garside. Pour les références générales sur les groupes de Coxeter, nous suggérons (Humphreys, 1990), (Björner et Brenti, 2005) et (Geck et Pfeiffer, 2000).

1.1 Systèmes et graphes de Coxeter

Définition 1.1.1. Soit $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ un ensemble d'involutions et $W = \langle S \rangle$ le groupe engendré par les involutions de S . Notons e l'identité du groupe W . Le couple (W, S) est un *système de Coxeter* si $W = \langle S \mid (st)^{m_{st}} = e \rangle$ où $m_{st} = 1$ si $s = t$, $m_{st} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ si $s \neq t$ et $m_{st} = m_{ts}$. Par convention, nous notons

$m_{st} = \infty$ s'il n'y a pas de relation entre s et t . S'il n'y a pas de confusion possible quant à l'ensemble de générateurs S , nous référerons simplement au groupe de Coxeter W au lieu de (W, S) . De plus, on dit que (W, S) est un *système de Coxeter fini* si le groupe W est fini.

Exemple 1.1.2. On note $\mathcal{D}_m$ le *groupe diédral d'ordre $2m$* , pour $m \in \mathbb{N}_{\geq 3} \cup \{\infty\}$. Le groupe $\mathcal{D}_m$ est le groupe d'isométries préservant le polygone à m côtés dans le plan $\mathbb{R}^2$. Grâce à leur simplicité, ces groupes permettent de bien comprendre certains concepts et représentent donc la majorité des exemples étudiés dans ce mémoire. Il existe une présentation par générateurs et relations du groupe diédral $\mathcal{D}_m$ d'ordre $2m$:

$$\mathcal{D}_m = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^m = e \rangle.$$

En particulier, les groupes diédraux sont des groupes de Coxeter.

Exemple 1.1.3. Soit $\mathcal{D}_\infty$ le groupe diédral d'ordre $m = \infty$. Ce groupe est le seul groupe diédral d'ordre infini. Si $m_{st} = \infty$, ceci signifie qu'il n'y a pas de relation entre s et t . De ce fait, les éléments de $\mathcal{D}_\infty$ sont des suites alternantes de s et de t de longueur quelconque : $ststst\dots$ ou $tststststs\dots$. Par convention, l'identité e est de longueur 0.

Afin de faciliter la notation des systèmes de Coxeter (W, S) , la prochaine définition fournit un encodage des systèmes de Coxeter dans un graphe non-orienté.

Définition 1.1.4. Soit (W, S) un système de Coxeter, où

$$W = \langle S \mid (st)^{m_{st}} = e \text{ pour } s, t \in S \rangle.$$

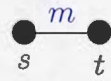
Le *graphe de Coxeter de (W, S)* , noté Γ_W , est défini comme suit :

- (i) les sommets sont étiquetés par les éléments de S ;

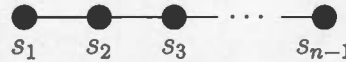
- (ii) les arêtes non-orientées sont étiquetées par m_{st} si $m_{st} \geq 4$. Si $m_{st} = 2$, on ne met pas d'arête entre s et t . Si $m_{st} = 3$, il y a une arête entre s et t , mais on omet l'étiquette.

Remarque 1.1.5. Pour la suite de ce mémoire, nous utilisons le terme « arête ∞ » plutôt que « arête étiquetée par ∞ » afin d'alléger le texte.

Exemple 1.1.6. 1. Pour les systèmes de Coxeter $(\mathcal{D}_m, \{s, t\})$, le graphe de Coxeter $\Gamma_{\mathcal{D}_m}$ de type $I_2(m)$ est :

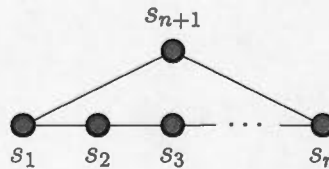


2. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est représenté par le graphe de type A_{n-1} :



où les s_i sont les transpositions simples $(i \ i+1)$.

3. Le groupe infini de type $\tilde{A}_n$ est représenté par le graphe cyclique à $n+1$ sommets :



Remarque 1.1.7. Dans ce mémoire, nous illustrons principalement les exemples sur les groupes diédraux et les groupes de types $\tilde{A}_2$ et $\tilde{C}_2$ (voir figure 1.1 pour les graphes de Coxeter correspondants).

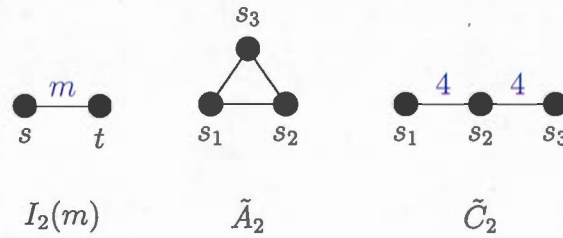


Figure 1.1 Les graphes de Coxeter principalement utilisés en exemple dans ce mémoire.

Théorème 1.1.8 (Classification des systèmes de Coxeter finis). *Les systèmes de Coxeter finis sont classifiés selon un nombre fini de familles. Les graphes connexes de ces familles sont tous illustrés à la figure 1.2.*

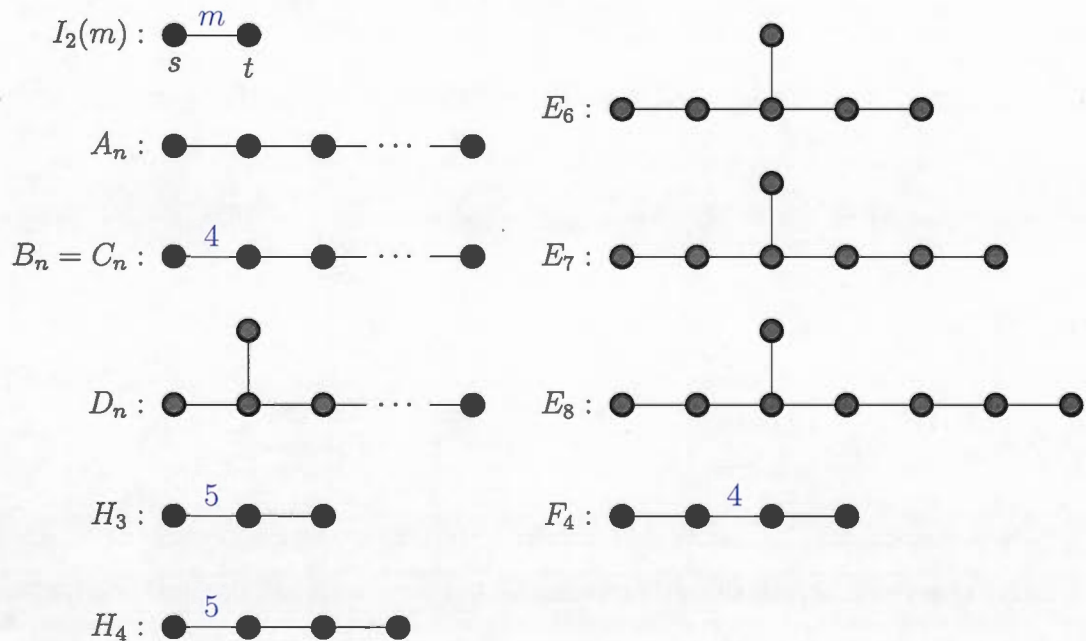


Figure 1.2 Classification des systèmes de Coxeter finis : représentation par les familles de graphes de Coxeter

1.2 Longueur et mots réduits

Soit (W, S) un système de Coxeter et prenons $w = s_1 \cdots s_k \in W$ où $s_i \in S$ pour $1 \leq i \leq k$. On dit que $s_1 \cdots s_k$ est un *mot* pour w dans W .

Définition 1.2.1. Soit (W, S) un système de Coxeter.

(i) La *longueur* sur W est donnée par la fonction :

$$\ell : W \rightarrow \mathbb{N}$$

$$e \mapsto 0$$

$$w \neq e \mapsto \ell(w) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid w = s_1 \cdots s_k, s_i \in S\}.$$

- (ii) Soient $w \in W$ et $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$ tels que $w = s_1 s_2 \cdots s_k$. Alors $s_1 \cdots s_k$ est un *mot réduit* pour w si $\ell(w) = k$.
- (iii) Soient $u, v, w \in W$. Le mot uv est une *expression réduite* de w si $uv = w$ et $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$.
- (iv) Soient $u, v, w \in W$. On dit que $u \in W$ est un *préfixe* de w s'il existe $s_1, \dots, s_i, \dots, s_k \in S$ tels que $u = s_1 \cdots s_i$ et $w = s_1 \cdots s_i \cdots s_k$. De façon analogue, le mot v est un *suffixe* de w s'il existe $s_1, \dots, s_j, \dots, s_k \in S$ tels que $v = s_j \cdots s_k$ et $w = s_1 \cdots s_j \cdots s_k$. Par convention, e est un suffixe et un préfixe de tout $w \in W$.

Le résultat suivant énumère quelques propriétés importantes de la fonction longueur sur W .

Proposition 1.2.2. La fonction longueur vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\ell(w) = 1$ si et seulement si $w \in S$;
- (ii) $\ell(w) = \ell(w^{-1})$;
- (iii) $\ell(ww') \leq \ell(w) + \ell(w')$;

$$(iv) \ell(ww') \geq |\ell(w) - \ell(w')|;$$

$$(v) \ell(sw) = \ell(w) \pm 1 \text{ pour } s \in S.$$

Corollaire 1.2.3. *Soit $w = s_1 \cdots s_k \in W$ un mot réduit, alors tous les préfixes et tous les suffixes de w sont réduits.*

Définition 1.2.4. Soit $w \in W$, on note $D_L(w) = \{s \in S \mid \ell(sw) < \ell(w)\}$ l'ensemble des descentes à gauche de w . Respectivement, on a l'ensemble des descentes à droite $D_R(w) = \{s \in S \mid \ell(ws) < \ell(w)\}$. Dans ce mémoire, nous utilisons seulement les ensembles de descentes à gauche.

On remarque que l'étude des ensembles de descentes permet de déterminer quelles lettres il est possible d'ajouter à un mot pour que le mot résultant soit encore un mot réduit.

Pour continuer sur les applications de la fonction longueur, prenons (W, S) un système de Coxeter. Si W est fini, alors il existe forcément des éléments de longueur maximale.

Proposition 1.2.5. *Si W est fini, il existe un unique élément de longueur maximale w_0 .*

Toutes les démonstrations relatives à l'élément de longueur maximale w_0 sont faites dans (Geck et Pfeiffer, 2000, §1.5). Puisque w_0 est unique et que, par la proposition 1.2.2(ii), on a $\ell(w) = \ell(w^{-1})$, on en déduit que w_0 est une involution et donc que $w_0 = w_0^{-1}$. De plus, on montre que $\ell(w w_0) = \ell(w_0 w) = \ell(w_0) - \ell(w)$ pour tout $w \in W$. La proposition suivante découle directement de cette dernière assertion.

Proposition 1.2.6. *Soient $w \in W$ et w_0 l'élément de longueur maximale, alors tout mot réduit de w est un préfixe et un suffixe d'un mot réduit de w_0 .*

1.3 Ordre faible

Soit (W, S) un système de Coxeter. En utilisant les notions de mots réduits, de préfixes et de suffixes, on définit l'*ordre faible à droite* et à *gauche* de la façon suivante :

Définition 1.3.1. Soient $u, w \in W$, on note $u \leq w$ s'il existe un mot réduit de u qui est un préfixe d'un mot réduit de w . Respectivement, on note $u \leq_G w$ s'il existe un mot réduit de u qui est un suffixe d'un mot réduit de w .

Pour cette partie, nous nous référons à (Björner et Brenti, 2005, Chapitre 3). Notons que dans ce mémoire, nous utilisons seulement l'ordre faible à droite ($\leq$). Cet ordre donne une orientation naturelle au graphe de Cayley de (W, S) :

1. les sommets sont étiquetés par les éléments de W ;
2. il y a une arête $w \rightarrow w'$ si $w' = ws$ et que $w \leq ws$ pour $s \in S$.

Exemple 1.3.2 (Graphe de Cayley du groupe $\mathcal{D}_3$). Le graphe de Cayley de $(\mathcal{D}_3, \{s, t\})$ est illustré à la figure 1.3.

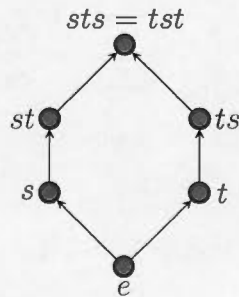


Figure 1.3 Graphe de Cayley du système $(\mathcal{D}_3, \{s, t\})$ représentant l'ordre faible.

Nous avons précédemment introduit les ensembles de descentes (définition 1.2.4). Nous rappelons que l'étude des ensembles de descentes permet de déterminer pour

quels $s \in S$ on a $\ell(sw) = \ell(w) + 1$ pour un mot réduit $w \in W$. En particulier, on voit que si w admet un mot réduit qui commence par la lettre s ($s \leq w$), alors on ne peut rajouter la lettre s devant et obtenir un mot réduit. Le lemme 1.3.3 établit des liens entre l'ensemble de descentes et l'ordre faible.

Lemme 1.3.3. *Soit $u, v \in W$ et $s \in S$. Alors*

- (i) $s \in D_L(u)$ si et seulement si $s \leq u$;
- (ii) si $s \in D_L(u) \cap D_L(v)$, alors $u \leq v$ si et seulement si $su \leq sv$;
- (iii) si $s \notin D_L(u)$ et $s \notin D_L(v)$, alors $u \leq v$ si et seulement si $su \leq sv$.

Théorème 1.3.4. *Soit W un groupe de Coxeter. L'ordre faible sur W forme un semi-treillis complet pour l'infimum. En particulier, pour $X \subseteq W$, $\bigwedge X$ existe et est unique.*

Utilisant la structure de semi-treillis complet démontrée par Björner, on définit le supremum, s'il existe, d'un sous-ensemble B en fonction de l'infimum :

$$\bigvee B = \bigwedge \{w \in W \mid x \leq w, \forall x \in B\}.$$

On dit que B est *borné* s'il existe $w \in W$ tel que $x \leq w$ pour tout $x \in B$.

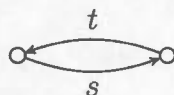
Exemple 1.3.5. Si W est un groupe de Coxeter fini, alors tout sous-ensemble de W est borné par l'élément maximal w_0 grâce à la proposition 1.2.6.

1.4 Théorie des automates

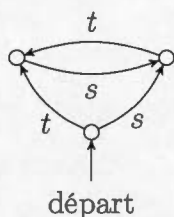
Soient (W, S) un système de Coxeter. Comment peut-on énumérer les mots réduits de W ? Une réponse à cette question se situe dans la théorie des automates.

Exemple 1.4.1. Pour le groupe $\mathcal{D}_\infty$, on sait que les mots réduits sont de la forme $ststs \dots$ ou $tstst \dots$ avec un nombre de lettres quelconque. On lit donc tous les

mots réduits de $\mathcal{D}_\infty$ en suivant les arêtes du graphe suivant en débutant d'un des deux sommets, dépendamment du mot qu'on veut lire :



On détermine un point de départ en rajoutant un sommet au graphe précédent et en complétant avec certaines arêtes :



Nous venons de construire un graphe dont l'ensemble des chemins nous fournit une énumération des mots réduits de $\mathcal{D}_\infty$.

Avant de définir les automates, nous présentons les concept d'alphabet, de mots et de langage. Un *alphabet* S est un ensemble d'éléments appelés *lettres*. Un mot w de longueur $k \in \mathbb{N}$ est une suite de longueur k , $w = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$, telle que $a_i \in S$ pour tout $i \in [k]$. Dans ce contexte, on utilise la notation condensée : $w = a_1 a_2 a_3 \dots a_k$. Le langage sur l'alphabet S est l'ensemble des mots, sans spécification sur la longueur, formés par les lettres de l'alphabet S ; on le note S^* . On définit aussi une loi de composition « $\star$ », la *concaténation*, de sorte que pour deux mots $u = u_1 \dots u_n$ et $v = v_1 \dots v_m$, on a $u \star v = uv = u_1 \dots u_n v_1 \dots v_m$.

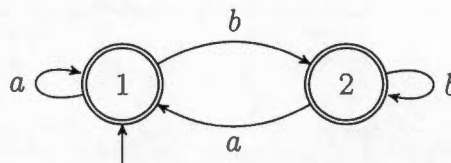
Dans ce mémoire, pour un système de Coxeter (W, S) , nous considérons S comme alphabet. Le langage que nous étudions est le langage des mots réduits de W et nous le notons $\text{Red}(W, S)$.

Définition 1.4.2. On dit que $\mathcal{A}$ est un *automate* s'il est la donnée d'un 5-tuplet (S, Q, I, F, δ) où :

- (i) S est un alphabet ;
- (ii) Q est l'ensemble des états de notre automate ;
- (iii) I est l'ensemble des états initiaux ;
- (iv) F est l'ensemble des états finaux ;
- (v) et $\delta : Q \times S \rightarrow Q$ est la fonction de transition partielle.

Un automate est représenté par un graphe orienté où les états forment les sommets et les transitions forment et étiquettent les arêtes du graphe. Les états initiaux sont les états d'où il est possible de commencer la lecture de mots et sont identifiés par une flèche entrante. Les états finaux sont les états où il est possible de terminer la lecture et sont identifiés par un double cercle. Habituellement, les automates possèdent un état « Échec ». Dans ce mémoire, une transition vers l'état « Échec » est simplement représenté par l'absence de transition, d'où la nécessité d'avoir une fonction de transition partielle.

Exemple 1.4.3. Soit $S = \{a, b\}$ et S^* le langage associé. Un automate reconnaissant S^* est donné par :

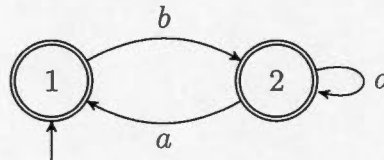


Dans cet automate, seul l'état 1 est initial et les états 1 et 2 sont finaux.

Définition 1.4.4. On dit qu'un automate est *déterministe* si la fonction de transition δ est bien définie. De plus, un automate est *fini* si son nombre d'états est fini.

Exemple 1.4.5.

- Le langage de l'exemple 1.4.3 est reconnaissable par des automates finis et déterministes.
- L'automate suivant n'est pas déterministe car la fonction de transition n'est pas bien définie pour les transitions partant de l'état 2. En effet, une transition par a partant de l'état 2 peut mener à l'état 1 ou à l'état 2 :



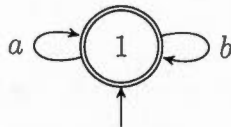
- Il est démontré qu'il n'y a pas d'automate fini et déterministe qui reconnaît le langage formé des mots du type $a^n b^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est important de savoir que dans ce mémoire, nous ne traitons que des automates finis et déterministes. De plus, notons que pour un langage $\mathcal{L}$ sur un certain alphabet avec un automate $\mathcal{A}$ reconnaissant $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ reconnaît exactement les mots de $\mathcal{L}$, ni plus, ni moins.

Définition 1.4.6. Soit $\mathcal{L}$ un langage sur un alphabet S et soit $\mathcal{A}$ un automate reconnaissant $\mathcal{L}$. On dit que $\mathcal{A}$ est *minimal* s'il possède un nombre minimal d'états. De plus, on dit que deux états de l'automate sont équivalents si le langage reconnu à partir de chacun de ces états est le même.

On peut donc déduire de la définition précédente que si un automate possède deux états équivalents, alors il n'est pas minimal.

Exemple 1.4.7. On voit que l'automate de l'exemple 1.4.3 n'est pas minimal. En effet, l'automate suivant reconnaît le même langage, mais possède seulement un état :



Théorème 1.4.8. (Nerode, 1958) *Pour un langage donné $\mathcal{L}$ reconnaissable par un automate fini et déterministe, l'automate fini et déterministe minimal reconnaissant $\mathcal{L}$ est unique, à changement de nom des états près.*

Il est démontré que l'automate minimal est donné par l'automate des *résiduels*. Comme les résiduels ne font pas partie du cœur de ce mémoire, ils ne seront pas abordés ici. Nous voulons trouver une construction faisant appel aux différentes technologies des groupes de Coxeter telles que la géométrie des systèmes de racines et la combinatoire des mots réduits ; concepts que nous introduisons plus tard dans ce chapitre.

La proposition suivante illustre bien l'idée derrière la reconnaissance des mots réduits par un automate dans le cas d'un groupe de Coxeter fini W .

Proposition 1.4.9. *Lorsque W est fini, la construction du graphe de Cayley orienté par l'ordre faible donne un automate reconnaissant le langage des mots réduits de (W, S) .*

Exemple 1.4.10. Le graphe de l'exemple 1.3.2 et représenté à la figure 1.3 est un automate reconnaissant $\text{Red}(\mathcal{D}_3, \{s, t\})$. Il ne suffit que d'ajouter les étiquettes aux arêtes orientées afin de représenter les transitions. Par exemple, l'arête entre les sommets s et st est étiquetée par t dans l'automate induit du graphe de Cayley de la figure 1.3.

Nous concluons cette section sur une reformulation du théorème de Brink et Howlett (Brink et Howlett, 1993) qui sert de pilier à ce mémoire.

Théorème 1.4.11. *Soit (W, S) un système de Coxeter, alors $\text{Red}(W, S)$ est reconnaissable par des automates finis et déterministes.*

1.5 Représentation géométrique et système de racines d'un groupe de Coxeter

Soient (W, S) un système de Coxeter, V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. On appelle le couple (V, B) un espace quadratique et $Q = \{v \in V \mid B(v, v) = 0\}$ le *cône isotrope* de (V, B) . Une *représentation géométrique* de (W, S) est une représentation fidèle $\varphi : W \hookrightarrow O_B(V)$ du groupe W dans le groupe des isométries d'un espace quadratique (V, B) qui envoie un élément $s \in S$ sur la réflexion de $O_B(V)$ déterminée par le vecteur $\alpha_s \in V \setminus Q$:

$$\varphi(s)(v) := s(v) = v - 2 \frac{B(v, \alpha_s)}{B(\alpha_s, \alpha_s)} \alpha_s, \text{ pour } v \in V.$$

Un élément $s \in S$ est une *réflexion simple* et donc une application linéaire de V telle que $s^2 = \text{Id}_V$ et $s(\alpha_s) = -\alpha_s$. Il est important de noter que, pour tout système de Coxeter (W, S) , il existe toujours une représentation géométrique : c'est-à-dire que pour (W, S) , il existe un espace quadratique (V, B) et un morphisme de groupe injectif $\varphi : W \hookrightarrow O_B(V)$ tel que $\varphi(s)(v)$ est définie comme ci-haut pour tout $v \in V$.

Exemple 1.5.1. Si (V, B) est un espace euclidien, alors B est un produit scalaire et donc le cône isotrope de (V, B) est $Q = \{0\}$. Dans ce contexte, les réflexions sont entièrement déterminées par leur espace de points fixes, c'est-à-dire l'hyperplan $(\mathbb{R}\alpha_s)^\perp$ perpendiculaire au vecteur α_s .

Exemple 1.5.2. Le groupe $\mathcal{D}_3$ est le groupe d'isométries préservant le triangle. Son action sur le triangle est illustrée à la figure 1.4. Dans cet exemple, on voit que la fonction identité et les symétries s_α, s_β et s_γ préservent le triangle. De plus, les rotations r_1 et r_2 , rotations de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ respectivement, préservent aussi le triangle. Ainsi, on a

$$\mathcal{D}_3 = \{e, s_\alpha, s_\beta, s_\gamma, r_1, r_2\}$$

où e est la fonction identité. On remarque que $s_\gamma = s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta$, que $r_1 = s_\alpha s_\beta$ et que $r_2 = s_\beta s_\alpha$. Finalement, on voit aussi que $(s_\alpha s_\beta)^3 = s_\gamma^2 = e$. On écrit alors

$$\mathcal{D}_3 = \langle s_\alpha, s_\beta \mid m_{s_\alpha s_\beta} = 3 \rangle.$$

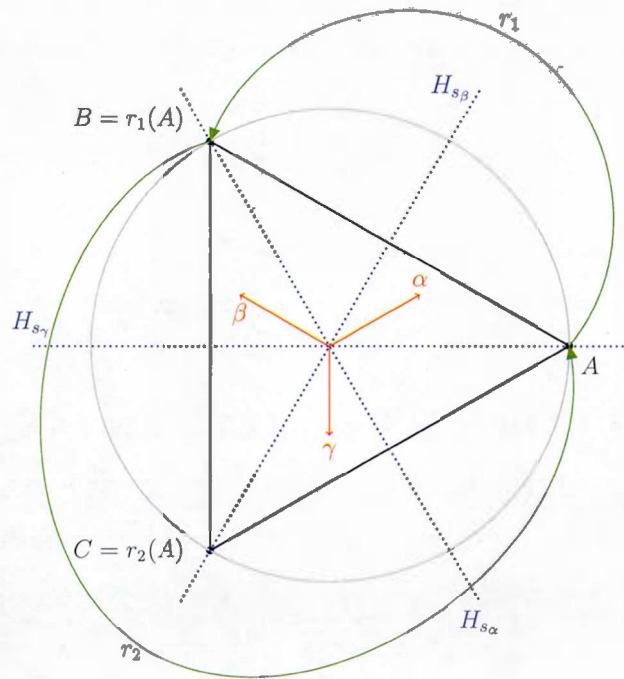


Figure 1.4 Exemple du groupe diédral $\mathcal{D}_3$.

1.5.1 Système de racines

Soient (W, S) un système de Coxeter et (V, B) un espace quadratique. Considérons la représentation géométrique $\varphi : W \hookrightarrow O_B(V)$. Soit $F \subseteq V$, le cône de F est

l'espace engendré par les combinaisons linéaires positives des éléments de F :

$$\text{cone}(F) = \left\{ \sum_{v \in F} a_v v \mid a_v \geq 0 \right\}.$$

Définition 1.5.3. Un *système simple* de (V, B) pour (W, S) est un sous-ensemble $\Delta \subseteq V$ tel que

- (i) Δ est positivement linéairement indépendant : aucun vecteur de Δ ne peut s'écrire comme combinaison linéaire positive des autres vecteurs de Δ ;
- (ii) pour tout $\alpha, \beta \in \Delta$, $B(\alpha, \beta) \in]-\infty, -1] \cup \{-\cos(\frac{\pi}{k}) \mid k \in \mathbb{N}_{\geq 2}\}$;
- (iii) $B(\alpha, \alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta$;
- (iv) il existe une représentation géométrique φ telle que $\varphi(S) = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$.

Les éléments de Δ sont appelés *racines simples*.

Pour un système de Coxeter (W, S) , on note souvent $\Delta = \{\alpha_s \mid s \in S\}$. On pose $\Phi = W(\Delta)$ le *système de racines* de (W, S) associé à φ . De ce fait, on définit le *système de racines positives* $\Phi^+ = \text{cone}(\Delta) \cap \Phi$ et le *système de racines négatives* $\Phi^- = -\Phi^+ = \text{cone}(-\Delta) \cap \Phi$. Ainsi, le système de racines est l'union disjointe du système de racines positives et du système de racines négatives : $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$. On réfère le lecteur à (Björner et Brenti, 2005, Chapitre 4) pour une démonstration de cette dernière assertion. On appelle les éléments de Φ les *racines* et les éléments de Φ^+ (respectivement Φ^-) les *racines positives* (respectivement *négatives*).

Par construction, Δ est une base de $\text{cone}(\Phi^+)$. Ainsi, pour $\beta \in \Phi^+$, il existe une écriture unique :

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} \text{coeff}_\alpha(\beta) \alpha$$

avec $\text{coeff}_\alpha(\beta) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$ et $\text{coeff}_\alpha(\beta)$ est le coefficient de α dans l'écriture de β . De ce fait, on a le résultat suivant :

Proposition 1.5.4 ((Brink, 1998, Proposition 2.1)). *Soit $\beta \in \Phi$, $\alpha \in \Delta$ et $\lambda = \text{coeff}_\beta(\alpha)$. Si $\lambda > 0$, alors $\lambda \geq 1$.*

Afin de représenter le système de racines Φ d'un système de Coxeter (W, S) , on considère un hyperplan H_p de V qui intersecte chaque droite vectorielle dirigée par les vecteurs de Φ^+ . On prend alors les points de $\Phi^+ \cap H_p$ comme des représentants des éléments de Φ^+ . Puisque l'idée est semblable à la construction des espaces projectifs, on appelle cette représentation la *représentation projective* de Φ^+ . Dans la littérature on note souvent $\hat{\alpha}$ le représentant projectif de $\alpha \in \Phi^+$. Dans ce mémoire, puisqu'il n'y a pas de confusion possible, on n'utilisera pas la notation avec le « chapeau ». Des exemples de représentation projective de système de Coxeter, sont illustrés dans les figures 1.5 (représentation partielle de groupe de type $\tilde{A}_2$, page 21) et 2.2 (le système $(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$, page 35). On note aussi que le concept de « cône » pour un système de racines Φ est équivalent au concept de « fermeture convexe » dans sa représentation projective.

Rappelons qu'un des objectifs principaux de ce mémoire est l'étude et l'énumération des mots réduits d'un système de Coxeter (W, S) . La proposition 1.5.6 fournit une méthode pour calculer la longueur d'un mot de W . Tout d'abord, on définit les *ensembles d'inversions* :

Définition 1.5.5. Soit $w \in W$, l'ensemble d'inversions à gauche de w est :

$$N(w) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid w^{-1}(\alpha) \in \Phi^-\} = \Phi^+ \cap w(\Phi^-).$$

On note l'ensemble d'inversions à droite de w , $\text{inv}(w) := N(w^{-1})$.

Proposition 1.5.6. Soit $w, w' \in W$. Alors $\ell(w) = |N(w)|$. De plus, la fonction $N : W \rightarrow \mathcal{P}(\Phi^+)$ est injective : si $N(w) = N(w')$ alors $w = w'$.

Ainsi, pour calculer la longueur d'un élément $w \in W$, il suffit de calculer son

ensemble d'inversions. Le résultat suivant fournit les outils pour calculer, de façon récursive, l'ensemble d'inversions d'un élément de W .

Proposition 1.5.7. *Soit $w \in W$ et $s \in S$ tels que sw est un mot réduit, alors*

$$N(sw) = \{\alpha_s\} \sqcup s(N(w)).$$

Pour (W, S) un système de Coxeter, la proposition 1.5.8 donne une précision sur les valeurs de la forme bilinéaire B appliquée à deux racines d'un même ensemble d'inversions. Nous avons besoin de cette proposition dans le deuxième chapitre de ce mémoire.

Proposition 1.5.8. *Soit $w \in W$. Si $\alpha, \beta \in N(w)$, alors $B(\alpha, \beta) > -1$.*

Pour une preuve de la proposition 1.5.8, on réfère le lecteur à (Dyer et Hohlweg, 2015).

Maintenant que nous avons discuté des systèmes de racines et des ensembles d'inversions, nous continuons notre discussion autour de l'ordre faible. Nous énonçons quelques propriétés qui lient les notions d'ordre faible, de supremum pour cet ordre et d'ensembles d'inversions.

Proposition 1.5.9. *Soient $u, v \in W$, alors $u \leq v$ si et seulement si $N(u) \subseteq N(v)$.*

Deux résultats de Dyer (Dyer, 2011) (aussi dans (Dyer et Hohlweg, 2015), proposition 2.8 et remarque 2.9) nous aident dans le calcul du supremum d'un ensemble borné. En premier lieu, on a

$$N(\bigvee X) = \text{cone}(\bigcup_{x \in X} N(x)) \cap \Phi.$$

En deuxième lieu, $\text{cone}(N(u) \cup N(v)) \cap Q \neq \{0\}$ si, et seulement si, $u \vee v$ n'existe pas.

L'exemple suivant illustre explicitement le calcul de certains suprema dans le groupe de type $\tilde{A}_2$.

Exemple 1.5.10. Soit le système de Coxeter $(\tilde{A}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$ avec graphe de Coxeter $\triangle$. Calculons (a) $s_1 s_2 \vee s_3 s_1$ et (b) $s_1 s_2 \vee s_1 s_3$. Considérons la représentation projective de $\tilde{A}_2$. Attention : la figure 1.5 est une illustration incomplète de la représentation projective de $\tilde{A}_2$ et n'illustre que les racines dont nous avons besoin dans notre exemple.

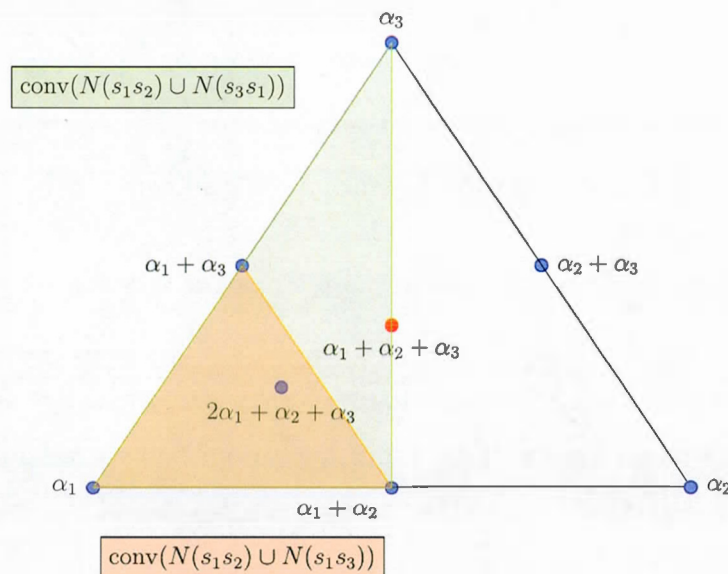


Figure 1.5 Représentation projective partielle de $\tilde{A}_2$ et illustration du calcul des suprema.

- (a) On a $N(s_1 s_2) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2\}$ et $N(s_3 s_1) = \{\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3\}$. Sur la figure 1.5, $\text{conv}(N(s_1 s_2) \cup N(s_3 s_1))$ est représenté par la forme verte. Comme on a $Q = \mathbb{R}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, illustré par le point rouge, dans $\text{cone}(N(s_1 s_2) \cup N(s_3 s_1))$, alors $s_1 s_2 \vee s_3 s_1$ n'existe pas.
- (b) On voit que Q n'est pas dans $\text{conv}(N(s_1 s_2) \cup N(s_1 s_3))$, correspondant à la partie orangée, donc $s_1 s_2 \vee s_1 s_3$ existe. Comme $N(s_1 s_2) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2\}$ et

$N(s_1s_3) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_3\}$, alors

$$N(s_1s_2 \vee s_1s_3) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} N(s_1s_2 \vee s_1s_3) &= \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\} \\ &= \{\alpha_1\} \sqcup s_1(\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3\}) \\ &= \{\alpha_1\} \sqcup s_1(\{\alpha_2\} \sqcup s_2(\{\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3\})) \\ &= \{\alpha_1\} \sqcup s_1(\{\alpha_2\} \sqcup s_2(\{\alpha_3\} \sqcup s_3(\{\alpha_2\}))) \\ &= \{\alpha_1\} \sqcup s_1(\{\alpha_2\} \sqcup s_2(\{\alpha_3\} \sqcup s_3(N(s_2)))) \\ &= N(s_1s_2s_3s_2). \end{aligned}$$

D'où $s_1s_2 \vee s_1s_3 = s_1s_2s_3s_2$ par injectivité de N .

1.5.2 Poset des racines et ordre de dominance

Soit (W, S) un système de Coxeter avec Δ un système simple et $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$ un système de racines. On débute par rappeler que pour tout $\beta \in \Phi^+$, il existe un $w \in W$ tel que $w(\beta) \in \Delta$, car $\Phi = W(\Delta)$. On suggère le livre de Björner et Brenti (Björner et Brenti, 2005, Chapitre 4) comme référence générale au sujet du poset des racines et de l'ordre de dominance.

Définition 1.5.11. Soit $\beta \in \Phi^+$, la *profondeur* de β est

$$\text{dp}(\beta) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid w(\beta) \in \Delta \text{ pour } w \in W \text{ avec } \ell(w) = k\}.$$

Remarque 1.5.12. Notons que la précédente définition diffère légèrement de celle de Björner et Brenti. Leur définition de la profondeur est relative à Φ^-

comparativement à Δ dans notre cas. Il y a donc un décalage de 1 entre leur définition et celle présentée dans ce mémoire.

Proposition 1.5.13. *Soient $s \in S$ et $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$. Alors $\text{dp}(\beta) = 0$ si et seulement si $\beta \in \Delta$. De plus, dp vérifie :*

$$\text{dp}(s(\beta)) = \begin{cases} \text{dp}(\beta) - 1 & \text{si } B(\beta, \alpha_s) > 0 \\ \text{dp}(\beta) & \text{si } B(\beta, \alpha_s) = 0 \\ \text{dp}(\beta) + 1 & \text{si } B(\beta, \alpha_s) < 0. \end{cases}$$

À l'aide de la profondeur, on définit un ordre partiel sur Φ^+ et on construit ainsi le *poset des racines*.

Définition 1.5.14. (i) Soient $\gamma, \beta \in \Phi^+$. On dit que $\beta \preceq_p \gamma$ s'il existe un mot $s_1 \cdots s_k \in W$ réduit tel que :

$$\gamma = s_1 \cdots s_k(\beta) \text{ et } \text{dp}(\gamma) = k + \text{dp}(\beta).$$

Pour la représentation du poset des racines, on procède de la façon suivante : pour $\beta, \gamma \in \Phi^+$, on met une arête étiquetée par $s \in S$ entre les racines β et γ si $\gamma = s(\beta)$.

(ii) Soient $\gamma_1, \gamma_2 = s(\gamma_1) \in \Phi^+$ avec $s \in S$, l'arête entre γ_1 et γ_2 est dite *courte* si $B(\gamma_1, \gamma_2) \in]-1, 0[$. En d'autres mots, l'arête entre γ_1 et γ_2 est courte si le groupe engendré par s_{γ_1} et s_{γ_2} , $W_{s_{\gamma_1}, s_{\gamma_2}}$, est isomorphe à un groupe diédral fini.

Exemple 1.5.15. Le poset des racines du groupe diédral $\mathcal{D}_3$ avec $S = \{s, t\}$ (de type $I_2(3)$) et du groupe de type $\tilde{A}_2$ avec $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ sont illustrés à la figure 1.6.

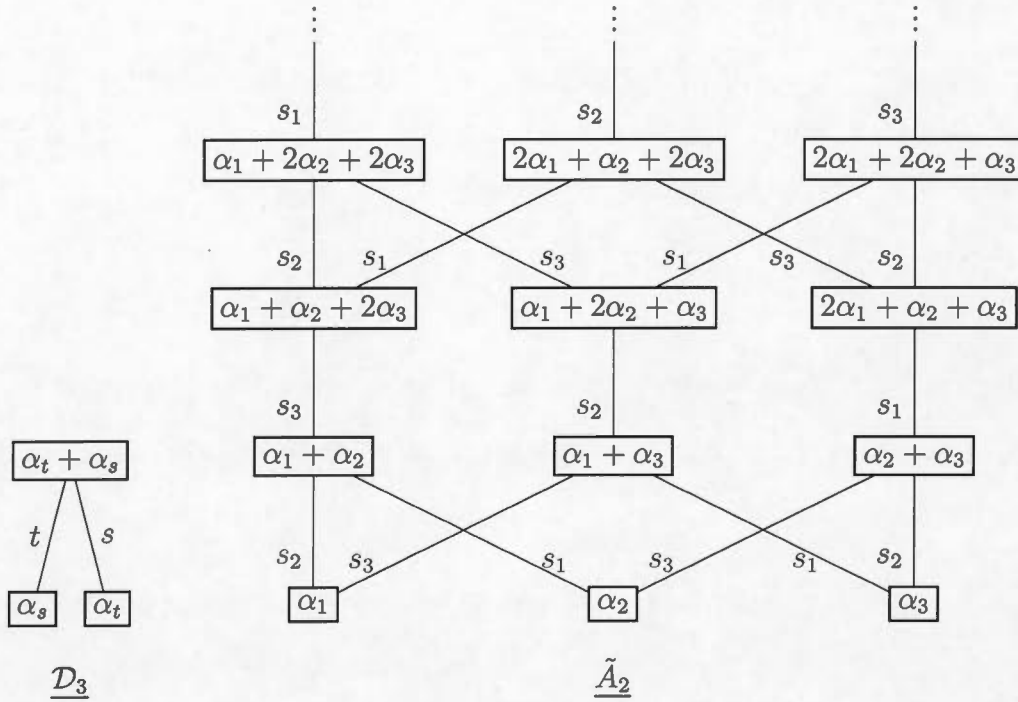


Figure 1.6 Poset des racines de $\mathcal{D}_3$ (à gauche) et du groupe de type $\tilde{A}_2$ (à droite).

Pour Φ un système de racines, on définit un deuxième ordre sur Φ^+ : la *dominance*.

Définition 1.5.16 ((Brink et Howlett, 1993, §2)). Soient $\alpha, \beta \in \Phi^+$, on dit que β domine α ($\alpha \preceq \beta$) si et seulement si pour tout $w \in W$, $\beta \in N(w)$ implique que $\alpha \in N(w)$.

Pour $\beta \in \Phi^+$, on pose $\text{Dom}(\beta) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha \prec \beta\}$ l'ensemble des racines positives strictement dominées par β . On note $|\text{Dom}(\beta)| = \text{dp}_\infty(\beta)$ la *profondeur infinie* de β .

Définition 1.5.17. Soit $\alpha \in \Phi^+$, α est une *petite racine* si $\text{dp}_\infty(\alpha) = 0$. Autrement dit, α est une petite racine si elle ne domine qu'elle-même. On note

$$\Sigma = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \text{dp}_\infty(\alpha) = 0\}$$

l'ensemble des petites racines.

Remarque 1.5.18. Il existe une deuxième définition équivalente de Σ dans la littérature : dans (Björner et Brenti, 2005, §4.7), Σ est l'ensemble des petites racines s'il respecte les 2 conditions suivantes :

1. $\Delta \subseteq \Sigma$;
2. si $\alpha \in \Sigma$, $s \in S$ et $B(\alpha, \alpha_s) \in]-1, 0[$, alors $s(\alpha) \in \Sigma$.

On voit que cette définition fournit une méthode de construction récursive de Σ .

Proposition 1.5.19. Soient $\alpha, \beta \in \Phi^+$, $s \in S$ et $w \in W$. Les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) Si $\beta \preceq_p \alpha$ et $\beta \notin \Sigma$, alors $\alpha \notin \Sigma$.
- (ii) Si $B(\alpha_s, s(\alpha)) \leq -1$ et $\alpha_s \neq \alpha$, alors $\alpha \notin \Sigma$.

Pour la profondeur infinie, on a des propriétés semblables à celles de la proposition 1.5.13 sur la profondeur.

Proposition 1.5.20 ((Dyer et Hohlweg, 2015, Proposition 3.3)). Soit $s \in S$ et $\beta \in \Phi^+$ avec $\beta \neq \alpha_s$. On a que $\text{dp}_\infty(\alpha_s) = 0$ et

$$\text{dp}_\infty(s(\beta)) = \begin{cases} \text{dp}_\infty(\beta) - 1 & \text{si } B(\beta, \alpha_s) \geq 1 \\ \text{dp}_\infty(\beta) & \text{si } B(\beta, \alpha_s) \in]-1, 1[\\ \text{dp}_\infty(\beta) + 1 & \text{si } B(\beta, \alpha_s) \leq -1. \end{cases}$$

En particulier, si W est fini, alors $\Sigma = \Phi^+$.

Nous avons précédemment discuté du poset des racines positives (voir définition 1.5.14). Il est légitime de se demander s'il existe une façon simple de reconnaître les petites racines à l'intérieur du poset. Le lemme suivant présente une condition pour qu'une racine de Φ soit petite.

Lemme 1.5.21. *Soit $\gamma \in \Phi^+$, alors $\gamma \in \Sigma$ si, et seulement si, il existe $\alpha \in \Delta$ et une suite d'arêtes courtes $\alpha = \gamma_0 \prec_p \gamma_1 \prec_p \cdots \prec_p \gamma_k = \gamma$ dans le poset des racines.*

Compte tenu de la définition de dp_∞ , on généralise le concept de petites racines : on note $\Sigma_n = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \text{dp}_\infty(\alpha) \leq n\}$ l'ensemble des n -petites racines. Brink et Howlett, (Brink et Howlett, 1993), montrent que Σ est fini et Eriksson (Eriksson, 1994) généralise ce résultat pour les n -petites racines. Comme la preuve d'Eriksson utilise le « number game », notion qui n'est pas étudiée dans ce mémoire, nous citons l'article de Fu (Fu, 2012, Corollaire 3.9).

Théorème 1.5.22. *L'ensemble des n -petites racines Σ_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Remarque 1.5.23. 1. Notons que dans sa preuve, Fu montre que les ensembles $D_n = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \text{dp}_\infty(\alpha) = n\}$ sont finis. Ainsi, $\Sigma_n = \bigcup_{0 \leq i \leq n} D_i$ est une union finie d'ensembles finis et le résultat de Fu se transmet aux ensembles Σ_n .

2. Les n -petites racines donnent une filtration de Φ^+ : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Sigma_{n-1} \subseteq \Sigma_n$ et $\Phi^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$.

1.5.3 Sous-groupes paraboliques

Soit (W, S) un système de Coxeter avec système simple Δ et système de racines Φ , on sait que $W = \langle S \rangle$. On peut se demander si un sous-ensemble de S engendre aussi un système de Coxeter. En fait, pour tout $I \subseteq S$, si on pose $W_I = \langle I \rangle$, alors (W_I, I) est un système de Coxeter. On appelle W_I un *sous-groupe parabolique standard* de W . De plus, $\Delta_I = \{\alpha_s \mid s \in I\} \subseteq \Delta$ est un système simple pour (W_I, I) et dans ce contexte, $\Phi_I = W_I(\Delta_I) = \Phi \cap \text{Vect}(\Delta_I)$ est un système de racines de (W_I, I) . Pour cette partie, on se réfère à (Humphreys, 1990).

Définition 1.5.24. Soient (W, S) un système de Coxeter et $I \subseteq S$. L'ensemble $W^I = \{w \in W \mid \ell(ws) > \ell(w), \forall s \in I\}$ est appelé *l'ensemble des représentants de longueur minimale pour le coset W_I/W* .

En particulier, de cette définition, on montre que pour $w \in W$, il existe un unique $u \in W_I$ et un unique $v \in W^I$ tels que $w = uv$ et tel que $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$. En outre, u est l'unique mot de longueur minimale dans le coset wW_I . On obtient alors une bijection naturelle entre W et $W_I \times W^I$. Une démonstration de cette assertion est faite dans (Humphreys, 1990, §1.10).

En considérant la décomposition de W en $W_I \times W^I$, on étudie les ensembles d'inversions relatifs à cette décomposition des mots de W .

Proposition 1.5.25. Soit $I \subseteq S$ et $W_I = \langle I \rangle$. Soit $w \in W$ et $w = w_I w^I$ son unique décomposition dans $W = W_I \times W^I$. Alors $N(w_I) = N(w) \cap \Phi_I^+$ où Φ_I^+ est le système de racines positives du sous-groupe parabolique W_I .

1.6 Ombres de Garside

Pour l'étude des ombres de Garside, nous référons le lecteur à l'article de Dyer et Hohlweg (Dyer et Hohlweg, 2015).

Définition 1.6.1. Soit $B \subseteq W$, on dit que B est une *ombre de Garside* si B vérifie les trois conditions suivantes :

- (i) $S \subseteq B$;
- (ii) B est clos par suffixe (*);
- (iii) B est clos par le supremum (**).

(*) On dit que $B \subseteq W$ est *clos par suffixe* si pour tout $w \in B$, les suffixes de w sont aussi dans B . (**) De plus, on dit que B est *clos par le supremum* si pour tout $w_1, w_2 \in B$, on a que si $w_1 \vee w_2$ existe, alors $w_1 \vee w_2 \in B$.

Exemple 1.6.2. Soient $B_1, B_2 \subseteq W$ deux ombres de Garside. Alors $B_1 \cap B_2$ est aussi une ombre de Garside. En effet, $S \subseteq B_1, B_2$ et donc $S \subseteq B_1 \cap B_2$. De plus, comme B_1 et B_2 sont clos par suffixe et clos par le supremum, alors $B_1 \cap B_2$ l'est aussi.

En considérant l'exemple précédent, on construit la plus petite ombre de Garside en prenant l'intersection de toutes les ombres de Garside de W et on la note $\tilde{S}$:

$$\tilde{S} = \bigcap_{\substack{B \subseteq W \\ B \text{ ombre} \\ \text{de Garside}}} B.$$

Une propriété majeure de $\tilde{S}$ est découverte et démontrée par Dyer et Hohlweg (Dyer et Hohlweg, 2015, Corollaire 1.2) :

Théorème 1.6.3. *Soit (W, S) un système de Coxeter. Si S est fini, alors $\tilde{S}$ est fini.*

Ce résultat est très important dans ce mémoire car il est indispensable dans notre recherche d'une construction de l'automate minimal. La preuve de ce théorème fait appel à une multitude de lemmes et de propositions qui sortent du contexte de ce mémoire. C'est pourquoi la preuve du théorème 1.6.3 ne sera pas faite ici. On encourage toutefois le lecteur à lire l'article de Dyer et Hohlweg (Dyer et Hohlweg, 2015) pour toutes les informations nécessaires.

En plus de la définition de $\tilde{S}$ par les intersections d'ombres de Garside, il existe une méthode récursive simple pour construire cette ombre de Garside particulière. On considère d'abord $\tilde{S}_0 = S \cup \{e\}$. On calcul ensuite les suprema (pour l'ordre faible) de tous les couples possibles d'éléments de $\tilde{S}_0$. On pose $\tilde{S}_{0+1} = \tilde{S}_1$ l'ensemble contenant tous les nouveaux éléments calculés et tous leurs suffixes. On répète ces deux dernières étapes avec $\tilde{S}_1$ pour créer $\tilde{S}_2$ et ainsi de suite avec tous les $\tilde{S}_i$

calculés dans le processus. La construction termine lorsqu'on ne trouve plus de nouvel élément. Puisque $\tilde{S}$ est fini, on sait que ce processus a un nombre fini d'étapes. Finalement, $\tilde{S}$ est l'union de tous les $\tilde{S}_i$ calculés et par construction, il est clos par le supremum et clos par suffixe. Illustrons ceci par un exemple.

Exemple 1.6.4. Soit $(W, S) = (\mathcal{D}_3, \{s, t\})$. Calculons $\tilde{S}$ en nous servant du graphe de Cayley orienté présenté dans l'exemple 1.3.2.

- (1) Posons $\tilde{S}_0 = S \cup \{e\} = \{s, t, e\}$. On a
 - $s \vee e = e \vee s = s$;
 - $t \vee e = e \vee t = t$;
 - $s \vee t = t \vee s = sts = tst$.
- (2) On pose donc $\tilde{S}_1 = \{e, s, t, sts, ts, st\}$. Remarquons que e, s, t, st et ts sont dans $\tilde{S}_1$ car ils sont des suffixes de $sts = tst$.
- (3) On continue ensuite de calculer les suprema de chaque paire d'éléments de $\tilde{S}_1$ et si on trouve un nouvel élément de W n'appartenant ni à $\tilde{S}_0$, ni à $\tilde{S}_1$, on le met dans un nouvel ensemble $\tilde{S}_2$. Ici, on voit qu'on ne trouvera pas de nouveaux éléments pour construire $\tilde{S}_2$ et le processus arrête donc à $\tilde{S}_1$.
- (4) On a alors $\tilde{S} = \tilde{S}_0 \cup \tilde{S}_1 = \mathcal{D}_3$.

Proposition 1.6.5. Si W est un groupe fini, alors $\tilde{S} = W$.

Démonstration. Puisque tous les éléments de W sont des suffixes de l'élément maximal w_0 , il suffit de montrer que $\bigvee S = w_0$. Comme w_0 est de longueur maximale, alors il est l'unique élément de W tel que $\ell(sw_0) < \ell(w_0)$ pour tout $s \in S$. Ainsi, il est le seul possédant tous les éléments de S comme préfixes. On conclut donc que $\bigvee S = w_0$ et $\tilde{S} = W$ comme voulu. $\square$

Remarque 1.6.6. On déduit de la proposition précédente que si W est fini, alors $\tilde{S}$ est l'unique ombre de Garside de W . En effet, une ombre de Garside est un sous-ensemble de W et $\tilde{S}$ est la plus petite.

CHAPITRE II

AUTOMATE CANONIQUE

Soient (W, S) un système de Coxeter et w un élément de W . Comment savoir si une expression $s_1 \dots s_k$ ($s_i \in S$) est un mot réduit pour w ? Est-il possible d'énumérer, de façon efficace, tous les mots réduits d'un système de Coxeter quelconque? Nous avons vu précédemment que la théorie des automates nous fournit des outils afin de répondre à ces questions. C'est en 1993 que Brink et Howlett (Brink et Howlett, 1993) montrent que les groupes de Coxeter sont automatiques. Plus d'informations au sujet de la structure automatique des groupes de Coxeter sont données au chapitre 4 §4.3. Pour y arriver, ils donnent la construction d'un automate reconnaissant un sous-ensemble de $\text{Red}(W, S)$: l'automate de Brink et Howlett reconnaît l'ensemble des mots réduits lexicographiquement minimaux pour un ordre total fixé sur S . Par exemple, dans le cas du système de Coxeter $(\mathcal{D}_3, \{s, t\})$, si on pose $s < t$, on a $sts = tst$ sont deux mots réduits, mais seul sts est reconnu par l'automate de Brink et Howlett. Dans sa thèse, Eriksson (Eriksson, 1994) propose un automate construit à partir des petites racines de Brink et Howlett qui reconnaît l'entière de $\text{Red}(W, S)$. Cet automate est nommé *automate canonique* par Björner et Brenti (Björner et Brenti, 2005). Une généralisation des petites racines, les n -petites racines (voir chapitre 1, définition 1.5.17), sont introduites dans (Edgar, 2009) et conduisent vers une définition d'automate n -canonique.

Dans ce chapitre, nous donnons la construction de l'automate n -canonique à partir des n -petites racines et des n -petits ensembles d'inversions. Nous discutons par la suite des cas où l'automate 0-canonique, nommé simplement *automate canonique*, est minimal. Nous concluons ce chapitre en donnant l'exemple de l'automate canonique dans le groupe de type $\tilde{C}_2$; automate qui n'est pas minimal.

2.1 Automates n -canoniques

Soit (W, S) un système de Coxeter. Comme nous l'avons vu dans l'exemple 1.4.1, la théorie des automates donne des outils afin de résoudre le problème de reconnaissance des mots réduits de (W, S) . Par exemple, dans le cas où W est fini, le graphe de Cayley muni de l'orientation induite par l'ordre faible forme un automate reconnaissant $\text{Red}(W, S)$ (proposition 1.4.9 et exemple 1.4.10). Cependant, si W est infini, le graphe de Cayley possède une infinité de sommets et l'automate correspondant a donc une infinité d'états. Comme notre but est d'obtenir un automate fini et déterministe, nous devons chercher d'autres solutions.

On considère un système de racines $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$ et un système simple Δ dans un espace quadratique (V, B) . Rappelons que Σ_n est l'ensemble des n -petites racines et que $\Sigma := \Sigma_0$ est l'ensemble des petites racines. On sait que Σ_n est fini pour tout n (théorème 1.5.22). On rappelle aussi que l'ensemble d'inversions de $w \in W$ est donné par $N(w) = \Phi^+ \cap w(\Phi^-)$ (définition 1.5.5).

Définition 2.1.1. (i) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $w \in W$. Le n -petit ensemble d'inversions de w est :

$$\Sigma_n(w) := \Sigma_n \cap N(w).$$

(ii) On note $\Lambda_n = \{\Sigma_n(w) \mid w \in W, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble de tous les n -petits

ensembles d'inversions pour $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.1.2. Lorsque W est fini, on sait que $\Sigma = \Phi^+$. Ainsi, $\Sigma_0(w) = \Sigma(w) = N(w)$ et $\Sigma_n(w) = \Sigma(w)$ pour tout $n \geq 0$ car $\Sigma_n(w) \setminus \Sigma(w) = \emptyset$ pour $n \geq 1$.

En outre, $\Lambda_n \subseteq \mathcal{P}(\Sigma_n)$ par définition. On a donc le résultat suivant :

Proposition 2.1.3. *Pour (W, S) un système de Coxeter, Λ_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 2.1.4. Prenons $(W, S) = (\mathcal{D}_3, \{s, t\})$ le système de Coxeter dont W est le groupe diédral d'ordre 6. On sait que $W = \{e, s, t, st, ts, sts = tst\}$ et que $\Lambda_n = \Lambda_0$ pour $n \geq 0$ par la remarque 2.1.2. Calculons Λ_0 :

$$\begin{aligned}\Sigma_0(e) &= \emptyset; \Sigma_0(s) = N(s) = \{\alpha_s\}; \Sigma_0(t) = \{\alpha_t\}; \Sigma_0(st)s = \{\alpha_s, \alpha_s + \alpha_t\}; \\ \Sigma_0(ts) &= \{\alpha_t, \alpha_s + \alpha_t\}; \Sigma_0(sts) = \Sigma_0(tst) = \{\alpha_s, \alpha_t, \alpha_s + \alpha_t\}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Lambda_0 = \{\emptyset, \{\alpha_s\}, \{\alpha_t\}, \{\alpha_s, \alpha_s + \alpha_t\}, \{\alpha_t, \alpha_s + \alpha_t\}, \{\alpha_s, \alpha_t, \alpha_s + \alpha_t\}\}.$$

Des exemples de calculs dans le cas où W est infini sont faits plus en détail dans l'exemple 2.1.8.

Définition 2.1.5. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'automate n -canonique est la donnée du quintuplet $\text{Aut}_n(W, S) = (S, \Lambda_n, \Sigma_n(e) = \emptyset, \Lambda_n, \delta_n)$, où δ_n est la fonction de transition partielle donnée par

$$\delta_n(A, s) = \{\alpha_s\} \cup (s(A) \cap \Sigma_n) \text{ si } \alpha_s \notin A.$$

Notons que $\delta_n(A, s)$ n'est pas définie si $\alpha_s \in A$.

Remarque 2.1.6. Il est important de noter que la lecture des mots se fait de droite à gauche. Afin de construire le mot reconnu par une séquence de transitions dans l'automate, on rajoute la lettre (l'étiquette) de la transition actuelle devant la lettre obtenue par la transition précédente. Par exemple, dans la figure 2.1, en partant de l'état initial, on lit les lettres s_1, s_2 et s_3 dans cet ordre, mais le mot reconnu est $s_3s_2s_1$. Rappelons que si le mot w est réduit, alors w^{-1} est aussi réduit et donc le sens de lecture n'a aucun effet sur le langage reconnu par l'automate.

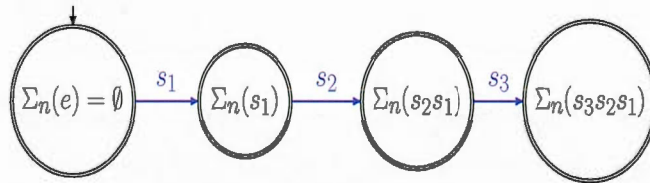


Figure 2.1 Exemple de chemin dans l'automate n -canonique qui reconnaît le mot $s_3s_2s_1$.

Théorème 2.1.7. *L'automate $\text{Aut}_n(W, S)$ est fini et déterministe et reconnaît $\text{Red}(W, S)$.*

Il est clair que le nombre d'états est fini par la proposition 2.1.3. Avant de donner la démonstration complète de ce théorème, nous présentons l'exemple des automates 0 et 1-canoniques dans le cas du groupe de Coxeter infini $\mathcal{D}_\infty$, puis nous énonçons un lemme nécessaire à sa démonstration.

Comme nous l'avons vu précédemment (exemple 2.1.4), $\Lambda_n = \Lambda_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si W est fini. Dans ce cas, $\text{Aut}_n(W, S) = \text{Aut}_0(W, S)$ pour tout n . C'est pourquoi le prochain exemple porte sur le système de Coxeter infini le plus simple : $(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$.

Exemple 2.1.8. Nous présentons ici la construction de l'automate 0-canonique et 1-canonique du groupe infini $\mathcal{D}_\infty$. Dans le système de Coxeter $(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$, les

ensembles de 0-petites racines et de 1-petites racines sont :

$$\Sigma_0 = \{\alpha_s, \alpha_t\} \text{ et } \Sigma_1 = \{\alpha_s, \alpha_t, t(\alpha_s), s(\alpha_t)\}.$$

Les ensembles Σ_0 et Σ_1 sont représentés dans la figure 2.2. À l'aide de Σ_0 et Σ_1 , on construit les ensemble d'états Λ_0 et Λ_1 de $\text{Aut}_0(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ et de $\text{Aut}_1(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ respectivement. On trouve :

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{\Sigma_0(e), \Sigma_0(s) = \{\alpha_s\}, \Sigma_0(t) = \{\alpha_t\}\} \text{ et} \\ \Lambda_1 &= \{\Sigma_1(e), \Sigma_1(s), \Sigma_1(t), \Sigma_1(st) = \{\alpha_s, s(\alpha_t)\}, \Sigma_1(ts) = \{\alpha_t, t(\alpha_s)\}\}. \end{aligned}$$

Construisons $\text{Aut}_0(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$. En commençant à l'état $\emptyset = \Sigma(e)$, on a donc des transitions par s et par t vers les états $\Sigma_0(s) = \{\alpha_s\} \cup \emptyset$ et $\Sigma_0(t) = \{\alpha_t\} \cup \emptyset$ respectivement. De l'état $\Sigma_0(s) = \{\alpha_s\}$, on ne peut avoir de transition par s car $\alpha_s \in \Sigma_0(s)$. On a de ce fait uniquement une transition par t donnée par :

$$\begin{aligned} \Sigma_0(s) &\xrightarrow{t} \Sigma_0(ts) = \{\alpha_t\} \sqcup (t(\Sigma_0(s)) \cap \Sigma_0) = \{\alpha_t\} \sqcup (\{t(\alpha_s)\} \cap \Sigma_0) \\ &= \{\alpha_t\} = \Sigma_0(t). \end{aligned}$$

De façon analogue, on a une transition $\Sigma_0(t) \xrightarrow{s} \Sigma_0(s)$. L'automate $\text{Aut}_0(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ est représenté dans la figure 2.3.

Passons maintenant à la construction de $\text{Aut}_1(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$. Comme $\Lambda_0 \subsetneq \Lambda_1$, alors l'automate $\text{Aut}_1(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ a plus d'états que $\text{Aut}_0(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$. On voit, à l'aide du calcul suivant, qu'il n'y a pas de transition entre $\Sigma_1(s)$ et $\Sigma_1(t)$, contrairement à $\text{Aut}_0(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$. De l'état $\Sigma_1(s) = \Sigma_1 \cap N(s) = \{\alpha_s\}$, on a :

$$\begin{aligned} \Sigma_1(ts) &= \{\alpha_t\} \sqcup (t(\Sigma_1(s)) \cap \Sigma_1) = \{\alpha_t\} \sqcup (t(\{\alpha_s\}) \cap \Sigma_1) = \{\alpha_t\} \sqcup \{t(\alpha_s)\} \\ &= \{\alpha_t, t(\alpha_s)\} \end{aligned}$$

qui est un nouvel état. Symétriquement, on a $\Sigma_1(st) = \{\alpha_s, s(\alpha_t)\}$. Pour la suite, on calcul de la même façon les transitions possibles à partir des deux nouveaux états et on remarque que $\Sigma_1(st) \xrightleftharpoons[t]{s} \Sigma_1(ts)$; l'automate $\text{Aut}_1(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ est aussi illustré à la figure 2.3.

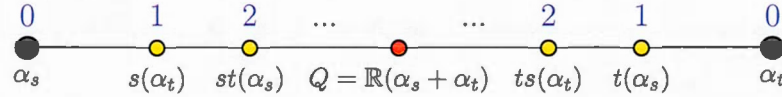


Figure 2.2 Une représentation projective du système de racines de $\mathcal{D}_\infty$. Les profondeurs infinies des racines représentées sont indiquées par les nombres en bleu. On a donc $\Sigma_0 = \{\alpha_s, \alpha_t\}$, $\Sigma_1 = \{\alpha_s, \alpha_t, s(\alpha_t), t(\alpha_s)\}$ et ainsi de suite.

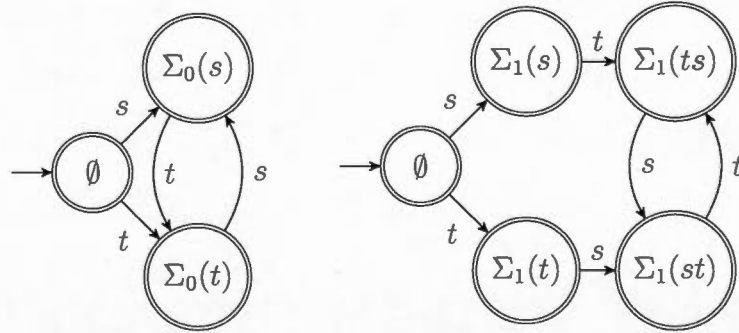


Figure 2.3 L'automate $\text{Aut}_0(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ (à gauche) et l'automate $\text{Aut}_1(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ (à droite).

Nous allons maintenant énoncer le lemme nécessaire à la démonstration du théorème 2.1.7.

Lemme 2.1.9. *Soit $s \in S$ et $n \in \mathbb{N}$.*

- (i) *Soit $w \in W$. Alors $s \notin D_L(w)$ si et seulement si $\alpha_s \notin \Sigma_n(w)$.*
- (ii) *Si $\ell(sw) > \ell(w)$ alors $\Sigma_n(sw) = \{\alpha_s\} \sqcup (s(\Sigma_n(w)) \cap \Sigma_n)$.*

Démonstration. (i) Pour $s \in S$, on a $\alpha_s \in \Delta \subseteq \Sigma_n$ et donc :

$$s \notin D_L(w) \Leftrightarrow \ell(sw) > \ell(w) \Leftrightarrow \alpha_s \notin N(w) \Leftrightarrow \alpha_s \notin \Sigma_n(w).$$

En effet, pour la dernière équivalence, si $\alpha_s \notin N(w)$, alors $\alpha_s \notin \Sigma_n(w)$ par définition. Réciproquement, puisque $\alpha_s \in \Delta \subseteq \Sigma_n$, si $\alpha_s \notin \Sigma_n(w)$, alors $\alpha_s \notin N(w)$.

(ii) On suppose que sw est une expression réduite et on a $\alpha_s \in \Delta \subseteq \Sigma_n$. Donc, par la proposition 1.5.7, on a $N(sw) = \{\alpha_s\} \sqcup s(N(w))$. Ainsi,

$$\Sigma_n(sw) = \Sigma_n \cap N(sw) = \Sigma_n \cap (\{\alpha_s\} \sqcup s(N(w))).$$

Or, $\Sigma_n(w) \subseteq N(w)$ et donc $s(\Sigma_n(w)) \subseteq s(N(w))$. Ceci implique que

$$\{\alpha_s\} \sqcup (s(\Sigma_n(w)) \cap \Sigma_n) \subseteq \Sigma_n(sw).$$

Pour l'autre inclusion, il suffit de montrer que si $\beta \in \Sigma_n(sw) = N(sw) \cap \Sigma_n$ et $\beta \neq \alpha_s$, alors $s(\beta) \in \Sigma_n$, car $s(\beta) \in N(w)$. Supposons par contradiction que $\text{dp}_\infty(s(\beta)) \geq n+1$. Alors, en vertu de la proposition 1.5.20, $B(\beta, \alpha_s) \leq -1$ car $\text{dp}_\infty(\beta) \leq n$. Or comme $\alpha_s, \beta \in N(sw)$, on a $B(\beta, \alpha_s) > -1$ par la proposition 1.5.8, d'où la contradiction.

□

Démonstration du théorème 2.1.7. Nous avons déjà vu que le nombre d'états de $\text{Aut}_n(W, S)$ est fini pour tout n . Le lemme 2.1.9(ii), nous assure que les transitions sont bien définies et donc $\text{Aut}_n(W, S)$ est fini et déterministe. Montrons que $\text{Aut}_n(W, S)$ reconnaît $\text{Red}(W, S)$. Si on prend $w = s_1 \cdots s_k \in W$ réduit, alors le chemin commençant à l'état initial $\emptyset$ étiqueté par $s_k, s_{k-1}, \dots, s_1$ arrête à l'état

$\Sigma_n(w)$. Ainsi, le mot réduit $s_1 \cdots s_k$ est reconnu par $\text{Aut}_n(W, S)$. Il reste à montrer que l'automate n -canonique reconnaît seulement le langage $\text{Red}(W, S)$. Supposons qu'il existe $s_1 \cdots s_k$ un mot non réduit de W , mais reconnu par l'automate. On sait alors qu'il existe une suite de transitions étiquetées par $s_k, s_{k-1}, \dots, s_1$ partant de l'état initial et terminant à $\Sigma_n(s_1 s_2 \cdots s_k)$. Or, comme $s_1 \cdots s_k$ n'est pas réduit, alors il existe $i \in [k]$ minimal tel que $\ell(s_k \cdots s_{i+1} s_i) < \ell(s_k \cdots s_{i+1})$. Donc $\alpha_{s_i} \in D_L(s_{i+1} \cdots s_k)$. Par le lemme 2.1.9(i), $\alpha_{s_i} \in \Sigma(s_{i+1} \cdots s_k)$ et il n'y a donc pas de transition par s_i partant de $\Sigma(s_{i+1} \cdots s_k)$. Le mot $s_1 \cdots s_k$ ne peut alors pas être reconnu par l'automate, d'où la contradiction. $\square$

2.2 Minimalité de l'automate canonique

Nous avons introduit dans le premier chapitre la notion d'automate minimal : un automate est minimal si son nombre d'états est minimal. Dans l'exemple 2.1.8, on voit, à l'aide de la figure 2.3, que $\text{Aut}_1(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ n'est pas minimal. En effet, le langage reconnu par $\text{Aut}_0(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ et par $\text{Aut}_1(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ est le même, mais $\text{Aut}_1(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ a plus d'états. Dans cet exemple, on remarque que les états $\Sigma_1(t)$ et $\Sigma_1(ts)$ sont des états équivalents, c'est-à-dire que le langage reconnu à partir de $\Sigma(t)$ est le même que celui reconnu à partir de $\Sigma(ts)$, et que, symétriquement, $\Sigma_1(s)$ et $\Sigma_1(st)$ le sont aussi. On peut donc en conclure que les automates n -canoniques ne sont généralement pas minimaux pour $n \geq 1$. Mais qu'en est-il de l'automate canonique (0-canonique) ? Pour conclure ce chapitre, nous montrons que l'automate canonique est minimal pour certaines familles de systèmes de Coxeter. Nous énonçons une conjecture de Hohlweg, Nadeau et Williams (Hohlweg *et al.*, 2015) qui détermine une condition nécessaire et suffisante à la minimalité de l'automate canonique et nous discutons du groupe de type $\tilde{C}_2$ qui fournit un exemple d'automate canonique non-minimal.

Proposition 2.2.1. *Si W est fini, alors $\text{Aut}_0(W, S)$ est minimal.*

Démonstration. Soient u et v deux mots réduits de W et supposons que $\Sigma(u)$ et $\Sigma(v)$ sont deux états équivalents dans $\text{Aut}_0(W, S)$. Montrons que $u = v$. Par la proposition 1.2.5, puisque W est fini, il existe un unique élément de longueur maximale noté w_0 . Comme tous les mots de W sont des préfixes et des suffixes de w_0 (proposition 1.2.6), alors à partir de chaque état de $\text{Aut}_0(W, S)$, il existe un chemin commençant à cet état et terminant à $\Sigma(w_0)$. De plus, on sait que pour tout $s \in S$, $\ell(sw_0) < \ell(w_0)$ par maximalité de $\ell(w_0)$. Puisque w_0 est l'unique élément de W satisfaisant cette propriété, l'état $\Sigma(w_0)$ est l'unique état puits de l'automate. On pose $(s_k, \dots, s_1)$ la suite de transitions de $\Sigma(u)$ à $\Sigma(w_0)$. Le mot $s_1 \cdots s_k$ est donc reconnu à partir de l'état $\Sigma(u)$. Notons que, partant de l'état $\Sigma(u)$, la suite $(s_k, \dots, s_1)$ étiquette un unique chemin car $\text{Aut}_0(W, S)$ est déterministe. De plus, $s_1 \cdots s_k u = w_0$ est réduit car il est reconnu par $\text{Aut}_0(W, S)$. Puisque $\Sigma(u)$ et $\Sigma(v)$ sont équivalents, le mot $s_1 \cdots s_k$ est aussi reconnu à partir de l'état $\Sigma(v)$.

Montrons que $s_1 \cdots s_k v = w_0$. Supposons que la suite de transitions $(s_k, \dots, s_1)$ partant de $\Sigma(v)$ ne termine pas à $\Sigma(w_0)$. Il existe alors une suite $(t_n, \dots, t_1)$ tel que la suite $(s_k, \dots, s_1, t_n, \dots, t_1)$ débute à $\Sigma(v)$ et termine à $\Sigma(w_0)$. Le mot $t_1 \cdots t_n s_1 \cdots s_k$ est alors reconnu à partir de l'état $\Sigma(v)$. Par hypothèse, $\Sigma(u)$ et $\Sigma(v)$ sont des états équivalents; le mot $t_1 \cdots t_n s_1 \cdots s_k$ est reconnu à partir de $\Sigma(u)$. Ainsi, la suite $(s_k, \dots, s_1, t_n, \dots, t_1)$ étiquette alors un chemin partant de $\Sigma(u)$. Compte tenu de l'unicité du chemin étiqueté par la suite $(s_k, \dots, s_1)$, ceci implique que la suite $(t_n, \dots, t_1)$ étiquette un chemin partant de l'état $\Sigma(w_0)$. Or, puisque l'état $\Sigma(w_0)$ est un état puits, il n'y a aucune transition sortant de cet état et on a une contradiction. Ainsi, la suite $(s_k, \dots, s_1)$ étiquette un chemin partant de $\Sigma(v)$ et terminant à l'état $\Sigma(w_0)$. On a donc bien que $s_1 \cdots s_k v = w_0$. Alors $s_1 \cdots s_k u = s_1 \cdots s_k v = w_0$, ce qui implique que $u = v$ dans W . $\square$

Pour discuter de minimalité de l'automate canonique dans le cas où W n'est pas fini, nous avons besoin de certaines caractérisations supplémentaires des racines.

Définition 2.2.2. Soit $\beta \in \Phi^+$. Posons $\beta = \sum_{s \in S} a_s \alpha_s$ avec $a_s \geq 0$, son expression en terme des racines simples.

- (i) Le *support* de β est $\text{supp}(\beta) := \{s \in S \mid a_s > 0\}$.
- (ii) On dit que β est *sphérique* si le sous-groupe parabolique standard engendré par son support, noté $W_{\text{supp}(\beta)}$, est fini. On note Φ_{sph}^+ l'ensemble des racines sphériques.

Exemple 2.2.3. 1. Dans le système de Coxeter fini $(\mathfrak{S}_4, \{s_1, s_2, s_3\})$, la racine positive $\beta = s_1 s_2 (\alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ est sphérique car

$$W_{\text{supp}(\beta)} = W_{\{s_1, s_2, s_3\}} = \mathfrak{S}_4.$$

- 2. On remarque que si W est fini, alors $\Phi^+ = \Phi_{\text{sph}}^+$. En effet, $W_{\text{supp}(\beta)} \leq W$ pour tout $\beta \in \Phi^+$ et tout sous-groupe d'un groupe fini est fini.
- 3. Dans $(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$, en prenant $s(\alpha_t) \in \Phi^+$, on a

$$\text{supp}(s(\alpha_t)) = \text{supp}(\alpha_t + 2\alpha_s) = \{s, t\}.$$

Donc $W_{\text{supp}(s(\alpha_t))} = W_{s,t} = \mathcal{D}_\infty$. Ainsi, $s(\alpha_t)$ n'est pas sphérique.

Proposition 2.2.4. *Les racines sphériques sont toujours petites : $\Phi_{\text{sph}}^+ \subseteq \Sigma$.*

Démonstration. Soit $\beta \in \Phi_{\text{sph}}^+$. Pour $I = \text{supp}(\beta) \subseteq S$, on a $\beta = \sum_{t \in I} a_t \alpha_t$ avec $a_t > 0$ et W_I est fini. Donc pour tout $t \in I$, $\text{dp}_\infty(t(\beta)) = \text{dp}_\infty(\beta)$ par la proposition 1.5.20. Notons que $v(\beta) \in \Phi_I$ pour tout $v \in W_I$, où $\Phi_I \subseteq \Phi$ est le système de racines associé à W_I . Soit $w = t_1 \cdots t_n \in W_I$ tel que $w(\beta) \in \Delta_I$ avec $t_i \in I$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors

$$\text{dp}_\infty(\beta) = \text{dp}_\infty(t_n(\beta)) = \text{dp}_\infty(t_{n-1}t_n(\beta)) = \cdots = \text{dp}_\infty(w(\beta)) = 0,$$

car $w(\beta) \in \Delta_I \subseteq \Delta$. D'où $\beta \in \Sigma$ et donc $\Phi_{\text{sph}}^+ \subseteq \Sigma$. $\square$

Le prochain résultat explicite une relation entre les petites racines, les racines sphériques et l'automate canonique. On rappelle tout d'abord que W est dit *irréductible* si son graphe de Coxeter est connexe.

Proposition 2.2.5 (Proposition 3.14, (Hohlweg *et al.*, 2015)). *Soit W irréductible. Si $\Sigma = \Phi_{\text{sph}}^+$, alors $\text{Aut}_0(W, S)$ est minimal.*

Démonstration. Soient $\Sigma(u)$ et $\Sigma(v)$ deux états équivalents dans $\text{Aut}_0(W, S)$ et $s_1, \dots, s_k \in S$. On sait que si $s_1 \cdots s_k u$ est réduit, alors $s_1 \cdots s_k v$ est aussi réduit. Montrons que $\Sigma(u) = \Sigma(v)$ par contradiction. Supposons que $\Sigma(u) \neq \Sigma(v)$. On peut donc prendre $\alpha \in \Sigma(u) \setminus \Sigma(v)$ (à changement de rôle de u et v près). Par hypothèse $\Sigma = \Phi_{\text{sph}}^+$, alors pour $\text{supp}(\alpha) = I \subseteq S$, le groupe W_I est fini et $\alpha \in \Phi_I^+$. En utilisant la décomposition $W = W_I \times W^I$ (voir chapitre 1, définition 1.5.24), on écrit $u = u_I u^I$ et $v = v_I v^I$. Soit $w \in W_I$, wu est réduit si et seulement si wu_I est réduit car xu^I est réduit pour tout $x \in W_I$. Donc, pour tout $t_1, \dots, t_k \in I$, $t_1 \cdots t_k u_I$ est réduit si et seulement si $t_1 \cdots t_k v_I$ est réduit.

Comme W_I est fini, alors $\text{Aut}_0(W_I, I)$ est minimal par la proposition 2.2.1. Donc $\Sigma(u_I) = \Sigma(v_I)$. Rappelons que les petits ensembles d'inversions de W_I sont les $\Sigma(u_I) = \Sigma(u) \cap \Phi_I^+$ grâce à la proposition 1.5.25. Or $\alpha \in \Phi_I^+$ et $\alpha \in \Sigma(u)$ par hypothèse et donc $\alpha \in \Sigma(u) \cap \Phi_I^+ = \Sigma(u_I)$. Ainsi on a $\alpha \in \Sigma(v_I) \subseteq \Sigma(v)$, ce qui contredit le fait que $\alpha \in \Sigma(u) \setminus \Sigma(v)$. Donc $\Sigma(u) = \Sigma(v)$. $\square$

La réciproque de la proposition 2.2.5 est conjecturée par Hohlweg, Nadeau et Williams (Conjecture 2, (Hohlweg *et al.*, 2015)). Si cette conjecture s'avère être vraie, ceci donnerait une condition nécessaire et suffisante pour que l'automate canonique soit minimal.

Conjecture 2.2.6 (Conjecture 2, (Hohlweg et al., 2015)). Soit Φ_{sph}^+ l'ensemble des racines sphériques, alors $\text{Aut}_0(W, S)$ est minimal si et seulement si $\Sigma = \Phi_{\text{sph}}^+$.

La conjecture 2.2.6 est vérifiée pour certaines familles de systèmes de Coxeter et nous présentons ce résultat dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.7 (Théorème 1.3, (Hohlweg et al., 2015)). Soit (W, S) un système de Coxeter tel que W est irréductible. La conjecture 2.2.6 est vérifiée dans les cas suivants :

- (i) W est fini;
- (ii) $m_{st} = 2$ ou ∞ pour tout $s \neq t$
- (iii) le graphe de W (Γ_W) est complet, c'est-à-dire que $m_{st} > 2$ pour tout $s \neq t$;
- (iv) W est de type $\tilde{A}_n$;
- (v) W est de rang 3.

Afin de démontrer ce théorème, nous avons besoin de quelques lemmes concernant le support. Le dernier de ces lemmes est un lemme de Brink (Brink, 1998) donnant une propriété importante sur les supports des éléments de Σ .

Lemme 2.2.8. Soit $\beta \in \Phi^+$ tel que $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$ possède un cycle et soit $s \in S$ tel que $\Gamma_{\text{supp}(s(\beta))}$ n'en possède pas. Alors s appartient au cycle de $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$ et $\alpha_s \notin \text{supp}(s(\beta))$.

Démonstration. Commençons par montrer que $\alpha_s \notin \text{supp}(s(\beta))$. On sait que $s(\beta) = \beta - 2B(\alpha_s, \beta)\alpha_s \in \Phi^+$. En effet, puisque $s(\Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$ et que $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$ possède un cycle, alors $\beta \neq \alpha_s$. On a donc deux possibilités pour $\text{supp}(s(\beta))$:

- si $\text{coeff}_{\alpha_s}(s(\beta)) > 0$, alors $\text{supp}(s(\beta)) = \text{supp}(\beta)$;
- si $\text{coeff}_{\alpha_s}(s(\beta)) = 0$, alors $\text{supp}(s(\beta)) = \text{supp}(\beta) \setminus \{\alpha_s\}$.

Comme $\Gamma_{\text{supp}(\beta)} \neq \Gamma_{\text{supp}(s(\beta))}$ par hypothèse, alors le cas (i) est impossible et donc $\text{supp}(s(\beta)) = \text{supp}(\beta) \setminus \{\alpha_s\}$. Par hypothèse, on sait que $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$ possède un cycle et que $\Gamma_{\text{supp}(s(\beta))}$ n'en possède pas. Puisque les deux graphes ne diffèrent que par le sommet s , on en conclut donc que s appartient au cycle de $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$. $\square$

Lemme 2.2.9. *Soit $\beta \in \Phi^+$ tel que $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$ possède une arête ∞ et soit $s \in S$ tel que $\Gamma_{\text{supp}(s(\beta))}$ n'en possède pas. Alors s est un sommet de l'arête ∞ de $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$ et $\alpha_s \notin \text{supp}(s(\beta))$.*

Démonstration. La preuve de ce lemme est identique à la preuve du lemme 2.2.8 en échangeant le rôle du cycle par celui de l'arête ∞ . $\square$

Lemme 2.2.10 (Lemme 4.1, (Brink, 1998)). *Soit (W, S) un système de Coxeter avec graphe de Coxeter Γ . Soit $\alpha \in \Sigma$, alors le graphe de Coxeter du support de α , $\Gamma_{\text{supp}(\alpha)}$, ne contient ni cycle, ni arête étiquetée par ∞ .*

Démonstration. Nous montrons la contraposé de ce lemme : si le graphe $\Gamma_{\text{supp}(\alpha)}$ contient un cycle ou une arête ∞ , alors $\alpha \notin \Sigma$.

On rappelle que pour $x \in \Phi^+$, on exprime $x = \sum_{\gamma \in \Delta} \text{coeff}_{\gamma}(x)\gamma$, où $\text{coeff}_{\gamma}(x) \geq 0$. On rappelle aussi que pour $\alpha, \beta \in \Phi^+$, on a $\alpha \preceq_p \beta$ dans le poset des racines s'il existe $w \in W$ tel que $\beta = w(\alpha)$ et que $\text{dp}(\beta) = \ell(w) + \text{dp}(\alpha)$ (voir définition 1.5.14).

Soit $\alpha \in \Phi^+$ tel que $\Gamma_{\text{supp}(\alpha)}$ possède un cycle ou une arête ∞ . Montrons que $\alpha \notin \Sigma$. Pour ce faire, nous considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{\beta \in \Phi^+ \mid \beta \preceq_p \alpha \text{ et } \Gamma_{\text{supp}(\beta)} \text{ possède un cycle ou une arête } \infty\}.$$

On remarque que X n'est pas vide car $\alpha \in X$. On prend donc $\beta \in X$ tel que $\text{dp}(\beta)$ est minimale. En vertu de la proposition 1.5.19 (i), comme $\beta \preceq_p \alpha$, il suffit de montrer que $\beta \notin \Sigma$. Puisque $\beta \notin \Delta$, alors il existe $s \in S$ tel que $\alpha_s \in \text{supp}(\beta)$

et tel que $s(\beta) \prec_p \beta$. Ainsi, grâce à la proposition 1.5.19 (ii), il suffit de montrer que $B(\alpha_s, s(\beta)) \leq -1$.

Avant de calculer $B(\alpha_s, s(\beta))$, remarquons les faits suivants grâce aux lemmes 2.2.8 et 2.2.9 :

- (a) On a $\text{coeff}_\gamma(s(\beta)) B(\gamma, \alpha_s) \leq 0$ pour tout $\gamma \in \text{supp}(s(\beta))$. En effet, puisque $\gamma \in \text{supp}(s(\beta)) \subseteq \Delta \setminus \{\alpha_s\}$, on a $B(\gamma, \alpha_s) \leq 0$. De plus, grâce à la proposition 1.5.4, $\text{coeff}_\gamma(s(\beta)) \geq 1$, car $\text{coeff}_\gamma(s(\beta)) > 0$ pour $\gamma \in \text{supp}(s(\beta))$.
- (b) Par minimalité de $\text{dp}(\beta)$, on sait que $\Gamma_{\text{supp}(s(\beta))}$ ne contient ni cycle, ni arête ∞ , car s appartient au cycle de $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$ dans le cas où ce graphe possède un cycle ou, dans l'autre cas, s est un sommet de l'arête ∞ dans $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$.

Calculons maintenant $B(\alpha_s, s(\beta))$ dans le cas où $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$ contient un cycle et dans le cas où $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$ contient une arête ∞ :

- (1) On sait que s fait partie du cycle par la remarque (b) ci-haut. Soient $s_1, s_2 \in S$ les deux voisins de s dans le cycle. On a $m_{s_1 s}, m_{s_2 s} \geq 3$ et donc

$$B(\alpha_{s_i}, \alpha_s) \leq -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad (\dagger)$$

pour $i = 1, 2$. En vertu de la proposition 1.5.4, on a $\text{coeff}_{\alpha_{s_i}}(s(\beta)) \geq 1$ ($\ddagger$), car $\alpha_{s_i} \in \text{supp}(s(\beta))$ pour $i = 1, 2$. On a donc :

$$\begin{aligned} B(s(\beta), \alpha_s) &= \text{coeff}_{\alpha_{s_1}}(s(\beta)) B(\alpha_{s_1}, \alpha_s) + \text{coeff}_{\alpha_{s_2}}(s(\beta)) B(\alpha_{s_2}, \alpha_s) \\ &\quad + \sum_{\substack{\gamma \in \Delta \\ \gamma \neq \alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}}} \text{coeff}_\gamma(s(\beta)) B(\gamma, \alpha_s) \\ &\leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \quad (\text{par la remarque (a), (\dagger) et (\ddagger)}) \\ &\leq -1. \end{aligned}$$

- (2) Le cas où $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$ possède une arête ∞ est très similaire au cas (1). Comme

s est un sommet de l'arête ∞ par la remarque (b) ci-haut, on pose $s' \in S$ l'autre sommet de l'arête ∞ . On a donc $m_{ss'} = \infty$ et $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) \leq -1$. De la même façon qu'en $(\dagger)$, on a $\text{coeff}_{\alpha_{s'}}(s(\beta)) \geq 1$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} B(s(\beta), \alpha_s) &= B(\text{coeff}_{\alpha_{s'}}(s(\beta))\alpha_{s'} + \sum_{\substack{\gamma \in \Delta \\ \gamma \neq \alpha_{s'}}} \text{coeff}_{\gamma}(s(\beta))\gamma, \alpha_s) \\ &= \text{coeff}_{\alpha_{s'}}(s(\beta)) B(\alpha_{s'}, \alpha_s) + \sum_{\substack{\gamma \in \Delta \\ \gamma \neq \alpha_{s'}}} \text{coeff}_{\gamma}(s(\beta)) B(\gamma, \alpha_s) \\ &\leq -1. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a $B(s(\beta), \alpha_s) \leq -1$, ce qui conclut la démonstration du lemme. $\square$

Maintenant que nous savons que le support d'une petite racine ne peut contenir ni cycle, ni arête étiquetée par ∞ , nous démontrons le théorème 2.2.7.

Preuve du théorème 2.2.7. Dans les cas (ii) à (iv), nous montrons que $\Sigma = \Phi_{\text{sph}}^+$ et nous faisons appel à la proposition 2.2.5 pour conclure.

(i) Le cas W fini a été discuté à la proposition 2.2.1.

(ii) Si $m_{st} = 2$ ou ∞ pour tout $s \neq t$, on remarque que $B(\alpha_s, \alpha_t) \in \{0\} \cup]-\infty, -1]$ pour tout $\alpha_s, \alpha_t \in \Delta$ $(\dagger)$. Montrons que $\Sigma = \Delta = \Phi_{\text{sph}}^+$. Pour la première égalité, $\Delta \subseteq \Sigma$ par définition. Montrons que $\Sigma \subseteq \Delta$.

Soit $\beta \in \Sigma$ et posons $\text{dp}(\beta) = k$. Nous allons montrer que $k = 0$ et donc que $\beta \in \Delta$. Nous procédons par contradiction ; supposons que $k \geq 1$.

Puisque $\beta \in \Sigma$, le lemme 1.5.21 affirme qu'il existe $\gamma_0 \prec_p \gamma_1 \prec_p \cdots \prec_p \gamma_k$ dans le poset des racines où $\gamma_0 \in \Delta$, $\gamma_k = \beta$, $\gamma_i \in \Sigma$ et $\text{dp}(\gamma_i) = i$ pour tout $0 \leq i \leq k$. En particulier, $\gamma_1 = s(\gamma_0)$ pour un certain $s \in S$. L'objectif est maintenant de montrer que $\gamma_1 \notin \Sigma$ et donc que $k < 1$, ce qui contredit

notre hypothèse $(\star)$ sur k . Par $(\dagger)$, il y a 2 possibilités : $B(\gamma_0, \alpha_s) = 0$ ou $B(\gamma_0, \alpha_s) \leq -1$. Si $B(\gamma_0, \alpha_s) = 0$, alors $\gamma_1 = s(\gamma_0) = \gamma_0 - 2B(\gamma_0, \alpha_s)\gamma_0 = \gamma_0$, ce qui est une contradiction car $\text{dp}(\gamma_1) = 1 \neq 0 = \text{dp}(\gamma_0)$. Si $B(\gamma_0, \alpha_s) \leq -1$, alors $\text{dp}_\infty(\gamma_1) = \text{dp}_\infty(s(\gamma_0)) = \text{dp}_\infty(\gamma_0) + 1 > 0$ par la proposition 1.5.20. Or, ceci est une contradiction car $\gamma_1 \in \Sigma$ et donc $\text{dp}_\infty(\gamma_1) = 0$ par hypothèse.

On a donc bien $\text{dp}(\beta) = 0$, d'où $\beta \in \Delta$. De ce fait, on a $\Sigma = \Delta \subseteq \Phi_{\text{sph}}^+$. Puisque $\Phi_{\text{sph}}^+ \subseteq \Sigma$ par la proposition 2.2.4, on a bien l'égalité $\Sigma = \Phi_{\text{sph}}^+$ et on conclut par la proposition 2.2.5.

(iii) Dans le cas où Γ_W est un graphe complet, on débute par montrer que

$$\Phi_{\text{sph}}^+ = \bigcup_{\substack{s,t \in S \\ m_{st} < \infty}} \Phi_{s,t}^+,$$

où $\Phi_{s,t}^+$ est le système de racines positives du groupe $W_{s,t} = \langle s, t \rangle$. Soit $\beta \in \Phi_{\text{sph}}^+$, montrons que $\beta \in \Phi_{s,t}^+$ pour certains $s, t \in S$ avec $m_{st} < \infty$. La première étape est de montrer que $|\text{supp}(\beta)| \leq 2$. Par contradiction, supposons que $|\text{supp}(\beta)| \geq 3$. On remarque que $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$ est un sous-graphe complet du graphe complet Γ_W . Ainsi, puisque $|\text{supp}(\beta)| \geq 3$, alors $\Gamma_{\text{supp}(\beta)}$ contient un graphe complet à trois sommets. Or, en vertu de la classification des groupes de Coxeter finis (théorème 1.1.8 et voir figure 1.2), $W_{\text{supp}(\beta)}$ est un groupe infini et donc $\beta \notin \Phi_{\text{sph}}^+$, d'où la contradiction. Ainsi, si β est une racine sphérique, on a $|\text{supp}(\beta)| \leq 2$. Nous avons maintenant deux cas à considérer : $\text{supp}(\beta) = \{\alpha_s\}$ ou $\text{supp}(\beta) = \{\alpha_s, \alpha_t\}$ avec $s, t \in S$. Si $\text{supp}(\beta) = \{\alpha_s\}$, alors $\beta \in \Phi_{s,s}^+$ et $m_{ss} = 1$. On a donc le résultat voulu. Si $\text{supp}(\beta) = \{\alpha_s, \alpha_t\}$, alors $\beta \in \Phi_{s,t}^+$. De plus, puisque β est sphérique, on sait que $W_{\text{supp}(\beta)} = W_{s,t}$ est fini. Donc $m_{st} < \infty$ et on a l'inclusion voulue. Ceci prouve la première inclusion.

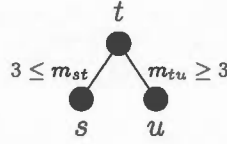
Pour la deuxième inclusion, soit $\beta \in \bigcup_{\substack{s,t \in S \\ m_{st} < \infty}} \Phi_{s,t}^+$. On pose $\text{supp}(\beta) = \{\alpha_s, \alpha_t\}$

avec $s, t \in S$, $m_{st} < \infty$ et possiblement $s = t$. Alors $W_{\text{supp}(\beta)} = W_{s,t} \simeq \mathcal{D}_{m_{st}}$ est fini. Ceci conclut la preuve de la deuxième inclusion.

Il reste à montrer que $\Sigma \subseteq \bigcup_{\substack{s,t \in S \\ m_{st} < \infty}} \Phi_{s,t}^+$. Tout d'abord, il est important de rappeler que tout sous-graphe complet de Γ_W possédant au moins 3 sommets possède au moins un cycle ($\diamond$). Soit $\alpha \in \Sigma$, montrons par contradiction que $|\text{supp}(\alpha)| \leq 2$. Supposons que $|\text{supp}(\alpha)| \geq 3$. Alors $\Gamma_{\text{supp}(\alpha)}$ est un sous-graphe complet à au moins 3 sommets de Γ_W et il possède donc un cycle par ($\diamond$). Ceci contredit le lemme 2.2.10, d'où $|\text{supp}(\alpha)| \leq 2$. Si $\text{supp}(\alpha) = \{\alpha_s\}$ avec $s \in S$, alors $\alpha \in \Phi_{s,s}^+$ et $m_{ss} = 1$. On a donc le résultat voulu. Si $\text{supp}(\alpha) = \{\alpha_s, \alpha_t\}$ avec $s, t \in S$, alors $\alpha \in \Phi_{s,t}^+$. De plus, puisque $\Gamma_{\text{supp}(\alpha)}$ ne contient pas d'arête ∞ par le lemme 2.2.10, alors $m_{s,t} < \infty$.

Ainsi, $\Sigma \subseteq \bigcup_{\substack{s,t \in S \\ m_{st} < \infty}} \Phi_{s,t}^+ = \Phi_{\text{sph}}^+$ et on conclut par les propositions 2.2.4 et 2.2.5.

- (iv) Soit W un groupe de type $\tilde{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$ et Δ un système simple pour W . On remarque que Γ_W est un cycle. Notons aussi que lorsqu'on enlève au moins un sommet au graphe $\tilde{A}_n$, le sous-graphe résultant est un produit de graphes A_{n_i} avec $\sum_i n_i < n$. En vertu du théorème 1.1.8 sur la classification des groupes de Coxeter finis, ces graphes représentent toujours des groupes finis. Montrons que $\Sigma \subseteq \Phi_{\text{sph}}^+$. Soit $\alpha \in \Sigma$, par le lemme 2.2.10, on sait que $\text{supp}(\alpha)$ ne contient pas de cycle. Alors $\text{supp}(\alpha) \subsetneq \Delta$. De ce fait, $W_{\text{supp}(\alpha)}$ est fini car il est un produit de groupes finis de type A_{n_i} . On a donc $\Sigma \subseteq \Phi_{\text{sph}}^+$. L'autre inclusion résultant de la proposition 2.2.4, on conclut par la proposition 2.2.5.
- (v) Posons $S = \{s, t, u\}$. Le cas du graphe complet (iii) et le cas où $m_{tu} = \infty$ et $m_{st} = 2$ (ii) étant déjà démontrés, on peut donc supposer que $m_{su} = 2$ et que $m_{st}, m_{tu} \geq 3$:



Montrons que si $m_{tu} = \infty$ et $m_{st} \geq 3$, alors on a $\Sigma = \Phi_{\text{sph}}^+$. Si $m_{tu} = \infty$ et $m_{st} \geq 3$, on a $\Phi_{\text{sph}}^+ = \Phi_{s,t}^+ \cup \{\alpha_u\}$. Montrons que $\Sigma \subseteq \Phi_{\text{sph}}^+$. Soit $\alpha \in \Sigma$, le lemme 2.2.10 affirme que $\Gamma_{\text{supp}(\alpha)}$ ne peut pas avoir d'arête ∞ . Donc $\alpha \in \Phi_{s,t}^+$ ou $\alpha = \alpha_u$. De ce fait, $\alpha \in \Phi_{s,t}^+ \cup \{\alpha_u\} = \Phi_{\text{sph}}^+$. L'égalité $\Sigma = \Phi_{\text{sph}}^+$ est donnée par la proposition 2.2.4 et on conclut par la proposition 2.2.5.

Si $m_{st} = 3$ et $m_{tu} < 6$, alors W est fini en vertu de la classification des système de Coxeter finis (théorème 1.1.8) et donc $\Sigma = \Phi_{\text{sph}}^+ = \Phi^+$. On conclut à l'aide de la proposition 2.2.5

Il reste deux cas à vérifier : si $m_{st} = 3$ et $m_{tu} \geq 6$ ou si $m_{st}, m_{tu} \geq 4$. En particulier, par le théorème 1.1.8 sur la classification des groupes de Coxeter finis, W est infini. Notons que m_{tu} et m_{st} sont différents de ∞ dans les deux situations, car nous avons vérifié ces cas précédemment.

Dans les deux cas restants, on montre que $\Sigma \neq \Phi_{\text{sph}}^+$ et que $\text{Aut}_0(W, S)$ n'est pas minimal.

Débutons par poser $k_i = -2 \cos(\pi/i)$ et prenons la racine :

$$\alpha := us(\alpha_t) = k_{m_{st}}\alpha_s + \alpha_t + k_{m_{tu}}\alpha_u.$$

Montrons que $\alpha \in \Sigma \setminus \Phi_{\text{sph}}^+$. Tout d'abord, on a $B(\alpha_s, \alpha_t) \in]-1, 1[$ et $B(s(\alpha_t), \alpha_u) = B(\alpha_t, \alpha_u) \in]-1, 1[$. Ainsi, par la proposition 1.5.20, on a :

$$\text{dp}_{\infty}(\alpha_t) = \text{dp}_{\infty}(s(\alpha_t)) = \text{dp}_{\infty}(us(\alpha_t)) = \text{dp}_{\infty}(\alpha) = 0$$

et donc $\alpha \in \Sigma$. Pour finir, on voit que $W_{\text{supp}(\alpha)} = W$ est un groupe infini, alors $\alpha \notin \Phi_{\text{sph}}^+$.

L'objectif est maintenant de montrer que l'automate canonique n'est pas minimal en montrant qu'il existe deux états équivalents dans $\text{Aut}_0(W, S)$. Pour ce faire, nous considérons les états $\Sigma(us)$ et $\Sigma(ust)$ et nous montrons que le langage reconnu à partir de ces deux états est le même.

On note que les mots us et ust sont des mots réduits. Les états $\Sigma(us)$ et $\Sigma(ust)$ sont donc bien des états de $\text{Aut}_0(W, S)$. Après calcul, on trouve $\Sigma(us) = \{\alpha_s, \alpha_u\} \neq \Sigma(ust) = \{\alpha_s, \alpha_u, \alpha\}$. En outre, on a l'égalité suivante : $D_L(us) = \{s, u\} = D_L(ust)$. Ceci implique que les seules transitions qui sortent des états $\Sigma(us)$ et $\Sigma(ust)$ sont des transitions par t . De plus, ces transitions mènent respectivement aux états $\Sigma(tus)$ et $\Sigma(tust)$. Montrons que $\Sigma(tus) = \Sigma(tust)$ et que, par le fait même, le langage reconnu à partir des états $\Sigma(us)$ et $\Sigma(ust)$ est le même. On a :

$$\Sigma(tus) = N(tus) \cap \Sigma = (\{\alpha_t\} \sqcup t(\{\alpha_s, \alpha_u\})) \cap \Sigma = \{\alpha_t, t(\alpha_s), t(\alpha_u)\} \cap \Sigma.$$

De façon similaire, on a $\Sigma(tust) = \{\alpha_t, t(\alpha_s), t(\alpha_u), t(\alpha)\} \cap \Sigma$. En comparant les deux ensembles $\Sigma(tust)$ et $\Sigma(tus)$, on voit qu'il suffit de montrer que $t(\alpha) \notin \Sigma$ afin de prouver l'égalité $\Sigma(tust) = \Sigma(tus)$. Pour démontrer que $t(\alpha) \notin \Sigma$, on montre que $B(\alpha_t, \alpha) \leq -1$ et on utilise la proposition 1.5.20 pour conclure que $\text{dp}_\infty(t(\alpha)) = \text{dp}_\infty(\alpha) + 1 = 1$. Après calcul, on trouve :

$$t(\alpha) = \alpha - 2B(\alpha_t, \alpha)\alpha_t = \alpha + (k_{m_{st}}^2 + k_{m_{tu}}^2 - 2)\alpha_t.$$

Or, pour les valeurs de $k_{m_{st}}$ et de $k_{m_{tu}}$ considérées, on a $k_{m_{st}}^2 + k_{m_{tu}}^2 - 2 \geq 2$. En effet, si $m_{st} \geq 3$ et $m_{tu} \geq 6$, alors $k_{m_{st}}^2 \geq 1$ et $k_{m_{tu}}^2 \geq 3$. Dans le cas où $k_{m_{st}}, k_{m_{tu}} \geq 4$, on a $k_{m_{st}}^2, k_{m_{tu}}^2 \geq 2$. Donc $-2B(\alpha_t, \alpha) \geq 2$ et ainsi, on a $B(\alpha_t, \alpha) \leq -1$. Alors $t(\alpha) \notin \Sigma$ et on en conclut que $\Sigma(tus) = \Sigma(tust)$. L'automate $\text{Aut}_0(W, S)$ possède donc deux états équivalents, $\Sigma(ust)$ et $\Sigma(us)$, et

n'est pas minimal. Ceci conclut la preuve de la conjecture dans le cas où W est de rang 3.

□

Exemple 2.2.11. L'automate canonique reconnaissant $\text{Red}(\tilde{A}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$ est illustré à la figure 2.4. Les transitions par s_1 sont de couleur noire, celles par s_2 sont en bleu et celles par s_3 sont en rouge. Par le théorème 2.2.7, cette automate est minimal.

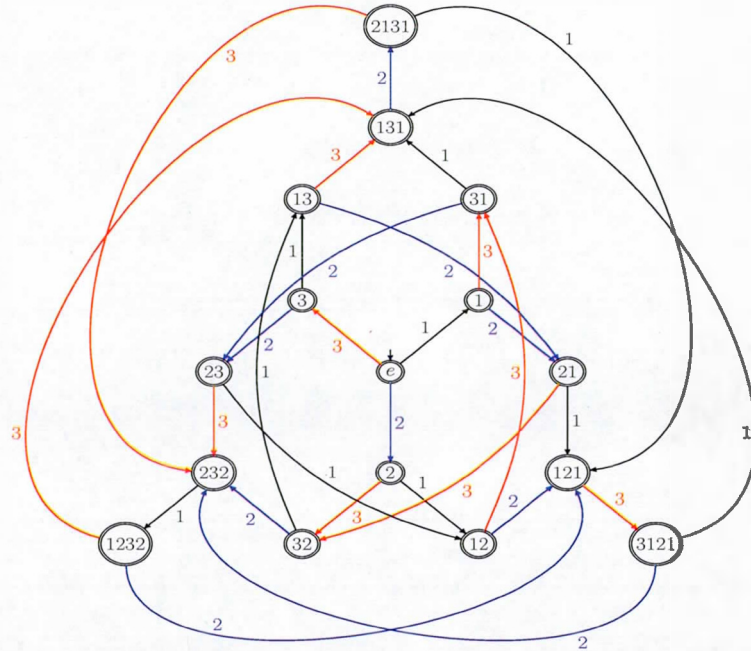


Figure 2.4 L'automate canonique reconnaissant $\text{Red}(\tilde{A}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$. Note : On utilise la notation abrégée $\Sigma(s_{i_1}, \dots, s_{i_k}) := 1 \dots k$ pour les états et $s_i := i$ pour les transitions.

Dans le dernier cas de la démonstration du précédent théorème, nous avons vu que pour les groupes de Coxeter de rang 3, l'automate canonique est minimal si

seulement si $\Sigma = \Phi_{\text{sph}}^+$. Nous y avons aussi donner une description des graphes où $\Sigma \neq \Phi_{\text{sph}}^+$.

Exemple 2.2.12. Le groupe de type $\tilde{C}_2$ (pour le graphe, voir figure 1.1) est le cas le plus simple pour lequel l'automate canonique n'est pas minimal. L'automate $\text{Aut}_0(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$ est présenté à la figure 2.5. Les transitions par s_1 sont illustrées en bleu, celles par s_2 sont en rouge et celles par s_3 sont en vert. Notons que les transitions en noir ne font pas partie de $\text{Aut}_0(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$. On voit que l'état de couleur orangée, $\Sigma(s_1 s_3 s_2)$, est un état non-nécessaire dans cet automate. En effet, les états $\Sigma(s_1 s_3 s_2)$ et $\Sigma(s_3 s_1)$ sont équivalents. Pour éliminer l'état $\Sigma(s_1 s_3 s_2)$ et ainsi construire l'automate minimal à partir de $\text{Aut}_0(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$, on doit trouver une façon de remplacer les transitions entrantes et sortantes de l'état $\Sigma(s_1 s_3 s_2)$: les quatre transitions entrantes par 1 et 3 en pointillés de couleur peuvent être remplacées par les transitions en pointillés noir correspondantes. Par exemple, la transition par 1 de l'état (32) vers l'état (132) est éliminée de $\text{Aut}_0(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$ et remplacée par la transition de (32) vers (31) par 1. Voici tous les remplacements nécessaires afin d'obtenir l'automate minimal reconnaissant $\text{Red } \tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\}$:

- a- $(32) \xrightarrow{1} (132) \mapsto (32) \xrightarrow{1} (31)$
- b- $(12) \xrightarrow{3} (132) \mapsto (12) \xrightarrow{3} (31)$
- c- $(3213232) \xrightarrow{1} (132) \mapsto (3213232) \xrightarrow{1} (31)$
- d- $(1231212) \xrightarrow{3} (132) \mapsto (1231212) \xrightarrow{3} (31)$
- e- $(132) \xrightarrow{2} (213) \mapsto (31) \xrightarrow{2} (213)$

L'automate $\text{Aut}_0(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$ n'est donc pas minimal. L'automate minimal reconnaissant $\text{Red}(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$ est illustré à la figure 3.3, page 64.

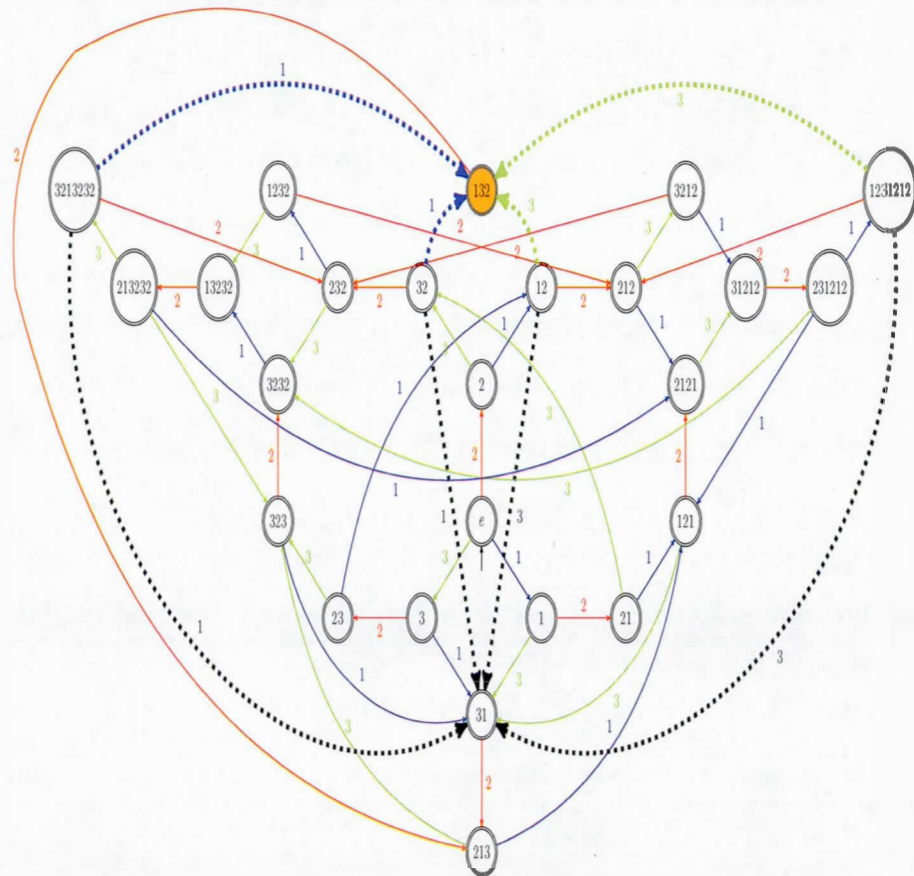


Figure 2.5 $\text{Aut}_0(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$. Note : On utilise la notation abrégée $\Sigma(s_{i_1}, \dots, s_{i_k}) := 1 \dots k$ pour les états et $s_i := i$ pour les transitions.

CHAPITRE III

AUTOMATE LIÉ À UNE OMBRE DE GARSIDE

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la notion d'automates n -canoniques. Nous avons vu que l'automate canonique n'est pas minimal dans le cas du groupe de Coxeter de type $\tilde{C}_2$. Le but du présent chapitre est donc de présenter une construction combinatoire conjecturale pour l'automate minimal reconnaissant $\text{Red}(W, S)$. Pour ce faire, nous exposons la construction des automates liés à une ombre de Garside (Hohlweg *et al.*, 2015) et en donnons quelques exemples. On rappelle que Dyer et Hohlweg montrent que la plus petite ombre de Garside, $\tilde{S}$, est finie (voir théorème 1.6.3). Ensuite, nous énonçons la conjecture de Hohlweg, Nadeau et Williams qui affirme que $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ est l'automate minimal reconnaissant $\text{Red}(W, S)$. Pour motiver cette conjecture, nous définissons les morphismes d'automates et nous montrons que tout automate $\text{Aut}_B(W, S)$, pour une ombre de Garside B , se projette dans $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$.

Les monoïdes Gaussiens et de Garside sont définis par Dehornoy et Paris (Dehornoy et Paris, 1998) dans l'étude des monoïdes de tresses et des groupes d'Artin-Tits. Les notions de groupes Gaussiens et de Garside viennent respectivement des groupes de fractions de ces monoïdes. Ce n'est que plus tard qu'on assiste à l'uniformisation de la nomenclature autour de ces structures : les groupes Gaussiens et de Garside définis dans (Dehornoy et Paris, 1998) sont maintenant simplement

appelés *groupes de Garside*.

Dehornoy, Dyer et Hohlweg (Dehornoy *et al.*, 2014) montrent que tous les monoïdes d'Artin-Tits ayant un nombre fini de générateurs possèdent une famille de Garside finie. Les *ombres de Garside* sont introduites par Dyer et Hohlweg (Dyer et Hohlweg, 2015) et forment des sous-ensembles du groupe W . Dans le chapitre 2, l'automate canonique reconnaissant $\text{Red}(W, S)$ est construit grâce à la représentation géométrique du système (W, S) . Quant à elles, les ombres de Garside permettent une construction d'automates reconnaissant $\text{Red}(W, S)$ qui ne nécessite que les propriétés des groupes abstraits et de la combinatoire des mots de (W, S) . Dans ce chapitre, nous débutons par donner la définition et quelques caractéristiques de la *projection de Garside* π . Nous continuons en élaborant la construction de l'automate lié à une ombre de Garside et nous explorons la minimalité de $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$.

3.1 Projection de Garside

Soit (W, S) un système de Coxeter. On rappelle qu'une ombre de Garside B est un sous-ensemble de W tel que $S \subseteq B$, B est clos par suffixe et clos par le supremum (voir définition 1.6.1, chapitre 1). Rappelons aussi la notion d'ordre faible (à droite) : soient $w_1, w_2 \in W$, on a $w_1 \leq w_2$ si un mot réduit de w_1 est un préfixe d'un mot réduit de w_2 .

La prochaine définition introduit une fonction permettant de projeter un groupe de Coxeter sur une ombre de Garside.

Définition 3.1.1. La *projection de Garside* π associée à une ombre de Garside

B est la fonction

$$\begin{aligned}\pi_B : W &\rightarrow B \\ w &\mapsto \bigvee \{g \in B \mid g \leq w\}.\end{aligned}$$

On rappelle que le supremum d'un sous-ensemble $X \subseteq W$ borné est donné par :

$$\bigvee X = \bigwedge \{g \in W \mid x \leq g, \forall x \in X\}.$$

Dans ce cas, l'ensemble du membre de droite de la précédente équation n'est pas vide. Par le théorème 1.3.4, si le supremum existe, on a l'unicité de celui-ci. Or, pour une ombre de Garside B , on sait que B est clos par le supremum et donc $\bigvee B$, s'il existe, appartient à B . Puisque l'ensemble $\{g \in B \mid g \leq w\}$ est borné par w , alors son supremum existe et π_B est donc bien définie.

Proposition 3.1.2. *La fonction π_B restreinte à l'ombre de Garside B agit comme l'identité sur B : $\pi_B|_B = \text{Id}_B$.*

Démonstration. Soit $g \in B$, alors $\pi_B(g) = \bigvee \{w \in B \mid w \leq g\}$. Or, g est un préfixe de lui-même, alors le supremum de l'ensemble des préfixes de g dans B est bien g . Ainsi, $\pi_B(g) = g$ pour tout $g \in B$. $\square$

Corollaire 3.1.3. *Si W est fini, alors $\pi_{\bar{S}} = \pi_W = \text{Id}_W$.*

Démonstration. Ce résultat découle directement des proposition 1.6.5 et 3.1.2 $\square$

Les prochains résultats donnent quelques propriétés pertinentes de la projection π en lien avec l'ordre faible et les ensembles de descentes. Ces propriétés sont indispensables pour s'assurer que l'automate lié à une ombre de Garside, que nous définirons plus tard, reconnaît bien le langage voulu.

Proposition 3.1.4 (Proposition 2.5, (Hohlweg et al., 2015)). *Soient B une ombre de Garside de (W, S) et $u, v \in W$. Alors π_B vérifie les résultats suivants :*

- (i) $\pi_B \circ \pi_B = \pi_B$;
- (ii) $\pi_B(u) \leq u$ avec égalité si et seulement si $u \in B$;
- (iii) si $u \leq v$, alors $\pi_B(u) \leq \pi_B(v)$.

Démonstration. Les assertions (i) et (ii) découlent directement de la définition de π et de la proposition 3.1.2. Pour (iii), si $u \leq v$, alors pour tout $g \in B$ tel que $g \leq u$, on a aussi $g \leq v$. Donc par définition de π_B , on a bien $\pi_B(u) \leq \pi_B(v)$. $\square$

Soit $w = s_1 \cdots s_k \in W$ tel que $s_1 \cdots s_k$ est réduit. On rappelle que l'ensemble de descentes de $w \in W$ est $D_L(w) = \{s \in S \mid \ell(sw) < \ell(w)\}$. L'étude du complément de $D_L(w)$ permet de déterminer les $s \in S$ tels que $ss_1 \cdots s_k = sw$ est de longueur $k + 1$ et donc les s pour lesquels sw est réduit. La prochaine proposition établit un lien entre la projection de Garside π et les ensembles de descentes.

Proposition 3.1.5 (Proposition 2.6, (Hohlweg et al., 2015)). *Soit B une ombre de Garside de (W, S) et $w \in W$. Alors $D_L(\pi_B(w)) = D_L(w)$ et $s\pi_B(w) \leq sw$ pour tout $s \in S$.*

Démonstration. Débutons par montrer que $D_L(\pi_B(w)) = D_L(w)$. Pour la première inclusion, considérons $t \in D_L(\pi_B(w))$. Par le lemme 1.3.3 et la proposition 3.1.4(ii), on a $t \leq \pi_B(w) \leq w$. Ainsi, $D_L(\pi_B(w)) \subseteq D_L(w)$. Pour l'inclusion inverse, on prend $s \in S$ tel que $s \leq w$. Comme $S \subseteq B$ par définition, alors $\pi_B(s) = s$ par la proposition 3.1.4(ii). Donc $s \leq \pi_B(w)$ grâce à la proposition 3.1.4(iii) et $D_L(w) \subseteq D_L(\pi_B(w))$ comme voulu.

Montrons maintenant que $s\pi_B(w) \leq sw$ pour tout $s \in S$. Pour ce faire, on considère les deux cas suivants : $s \in D_L(w) = D_L(\pi_B(w))$ ou $s \notin D_L(w)$. Dans le

cas où $s \in D_L(w)$, puisque $\pi_B(w) \leq w$ en vertu de la proposition 3.1.4(ii) et que $s \in D_L(w) \cap D_L(\pi_B(w))$, on conclut directement à l'aide du lemme 1.3.3(ii). Dans le deuxième cas, on suppose que $s \notin D_L(w)$. De la même façon, puisque $\pi_B(w) \leq w$, on a $s \notin D_L(\pi_B(w))$. On conclut donc par le lemme 1.3.3(iii) et ceci termine la preuve de la proposition. □

La proposition suivante et le corollaire 3.1.7 énoncent des caractéristiques de la projection π lorsqu'elle agit sur des mots ou des expressions réduites de W . Ces résultats sont indispensables pour construire la fonction de transition de l'automate lié à une ombre de Garside.

Proposition 3.1.6 (Proposition 2.8, (Hohlweg et al., 2015)). *Soit B une ombre de Garside de (W, S) . Soient $w \in W$ et $s \in S$ tels que $s \notin D_L(w)$. Alors $\pi_B(sw) = \pi_B(s\pi_B(w))$.*

Démonstration. On a $s\pi_B(w) \leq sw$ par la proposition 3.1.5. Ainsi, en vertu de la proposition 3.1.4(iii), on a $\pi_B(s\pi_B(w)) \leq \pi_B(sw)$. Il reste donc à montrer que $\pi_B(sw) \leq \pi_B(s\pi_B(w))$. Notons qu'il est équivalent de montrer que $\pi_B(sw) \leq s\pi_B(w)$. En effet, si $\pi_B(sw) \leq \pi_B(s\pi_B(w))$, comme on a $\pi_B(s\pi_B(w)) \leq s\pi_B(w)$ par la proposition 3.1.4(ii), alors on a bien $\pi_B(sw) \leq s\pi_B(w)$ par transitivité. En outre, en vertu de la proposition 3.1.4(i) et (iii), on a :

$$\pi_B(sw) \leq s\pi_B(w) \Rightarrow \pi_B \circ \pi_B(sw) \leq \pi_B(s\pi_B(w)) \Rightarrow \pi_B(sw) \leq \pi_B(s\pi_B(w)).$$

Ceci montre bien que $\pi_B(sw) \leq \pi_B(s\pi_B(w))$ si et seulement si $\pi_B(sw) \leq s\pi_B(w)$. Montrons donc que $\pi_B(sw) \leq s\pi_B(w)$. Comme $s \notin D_L(w)$ par hypothèse, on sait que $s \in D_L(sw) = D_L(\pi_B(sw))$ par la proposition 3.1.5. Puisque $\pi_B(sw) \leq sw$, alors par le lemme 1.3.3(ii), on a $s\pi_B(sw) \leq ssw = w$. Or $s \in D_L(\pi_B(sw))$, alors

$s\pi_B(sw)$ est un suffixe de $\pi_B(sw)$. Ainsi, $s\pi_B(sw) \in B$ car B est clos par suffixe (définition 1.6.1). Ceci implique que $\pi_B(s\pi_B(sw)) = s\pi_B(sw) \leq \pi_B(w)$ par la proposition 3.1.4(ii) et (iii). On multiplie alors les deux côtés de l'inégalité par s et on obtient le résultat voulu : $\pi_B(sw) \leq s\pi_B(w)$. $\square$

Corollaire 3.1.7 (Corollaire 2.10, (Hohlweg et al., 2015)). *Soit $v \in W$ et $s_1, \dots, s_k \in S$ tels que $s_k \cdots s_1 v$ est réduit. Alors*

$$\pi_B(s_k \cdots s_1 v) = \pi_B(s_k \pi_B(s_{k-1} \pi_B(\cdots s_2 \pi_B(s_1 \pi_B(v))))) = \pi_B(s_k \cdots s_1 \pi_B(v)).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur k pour la première égalité. Si $k = 1$, on a sv réduit. Donc $s \notin D_L(v)$ et on applique la proposition 3.1.6. Supposons que le résultat est vrai jusqu'à k et montrons le cas $k+1$. Puisque $s_{k+1}s_k \cdots s_1 v$ est réduit, alors $s_{k+1} \notin D_L(s_k \cdots s_1 v)$. On a donc

$$\pi_B(s_{k+1} \cdots s_1 v) = \pi_B(s_{k+1} \pi_B(s_k \cdots s_1 v))$$

par la proposition 3.1.6. On applique notre hypothèse de récurrence sur le membre de droite de la dernière équation et on obtient le résultat voulu :

$$\pi_B(s_{k+1} \cdots s_1 v) = \pi_B(s_{k+1} \pi_B(s_k \pi_B(\cdots s_2 \pi_B(s_1 \pi_B(v)))))$$

Pour la deuxième égalité, on rappelle que $\pi_B(v) \leq v$ par la proposition 3.1.4(ii). Ainsi, $s_k \cdots s_1 \pi_B(v) \leq s_k \cdots s_1 v$ et $s_k \cdots s_1 \pi_B(v)$ est réduit, car c'est un préfixe d'un mot réduit. On applique la première égalité en remplaçant v par $\pi_B(v)$:

$$\begin{aligned} \pi_B(s_k \cdots s_1 \pi_B(v)) &= \pi_B(s_{k+1} \pi_B(s_k \pi_B(\cdots s_2 \pi_B(s_1 \pi_B(\pi_B(v))))) \\ &= \pi_B(s_{k+1} \pi_B(s_k \pi_B(\cdots s_2 \pi_B(s_1 \pi_B(v))))) \end{aligned}$$

car $\pi_B \circ \pi_B = \pi_B$ par la proposition 3.1.4(i). On a donc bien l'égalité voulue et

ceci conclut la démonstration. $\square$

Nous concluons cette discussion par une dernière caractéristique de la projection π . Nous savons que si nous avons une ombre de Garside B , alors $\pi_B \circ \pi_B = \pi_B$. Qu'arrive-t-il lorsque nous composons des projections agissant sur des ombres de Garside distinctes ? La prochaine proposition donne une réponse à cette question dans le cas où des ombres de Garside sont incluses les unes dans les autres.

Proposition 3.1.8. *Soient B, C deux ombres de Garside telles que $B \subseteq C$. Alors $\pi_B \circ \pi_C = \pi_B$.*

Démonstration. Soit $w \in W$, afin de montrer que $\pi_B(\pi_C(w)) = \pi_B(w)$, on utilise la définition de la projection π pour voir qu'il suffit de montrer que

$$\{g \in B \mid g \leq \pi_C(w)\} = \{g \in B \mid g \leq w\}.$$

Pour l'inclusion de gauche à droite, soit $g \in B$ tel que $g \leq \pi_C(w)$. On sait que $\pi_C(w) \leq w$ par la proposition 3.1.4(ii) et donc $g \in \{g \in B \mid g \leq w\}$. Pour l'autre inclusion, on prend $g \in \{g \in B \mid g \leq w\}$ et on montre que $g \leq \pi_C(w)$. Puisque $g \in B$ et que $B \subseteq C$, alors la proposition 3.1.4(ii) et (iii) implique que $g = \pi_C(g) \leq \pi_C(w)$. Ainsi, on a bien $\pi_B \circ \pi_C = \pi_B$. $\square$

3.2 Automate lié à une ombre de Garside et $\text{Aut}_{\bar{S}}(W, S)$

Il est maintenant temps de donner la définition de l'automate lié à une ombre de Garside. Ces automates furent construits par Hohlweg, Nadeau et Williams (Hohlweg *et al.*, 2015). L'objectif avec ces automates est de trouver une construction combinatoire de l'automate minimal reconnaissant le langage des mot réduits d'un groupe de Coxeter donné.

Définition 3.2.1. Soit $B \subseteq W$ une ombre de Garside finie dans un système de Coxeter (W, S) . L'automate lié à B , noté $\text{Aut}_B(W, S)$, est la donnée du quintuplet $(S, Q_B, \{q_e\}, Q_B, \delta_{\pi_B})$ où $Q_B = \{q_g \mid g \in B\}$ et δ_{π_B} est la fonction de transition partielle suivante :

$$\begin{aligned} \delta_{\pi_B} : Q_B \times S &\rightarrow B \\ (q_w, s) &\mapsto \pi_B(sw) \text{ si } \ell(sw) > \ell(w). \end{aligned}$$

Notons que puisque nous avons donné une construction exhaustive de l'ombre de Garside $\tilde{S}$, les exemples d'automates liés à une ombre de Garside présentés dans ce mémoire sont liés à $\tilde{S}$. De plus, comme le but est de mener vers l'automate minimal, seul la connaissance de l'ombre de Garside $\tilde{S}$ est nécessaire.

Exemple 3.2.2. Dans cet exemple, nous donnons la construction détaillée de $\text{Aut}_{\tilde{S}}(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$. Débutons par construire $Q_{\tilde{S}}$ qui sera l'ensemble des états de l'automate. On commence par poser $\tilde{S}_0 = S \cup \{e\} = \{e, s, t\}$. On calcule ensuite les suprema de tous les couples d'éléments de $\tilde{S}_0$: $e \vee s = s$, $e \vee t = t$ et $s \vee t$ n'existe pas car $\text{cone}(N(s) \cup N(t)) \cap Q \neq \emptyset$ (voir figure 3.1). Notons que $w \vee w = w$ et que $w_1 \vee w_2 = w_2 \vee w_1$ pour tout $w, w_1, w_2 \in W$. On a donc $\tilde{S} = \tilde{S}_0 = \{e, s, t\}$. Pour le calcul des transitions, on débute à l'état initial et on calcule toutes les transitions possibles pour chacun des états. On sait qu'il y a une transition partant de l'état q_w par s si $\ell(sw) > \ell(w)$. Ainsi, de l'état q_e , on a des transitions par s et t vers les états $q_{\pi_{\tilde{S}}(s)} = q_s$ et $q_{\pi_{\tilde{S}}(t)} = q_t$ respectivement. Ayant calculé toutes les transitions possibles partant de q_e , on calcule maintenant celles partant de q_s et de q_t . Pour l'état q_s , on a $\ell(ss) < \ell(s)$ et $\ell(ts) > \ell(s)$. Donc on a seulement une transition par t vers l'état $q_{\pi_{\tilde{S}}(ts)} = q_{\vee\{g \in \tilde{S} \mid g \leq ts\}} = q_{\vee\{e, t\}} = q_t$. De façon analogue, on a une transition par s partant de l'état q_t . L'automate résultant est présenté à la figure 3.2. On remarque qu'il est exactement l'automate canonique calculé dans

l'exemple 2.1.8 et illustré à la figure 2.3. Il suffit d'échanger $\emptyset$ par q_e , $\Sigma_0(s)$ par q_s et $\Sigma_0(t)$ par q_t .

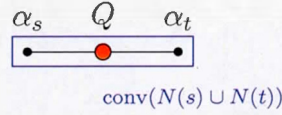


Figure 3.1 Représentation projective de $\mathcal{D}_\infty$ et illustration de $\text{cone}(N(s) \cup N(t)) \cap Q \neq \emptyset$

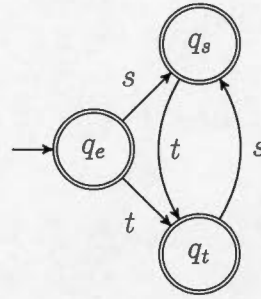


Figure 3.2 $\text{Aut}_{\tilde{S}}(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$

Exemple 3.2.3. Pour l'exemple du groupe de type $\tilde{A}_2$, afin de simplifier la lecture de l'automate, nous notons les états et les générateurs par leur indice : $q_w := w$, $s_1 := 1$, $s_2 := 2$ et $s_3 := 3$. Pour ce groupe, nous trouvons :

$$\tilde{S} = \{e, 1, 2, 3, 12, 21, 13, 31, 23, 32, 121, 232, 131, 1232, 2131, 3121\}.$$

Pour le calcul de $\tilde{S}$, on se réfère à la construction donnée au chapitre 1 (§ 1.6) et à l'exemple 1.5.10 pour les calculs de suprema. Il ne reste donc qu'à calculer les transitions :

(a) On a $\ell(1e) > \ell(e)$ et donc une transition de e vers $\pi_{\tilde{S}}(1e) = \pi_{\tilde{S}}(1)$. On obtient donc :

$$\pi_{\tilde{S}}(1) = \bigvee \{w \in \tilde{S} \mid w \leq 1\} = \bigvee \{e, 1\} = 1.$$

Les transitions par 2 et 3 sont analogues.

(b) Pour illustrer un exemple de calcul plus complexe, calculons les transitions à partir de 1232 :

— Par $s_1 := 1$: On a que $\ell(11232) < \ell(1232)$ donc il n'y a pas de transition étiquetée par 1 à partir de 1232.

— Par $s_2 := 2$: On a que $\ell(21232) > \ell(1232)$. Alors on calcule :

$$\begin{aligned}\pi_{\tilde{S}}(21232) &= \bigvee \{2, 21, 212, 1, 12, 121\} \\ &= 212 = 121.\end{aligned}$$

On a donc une transition de 1232 vers 121 étiquetée par 2.

— Par $s_3 := 3$: On a que $\ell(31232) > \ell(1232)$. Alors on calcule :

$$\begin{aligned}\pi_{\tilde{S}}(31232) &= \bigvee \{3, 31, 313, 1, 13, 131\} \\ &= 313 = 131.\end{aligned}$$

Ainsi, on a une transition de 1232 vers 131 par 3.

Les autres calculs de transitions se font de la même façon et sont donc laissés au soin du lecteur. Comme cet automate est fini et déterministe, le calcul des transitions doit finir à un certain moment. À la fin de ce processus, on retrouve exactement, à changement du nom des états près, l'automate $\text{Aut}_0(\tilde{A}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$ de la figure 2.4. Grâce au théorème 2.1.7, on sait que $\text{Aut}_{\tilde{S}}(\tilde{A}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$ reconnaît bien $\text{Red}(\tilde{A}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$ et on conclut même que cet automate est minimal par le théorème 2.2.7.

Maintenant que nous connaissons la construction d'un automate lié à une ombre de Garside pour un système de Coxeter (W, S) , il reste à montrer que ces automates reconnaissent bel et bien $\text{Red}(W, S)$.

Théorème 3.2.4 (Théorème 1.2, (Hohlweg et al., 2015)). *Soit B une ombre de Garside finie de (W, S) . L'automate $\text{Aut}_B(W, S)$ est un automate fini et déterministe reconnaissant $\text{Red}(W, S)$.*

Démonstration. Afin de prouver ce théorème, il faut montrer que seuls les mots réduits de (W, S) sont reconnus par $\text{Aut}_B(W, S)$. Avant de commencer, considérons $s_1, \dots, s_k \in S$ quelconques. On définit récursivement $x_j := \pi_B(s_j x_{j-1})$ pour alléger les notations.

Soit la propriété suivante :

Pour toute séquence de réflexions simples $s_1, \dots, s_k \in S$, le mot $s_k \cdots s_1$ est réduit si et seulement s'il y a un chemin dans l'automate $\text{Aut}_B(W, S)$ débutant à l'état q_e dont les transitions sont étiquetées par $s_1, \dots, s_k$. L'état où se termine le dit chemin est indexé par $\pi_B(s_k \cdots s_1)$.

Posons $\mathcal{P}(k)$ cette équivalence et procédons par récurrence sur k pour en démontrer les deux sens. Pour les cas initiaux, on sait que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies par définition de l'automate et d'une ombre de Garside et ce, pour les deux sens de l'équivalence. Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie jusqu'à $k - 1$ et démontrons $\mathcal{P}(k)$.

Pour démontrer le premier sens de l'équivalence, montrons que les étiquettes d'un chemin dans l'automate forment bien un mot réduit. Supposons qu'il y a un chemin dans $\text{Aut}_B(W, S)$ dont les transitions sont étiquetées par $s_1, \dots, s_k$ de l'état e à l'état $x_k = \pi_B(s_k x_{k-1})$:

$$e \xrightarrow{s_1} x_1 \xrightarrow{s_2} x_2 \xrightarrow{s_3} \dots \xrightarrow{s_k} x_k.$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que le mot $s_{k-1} \cdots s_1$ est réduit. Montrons que $s_k \cdots s_1$ est réduit. Par le corollaire 3.1.7, on a $\pi_B(s_{k-1} \cdots s_1) = x_{k-1}$. Puisqu'on a une transition de l'état x_{k-1} vers l'état x_k par s_k , alors $s_k \notin D_L(x_{k-1})$ par définition de l'automate. En vertu de la proposition 3.1.5, on sait que

$D_L(x_{k-1}) = D_L(s_{k-1} \cdots s_1)$ et donc $s_k \notin D_L(s_{k-1} \cdots s_1)$. On en déduit alors que $s_k \cdots s_1$ est réduit. Ceci termine la preuve du premier sens de l'équivalence.

Montrons maintenant que pour tout mot réduit $s_k \cdots s_1 \in W$, il existe un chemin étiqueté par $s_1, \dots, s_k$ dans $\text{Aut}_B(W, S)$. Nous allons en fait démontrer la contraposé de cette assertion : supposons que $s_1, \dots, s_k$ n'étiquette pas un chemin dans $\text{Aut}_B(W, S)$ et montrons que $s_k \cdots s_1$ n'est pas réduit. On doit considérer 2 cas : celui où $s_1, \dots, s_{k-1}$ n'est pas un chemin dans l'automate et celui où $s_1, \dots, s_{k-1}$ est un chemin dans l'automate. Pour le premier cas, si $s_1, \dots, s_{k-1}$ n'est pas un chemin dans l'automate, alors $s_{k-1} \cdots s_1$ n'est pas un mot réduit de W par hypothèse de récurrence. Donc le mot $s_k s_{k-1} \cdots s_1$ n'est pas réduit. Dans le deuxième cas, supposons que $s_{k-1}, \dots, s_1$ est un chemin dans $\text{Aut}_B(W, S)$ se terminant à x_{k-1} . Puisque $s_1, \dots, s_k$ n'est pas un chemin dans l'automate, alors, à l'aide de la définition de l'automate, du corollaire 3.1.7 et de la proposition 3.1.5, on en déduit que $s_k \in D_L(x_{k-1}) = D_L(\pi_B(s_{k-1} \cdots s_1)) = D_L(s_{k-1} \cdots s_1)$. Ainsi, $s_k s_{k-1} \cdots s_1$ n'est pas réduit, ce qui conclut la preuve du deuxième sens de l'équivalence $\mathcal{P}$ et donc la preuve du théorème. $\square$

L'exemple 2.2.12 fournit un contre-exemple à la minimalité de l'automate canonique construit à l'aide de l'ensemble des petites racines Σ . Nous avons identifié deux états équivalents et avons réussi à en éliminer un en modifiant certaines transitions.

Exemple 3.2.5. Dans cet exemple, nous illustrons à la figure 3.3 le résultat final de la construction de $\text{Aut}_{\tilde{S}}(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$. On voit qu'il s'agit en fait de la version modifiée de l'exemple 2.2.12 (figure 2.5). Cet automate est l'automate minimal reconnaissant $\text{Red}(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$.

Conjecture 3.2.6 ((Hohlweg et al., 2015), Conjecture 1). *Soit (W, S) un système de Coxeter et $\tilde{S}$ la plus petite ombre de Garside. L'automate $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ est l'automate minimal reconnaissant le langage $\text{Red}(W, S)$.*

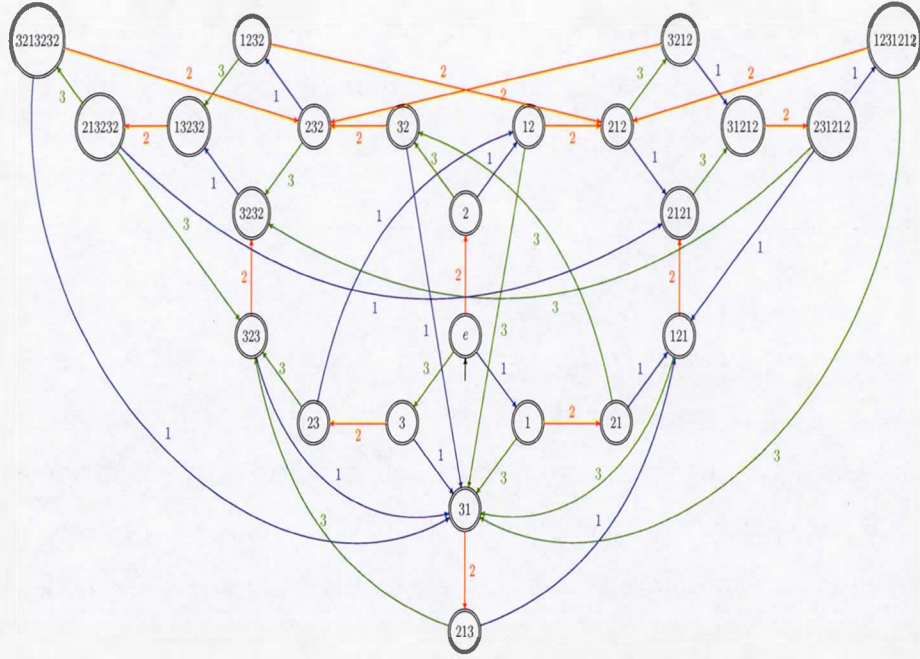


Figure 3.3 $\text{Aut}_{\tilde{S}}(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$: l'automate minimal reconnaissant $\text{Red}(\tilde{C}_2, \{s_1, s_2, s_3\})$.

Le prochain énoncé vérifie la conjecture dans le cas où W est fini.

Proposition 3.2.7. *Soit (W, S) un système de Coxeter fini. Alors $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ est l'automate minimal reconnaissant $\text{Red}(W, S)$.*

Démonstration. Puisque W est fini, on a donc $\tilde{S} = W$. Ainsi, la projection de Garside $\pi_{\tilde{S}}$ agit comme l'identité sur W et les états de l'automate sont étiquetés par les éléments de W . Les transitions sont donc de la forme $w \xrightarrow{s} sw$ si $s \notin D_L(w)$. De ce fait, la suite de la preuve est identique à celle de la proposition 2.2.1 en remplaçant $\text{Aut}_0(W, S)$ par $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ et les états $\Sigma(w)$ par les états w . $\square$

Remarque 3.2.8. Pour un groupe de Coxeter fini W , la proposition précédente affirme que les états de l'automate lié à $\tilde{S}$ sont directement étiquetés par les mots réduits de W . Ainsi, on remarque que $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ est exactement le graphe de

Cayley de W orienté par l'ordre faible. Ceci implique que dans le cas des groupes de Coxeter finis, le graphe de Cayley forme l'automate minimal reconnaissant $\text{Red}(W, S)$.

3.3 Morphismes d'automates

Outre le fait qu'aucun contre-exemple à la conjecture 3.2.6 n'ait été découvert, certains résultats la motivent. Puisque la majorité de ces résultats concernent les éléments n -bas, ils seront discutés dans le chapitre 4. Nous concluons cependant ce chapitre par une première motivation : les morphismes d'automates totalement surjectifs de l'automate lié à n'importe quelle ombre de Garside dans l'automate lié à $\tilde{S}$.

Une des raisons qui nous porte à croire que $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ est l'automate minimal reconnaissant $\text{Red}(W, S)$ est l'existence de *morphismes d'automates totalement surjectifs*. En effet, nous voyons qu'il existe des projections des automates liés à une ombre de Garside vus précédemment dans celui lié à $\tilde{S}$. Débutons par définir les morphismes d'automates.

Définition 3.3.1. Soit $\mathcal{A} = (S, Q, \{q_0\}, F, \delta)$ et $\mathcal{A}' = (S, Q', \{q'_0\}, F', \delta')$ deux automates finis et déterministes sur le même alphabet S . La fonction $f : Q \rightarrow Q'$ est un *morphisme d'automates* si elle respecte les conditions suivantes :

- (i) $f(q_0) = q'_0$;
- (ii) $f(F) \subseteq F'$;
- (iii) si $q_1 \xrightarrow{s} q_2$ est une transition dans $\mathcal{A}$, alors $f(q_1) \xrightarrow{s} f(q_2)$ est une transition dans $\mathcal{A}'$.

On dit que f est *totalement surjective* si f est surjective, si $f^{-1}(F') = F$ et si pour toute transition $q'_1 \xrightarrow{s} q'_2$ dans $\mathcal{A}'$, il existe $q_1, q_2 \in Q$ tels que $f(q_1) = q'_1$,

$f(q_2) = q'_2$ et que $q_1 \xrightarrow{s} q_2$ est une transition dans $\mathcal{A}$.

On dit alors que $\mathcal{A}'$ est un *quotient* de $\mathcal{A}$.

Remarque 3.3.2. On remarque que si f est un morphisme d'automates entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, alors le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est inclus dans le langage reconnu par $\mathcal{A}'$. Si f est totalement surjective, on a alors l'égalité des langages reconnus par les deux automates. Pour cette raison, nous étudions seulement les morphismes totalement surjectifs dans le but de réduire le nombre d'états d'un automate, tout en conservant le langage reconnu.

Le prochain résultat motive la conjecture 3.2.6 sur la minimalité de $\text{Aut}_{\bar{S}}(W, S)$.

Proposition 3.3.3. *Soient B, C deux ombres de Garside telles que $B \subseteq C$. Alors la projection π_B est un morphisme totalement surjectif de $\text{Aut}_C(W, S)$ dans $\text{Aut}_B(W, S)$. En particulier, $\text{Aut}_{\bar{S}}(W, S)$ est un quotient de tous les automates liés à une ombre de Garside de (W, S) .*

Démonstration. Pour débiter, $\pi_B : C \rightarrow B$ est surjective. En effet, soit $w \in B$, alors $w \in C$ et $\pi_B(w) = w$ par la proposition 3.1.4(ii). Montrons maintenant que π_B satisfait les conditions pour être un morphisme d'automates (voir définition 3.3.1). Comme les états sont de la forme q_w par définition, notons que l'action de π_B sur les états de l'automate est traduite par son action sur les indices de ces états ; ceci simplifie la notation.

- (i) Comme $e \in B$, alors $\pi_B(e) = e$ et la première condition est satisfaite.
- (ii) Pour la deuxième condition, il suffit de montrer que les états finaux de $\text{Aut}_C(W, S)$ sont envoyés sur des états finaux de $\text{Aut}_B(W, S)$ par π_B . Or, puisque tous les états de $\text{Aut}_C(W, S)$ et de $\text{Aut}_B(W, S)$ sont finaux et que π_B est surjective, alors on a le résultat voulu.

(iii) Soit $w \xrightarrow{s} \pi_C(sw)$ une transition de $\text{Aut}_C(W, S)$. Montrons que $\pi_B(w) \xrightarrow{s} \pi_B(\pi_C(sw))$ est une transition dans $\text{Aut}_B(W, S)$. Tout d'abord, en vertu de la proposition 3.1.8, on a $\pi_B(\pi_C(sw)) = \pi_B(sw)$. On doit donc montrer que $\pi_B(w) \xrightarrow{s} \pi_B(sw)$ est une transition dans $\text{Aut}_B(W, S)$. Puisque $w \xrightarrow{s} \pi_C(sw)$ est une transition de $\text{Aut}_C(W, S)$, alors on sait que $s \notin D_L(w) = D_L(\pi_B(w))$ en utilisant la définition de $\text{Aut}_C(W, S)$ et la proposition 3.1.5. Ainsi, par définition, $\pi_B(w) \xrightarrow{s} \pi_B(s\pi_B(w))$ est une transition dans $\text{Aut}_B(W, S)$. Or, grâce à la proposition 3.1.6, on a $\pi_B(s\pi_B(w)) = \pi_B(sw)$ et ceci démontre bien la dernière condition.

Afin de démontrer que π_B est totalement surjective, il reste à prouver que si $a \xrightarrow{s} b$ est une transition dans $\text{Aut}_B(W, S)$, alors il existe une transition $a' \xrightarrow{s} b'$ dans $\text{Aut}_C(W, S)$ telle que $\pi_B(a') = a$ et $\pi_B(b') = b$. Comme $B \subseteq C$ et que $\pi_B|_B = \text{Id}_B$, alors il suffit de poser $b' = b$ et $a' = a$.

Ensuite, par définition, on sait que $\tilde{S}$ est inclus dans toutes les ombres de Garside d'un système de Coxeter (W, S) . On en déduit que $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ est un quotient de tous les automates liés à une ombre de Garside. $\square$

Remarque 3.3.4. Nous savons maintenant que tous les automates liés à une ombre de Garside se projettent dans l'automate lié à $\tilde{S}$. Ainsi, s'il est démontré que l'automate minimal se construit à partir d'une ombre de Garside selon la construction de la définition 3.2.1, ceci montrera directement la conjecture 3.2.6.

CHAPITRE IV

MINIMALITÉ DE L'AUTOMATE LIÉ À LA PLUS PETITE OMBRE DE GARSIDE, ÉLÉMENTS N -BAS ET STRUCTURE AUTOMATIQUE DES GROUPES DE COXETER

Jusqu'ici, nous avons discuté des automates n -canoniques et des automates liés à une ombre de Garside en orientant nos efforts vers la découverte d'une nouvelle construction de l'automate minimal reconnaissant $\text{Red}(W, S)$. Dans le théorème 2.2.7, nous avons vu des cas dans lesquels $\text{Aut}_0(W, S)$ est minimal. Cependant, en se référant à l'exemple 2.2.12 sur le groupe de type $\tilde{C}_2$, on voit que l'automate canonique n'est pas minimal en général. Dans le précédent chapitre, nous avons introduit les automates liés à une ombre de Garside et nous avons trouvé un candidat pour l'automate minimal : $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$. En effet, nous savons que si l'automate minimal est lié à une ombre de Garside, alors ce sera forcément $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ (voir remarque 3.3.4).

Dans ce chapitre, nous continuons notre étude de la minimalité de $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$. Notons que ce quatrième chapitre est un état de l'art des recherches et la plupart des énoncés sont des conjectures. Nous discutons des différentes idées qui nous portent à croire que $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ est minimal, puis nous discutons de la structure automatique d'un système de Coxeter (W, S) . Celle-ci nécessite, en plus d'un automate reconnaissant $\text{Red}(W, S)$, des automates *multiplicateurs*.

4.1 Éléments n -bas

Pour continuer notre étude de la minimalité de $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$, on étudie la notion d'*éléments n -bas*. On rappelle que pour $w \in W$, le n -petit ensemble d'inversions de w est $\Sigma_n(w) = \Sigma_n \cap N(w)$ et que Λ_n est l'ensemble de tous les $\Sigma_n(w)$ pour un n fixé et $w \in W$.

Définition 4.1.1. On dit que $w \in W$ est un *élément n -bas* si

$$N(w) = \text{cone}(\Sigma_n(w)) \cap \Phi.$$

On note $L_n(W)$, ou L_n lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, l'ensemble de tous les éléments n -bas de W .

Dans les pages suivantes, nous notons $\text{cone}(A) \cap \Phi := \text{cone}_{\Phi}(A)$ afin d'alléger la notation.

On dit simplement que $w \in W$ est un élément bas si w est 0-bas et, sur le même ordre d'idées, on note L l'ensemble des éléments bas à la place de L_0 . La notion d'éléments bas est introduite par Dehornoy, Dyer et Hohlweg (Dehornoy *et al.*, 2014) et est étendue pour tout $n \in \mathbb{N}$ par Hohlweg et Dyer (Dyer et Hohlweg, 2015).

Remarque 4.1.2. Les éléments n -bas fournissent une filtration des éléments de W . En effet, on a

$$W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$$

avec $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_n \subseteq \dots$. De plus, à l'aide de la définition, on remarque que $S \subseteq L_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 4.1.3. Soit (W, S) un système de Coxeter et $n \in \mathbb{N}$, alors la fonction $\Sigma_n : L_n \rightarrow \Lambda_n$ définie par $w \mapsto \Sigma_n(w)$ est injective. En particulier, l'ensemble L_n

est fini pour tout n .

Démonstration. Soient $w, w' \in L_n$ tels que $\Sigma_n(w) = \Sigma_n(w')$. On a

$$N(w) = \text{cone}_\Phi(\Sigma_n(w)) = \text{cone}_\Phi(\Sigma_n(w')) = N(w').$$

Or, puisque N est injective par la proposition 1.5.6, alors $w = w'$ et on a bien l'injectivité de Σ_n . Ensuite, on rappelle que Λ_n est fini pour tout n (voir proposition 2.1.3). Ainsi, comme $\Sigma_n : L_n \rightarrow \Lambda_n$ est injective, alors L_n est fini pour tout n . $\square$

Conjecture 4.1.4 ((Dyer et Hohlweg, 2015, Conjecture 2)). *La fonction $\Sigma_n : L_n \rightarrow \Lambda_n$ est bijective.*

Le prochain résultat détermine une certaine structure sur l'ensemble L_n , motivant ainsi la conjecture 4.1.6 présentée par la suite.

Théorème 4.1.5. *Soit (W, S) un système de Coxeter. Alors :*

- (i) L_n est clos par le supremum pour l'ordre faible ;
- (ii) l'ensemble des éléments bas L est une ombre de Garside finie de (W, S) .

Conjecture 4.1.6 ((Dyer et Hohlweg, 2015, Conjecture 1)). *L'ensemble L_n est une ombre de Garside pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Remarque 4.1.7. Nous invitons le lecteur à lire (Dyer et Hohlweg, 2015) pour l'ensemble des résultats concernant le lien entre les ombres de Garside et les ensembles d'éléments n -bas. En particulier, la conjecture 4.1.6 est démontrée dans certains cas comme les groupes de Coxeter finis et les groupes de Coxeter affines dont les arêtes dans le graphe de Coxeter sont étiquetées par 3 ou ∞ .

4.2 L'automate lié aux éléments n -bas : $\text{Aut}_{L_n}(W, S)$

On sait que L_n est clos par le supremum pour l'ordre faible grâce au théorème 4.1.5 et que $S \subseteq L_n$ par définition (voir remarque 4.1.2). On peut donc étudier la projection π_{L_n} définie comme pour une ombre de Garside :

$$\begin{aligned} \pi_{L_n} : W &\rightarrow L_n \\ w &\mapsto \bigvee \{g \in L_n \mid g \leq w\}. \end{aligned}$$

Puisque L_n est clos par le supremum pour l'ordre faible, on sait alors que π_{L_n} est bien définie. On réfère le lecteur à la définition 3.1.1 pour plus de détails.

La proposition suivante énonce quelques résultats relatifs à π_{L_n} .

Proposition 4.2.1 ((Hohlweg et al., 2015, Proposition 3.10)). *Soit (W, S) un système de Coxeter et considérons $L_n \subseteq W$ l'ensemble des éléments n -bas. Alors les énoncés suivants sont vérifiés :*

- (i) *la projection (voir § 3.1) π_{L_n} est bien définie ;*
- (ii) *la fonction $\pi_n : \Lambda_n \rightarrow L_n$ définie par $\pi_n(\Sigma_n(w)) := \pi_{L_n}(w)$ est bien définie et est surjective ;*
- (iii) *Si L_n est une ombre de Garside dans (W, S) , alors la fonction π_n est un morphisme d'automates totalement surjectif de l'automate n -canonique $\text{Aut}_n(W, S)$ dans l'automate lié aux éléments n -bas $\text{Aut}_{L_n}(W, S)$. En particulier, π_0 est un morphisme totalement surjectif de $\text{Aut}_0(W, S)$ dans $\text{Aut}_L(W, S)$.*

Exemple 4.2.2. En utilisant la proposition 4.2.1, on trouve un lien fort entre $\text{Aut}_0(W, S)$ et $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ lorsque W est fini. Pour ce faire, on débute par remarquer que, puisque W est fini, alors $L = \tilde{S} = W$ et $\Sigma = \Phi^+$. De plus, on voit que $|\Lambda| = |\{\Sigma(w) \mid w \in W\}| = |\{N(w) \mid w \in W\}| = |W|$ car N est injective. Ainsi, la

fonction $\Sigma = N : L = \tilde{S} = W \rightarrow \Lambda$ induit un morphisme bijectif entre $\text{Aut}_0(W, S)$ et $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$.

Supposons que L_n est une ombre de Garside. En vertu de la proposition 4.2.1(iii), l'automate n -canonique $\text{Aut}_n(W, S)$ se projette, par le morphisme totalement surjectif π_n , dans l'automate lié aux éléments n -bas $\text{Aut}_{L_n}(W, S)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, l'automate $\text{Aut}_{L_n}(W, S)$ se projette dans $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ par $\pi_{\tilde{S}}$ de façon totalement surjective. De ce fait, si la conjecture 4.1.6 est vérifiée, l'automate $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ est un quotient de tous les automates reconnaissant $\text{Red}(W, S)$ étudiés dans ce mémoire.

4.3 Structure automatique des groupes de Coxeter

Ce qui permet l'étude de la reconnaissance du langage $\text{Red}(W, S)$ est la *structure automatique* des groupes de Coxeter. Brink et Howlett montrent dans (Brink et Howlett, 1993, §3) que, pour un système de Coxeter (W, S) où S est fini, alors le groupe W est *automatique*.

Définition 4.3.1. Soit $W = \langle S \rangle$ un groupe engendré par un ensemble fini de générateurs ($|S| < \infty$). Une *structure automatique* sur W consiste en l'existence de deux automates, l'*accepteur* $\mathcal{A}$ et le *multiplicateur* $\mathcal{M}_x$ où $x \in S \cup \{e\}$, qui vérifient les conditions suivantes :

- (i) $\mathcal{A}$ reconnaît le langage des mots du groupe W ;
- (ii) pour $x \in S \cup \{e\}$ et $w_1, w_2 \in W$, $\mathcal{M}_x$ reconnaît le couple (w_1, w_2) si et seulement si $w_1x = w_2$ dans W .

On remarque que $\mathcal{M}_e$ reconnaît les égalités dans W . On dit que W est un *groupe automatique* s'il possède une structure automatique. Lorsque le groupe W est automatique, Epstein (Epstein *et al.*, 1992) donne une construction générale des

automates multiplicateurs $\mathcal{M}_x$, pour $x \in S$, en fonction de l'automate accepteur choisi $\mathcal{A}$. On adapte ici cette construction à un système de Coxeter (W, S) :

- les états sont les triplets (g_1, g_2, s) où g_1 et g_2 sont des états de $\mathcal{A}$ et $s \in S \cup \{e\}$;
- l'état initial est (g_0, g_0, e) où g_0 est l'état initial de $\mathcal{A}$;
- les états finaux de $\mathcal{M}_x$ sont les états de la forme (g_1, g_2, x) ;
- soient $t_1, t_2 \in S \cup \{e\}$, on a une transition de (g_1, g_2, s) par (t_1, t_2) vers l'état $(g_1 t_1, g_2 t_2, t_1 s t_2)$ si $g_1 t_1$ et $g_2 t_2$ sont des états finaux dans $\mathcal{A}$ et si $t_1 s t_2 \in S \cup \{e\}$.

On remarque tous les $\mathcal{M}_x$ construits à l'aide de la précédente méthode ont la même forme. La seule différence est donnée par l'ensemble des états finaux qui diffère pour chaque $x \in S \cup \{e\}$. En d'autres mots, pour un groupe automatique donné, cette méthode fournit un seul automate qui regroupe tous les automates multiplicateurs. L'exemple 4.3.2 et la figure 4.1 illustrent cette situation.

4.3.1 Les groupes de Coxeter sont automatiques

Pour un système de Coxeter (W, S) , Brink et Howlett (Brink et Howlett, 1993, §3), en plus de donner la construction d'un automate reconnaissant un sous-ensemble de $\text{Red}(W, S)$, donnent aussi une construction d'automates multiplicateurs. Ils démontrent par le fait même que les groupes de Coxeter sont automatiques. Toutefois, on rappelle que leur automate accepteur ne reconnaît pas tous les mots réduits et il en va de même pour leurs automates multiplicateurs. Nous avons étudié dans ce mémoire les constructions des automates n -canoniques et des automates liés à une ombre de Garside. Ces automates peuvent aussi servir d'automates accepteurs pour la structure automatique d'un groupe de Coxeter.

Exemple 4.3.2. Dans le présent exemple, on considère le système de Coxeter $(\mathcal{D}_\infty, \{s, t\})$ et on montre que $\mathcal{D}_\infty$ est automatique. Il nous faut alors construire

l'automate accepteur et les multiplicateurs. Pour l'automate accepteur, on prend l'automate $\text{Aut}_{\tilde{S}}(\mathcal{D}_{\infty}, \{s, t\})$ illustré à la figure 3.2. Pour les automates multiplicateurs, on utilise la construction de Epstein et on trouve l'automate de la figure 4.1. On note que cet automate illustre tous les automates multiplicateurs de $\mathcal{D}_{\infty}$: $\mathcal{M}_e$, $\mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}_t$. L'automate multiplicateur de $\mathcal{M}_x$, pour $x \in \{e, s, t\}$, est donné par l'automate de la figure 4.1 en prenant les états dont le triplet se termine par x comme états finaux. Par exemple, l'état (s, t, s) est un état final pour $\mathcal{M}_s$, mais pas pour $\mathcal{M}_t$.

Problème. Lors de recherches effectuées au printemps 2015 sur la structure automatique des groupes de Coxeter, je me suis penché sur la construction d'automates multiplicateurs pour tout système de Coxeter (W, S) . Sans toutefois trouver de solution, j'ai tenté d'utiliser les technologies relatives aux ombres de Garside afin de trouver une construction des automates multiplicateurs. Comme on le voit dans (Epstein *et al.*, 1992), il est possible de construire un automate qui regroupe tous les automates multiplicateurs. J'ai donc orienté mes recherches vers la construction d'un seul automate et non vers des constructions individuelles de chaque $\mathcal{M}_x$ pour $x \in S$. Certains problèmes sont à explorer : Est-il possible de trouver une construction des automates multiplicateurs en utilisant les ombres de Garside ? Si oui, pouvons-nous trouver des automates multiplicateurs minimaux avec ces constructions ? Pour finir, pouvons-nous trouver des applications des automates multiplicateurs propres aux systèmes de Coxeter ?

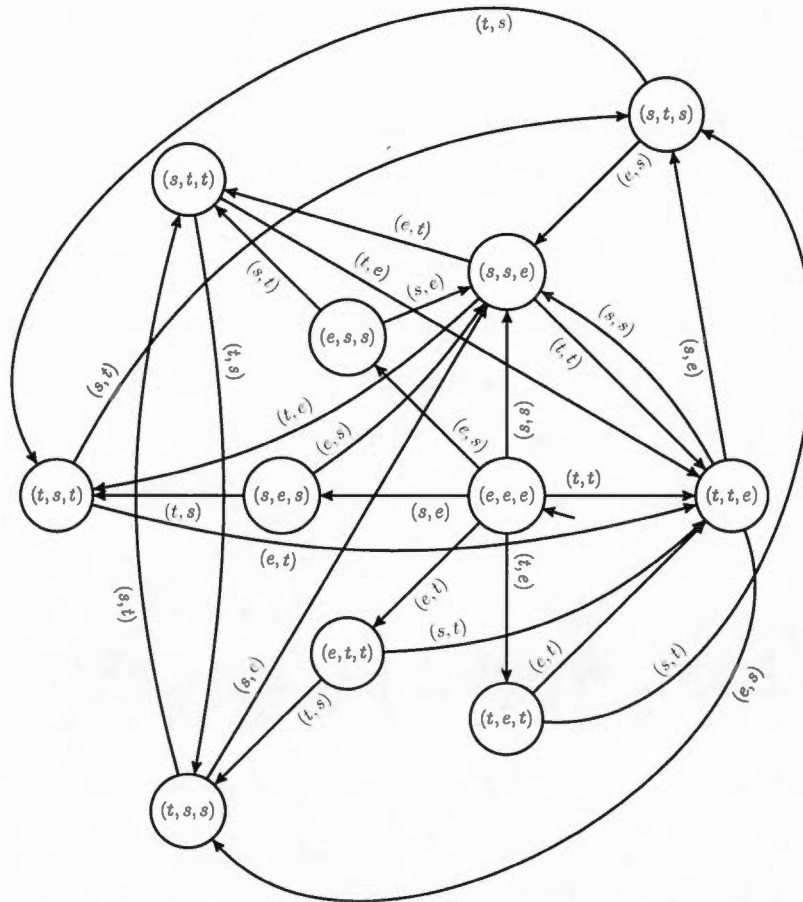


Figure 4.1 Automate multiplicateur de $\mathcal{D}_\infty$. Par exemple, dans $\mathcal{M}_t$, afin de reconnaître le couple (s, st) , on part de l'état initial (e, e, e) en empruntant les transitions indicées par (e, s) et (s, t) dans cet ordre. On se trouve donc à l'état (s, t, t) , qui est un état final de $\mathcal{M}_t$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié plusieurs constructions d'automates reconnaissant le langage des mots réduits d'un système de Coxeter (W, S) . Nous avons débuté en discutant des n -petites racines et des n -petits ensembles d'inversions qui fournissent les outils pour la construction de l'automate n -canonique. Nous invitons le lecteur à lire la preuve de la finitude de Σ_n de Fu (Fu, 2012, corollaire 3.9, théorème 3.8) pour compléter l'étude de l'automate n -canonique. Nous avons donné des conditions pour la minimalité de $\text{Aut}_0(W, S)$ dans le théorème 2.2.7 et nous avons illustré des exemples de l'automate canonique pour les groupes de types $\tilde{A}_2$ et $\tilde{C}_2$. Puisque l'automate canonique n'est pas minimal dans le cas du groupe de type $\tilde{C}_2$, nous avons abordé le sujet des ombres de Garside de (W, S) . Les ombres de Garside, introduites par Dyer et Hohlweg (Dyer et Hohlweg, 2015), apportent une approche combinatoire dans l'étude des groupes de Coxeter. Il fournissent aussi des outils aidant à la recherche d'une construction de l'automate minimal reconnaissant $\text{Red}(W, S)$. En utilisant la projection π pour induire une fonction de transition, nous avons donné la construction des automates liés à une ombre de Garside. Considérant la plus petite ombre de Garside $\tilde{S}$, nous avons énoncé la conjecture de Hohlweg, Nadeau et Williams (Hohlweg *et al.*, 2015, conjecture 1) sur la minimalité de $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$. Le chapitre 3 de ce mémoire s'est conclu par la première motivation derrière la vérification de cette conjecture : l'existence de morphismes d'automates totalement surjectifs de tous les automates liés à une ombre de Garside dans $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$. Au début du chapitre 4, la conjecture 4.1.6 de Dyer et Hohlweg sur les éléments n -bas (Dyer et Hohlweg, 2015, conjecture 1) a motivé la minimalité de $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$, car si elle est vérifiée, alors $\text{Aut}_{\tilde{S}}(W, S)$ est

aussi un quotient de $\text{Aut}_{L_n}(W, S)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons conclu ce mémoire avec la présentation de la structure automatique d'un groupe où nous avons posé la question suivante : "Est-il possible de trouver une construction des automates multiplicateurs utilisant les ombres de Garside?" Il serait intéressant d'étudier cette dernière question pour peut-être trouver des automates multiplicateurs minimaux.

RÉFÉRENCES

- Badouel, E., Boucheron, S., Dicky, A., Petit, A. et Santha, M. (2001). *Problèmes d'informatique fondamentale* : Collection Scopos. Springer. Récupéré de <https://books.google.ca/books?id=CCGdA17Y2RcC>
- Björner, A. et Brenti, F. (2005). *Combinatorics of Coxeter groups*. Springer Science+Business Media, Inc.
- Brink, B. (1998). The set of dominance-minimal roots. *Journal of algebra*, 371–412.
- Brink, B. et Howlett, R. B. (1993). A finiteness property and an automatic structure for Coxeter groups. *Mathematische Annalen*, 296(1), 179–190. Récupéré de <http://eudml.org/doc/165081>
- Coxeter, H. (1935). *The complete enumeration of finite groups of the form $r_i^2 = (r_i r_j)^{k_{ij}} = 1$* .
- Davis, M. W. et Shapiro, M. D. (1991). Coxeter groups are automatic. *Ohio state mathematical research institute preprints*.
- Dehornoy, P., Dyer, M. et Hohlweg, C. (2014). Garside families in Artin-Tits monoids and low elements in Coxeter groups.
- Dehornoy, P. et Paris, L. (1998). *Gaussian groups and Garside groups, two generalisations of Artin groups*, 569–604. Proc. London Math. Soc.
- Dyer, M. (2011). On the weak order of Coxeter groups. *arxiv:abs/1108.5557*, 37 pp.
- Dyer, M. et Hohlweg, C. (2015). Small roots, low elements and the weak order in Coxeter groups. *ArXiv e-prints*.
- Dyer, M., Hohlweg, C. et Ripoll, V. (2013). Imaginary cones and limit roots of infinite Coxeter groups. Récupéré de <http://arxiv.org/abs/1303.6710>
- Edgar, T. (2009). *Dominance and regularity in Coxeter group*. (Thèse de doctorat). University of Notre Dame, <http://etd.nd.edu/ETD-db/>.

- Epstein, D. B. A., Paterson, M. S., Cannon, J. W., Holt, D. F., Levy, S. V. et Thurston, W. P. (1992). *Word Processing in Groups*. Natick, MA, USA : A. K. Peters, Ltd.
- Eriksson, H. (1994). *Computational and combinatorial aspects of Coxeter groups*. (Thèse de doctorat). Kungliga Tekniska Högskolan.
- Fu, X. (2012). The dominance hierarchy in root systems of Coxeter groups. *School of Mathematics and Statistics University of Sydney*.
- Geck, M. et Pfeiffer, G. (2000). *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras*. London Mathematical Society monographs. Clarendon Press.
- Greene, C. (1984). *Combinatorics and Algebra*. Contemporary mathematics - American Mathematical Society. American Mathematical Society.
- Hohlweg, C. et Labbé, J.-P. (2015). On inversion sets and the weak order in Coxeter groups. *arXiv:1502.06926v2*.
- Hohlweg, C., Nadeau, P. et Williams, N. (2015). Automata, reduced words and Garside shadows in Coxeter groups.
- Hopcroft, J. E. et Ullman, J. D. (1979). *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison-Wesley Publishing.
- Humphreys, J. (1990). *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press.
- Nerode, A. (1958). Linear automaton transformations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 9(4), 541–544. Récupéré de <http://www.jstor.org/stable/2033204>